

استفاده از تئوری کلاسیک صفحات در تحلیل ارتعاشات صفحه تابعی دایروی کوپل شده با لایه های پیزوالکتریک

فرزاد ابراهیمی^۱؛ عباس راستگو^۲

چکیده

تحلیل ارتعاشی صفحات دایروی نازک از جنس مواد تابعی (FGM) کوپل شده با لایه های پیزوالکتریک براساس تئوری صفحات کرشلف ارائه شده است. مشخصات صفحه تابعی مطابق تابع توانی از جزء حجمی مواد تشکیل دهنده در راستای ضخامت صفحه و میدان پتانسیل الکتریکی با یک تابع درجه دو طوری مدل شده است که معادله ماکسول برآورده شود. معادلات دیفرانسیل حرکت برای اولین بار به صورت تحلیلی برای صفحه دایروی با تکیه گاه گیردار حل شده است. درستی روش تحلیلی ارائه شده از طریق مقایسه نتایج با تحقیقات مشابه و نیز با نتایج روش المان محدود سه بعدی تایید شده است. در مطالعات عددی تاکید اصلی، بررسی اثر تغییر شاخص گرادیان صفحه تابعی بر روی ارتعاشات سازه مرکب می باشد. پاسخهای تحلیلی و نتایج حاصل مدل ساده شده ای برای مطالعه پارامتری و درک مشخصات ارتعاشی صفحات دایروی ایزوتروپ کوپل با لایه های پیزوالکتریک ارائه می دهد.

کلمات کلیدی

مواد تابعی، لایه های پیزوالکتریک، تئوری صفحات کرشلف

Vibration Analysis of Thin Circular FGM Plate Coupled with Piezoelectric Layers

Farzad Ebrahimi , Abbas Rastgo

ABSTRACT

Analytical investigation of the vibration behavior of thin circular functionally graded (FG) plates integrated with two uniformly distributed piezoelectric actuator layers based on the classical plate theory (CPT) is presented. The material properties of the FG substrate plate are assumed to be graded in the thickness direction according to the power-law distribution. The differential equations of motion are solved analytically for clamped edge boundary condition of the plate. The detailed mathematical derivations are presented and numerical investigations are performed while the emphasis is placed on investigating the effect of varying the gradient index of FG plate on the vibration characteristics of the structure.

KEYWORDS

Functionally graded material, Piezoelectric, Circular plate, Classical plate theory

^۱ دانشجوی دکتری دانشکده مهندسی مکانیک - پردیس دانشکده های فنی - دانشگاه تهران Email: febrahimi@ut.ac.ir

^۲ دانشیار دانشکده مکانیک - پردیس دانشکده های فنی - دانشگاه تهران Email: arastgo@ut.ac.ir



اشاره شده بر روی صفحات تابعی با شکل مستطیلی صورت گرفته است. از مقدمه ارائه شده و بررسی تحقیقات صورت گرفته در این حوزه دیده می‌شود که تاکنون تحقیقی برای بررسی و مطالعه رفتار ارتعاشی و مشخصات دینامیکی صفحه حلقوی یا دایروی تابعی کوپل شده با لایه های پیزوالکتریک ارائه نشده است.

در همین راستا، تحقیق حاضر به دنبال یافتن پاسخی تحلیلی برای رفتار ارتعاشی صفحه دایروی نازک ساخته شده از مواد تابعی به همراه دو لایه بر مبنای تئوری کلاسیک تغییر شکل صفحات می‌باشد. معادله دیفرانسیل حرکت به صورت تحلیلی حل شده است. علاوه بر نتایج عددی مربوطه، روش بدست آوردن معادلات نیز به صورت کامل ارائه شده است. کاربرد مدل پیشنهاد شده با مطالعه اثرات مربوط به تغییر شاخص گرادیان صفحه تابعی بر روی مشخصات ارتعاشی سازه بررسی شده است. درستی و دقت نتایج حاصل از روش پیشنهادی با مقایسه نتایج آن با نتایج موجود در تحقیقات مشابه برای صفحه فلزی و همچنین با مقایسه آن با نتایج حاصل از تحلیل سه بعدی اجزاء محدود اثبات شده است.

