

# بررسی تأثیر شکل سطح مقطع فیبر و فاصله‌ی بین آنها بر توزیع تنش در مواد مرکب فیبری در حضور یک ترک

محمد شیشه‌ساز<sup>۱\*</sup>؛ مهدی ملکی<sup>۲</sup>

## چکیده

در این تحقیق تأثیر شکل سطح مقطع الیاف و فاصله‌ی بین آنها بر توزیع تنش در یک تک لایه‌ی مرکب بررسی شده است. تک لایه‌ی یاد شده تحت بارگذاری کششی  $P$  در راستای الیاف قرار داشته و حاوی ترکی متقارن است. دو تک لایه‌ی مرکب که در یکی الیاف دارای مقطع مثلثی شکل و دیگری دارای مقطع مستطیلی شکل، در نظر گرفته شده است. با استفاده از مدل اصلاح شده که در آن ماتریس علاوه بر بار برشی، نیروی کششی را نیز تحمل می‌کند معادلات دیفرانسیلی-تفاضلی تعادل استخراج شده و میدان‌های تغییر مکان و نیرو در تک لایه تعیین شده‌اند. مقایسه‌ی نتایج حاصل از مدل شیرلگ با نتایج حاصل از مدل اصلاح شده، ضعف مدل شیرلگ را در بررسی صحیح توزیع تنش نشان می‌دهد. در مدل اصلاح شده، با افزایش فاصله فیبرها، تمرکز تنش در الیاف و ماکزیمم تنش برشی در ماتریس کاهش می‌یابد. همچنین، فیبرهای مثلثی شکل تنش برشی در ماتریس را بیش از الیاف دایره‌ای شکل کاهش می‌دهند. با کاهش زاویه  $\theta$  مربوط به شکل، سطح مقطع الیاف مثلثی شکل، تنش برشی بدست آمده بیش از پیش کاهش یافته در حالی که ماکزیمم تنش کششی در الیاف ماکزیمم ثابت باقی می‌ماند. در صد کاهش در تنش برشی بین الیاف دایره‌ای و مثلثی شکل ( $\theta$  برابر  $30^\circ$ )، به ازاء کسری حجمی یک برابر  $32\%$  درصد است.

**کلمات کلیدی:** مواد مرکب، الیاف مثلثی شکل، تمرکز تنش، تنش برشی.

## *The Effect of Fiber Shape and Spacing on Stress Distribution in a Composite Monolayer with an Internal Crack*

M. Shishesaz; M. Maleki

### ABSTRACT

The effect of inter-fiber spacing and shape on stress distribution is studied in a composite monolayer. The lamina is subjected to an internal crack while loaded by a force  $P$  along the fibers at infinity. Two models are postulated. In the first, fibers have circular cross section while in the second, a triangular shape is considered. By direct application of modified shear – lag model, the differential equations of equilibrium are derived and solved for displacements and stress fields. The results show that the ordinary shear – lag model can not well predict the stress distribution within the lamina. The modified model shows a noticeable decrease in both types of stresses once fiber spacing and shape are changed. This reduction is more pronounced for triangular fibers where a decrease in  $\theta$  causes more reduction in maximum shear stresses and no change in fiber normal stresses. The reduction in peak shear stress appears to be 32 percent for volume fraction of one at  $\theta = 30^\circ$ .

**KEYWORDS:** Composite materials, triangular fibers, stress concentration, shear stress.

تاریخ دریافت مقاله: ۱۳۸۶/۱۱/۳۰

تاریخ اصلاحات مقاله: ۱۳۸۸/۲/۹

\*<sup>۱</sup> نویسنده مسئول و استاد گروه مهندسی مکانیک – دانشکده‌ی مهندسی – دانشگاه شهید چمران. Email: mshishesaz@scu.ac.ir

<sup>۲</sup> کارشناس ارشد مهندسی مکانیک – دانشکده‌ی مهندسی – دانشگاه شهید چمران. Email: mehdimalaki77@yahoo.com

وسط آن پاره شده بود، با استفاده از روش طیف نمایی رامان<sup>۱</sup>، تأثیر تنش تسلیم برشی ماتریس و همچنین فاصله‌ی بین فیبرها را بر ماکزیمم تمرکز تنش بررسی کردند. آنها نشان دادند که با افزایش فاصله‌ی بین فیبرها، تمرکز تنش به صورت نمائی کاهش می‌یابد.

بر خلاف آنکه تأثیر فاصله‌ی بین الیاف در مواد مرکبی با الیاف دایره‌ای شکل در تحقیقات زیادی بطور مستقیم یا غیر مستقیم بررسی شده است [۷-۱۳] اما در هر یک، روش گرفته شده یا مدل ارائه شده به گونه‌ای با مدل‌های دیگر متفاوت است. در مرجع [۸]، تمرکز تنش در الیاف کربنی (همراه با الیاف کولار به صورت ماده‌ی مرکب هیبرید) مورد بررسی قرار گرفته است. مرجع [۹]، توزیع تنش در تک لایه‌ی ساده‌ای را به کمک مدل اولیه‌ی شیرلگ بررسی می‌نماید. در مرجع [۱۰]، تمرکز تنش در اولین فیبر سالم مجاور با فیبر پاره شده‌ای که تماس آن در محدوده‌ی مشخصی با ماتریس اطراف آن قطع شده بررسی شده است. همچنین، در مرجع [۱۱] عبارتی برای محاسبه‌ی تمرکز تنش بر حسب جنس و خصوصیات ماده‌ی مرکب مورد نظر استخراج شده است. مراجع [۱۲] و [۱۳]، ضمن بررسی مدل اولیه‌ی شیرلگ، توزیع تنش را در اطراف یک ترک از طریق انجام آزمایشات و به صورت تئوری بررسی نموده‌اند.

در هیچ یک از تحقیقات یاد شده، مدل ریاضی قابل ذکری که بتوان بر اساس آن تأثیر تغییر شکل سطح مقطع الیاف را بر توزیع تنش‌های ایجاد شده در ماده‌ی مرکب بررسی نمود ارائه نشده است. با توجه به کاربرد و کارائی الیاف مثلثی شکل، و نیز خلاء موجود در مدل‌های ریاضی معتبر در این خصوص، تحقیقات انجام شده در این گزارش صورت گرفته است.