۲- مواد تابعی و پیزوالکتریک

مدلهای تحلیلی و محاسباتی مختلفی برای توزیع مکانی خواص فیزیکی و مکانیکی مواد تابعی پیشنهاد شده است. در این تحقیق از تابع توانی ساده جزء حجمی مواد تشکیل دهنده در راستای ضخامت صفحه استفاده خواهد شد. لذا برای ماده تابعی ساخته شده از مخلوط فلز و سرامیک رابطه (۱) برقرار است:

$$V_m + V_c = 1 \quad (1)$$

که در آن V_m و V_c به ترتیب جزء حجمی سرامیک و فلز می‌باشند. همچنین تغییرات V_c در راستای ضخامت صفحه به صورت رابطه (۲) بیان می‌گردد: [۱۰]

$$V_c = (z/2h_f + 1/2)^g, \quad g \geq 0 \quad (2)$$

که در آن $2h_f$ ضخامت صفحه تابعی و g شاخص گرادیان این ماده می‌باشد. فرض می‌شود که مدول الاستیسیته E و چگالی ρ ماده تابعی در راستای ضخامت صفحه و بر مبنای رابطه (۳) تغییر کند در حالیکه نسبت پواسون ν در راستای ضخامت ثابت فرض می‌گردد [۱۱].

$$\begin{aligned} E(z) &= (E_c - E_m)V_c(z) + E_m \\ \rho(z) &= (\rho_c - \rho_m)V_c(z) + \rho_m \\ \nu(z) &= \nu \end{aligned} \quad (3)$$

که در آن زیرنویس های m و c به ترتیب به اجزاء فلز و سرامیک مربوط می‌شوند. پس از جاگذاری از معادله (۲) در

به تازگی رده جدیدی از مواد تحت عنوان مواد تابعی (FGM) که در آنها خواص ماده به صورت تابعی پیوسته نسبت به مکان و بخصوص در راستای ضخامت سازه تغییر می‌کند، معرفی شده اند. این مواد از دیدگاه میکروسکوپی غیر همگن بوده و معمولاً از ترکیب فلز و سرامیک ساخته می‌شوند. مواد مرکب لایه‌ای جهت استفاده در سازه های پیشرفته طراحی می‌شوند اما تغییرات زیاد بین خواص هر لایه در سطح تماس دو لایه مجاور، باعث ایجاد تنشهای برشی بین لایه‌ای بسیار بزرگ و در نتیجه منجر به پدیده جدایش لایه‌های می‌گردد. این نقطه ضعف با ایجاد تغییرات پیوسته در خواص مواد همانند آنچه در مواد تابعی دیده می‌شود برطرف می‌گردد. بنابراین مواد تابعی قابلیت استفاده در سازه های پیشرفته را خواهند داشت. تحقیقات گسترده‌ای در زمینه‌های مختلف از جمله تحلیل کمانش [۱]، تحلیل دقیق تنش [۲]، تحلیل دینامیکی [۳] و تحلیل غیرخطی ترموالاستیک سازه های ساخته شده از مواد تابعی [۴] گزارش شده است. همچنین در سالهای اخیر به علت قابلیت و رواج استفاده از مواد پیزوالکتریک به عنوان حسگر یا محرک، مطالعه و بررسی این مواد که بر روی سازه‌های مختلف تعبیه شده اند مورد اقبال بسیار زیاد پژوهشگران قرار گرفته است. در این راستا، برای بهره برداری بهینه از خواص حسگری/محرکی این مواد، باید اندرکنش بین سازه اصلی و ماده پیزوالکتریک به خوبی شناخته شود. به تازگی مطالعاتی بر روی قابلیت‌های مختلف مواد پیزوالکتریک برای نصب بر روی صفحات ساخته شده از مواد تابعی نیز ارائه شده است. به عنوان نمونه اوتاوا و تانگوا [۵] صفحه مستطیلی تابعی به همراه لایه پیزوالکتریک تحت بار گذاری گرمایی گذرا را مورد بررسی قرار داده‌اند. یک حل سه بعدی نیز برای صفحه مستطیلی تابعی کوپل شده با لایه محرک پیزوالکتریک توسط ردی و چنگ [۶] با استفاده از روشهای ماتریس انتقال و گسترش مجانبی پیشنهاد شده است. وانگ و نودا [۷] یک سازه هوشمند مرکب از سه لایه شامل یک لایه فلزی و یک لایه پیزوالکتریک و یک لایه تابعی بین آنها را تحلیل کرده اند. در حالیکه یک مدل اجزاء محدود برای مطالعه کنترل شکل و ارتعاشات صفحه مستطیلی تابعی به همراه لایه های حسگر و محرک پیزوالکتریک توسط هی و همکاران [۸] پیشنهاد شده است. به تازگی نیز رفتار غیر خطی دینامیک صفحه مستطیلی تابعی کوپل شده با لایه های پیزوالکتریک در بالا و پایین آن که در محیط گرمایی ارتعاشات غیرخطی خواهد داشت توسط هوانگ و شن [۹] مورد مطالعه قرار گرفته است. تمامی مطالعات

$$\varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r}{r \partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) = z \left(\frac{\partial w}{r^2 \partial \theta} - \frac{\partial^2 w}{r \partial r \partial \theta} \right) \quad (13)$$

حال بر اساس قانون هوک مولفه های تنش در صفحه تابعی به صورت روابط (۱۴)-(۱۶) بیان می‌شوند [۳۸]:

$$\sigma_{rr}^f = \frac{E(z)}{1-\nu^2} (\varepsilon_{rr} + \nu \varepsilon_{\theta\theta}) = -\frac{zE(z)}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \theta^2} + \frac{\partial w}{r \partial r} \right) \right] \quad (14)$$

$$\sigma_{\theta\theta}^f = \frac{E(z)}{1-\nu^2} (\varepsilon_{\theta\theta} + \nu \varepsilon_{rr}) = -\frac{zE(z)}{1-\nu^2} \left[\nu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \theta^2} + \frac{\partial w}{r \partial r} \right] \quad (15)$$

$$\tau_{r\theta}^f = -\frac{zE(z)}{1+\nu} \left(\frac{\partial^2 w}{r \partial r \partial \theta} - \frac{\partial w}{r^2 \partial \theta} \right) \quad (16)$$

که در آن بالانویس f نشان دهنده متغیر در صفحه تابعی و $E(z)$ مدول یانگ صفحه FG است که در معادله (۴) بیان شده است.

مدلهای مختلفی برای توزیع پتانسیل الکتریکی در لایه پیزوالکتریک وجود دارد. در این تحقیق از تابع درجه دوم زیر که توسط وانگ و همکاران [۱۴] پیشنهاد شده است استفاده می‌شود:

$$\phi = \left[1 - \left(\frac{2z - 2h_f - h_p}{h_p} \right)^2 \right] \rho(r, \theta, t) \quad (17)$$

که در آن $\rho(r, \theta, t)$ پتانسیل الکتریکی در صفحه میانی لایه پیزوالکتریک و h_p و $2h_f$ به ترتیب ضخامت صفحات تابعی و پیزوالکتریک می‌باشند. حال شدت میدان الکتریکی E و تغییر مکان الکتریکی D در مختصات استوانه ای به صورت روابط (۱۸)-(۲۰) خواهد بود [۱۵]:

$$D_r = \bar{\varepsilon}_{11} E_r = \bar{\varepsilon}_{11} \left(-\frac{\partial \phi}{\partial r} \right) \quad (18)$$

$$D_\theta = \bar{\varepsilon}_{11} E_\theta = \bar{\varepsilon}_{11} \left(-\frac{\partial \phi}{r \partial \theta} \right) \quad (19)$$

$$D_z = \bar{\varepsilon}_{33} E_z + \bar{e}_{31} (\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta}) \quad (20)$$

که در آن $\bar{\varepsilon}_{11}$, $\bar{\varepsilon}_{33}$, ثابتهای کاهیده دی الکتریک لایه پیزوالکتریک بوده و به صورت رابطه (۲۱) داده شده اند [۱۴]:

$$\bar{\varepsilon}_{33} = \bar{\varepsilon}_{33} + (e_{33}^2 / C_{33}^E) \quad \bar{\varepsilon}_{11} = \varepsilon_{11} \quad (21)$$

و $\bar{\varepsilon}_{11}$, $\bar{\varepsilon}_{33}$ ثابتهای دی الکتریک لایه پیزوالکتریک هستند.

۴- معادلات حاکم

برای بدست آوردن معادلات حاکم بر سیستم صفحه دایروی تابعی کوپل با لایه های پیزوالکتریک ابتدا اجزای گشتاور خمشی و نیروی برشی را به صورت (۲۲) بدست آورده می‌شود [۱۲]:

معادله (۳)، تغییرات خواص در صفحه تابعی با تابع توانی (۴) که همانند تابع پیشنهادی ردی و پراوین [۱۰] است مشخص می‌شود:

$$E(z) = (E_c - E_m)(z/2h_f + 1/2)^g + E_m \quad (4)$$

$$\rho(z) = (\rho_c - \rho_m)(z/2h_f + 1/2)^g + \rho_m$$

معادله اساسی دو بعدی الاستو-استاتیک برای یک ماده پیزوالکتریک در مختصات قطبی و بر مبنای تئوری کلاسیک صفحات به صورت رابطه (۵) است [۱۲]:

$$\sigma_{rr}^p = \bar{C}_{11}^E \varepsilon_{rr} + \bar{C}_{12}^E \varepsilon_{\theta\theta} - \bar{e}_{31} E_z \quad (5)$$

$$\sigma_{\theta\theta}^p = \bar{C}_{12}^E \varepsilon_{rr} + \bar{C}_{11}^E \varepsilon_{\theta\theta} - \bar{e}_{31} E_z \quad (6)$$

$$\tau_{r\theta}^p = (\bar{C}_{11}^E - \bar{C}_{12}^E) \varepsilon_{r\theta} = -z (\bar{C}_{11}^E - \bar{C}_{12}^E) \quad (7)$$