## ۲- روش تحلیل

تک لایه‌ی ماده مرکبی را که شامل فیبرهایی با مقطع مثلثی شکل بوده و در بینهایت تحت بار کششی P در راستای فیبرها قرار دارد در نظر گرفته (شکل ۱) و فرض می‌شود سطح مقطع فیبرها در تک لایه مانند یکی از شکل‌های ۲ و ۳ باشد. در این تحقیق، با استفاده از مدل اصلاح شده که در آن ماتریس علاوه بر نیروی برشی، بار کششی را نیز تحمل می‌کند [۲]، توزیع تنش در تک لایه‌هایی که دارای الیاف مثلثی یا دایره‌ای شکلند، در حضور یک ترک بررسی می‌شود.

به منظور بررسی صحیح توزیع تنش در مواد مرکب فیبری، به ویژه در حضور هر گونه حفره یا ترک داخلی، از روش ریز ساختار مکانیکی استفاده می‌شود که در آن ناهمگن بودن مواد مرکب همراه با روابط الاستیسیته در نظر گرفته می‌شوند.

هجیس [۱]، از اولین کسانی بود که در این زمینه به تحقیق پرداخته و مدل شیرلگ را در تحلیل مواد مرکب ارائه نمود. در این مدل فرض می‌شود که کل بار کششی توسط الیاف تحمل شده و ماتریس فقط بار برشی را متحمل می‌شود. در مدل وی، بار در امتداد الیاف بر تک لایه اعمال می‌شد. او نشان داد که ضریب تمرکز تنش در اولین فیبر سالم (در حضور یک ترک) از رابطه (۱-۱) بدست می‌آید.

$$K_r = \frac{(4) \times (6) \times (8) \times \dots \times (2r+2)}{(3) \times (5) \times (7) \times \dots \times (2r+1)} \quad (1-1)$$

رتوس و شیشه ساز [۲] با استفاده از تئوری پیچیده‌تر مدل اصلاح شده، توزیع تنش در مجاورت فیبرهای شکسته شده را با مقطع دایره‌ای شکل محاسبه نمودند. در این تئوری فرض می‌شود که ماتریس علاوه بر بار برشی بار کششی را نیز تحمل می‌کند.

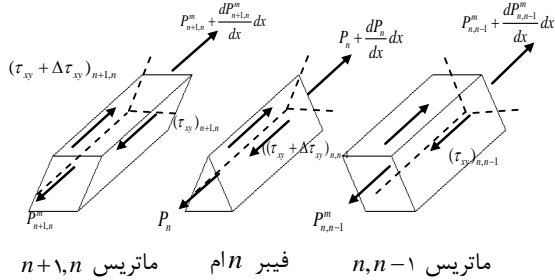
باند و همکارانش [۳] رفتار مکانیکی مواد مرکبی را که شامل فیبرهای شیشه با سطح مقطع دایره‌ای و مثلثی بود بطور آزمایشگاهی بررسی نمودند. نتایج آزمایشات عملی آنها نشان داد که استفاده از پلاستیک‌های تقویت شده با فیبرهای شیشه‌ای مثلثی شکل، در مقایسه با پلاستیک‌های تقویت شده با فیبرهای دایره‌ای، مقاومت کششی را ۲۰ درصد، مقاومت فشاری را ۴۰ درصد و مقاومت برشی بین لایه‌ای را به میزان ۵ درصد بهبود می‌بخشد.

پارک و همکارانش [۴]، تأثیر سطح مقطع فیبرهای C شکل، دایره‌ای تو پر و توخالی را بطور آزمایشگاهی بر مقاومت برشی بین لایه‌ای مواد مرکب بررسی نمودند.

کیم و پارک [۵]، نیز در تحقیقی مشابه با مرجع [۴]، با انجام آزمایشاتی بر فیبرهای کربنی نشان دادند که مقاومت خمشی و کششی مواد مرکبی با الیاف C شکل، نسبت به الیافی با مقطع دایره‌ای شکل، نزدیک به ۴۰ درصد افزایش می‌یابد.

آناگنوستوپولس و همکارانش [۶]، توزیع تنش برشی در ماتریس و تنش عمودی در امتداد الیاف را از طریق انجام آزمایشات روش طیف نمائی بررسی نموده و نتایج را با نتایج حاصل از شیرلگ مقایسه نمودند.

هیول و همکارانش [۷]، برای تک لایه‌ی مرکبی که فیبر



ماتریس  $n+1, n$     فیبر  $n$     ماتریس  $n, n-1$

شکل ۴: تعادل نیروها در المان حجمی مندرج در شکل ۱

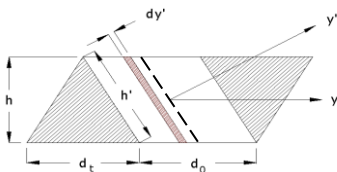
در معادله (۲-۵)، تغییر مکان مرکز لایه‌ی ماتریسی است که بین فیبر  $n$  ام و  $(n-1)$  ام قرار دارد.

با استفاده از مختصات تعریف شده در شکل ۵، ثابت‌های  $B_{n,n-1}$  و  $D_{n,n-1}$  بر حسب تغییر مکان فیبرها و وسط لایه‌ی ماتریس به شرح روابط (۲-۵) تا (۲-۷) محاسبه می‌شوند.

$$u_{n,n-1} = u_{n,n-1}^m \quad y' = 0 \quad (2-5)$$

$$u_{n,n-1} = u_n \quad y' = \frac{\sin\theta}{\gamma} d_o \quad (2-6)$$

$$u_{n,n-1} = u_{n-1} \quad y' = -\frac{\sin\theta}{\gamma} d \quad (2-7)$$



شکل ۵: مختصات تعریف شده جهت محاسبه نیروی ماتریس

بر اساس مقادیر بدست آمده برای ثابت‌های اشاره شده، عبارت تغییر مکان در ماتریس به صورت رابطه (۲-۸) است.

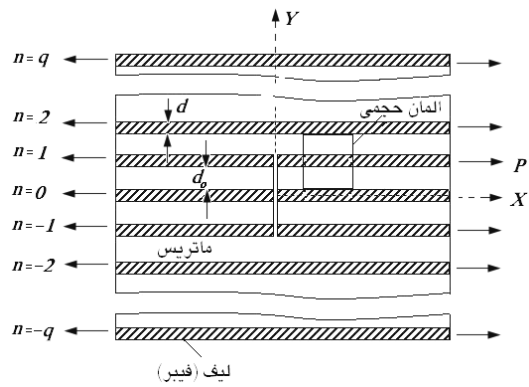
$$u_{n,n-1} = u_{n,n-1}^m + \left[ \frac{u_n - u_{n-1}}{d_o \sin\theta} \right] y' + \frac{\gamma}{(d_o \sin\theta)^2} \times (u_n + u_{n-1} - 2u_{n,n-1}^m) y'^2 \quad (2-8)$$

با استفاده از معادلات الاستیک خطی، نیروی کششی در لایه‌ی ماتریس  $n, n-1$  به صورت رابطه (۲-۹) است:

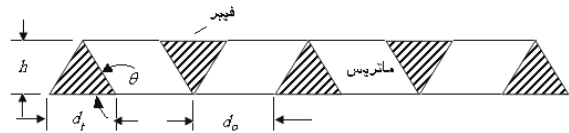
$$P_{n,n-1}^m = E_m A_m \left[ \frac{du_{n,n-1}^m}{dx} + \frac{1}{\epsilon} \left( \frac{de_{n,n-1}}{dx} \right) \right] \quad (2-9)$$

در رابطه یاد شده  $E_m$  مدول الاستیسیته‌ی ماتریس و  $A_m = hd_o$  است.

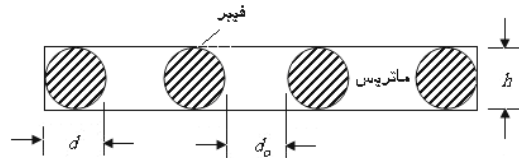
به منظور استخراج معادله‌ی تعادل در فیبر  $n$ ، فرض می‌شود تغییر مکان عرضی در امتداد فیبر یکنواخت است. بنابراین با استفاده از معادلات (۲-۳) و (۲-۸)، عبارت تنش



شکل ۱: تک لایه‌ی مرکب با یک ترک متقارن



شکل ۲: مقطع تک لایه ماده مرکبی با فیبرهای مثلثی شکل



شکل ۳: مقطع تک لایه‌ی ماده‌ی مرکبی با فیبرهای دایره‌ای شکل

به منظور محاسبه‌ی تنش در تک لایه‌ی مرکبی که در آن الیاف به صورت دایره‌ای یا مثلثی شکلند، ضخامت تک لایه برابر قطر الیاف منظور شده است. به علاوه، سطح مقطع فیبرهای مثلثی و دایره‌ای شکل برابر هم فرض شده و از تغییر شکل برشی در الیاف چشم پوشی شده است. پیوند بین الیاف و ماتریس کامل در نظر گرفته شده و شکاف موجود در تک لایه همانند حفزه‌ی دراز و باریکی عمود بر جهت الیاف منظور شده است [۱۴].

بر اساس شکل ۴، معادله‌ی تعادل نیرو در لایه‌ی ماتریس زیر فیبر  $n$  ام به صورت معادله (۲-۱۰) است:

$$\frac{dP_{n,n-1}^m}{dx} + \frac{1}{\sin\theta} h(\Delta\tau_{xy})_{n,n-1} = 0 \quad (2-10)$$

کمیت  $(\Delta\tau_{xy})_{n,n-1}$  برابر است با:

$$(\Delta\tau_{xy})_{n,n-1} = \int_{-d_o/\gamma}^{d_o/\gamma} \left( \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} \right)_{n,n-1} dy = \frac{\gamma G}{d_o} (e_{n,n-1}) \quad (2-11)$$

همچنین؛

$$e_{n,n-1} = u_n + u_{n-1} - 2u_{n,n-1}^m \quad (2-12)$$

به منظور تشریح نیروی  $P_{n,n-1}^m$  بر حسب تغییر مکان‌های فیبر و ماتریس  $n, n-1$  می‌توان تغییر مکان در این لایه از ماتریس را به شرح رابطه (۲-۱۳) نوشت:

$$u_{n,n-1} = u_{n,n-1}^m + B_{n,n-1} y' + D_{n,n-1} y'^2 \quad (2-13)$$

برشی در لایه‌ی ماتریس محصور شده بین فیبرهای  $n$  و  $(n-1)$  برابر است با:

$$(\tau_{xy})_{n,n-1} = G \left\{ \left( \frac{u_n - u_{n-1}}{d_o} \right) + \frac{f}{d_o} (e_{n,n-1}) y \right\} \quad (10-2)$$

به طریقی مشابه، در لایه‌ی ماتریسی که بالای فیبر  $n$  قرار دارد بدست می‌آید:

$$(\tau_{xy})_{n+1,n} = G \left\{ \left( \frac{u_{n+1} - u_n}{d_o} \right) + \frac{f}{d_o} (e_{n+1,n}) y \right\} \quad (11-2)$$

در این لایه، به ازاء  $y = -\frac{d_o}{2}$  (مجاور با فیبر  $n$ )، معادله‌ی (۲-۱۱) را می‌توان به صورت رابطه (۲-۱۲) نوشت.

$$(\tau_{xy})_{n+1,n|y=-d_o/2} = \frac{G}{d_o} (u_{n+1} - u_n - 2e_{n+1,n}) \quad (12-2)$$

در لایه‌ی ماتریسی که زیر فیبر  $n$  قرار دارد به ازاء  $y = \frac{d_o}{2}$  (مجاور با فیبر  $n$ )، معادله‌ی (۲-۱۰) را می‌توان به صورت رابطه (۲-۱۳) نوشت:

$$(\tau_{xy})_{n,n-1|y=d_o/2} = \frac{G}{d_o} (u_n - u_{n-1} - 2e_{n,n-1}) \quad (13-2)$$