که در آن σ_i و ε_k به ترتیب معرف اجزای تنش و کرنش و E_k اجزای میدان الکتریکی می‌باشند. همچنین \bar{C}_{ij}^E اجزای ماتریس سختی و \bar{e}_{31} ثابت کاهیده نفوذ پذیری ماده پیزوالکتریک بوده و به صورت رابطه (۱۲) داده شده اند [۱۲]:

$$\bar{C}_{11}^E = C_{11}^E - (C_{13}^E)^2 / C_{33}^E \quad \bar{C}_{12}^E = C_{12}^E - (C_{13}^E)^2 / C_{33}^E$$

$$\bar{e}_{31} = e_{31} - C_{13}^E e_{33} / C_{33}^E$$

که در آن e معرف ثابت نفوذ پذیری ماده پیزوالکتریک و C_{ij} درایه های ماتریس مدول الاستوسیته هستند.

۳- معادلات اساسی در میدان پتانسیل الکتریکی

در بیشتر کاربردهای عملی نسبت شعاع به ضخامت صفحه بیشتر از ۱۰ بوده و از فرضیات کرشلف که در آن اثر تغییر مکان برشی و اینرسی دورانی قابل چشم پوشی است، می‌توان استفاده نمود. براساس این تئوری کلی ترین حالت میدان تغییر مکان برای صفحات یاد شده به صورت رابطه (۸) است [۱۲]:

$$u_z = u_z(r, \theta, t) = w(r, \theta, t) \quad (8)$$

$$u_r = u_r(r, \theta, t) = -z \frac{\partial u_z}{\partial r} \quad (9)$$

$$u_\theta = u_\theta(r, \theta, t) = -z \frac{\partial u_z}{r \partial \theta} \quad (10)$$

که در آن u_r و u_θ و u_z به ترتیب تغییر مکانها در راستای r و θ و z هستند. همچنین فرض می‌شود که جهت قطب در لایه های پیزوالکتریک در راستای z می‌باشد و در صورت اعمال پتانسیل الکتریکی خارجی در این لایه ها، یک دیفرانسیل کرنش که خود خمش صفحه را به دنبال خواهد داشت، ایجاد می‌گردد. در اینصورت اجزای کرنش در صفحه تابعی و لایه های پیزوالکتریک به صورت روابط (۱۱) و (۱۲) داده می‌شوند [۱۲]:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \quad (11)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{\partial u_\theta}{r \partial \theta} + \frac{u_r}{r} = -z \left(\frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \theta^2} + \frac{\partial w}{r \partial r} \right) \quad (12)$$

۵- روش حل

در آغاز با حل همزمان معادلات (۲۸) و (۳۰) می‌توان ϕ را برحسب w به صورت رابطه (۳۱) بدست آورد:

$$\begin{aligned} \phi(r, \theta, t) = & -\frac{(D_1 + D_2)h_p \bar{\epsilon}_{11}}{16\bar{e}_{31}\bar{\epsilon}_{33}} \Delta \Delta w \\ & + \frac{h_p^2 \bar{e}_{31}}{8\bar{\epsilon}_{33}} \Delta w - \frac{h_p(\bar{\rho}_f h_f + \rho_p h_p) \bar{\epsilon}_{11}}{8\bar{e}_{31}\bar{\epsilon}_{33}} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (31)$$

اینک با اعمال اپراتور لاپلاسین به معادله (۳۱) و جایگذاری رابطه بدست آمده در معادله (۲۸)، معادله دیفرانسیل از نوع معادله با مشتقات جزئی دی کوپله از مرتبه شش به صورت رابطه (۳۲) حاصل می‌شود:

$$P_3 \Delta \Delta \Delta w - P_2 \Delta \Delta w + P_1 \Delta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) - P_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (32)$$

که در آن:

$$P_1 = h_p^2 \bar{\epsilon}_{11} P_0 / 12 \bar{\epsilon}_{33} \quad P_2 = D_1 + D_2 + h_p^3 \bar{e}_{31}^2 / 6 \bar{\epsilon}_{33}$$

$$P_3 = (D_1 + D_2) h_p^2 \bar{\epsilon}_{11} / 12 \bar{\epsilon}_{33} \quad (33)$$