با استفاده از معادله‌ی تعادل نیرو در فیبر بدست می‌آید:

$$E_f A_f \frac{d^2 u_n}{dx^2} + \frac{Gh}{d_o \sin \theta} (u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}) - \frac{2Gh}{d_o \sin \theta} (e_{n+1,n} + e_{n,n-1}) = 0 \quad (14-2)$$

با استفاده از معادلات (۲-۹) و (۲-۲)، معادله‌ی تعادل (۲-۱۳) برابر است با:

$$E_m A_m \left( \frac{d^2 u_{n,n-1}^m}{dx^2} + \frac{1}{\epsilon} \frac{d^2 e_{n,n-1}}{dx^2} \right) + \frac{2Gh}{d_o \sin \theta} (e_{n,n-1}) = 0 \quad (15-2)$$

با توجه به معادله‌ی (۲-۳)، رابطه‌ی (۲-۱۵) به صورت رابطه (۲-۱۶) خلاصه می‌شود.

$$\frac{E_m A_m}{2} \left( \frac{d^2 u_n}{dx^2} + \frac{d^2 u_{n-1}}{dx^2} - \frac{2}{3} \frac{d^2 e_{n,n-1}}{dx^2} \right) + \frac{2Gh}{d_o \sin \theta} (e_{n,n-1}) = 0 \quad (16-2)$$

$-q+1 \leq n \leq q+1$   
همچنین، برای دو فیبر  $q$  و  $-q$  که در لبه‌ها قرار دارند، معادلات تعادل به صورت (۲-۱۷) است:

$$E_f A_f \frac{d^2 u_n}{dx^2} + \frac{Gh}{d_o \sin \theta} (u_{n-1} - u_n) - \frac{2Gh}{d_o \sin \theta} (e_{n,n-1}) = 0 \quad (17-2)$$

$$E_f A_f \frac{d^2 u_n}{dx^2} + \frac{Gh}{d_o \sin \theta} (u_{n+1} - u_n) - \frac{2Gh}{d_o \sin \theta} (e_{n+1,n}) = 0 \quad (18-2)$$

معادلات (۲-۱۶) الی (۲-۱۸) معرف تغییر مکان فیبرها و ماتریس در یک تک لایه‌ی مرکبی است که الیاف آن به صورت مثلثی شکلند. تعداد کل فیبرها یعنی  $N$ ، برابر  $2q+1$  منظور شده

### ۳- بی بعد سازی معادلات

به منظور سهولت در حل معادلات بدست آمده، می‌توان ضمن معرفی روابط (۳-۱) تا (۳-۳)

$$K_r = (P_n)_{\max} = \frac{(p_n)_{\max}}{p} \quad (1-3)$$

$$\frac{1}{\eta} = \frac{V_m}{V_f} = \frac{d_o}{d} \quad (2-3)$$

$$\psi = \frac{1}{2} \left( \frac{A_m E_m}{A_f E_f} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{d_o E_m}{d E_f} \right) = \frac{1}{2\eta} \frac{E_m}{E_f} \quad (3-3)$$

و روابط مشابه دیگر، معادلات (۲-۱۴) الی (۲-۱۸) را به صورت بدون بعد تبدیل نمود:

$$\frac{d^2 U_n}{d\xi^2} + \frac{1}{\sin \theta} \eta (-U_{n+1} - \epsilon U_n - U_{n-1}) + \frac{f}{\sin \theta} \eta U_{n+1,n}^m + \frac{f}{\sin \theta} \eta U_{n,n-1}^m = 0 \quad (4-2)$$

$$\frac{\psi}{3} \left( \frac{d^2 U_n}{d\xi^2} + \frac{d^2 U_{n-1}}{d\xi^2} + \frac{2}{3} \frac{d^2 U_{n,n-1}^m}{d\xi^2} \right) + \frac{f}{\sin \theta} \eta (U_n + U_{n-1} - 2U_{n,n-1}^m) = 0 \quad (5-2)$$

$$\frac{d^2 U_n}{d\xi^2} + \frac{1}{\sin \theta} \eta (-2U_n - U_{n-1}) + \frac{f}{\sin \theta} \eta U_{n,n-1}^m = 0 \quad (6-2)$$

$$\frac{d^2 U_n}{d\xi^2} + \frac{1}{\sin \theta} \eta (-2U_n - U_{n-1}) + \frac{f}{\sin \theta} \eta U_{n,n-1}^m = 0 \quad (7-2)$$

در معادله‌ی (۲-۳)،  $V_m$  و  $V_f$  به ترتیب کسرهای حجمی فیبر و ماتریس می‌باشند. معادلات بدون بعد (۲-۴) الی (۲-۷) شامل  $2q+1$  معادله و  $2q+1$  مجهولند که پس از اعمال شرایط مرزی حل خواهند شد.

در تک لایه‌ی مرکبی با  $N$  فیبر که تعداد الیاف شکسته شده‌ی آن برابر  $r$  است، شرایط مرزی در آن به ازای  $\xi = 0$ ، به صورت رابطه (۳-۸) است.

$$\begin{aligned} U_n(0) &= 0 && \text{فیبرهای سالم} \\ P_n(0) &= 0 && \text{فیبرهای شکسته شده} \\ U_{n,n-1}^m(0) &= 0 && \text{ماتریس‌های سالم} \\ P_{n,n-1}^m(0) &= 0 && \text{ماتریس‌های بریده شده} \end{aligned} \quad (8-3)$$

### ۴- میدان‌های نیرو و تغییر مکان

شکل ماتریسی معادلات بدون بعد (۲-۱۱) الی (۲-۱۴) به صورت رابطه (۴-۱) است.

$$L_1 U'' - L_2 U = 0 \quad (1-4)$$



در جایی که:

$$[U]^T = [U_q^m, U_{q-1}^m, U_{q-2}^m, \dots, U_{-q+2}^m, U_{-q+1}^m, U_{-q}^m] \quad (2-4)$$

$$[U]^T = [U_q^m, U_{q-1}^m, U_{q-2}^m, \dots, U_{-q+2}^m, U_{-q+1}^m, U_{-q}^m] \quad (3-4)$$