برای حل معادله (۳۲) ابتدا فرض می‌شود [۲۹]:

$$w(r, \theta, t) = w_1(r) e^{i(m\theta - \omega t)} \quad (34)$$

که در آن ω فرکانس طبیعی زاویه ای صفحه مرکب و m عدد موج در راستای محیطی است. با باز نویسی معادله (۳۲) بر مبنای $w_1(r)$ و استفاده از معادله (۳۴) و پس از حذف جملات نمایی رابطه ۳۵ حاصل می‌شود:

$$P_3 \Delta \Delta \Delta w_1 - P_2 \Delta \Delta w_1 - \omega^2 P_1 \Delta w_1 + \omega^2 P_0 w_1 = 0 \quad (35)$$

که در آن:

$$\bar{\Delta} = d^2 / dr^2 + d / r dr - m^2 / r^2$$

معادله (۳۵) را می‌توان با استفاده از روش جداسازی حل کرد. با در نظر گرفتن این نکته که w_1 در مرکز صفحه غیر تکین می‌باشد، راه حل کلی (۳۶) را می‌توان برای آن پیشنهاد کرد:

$$w_1 = \sum_{n=1}^3 A_{nm} Z_{nm}(\alpha_n r) \quad (36)$$

که در آن:

$$\alpha_1 = \sqrt{|x_1|}, \alpha_2 = \sqrt{|x_2|}, \alpha_3 = \sqrt{|x_3|} \quad (37)$$

x_1, x_2, x_3 در رابطه (۳۷) ریشه های معادله مشخصه (۳۸)

می‌باشند:

$$P_3 x^3 - P_2 x^2 - \omega^2 P_1 x + \omega^2 P_0 = 0 \quad (38)$$

و

$$Z_{im}(\alpha_i r) = Z_{im}(\alpha_i, r) = \begin{cases} J_m(\alpha_i r) & , x_i < 0 \\ I_m(\alpha_i r) & , x_i > 0 \end{cases} \quad (39)$$

که در آن ۱ و ۲ و ۳ به ترتیب توابع بسل مرتبه اول معمولی و اصلاح شده می‌باشند. اینک برای

$$M_{rr} = \int_{-h_f}^{h_f} z \sigma_{rr}^f dz + 2 \int_{h_f}^{h_f+h_p} z \sigma_{rr}^p dz \quad (22)$$

$$M_{\theta\theta} = \int_{-h_f}^{h_f} z \sigma_{\theta\theta}^f dz + 2 \int_{h_f}^{h_f+h_p} z \sigma_{\theta\theta}^p dz \quad (23)$$

$$M_{r\theta} = \int_{-h_f}^{h_f} z \tau_{r\theta}^f dz + 2 \int_{h_f}^{h_f+h_p} z \tau_{r\theta}^p dz \quad (24)$$

$$q_r = \frac{\partial M_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial M_{r\theta}}{r \partial \theta} + \frac{M_{rr} - M_{\theta\theta}}{r} \quad (25)$$

$$q_\theta = \frac{\partial M_{r\theta}}{\partial r} + \frac{\partial M_{\theta\theta}}{r \partial \theta} + \frac{2M_{r\theta}}{r} \quad (26)$$

حال با جایگذاری معادلات (۱۱) تا (۱۳) در معادلات (۵) تا (۷) و (۱۴) تا (۱۶) و جایگذاری معادلات حاصل در معادلات (۲۲) تا (۲۶) و جایگذاری روابط پایانی در معادله حاکم بر صفحه کرشلف:

$$\frac{\partial q_r}{\partial r} + \frac{\partial q_\theta}{r \partial \theta} + \frac{q_r}{r} \quad (27)$$

$$- \left(\int_{-h_f}^{h_f} \rho_f(z) \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} dz + 2 \int_{h_f}^{h_f+h_p} \rho_p \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} dz \right) = 0$$

معادله دیفرانسیل حرکت به صورت رابطه (۲۸) بدست می‌آید:

$$(D_1 + D_2) \Delta \Delta w + \frac{4}{3} h_p \bar{e}_{31} \Delta \phi + P_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (28)$$

که در آن Δ اپراتور لاپلاسین در مختصات استوانه ای بوده و

$$\bar{\rho}_f = \frac{1}{2h_f} \int_{-h_f}^{h_f} \rho_f(z) dz$$

$$D_1 = \int_{-h_f}^{h_f} \frac{z^2 E(z)}{1 - \nu^2} dz,$$

$$D_2 = \frac{2}{3} h_p \left(3h_f^2 + 3h_f h_p + h_p^2 \right) \bar{C}_{11}^E$$

$$P_0 = 2(\bar{\rho}_f h_f + \rho_p h_p)$$

که در آن ρ_p و ρ_f به ترتیب چگالی صفحه تابعی و لایه های پیزوالکتریک می‌باشند. توجه شود که بر مبنای معادله ماکسول، دیورژانس چگالی شار الکتریکی در تمامی نقاط داخل محیط می‌بایستی صفر گردد. این شرایط با صفر قرار دادن انتگرال دیورژانس چگالی شار الکتریکی در راستای ضخامت لایه های پیزوالکتریک برای هر r و θ به صورت رابطه (۲۹) برآورده می‌گردد [۱۵]:

$$\int_{h_f}^{h_f+h_p} \bar{\nabla} \cdot \bar{D} dz = \int_{h_f}^{h_f+h_p} \left(\frac{\partial(rD_r)}{r \partial r} + \frac{\partial D_\theta}{r \partial \theta} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \right) dz = 0 \quad (29)$$

اپراتور $\bar{\nabla}$ در معادله (۲۹) اپراتور گرادیان در مختصات استوانه ای می‌باشد. حال با جایگذاری معادلات (۱۸) تا (۲۰) در معادله (۲۹) رابطه (۳۰) حاصل می‌شود:

$$\frac{h_p^2 \bar{\epsilon}_{11}}{12 \bar{\epsilon}_{33}} \Delta \phi - \phi + \frac{h_p^2 \bar{e}_{31}}{8 \bar{\epsilon}_{33}} \Delta w = 0 \quad (30)$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{\alpha_1 Z_{3m}(\alpha_3 r_0) Z'_{1m}(\alpha_1 r_0) - \alpha_3 Z_{1m}(\alpha_1 r_0) Z'_{3m}(\alpha_3 r_0)}{\alpha_2 Z_{1m}(\alpha_1 r_0) Z'_{2m}(\alpha_2 r_0) - \alpha_1 Z_{2m}(\alpha_2 r_0) Z'_{1m}(\alpha_1 r_0)} \right) \times Z_{2m}(\alpha_2 r) \\
& \times [h_p (2s_2 \alpha_2^2 h_p \bar{e}_{31}^2 - (D_1 + D_2) \alpha_2^4 \bar{\Xi}_{11} + P_0 \omega^2 \bar{\Xi}_{11})] [16 \bar{e}_{31} \bar{\Xi}_{33}]^{-1} \\
& + [h_p (2s_3 \alpha_3^2 h_p \bar{e}_{31}^2 - (D_1 + D_2) \alpha_3^4 \bar{\Xi}_{11} + P_0 \omega^2 \bar{\Xi}_{11})] [16 \bar{e}_{31} \bar{\Xi}_{33}]^{-1} Z_{3m}(\alpha_3 r)
\end{aligned} \quad (48)$$

قبل از شروع بحث و بررسی نتایج، برای تایید نتایج حاصل به مقایسه آنها با نتایج ارائه شده توسط وانگ و همکاران [۱۴] که برای صفحه دایروی فولادی ارائه شده، پرداخته می‌شود. همچنین از آنجا که تاکنون نتایجی برای صفحه تابعی کوپل شده با لایه‌های پیزوالکتریک در تحقیقات موجود ارائه نشده است به تایید نتایج با مقایسه آنها با نتایج حاصل از تحلیل اجزاء محدود سه بعدی پرداخته می‌شود. مدل اجزاء محدود ارائه شده شامل المانهای سه بعدی ۸ گره ای با تعداد کل ۲۶۹۵۰ گره و تعداد ۲۴۲۷۶ المان و با سه درجه آزادی (جابجایی) برای هر گره در مورد المان مربوط به صفحه تابعی و ۶ درجه آزادی (سه درجه جابجایی، دما، ولتاژ و خواص مغناطیسی) برای المان مربوط به لایه های پیزوالکتریک خواهد بود.

جدول (۱): خواص مواد تابعی و پیزوالکتریک

FGM Plate	$E_c = 20.5 \text{ Gpa}, \nu = 0.3$	$E_m = 200$
	$\rho_c = 2400 \text{ (kg/m}^3\text{)}$	$\rho_m = 2700$
	$e_{31} \text{ (C/m}^2\text{)} = -4,1$	$e_{33} = 14,1$
	$\rho_p = 7500 \text{ (kg/m}^3\text{)}$	$e_{15} = 10,5$
PZT4 Layers	$C_{11}^E = 132 \text{ Gpa}$	$C_{12}^E = 71$
	$\bar{\Xi}_{11} = 7,124 \text{ (nF/m)}$	$\bar{\Xi}_{33} = 5,141$
	$C_{13}^E = 73, C_{55}^E = 26$	$C_{33}^E = 115$

۷- ارائه نتایج حاصل و بحث و بررسی آنها

در این بخش، صفحه دایروی از جنس مواد تابعی کوپل شده با لایه‌های پیزوالکتریک تحت شرایط تکیه گاهی گیردار و دارای خواص فیزیکی مطابق جدول (۱) مورد بررسی قرار خواهد گرفت. شعاع خارجی صفحه دایروی برابر ۰/۶ متر و نسبت ضخامت هر لایه پیزوالکتریک به ضخامت صفحه تابعی برابر ۰/۱ در نظر گرفته شده است. اولین سه فرکانس طبیعی صفحه دایروی تابعی بدون و یا لایه های پیزوالکتریک که با استفاده از روش تحلیلی ارائه شده در مقاله حاضر محاسبه شده اند، در جداول ۳ و ۲ ارائه شده‌اند. این نتایج با نتایج حاصل از تحلیل اجزاء محدود سه بعدی نیز مقایسه شده است.