ماتریس‌های  $L_1$  و  $L_2$ ، ماتریس‌های ضرایب می‌باشند. جواب معادله‌ی (1-4) به صورت رابطه (4-4) در نظر گرفته می‌شود:

$$U = R e^{\lambda \xi} \quad (4-4)$$

در جایی که  $U$  و  $R$  بردارهایی از درجه‌ی  $4q+1$  هستند. از جایگزینی معادله‌ی (4-4) در معادله‌ی (1-4) رابطه‌ی (5-4) حاصل می‌شود.

$$(L_1 - \lambda^T L_2) R = 0 \quad (5-4)$$

جواب قابل قبول معادله‌ی (5-4) به ازاء مقادیر معینی از  $\lambda$  است که باعث از بین رفتن دترمینان  $(L_1 - \lambda^T L_2)$  می‌شود. ریشه‌های معادله‌ی یاد شده به صورت رابطه (6-4) بیان می‌شوند:

$$\lambda_i = \pm b_1, \lambda_i = \pm b_2, \dots, \lambda_{4q+1} = \pm b_{4q+1} \quad (6-4)$$

در رابطه‌ی (6-4) کلیه‌ی  $b_i$ ها حقیقی هستند.

از آنجا که باید:

$$P_n \Big|_{\xi \rightarrow \infty} \rightarrow 1 \quad (7-4)$$

لذا، به منظور برآوردن معادله‌ی یاد شده، مقادیر مثبت  $\lambda_i$  قابل قبول نخواهند بود. عبارت  $U$  در این حالت به صورت رابطه (8-4) نوشته می‌شود:

$$U = C_1 R^{(1)} e^{-\lambda_1 \xi} + C_2 R^{(2)} e^{-\lambda_2 \xi} + \dots + C_{(4q+1)} R^{(4q+1)} e^{-\lambda_{(4q+1)} \xi} \quad (8-4)$$

در رابطه‌ی اشاره شده،  $U$  شامل جابجائی‌های فیبر و ماتریس است. به علاوه، کلیه‌ی مقادیر  $\lambda_i$ ها منفی بوده و  $R$  بردار مشخصه‌ی متناظر با ریشه‌ی  $\lambda_i$  است. با توجه به روابط یاد شده، جابجایی در هر فیبر به صورت رابطه (9-4) نوشته می‌شود.

$$U_n = \xi + \sum_{i=1}^{4q+1} C_i R_{(q-n)+1}^{(i)} e^{\lambda_i \xi} \quad (9-4)$$

$$n = q, q-1, \dots, -1, \dots, -q$$

به طریقی مشابه، جابجایی هر لایه از ماتریس برابر است با:

$$U_{n,n-1}^m = \xi + \sum_{i=1}^{4q+1} C_i R_{(q+1-n)}^{(i)} e^{\lambda_i \xi} \quad (10-4)$$

$$n = q, q-1, \dots, -1, \dots, -q+1$$

از مشتق گیری معادله‌ی (9-4) نیروی عمودی در هر فیبر (ضریب تمرکز تنش) به صورت رابطه (11-4) بدست می‌آید.

$$P_n = 1 + \sum_{i=1}^{4q+1} C_i \lambda_i R_{(q-n)+1}^{(i)} e^{\lambda_i \xi} \quad (11-4)$$

$$n = q, q-1, \dots, -1, \dots, -q$$

همچنین نیروی عمودی در ماتریس  $(n, n-1)$  به صورت رابطه (12-4) است:

$$P_{n,n-1}^m = \nu \nu \left\{ 1 + \sum_{i=1}^{4q+1} \left[ \frac{\nu}{\nu} R_{(q+1-n)}^{(i)} + \frac{1}{\nu} (R_{(q-n)+1}^{(i)} + R_{(q-n+1)+1}^{(i)}) \right] C_i \lambda_i e^{\lambda_i \xi} \right\} \quad (12-4)$$

$$-q+1 \leq n \leq q$$

بر اساس شرایط مرزی (2-3)،  $4q+1$  معادله برای تعیین  $4q+1$  ثابت مجهول (یعنی  $C_i$ ) بدست می‌آید. به علاوه، عبارت تنش برشی بدون بعد  $S_{xy}$  در ماتریس به صورت رابطه (13-4) خواهد بود:

$$S_{xy} = \eta \{ (U_n - U_{n-1}) + 2\mu(U_n + U_{n-1} - 2U_{n,n-1}^m) \} \quad (13-4)$$

در معادله (14-4) پارامتر  $\mu$  برابر است با:

$$\mu = \frac{\nu y}{d_0} \quad -1 \leq \mu \leq 1 \quad (14-4)$$

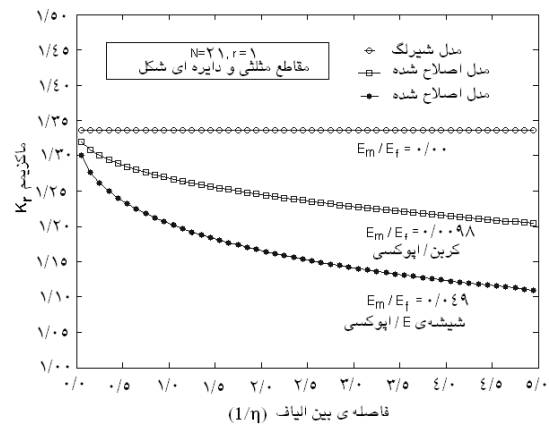
## ۵- نتایج و بحث

مواد مرکب مورد نظر در این تحقیق از جنس شیشه/اپوکسی و کربن/ اپوکسی در نظر گرفته شده‌اند. مدول الاستیسیته‌ی اپوکسی برابر  $3/45$  مگاپاسکال و برای شیشه و کربن بترتیب مدول‌های الاستیسیته‌ای برابر با  $70$  مگاپاسکال و  $345$  مگاپاسکال در نظر گرفته شده است. پارامتر  $K_r$  در نمودارهای مربوطه معرف بیشترین تمرکز تنش در تک لایه است که در اولین فیبر سالم نزدیک به نوک ترک رخ می‌دهد. بیشترین تنش برشی  $S_{xy}$ ، در لایه‌ای از ماتریس حاصل می‌شود که مابین آخرین فیبر بریده شده و اولین فیبر سالم قرار دارد.

شکل 6 نمایانگر تغییرات ماکزیمم تمرکز تنش در اولین فیبر مجاور به نوک ترک است. بر اساس نتایج بدست آمده، ملاحظه می‌شود که مدل شیرلگ نمی‌تواند تغییرات ناشی از فاصله‌ی بین الیاف را بر تمرکز تنش پیش بینی نماید در حالی که مدل اصلاح شده کاهش را به صورت نمایی به ازای افزایش فاصله‌ی بین الیاف نشان می‌دهد. به ازاء جمیع مقادیر  $\eta$ ، تمرکز تنش در اولین فیبر سالم (و فیبرهای دیگر) در مواد مرکبی که دارای الیاف مقاومتری هستند بیش از مواد مشابه با الیاف ضعیف‌تر است.

بر اساس نتایج بدست آمده، با افزایش فاصله‌ی بین الیاف، از  $0/05$  به  $5$ ، تمرکز تنش در الیاف شیشه و کربن به ترتیب به میزان  $15\%$  و  $9\%$  کاهش می‌یابد. میزان کاهش‌های یاد شده در الیاف دایره‌ای شکل مشابه الیاف مثلثی شکل است. همچنین،

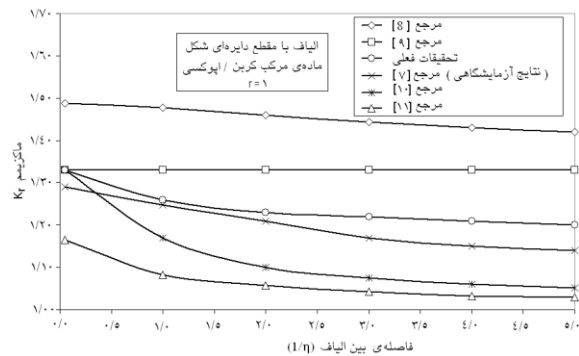
نتایج حاصل در این نمودار حاکی از آن است که با کاهش نسبت  $E_m/E_f$  نتایج به سمت مدل شیرلگ نزدیکتر می‌شوند.



شکل ۶: تغییرات ماکزیمم تمرکز تنش برحسب فاصله بین فیبرها برای دو ماده‌ی مرکب متفاوت

در شکل ۷ نتایج این تحقیق با نتایج دیگر محققین، به ازاء فواصل مختلف بین الیاف، مقایسه شده‌اند. الیاف منظور شده در این نمودار از جنس کربن و ماتریس از جنس اپوکسی است. نتایج بدست آمده در مرجع [۷]، ناشی از اندازه گیری تمرکز تنش در الیاف دایره‌ای شکلی است که بر اساس آزمایشات مبتنی بر روش طیف نمائی بدست آمده است. همانطور که ملاحظه می‌شود نتایج حاصل از مدل ارائه شده در این تحقیق (با سطح مقطع دایره‌ای شکل) بسیار نزدیک به نتایج آزمایشگاهی مرجع [۷] بوده و در مقایسه با نتایج دیگر محققین، از نزدیکی بیشتری به این نتایج برخوردارند. این امر دلالت بر کارآئی مدل ارائه شده می‌نماید.

درصد اختلاف بین مقادیر بدست آمده و نتایج آزمایشگاهی یاد شده، به ازاء فواصل مختلف بین الیاف، در جدول ۵-۱ نشان داده شده است.



شکل ۷: مقایسه‌ی نتایج حاصل از مدل ارائه شده با نتایج دیگر

شکل ۸ معرف اثر فاصله‌ی بین الیاف بر حداکثر تنش برشی در تک لایه است. این اثر برای دو ماده‌ی مرکب مختلف با الیاف

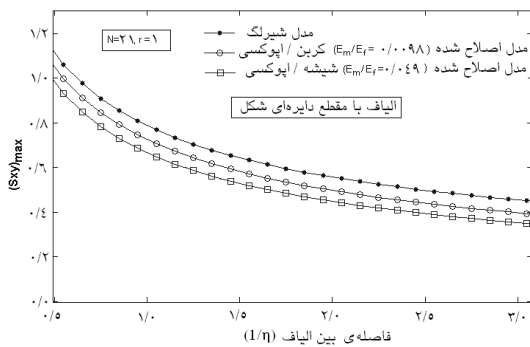
دایره‌ای شکل ترسیم شده است. همانطور که ملاحظه می‌شود، با افزایش فاصله‌ی بین الیاف، حداکثر تنش برشی در تک لایه به میزان قابل توجهی کاهش می‌یابد به قسمی که با افزایش  $\frac{1}{\eta}$  از  $\frac{1}{\eta}$  به  $\frac{3}{5}$ ، درصد کاهش در هر یک از تک لایه‌های شیشه/اپوکسی و کربن/اپوکسی، برابر ۷۵٪ است.

جدول ۵-۱: درصد اختلاف بین نتایج بدست آمده در این تحقیق با

نتایج آزمایشگاهی مرجع [۷]

$1/\eta$	۰/۰۵	۱	۲	۳	۴	۵
درصد اختلاف	۳	۰/۵	۰/۸	۴/۷	۶/۱	۷/۱

چنانچه این دو تک لایه بر اساس مدل شیرلگ تحلیل شوند، تنش برشی بدست آمده بیش از مقادیر مشابهی است که از مدل اصلاح شده بدست می‌آید. این مسئله، ضعف مدل اولیه‌ی شیرلگ را در بررسی تنش در این دو ماده (و ماده‌های مشابه دیگر) نشان می‌دهد.