بدست آوردن جواب مناسبی برای $\varphi(r, \theta, t)$ ، فرض می‌شود:

$$\varphi(r, \theta, t) = \varphi_1(r) e^{i(m\theta - \omega t)} \quad (40)$$

اینک با جایگذاری معادله (۳۶) در معادله (۳۱) حل بر طبق رابطه (۴۱) برای $\varphi_1(r)$ حاصل می‌شود:

$$\varphi_1(r) = [16 \bar{e}_{31} \bar{\Xi}_{33}]^{-1} \sum_{n=1}^3 [A_{nm} h_p (2s_n \alpha_n^2 h_p \bar{e}_{31}^2 - (D_1 + D_2) \alpha_n^4 \bar{\Xi}_{11} + P_0 \omega^2 \bar{\Xi}_{11})] \times Z_{nm}(\alpha_n r) \quad (41)$$

۶- حل معادلات

حال معادلات مربوط به شرایط مرزی در حالت گیردار به صورت رابطه (۴۲) بیان می‌گردد:

$$w_1 = dw_1/dr = d\varphi_1/dr = 0 \quad \text{at } (r = r_0) \quad (42)$$

و معادله مشخصه به صورت رابطه (۴۳) خواهد بود:

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{matrix} c_{1i} = Z_{im}(\alpha_i r_0) \\ c_{2i} = \alpha_i r_0 Z'_{im}(\alpha_i r_0) \end{matrix} \quad (43)$$

$$c_{3i} = \left(\frac{h_p^2 r_0 s_i \alpha_i^3}{8} - \frac{(D_1 + D_2) h_p r_0 \alpha_i^5 \bar{\Xi}_{11}}{16 \bar{e}_{31}^2} + \right. \quad (44)$$

$$\left. \frac{(D_1 + D_2) h_p \alpha_i \lambda^4 \bar{\Xi}_{11}}{16 \bar{e}_{31}^2 r_0^3} \right) Z'_{im}(\alpha_i r_0) \quad (45)$$

$$\lambda = r_0 \left[\frac{2(\tilde{\rho}_f h_f + \rho_p h_p) \omega^2}{D_1 + D_2} \right]^{\frac{1}{4}} \quad (46)$$

$$\omega = \frac{\lambda^2}{r_0} \sqrt{\frac{D_1 + D_2}{2(\tilde{\rho}_f h_f + \rho_p h_p)}} \quad (46)$$

که در آن علامت پرایم معرف مشتق نسبت به r و λ فرکانس طبیعی زاویه‌ای بی بعد می‌باشد. پس از محاسبه ω از معادله (۴۳) و استفاده از معادلات (۳۶) و (۴۲) شکل‌های مد w_1 به صورت (۴۷) بدست می‌آید:

$$\begin{aligned}
w_1(r) &= A_{3m} \times \\
& \left[\left(\frac{\alpha_3 Z_{2m}(\alpha_2 r_0) Z'_{3m}(\alpha_3 r_0) - \alpha_2 Z_{3m}(\alpha_3 r_0) Z'_{2m}(\alpha_2 r_0)}{\alpha_2 Z_{1m}(\alpha_1 r_0) Z'_{2m}(\alpha_2 r_0) - \alpha_1 Z_{2m}(\alpha_2 r_0) Z'_{1m}(\alpha_1 r_0)} \right) \right. \\
& \times Z_{1m}(\alpha_1 r) + \\
& \left(\frac{\alpha_1 Z_{3m}(\alpha_3 r_0) Z'_{1m}(\alpha_1 r_0) - \alpha_3 Z_{1m}(\alpha_1 r_0) Z'_{3m}(\alpha_3 r_0)}{\alpha_2 Z_{1m}(\alpha_1 r_0) Z'_{2m}(\alpha_2 r_0) - \alpha_1 Z_{2m}(\alpha_2 r_0) Z'_{1m}(\alpha_1 r_0)} \right) \\
& \times Z_{2m}(\alpha_2 r) + Z_{3m}(\alpha_3 r) \Big] \quad (47)
\end{aligned}$$