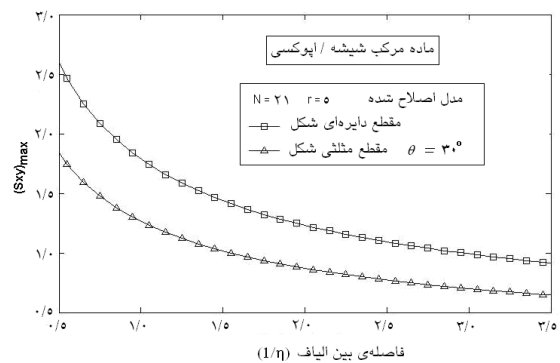
شکل ۸: تغییرات ماکزیمم تنش برشی برحسب فاصله بین فیبرها برای دو ماده‌ی مرکب متفاوت

مقادیر حداکثر تنش برشی در لایه‌ی محصور کننده‌ی نوک ترک در شکل ۹ نشان داده شده‌اند. بر اساس این نتایج، تنش برشی در لایه‌ی ماتریسی که الیاف آن مثلثی شکلند کمتر از تنش برشی در الیاف دایره‌ای شکل است. تفاوت بین نتایج حاصل از دو سطح مقطع برابر ۳۰٪ در  $\frac{1}{\eta} = ۰/۵$  و ۲۲٪ در

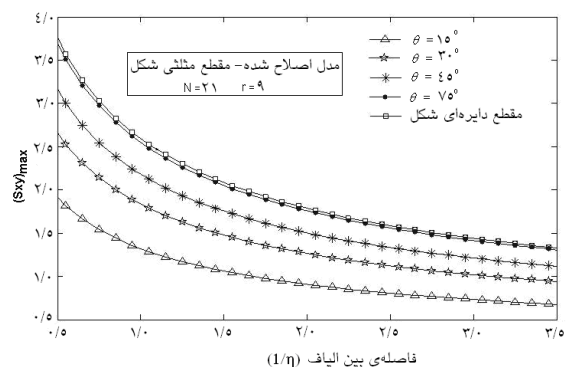
$$\frac{1}{\eta} = \frac{3}{5} \text{ است.}$$

اثر زاویه‌ی  $\theta$  در سطح مقطع الیاف مثلثی شکل بر ماکزیمم تنش برشی در ماتریس، در شکل ۱۰ نشان داده شده است. بر اساس نتایج بدست آمده، با افزایش زاویه‌ی  $\theta$ ، ماکزیمم تنش برشی در ماتریس به میزان قابل توجهی افزایش می‌یابد. همانطور که در این شکل ملاحظه می‌شود به ازاء مقادیر  $\theta$  نزدیک به ۹۰ درجه، نتایج بدست آمده بر نتایج مشابه در مقاطع دایره‌ای شکل منطبق می‌شوند. به ازای  $\frac{1}{\eta} = ۰/۵$ ، درصد کاهش در تمرکز تنش برشی در ماتریس، بین الیاف دایره‌ای

شکل و مثلثی شکل (با  $\theta = 45^\circ$ ) نزدیک به ۱۵٪ است. با کاهش  $\theta$  به ۳۰ درجه، این مقدار به میزان ۳۰٪ افزایش می‌یابد.



شکل ۹: تغییرات ماکزیم تنش برشی در ماتریس برحسب فاصله بین فیبرها برای الیافی با مقاطع دایره‌ای و مثلثی شکل



شکل ۱۰: تأثیر زاویه  $\theta$  بر ماکزیم تنش برشی در تک لایه ای با الیاف مثلثی شکل

## ۶- نتیجه گیری

بر اساس نتایج بدست آمده نتیجه می‌شود که:

- ۱- بر خلاف مدل اصلاح شده، مدل اولیه‌ی شیرلگ نمی‌تواند بطور صحیح فاصله‌ی بین الیاف را بر توزیع تنش در مواد مرکبی با الیاف دایره‌ای یا مثلثی شکل پیش بینی نماید.
- ۲- تغییر شکل در سطح مقطع الیاف تأثیری بر تنش کششی ایجاد شده در آنها ندارد. این رفتار به ازاء جمیع مقادیر کسر حجمی الیاف (فاصله‌ی بین فیبرها) درست است.
- ۳- تمرکز تنش در الیاف بر اساس مدل اصلاح شده در این تحقیق برابری بسیار خوبی را با نتایج آزمایشگاهی از خود نشان می‌دهد به قسمی که به ازاء کسر حجمی ۱ ( $\eta = 1$ )، تفاوت بین مقادیر بدست آمده ۵/۰٪ است.
- ۴- تنش برشی بدست آمده از مدل اصلاح شده در ماده‌ی مرکبی از جنس شیشه/ اپوکسی یا کربن/ اپوکسی، کمتر از مقادیر مشابهی است که از مدل اولیه‌ی شیرلگ حاصل می‌شوند.
- ۵- تنش برشی بوجود آمده در ماتریس به میزان قابل

توجهی با افزایش فاصله‌ی بین فیبرها کاهش می‌یابد. در الیاف مثلثی شکل از جنس شیشه/ اپوکسی، با افزایش  $\frac{1}{\eta}$  از ۰/۵ به ۳، این کاهش نزدیک به ۶۸٪ است.

۶- با تغییر شکل سطح مقطع الیاف از دایره‌ای به مثلثی شکل، تنش برشی در ماتریس به میزان قابل توجهی کاهش می‌یابد. درصد کاهش به ازاء  $\eta = 1$  و  $\theta = 30^\circ$  برابر ۳۲٪ است.

۷- با کاهش زاویه‌ی  $\theta$  در سطح مقطع الیاف مثلثی شکل، تنش برشی در ماتریس بیش از پیش کاهش می‌یابد.

## ۷- فهرست علائم

$A$	سطح مقطع کل یک تک لایه ماده مرکب
$A_f$	سطح مقطع فیبر در تک لایه ماده مرکب
$A_m$	سطح مقطع ماتریس در تک لایه ماده مرکب
$B_{n,n-1}$	ثابت‌های تعریف شده در معادله‌ی (۲-۴)
$D_{n,n-1}$	
$C_i$	ضرایب معادله‌ی (۴-۸)
$d$	قطر هر یک از الیاف دایره‌ای شکل
$d_o$	فاصله‌ی بین الیاف
$d_t$	قاعده‌ی فیبر در الیاف مثلثی شکل
$E_f$	مدول الاستیسیته‌ی فیبر
$E_m$	مدول الاستیسیته‌ی ماتریس
$e_{n,n-1}$	پارامتر تعریف شده در معادله (۲-۳)
$G$	مدول برشی ماتریس
$h$	ضخامت تک لایه
$K_r$	ضریب تمرکز تنش در فیبر
$L_s$	ماتریس ضرایب
$L_r$	ماتریس ضرایب
$n$	شماره‌ی مشخصه‌ی هر فیبر
$p$	بار عمودی اعمال شده بر تک لایه
$p_n, P_n$	نیروی کششی و پارامتر بدون بعد آن در فیبر
$p_{n,n-1}^m, P_{n,n-1}^m$	نیروی کششی و پارامتر بدون بعد آن در لایه‌ی ماتریس
$q$	عدد صحیح
$R$	بردار ویژه
$r$	تعداد فیبرهای شکسته شده
$S_{xy}$	تنش برشی بدون بعد در ماتریس
$u_n, U_n$	جابجایی و جابجایی بدون بعد در فیبر
$u_{n,n-1}, U_{n,n-1}$	جابجایی و جابجایی بدون بعد در ماتریس

$\mu$	مختصه‌ی بدون بعد (معادله‌ی (۴-۱۳))	$u_{n,n-1}^m, U_{n,n-1}^m$	جابجایی (و کمیت بدون بعد آن) در مرکز لایه‌ی ماتریس
$\theta$	زاویه بین هر ساق و قاعده در الیاف مثلثی	شکل	کسرهای حجمی فیبر و ماتریس
$(\tau_{xy})_{n,n-1}$	تنش برشی در لایه‌ی ماتریس $n, n-1$	$V_m, V_f$	مختصه‌ی طولی در امتداد جهت فیبرها
$\xi$	مختصه‌ی طولی بدون بعد در امتداد الیاف	$x$	مختصه‌ی طولی در امتداد عرض تک لایه
$\psi$	پارامتر بدون بعد در معادله‌ی (۳-۳)	$y$	مختصه‌ی طولی عمود بر سطح جانبی الیاف
		$y'$	پارامتر بدون بعد در معادله‌ی (۲-۳)
		$\eta$	مقادیر ویژه
		$\lambda_i$	

## ۸- مراجع

- Grubb David T., Li Zong-Fu, and S. Leigh Phoenix, "Measurement of Stress Concentration in a Fiber Adjacent to a Fiber Break in a Model Composite", Composite Science and Technology, Vol.53, pp. 237-249, 1995. [۸]
- Hedgepeth J. H., and Van Dyke P., "Local Stress Concentration in Imperfect Filamentary Composite Materials", Journal of Composite Materials, Vol. 1, P. 294, 1967. [۹]
- Zhou X.-F., Wagner H.D., "Stress Concentrations Caused by Fiber Failure in Two-Dimensional Composites", Composites Science and Technology, Vol. 59, pp. 1063-1071, 1999. [۱۰]
- Wagner H. D. and Eitan A., "Stress Concentration Factors in Two-Dimensional Composites: Effects of Material and Geometrical Parameters", Composite Science and Technology, Vol. 46, pp. 353-362, 1993. [۱۱]
- Sirivedin S., Fenner D.N., Nath R.B., Galiot C., "Effects of Inter-Fiber Spacing and Matrix Cracks on Stress Amplification Factors in Carbon-Fiber/Epoxy Matrix Composites. Part I: Planar Array of Fibers", Composites: Part A, Vol. 34, pp. 1227-1234, 2003. [۱۲]
- Sirivedin S., Fenner D.N., Nath R.B., Galiot C., "Effects of Inter-Fiber Spacing and Matrix Cracks on Stress Amplification Factors in Carbon-Fiber/Epoxy Matrix Composites. Part II: Hexagonal Array of Fibers", Composites: Part A, Vol. 37, pp. 1936-1943, 2006. [۱۳]
- Shishesaz, M., "The Effect of Mechanical and Physical Properties of Polymers on Stress Amplification Factor in Composites with an Internal Damage.", Iranian Journal of Polymers, Vol. 14, No. 5, Issue No. 59, May 2005. [۱۴]
- Hedgepeth, J. M., "Stress concentration in a filamentary structure", NASA TN D-882, 1961. [۱۵]
- Rossetoss, J. N. and Shishesaz, M., "Stress concentration in fiber composite sheets including matrix extension", Journal of Applied Mechanics, Vol. 54, p. 723, 1987. [۱۶]
- Bond, I., Hucker, M., Wear, P., Bleay, S. and Haq, S., "Mechanical behavior of circular and triangular glass fibers and their composites", Composite Science and Technology, Vol. 62, p. 1051, 2002. [۱۷]
- Park, S. J., Seo, M. K. and Shim, H. B., "Effect of Fiber Shapes on Physical Characteristics of Non-Circular Carbon Fibers-Reinforced Composites", Material Science and Engineering, A352, p. 34, 2003. [۱۸]
- Kim, T. J. and Park, C. K., "Flexural and Tensile Strength Developments of Various Shape Carbon Fiber-Reinforced Lightweight Cementitious Composites", Cement and Concrete Research, Vol. 28 No. 7, p. 955, 1998. [۱۹]
- Anagnostopoulos G., Parthenios J., Andreopoulos A.G., Galiotis C., "An Experimental and Theoretical Study of the Stress Transfer Problem in Fibrous Composites", Acta Materialia, Vol. 53, pp. 4173-4183, 2005. [۲۰]
- Heuvel van den, P.W.J. Peijs T., Young R.J., "Failure Phenomena in Two-Dimensional Multi-Fiber Microcomposites. Part 4: a Raman Spectroscopic Study on the Influence of the Matrix Yield Stress on Stress Concentrations", Journal of Composites: Part A, Vol. 31, pp. 165-171, 2000. [۲۱]

## ۹- زیر نویس

<sup>۱</sup> Laser Raman microscopy