به علاوه با استفاده از معادلات (۳۶)، (۴۱) و (۴۲) پتانسیل الکتریکی به صورت رابطه (۴۸) ارائه می‌گردد:

$$\begin{aligned}
\hat{\varphi}(r) &= A_{3m} \times \\
& \left[\left(\frac{\alpha_3 Z_{2m}(\alpha_2 r_0) Z'_{3m}(\alpha_3 r_0) - \alpha_2 Z_{3m}(\alpha_3 r_0) Z'_{2m}(\alpha_2 r_0)}{\alpha_2 Z_{1m}(\alpha_1 r_0) Z'_{2m}(\alpha_2 r_0) - \alpha_1 Z_{2m}(\alpha_2 r_0) Z'_{1m}(\alpha_1 r_0)} \right) \times Z_{1m}(\alpha_1 r) \right. \\
& \times [h_p (2s_1 \alpha_1^2 h_p \bar{e}_{31}^2 - (D_1 + D_2) \alpha_1^4 \bar{\Xi}_{11} + P_0 \omega^2 \bar{\Xi}_{11})] [16 \bar{e}_{31} \bar{\Xi}_{33}]^{-1}
\end{aligned}$$

جدول (۲): فرکانس های طبیعی صفحه دایروی تابعی

Power Index g	Mode no. m	FGM plate			
		Present Method	Present (FEM)	Diff. (%)	Wang et al.[14]
۰	۰	۱۳۸,۴۲	۱۳۹,۲۷	۰,۶۱	۱۳۸,۴۸
۰	۱	۲۸۸,۰۰	۲۸۹,۷۰	۰,۵۷	۲۸۸,۲۰
۰	۲	۴۷۲,۵۵	۴۷۳,۴۵	۰,۱۹	۴۷۲,۷۹
۱	۰	۱۳۴,۶۳	۱۳۵,۴۳	۰,۵۹	-
۱	۱	۲۸۰,۱۷	۲۸۱,۷۸	۰,۵۷	-
۱	۲	۴۵۹,۶۲	۴۶۰,۴۵	۰,۱۸	-
۲	۰	۱۳۲,۷۰	۱۳۳,۶۳	۰,۶۹	-
۲	۱	۲۷۶,۱۹	۲۷۸,۰۴	۰,۶۷	-
۲	۲	۴۵۳,۰۹	۴۵۴,۳۴	۰,۲۸	-
۵	۰	۱۳۲,۱۲	۱۳۳,۰۶	۰,۷۰	-
۵	۱	۲۷۴,۹۶	۲۷۶,۸۵	۰,۶۹	-
۵	۲	۴۵۱,۰۶	۴۵۲,۳۹	۰,۲۹	-
۷	۰	۱۳۱,۸۵	۱۳۲,۷۸	۰,۷۰	-
۷	۱	۲۷۴,۳۹	۲۷۶,۲۵	۰,۶۷	-
۷	۲	۴۵۰,۱۳	۴۵۱,۴۶	۰,۲۹	-
۹	۰	۱۳۱,۶۹	۱۳۲,۷۰	۰,۷۶	-
۹	۱	۲۷۴,۰۷	۲۷۶,۰۹	۰,۷۳	-
۹	۲	۴۴۹,۶۰	۴۵۰,۸۴	۰,۲۸	-
۱۰	۰	۱۳۱,۶۴	۱۳۲,۵۵	۰,۶۸	-
۱۰	۱	۲۷۳,۹۶	۲۷۵,۷۹	۰,۶۷	-
۱۰	۲	۴۴۹,۴۲	۴۵۰,۶۶	۰,۲۸	-

جدول (۳): فرکانس های صفحه دایروی تابعی کوپل با لایه های پیزوالکتریک برای مقادیر مختلف گرادیان تابعی

Power Index g	Mode no. m	FGM plate			
		Present Method	Present (FEM)	Diff. (%)	Wang et al.[14]
۰	۰	۱۴۳,۶۳	۱۴۴,۶۹	۰,۷۳	۱۴۳,۷۱
۰	۱	۲۹۸,۹۲	۳۰۰,۴۹	۰,۵۲	۲۹۹,۰۷
۰	۲	۴۹۰,۳۷	۴۹۲,۶۲	۰,۴۶	۴۹۰,۶۲
۱	۰	۱۴۰,۲۶	۱۴۲,۲۲	۱,۳۸	-
۱	۱	۲۹۱,۸۹	۲۹۵,۸۲	۱,۳۳	-
۱	۲	۴۷۸,۸۴	۴۸۲,۰۹	۰,۶۷	-
۳	۰	۱۳۸,۵۴	۱۴۰,۶۰	۱,۴۶	-
۳	۱	۲۸۸,۳۳	۲۹۲,۴۷	۱,۴۲	-
۳	۲	۴۷۲,۹۹	۴۷۶,۶۱	۰,۷۶	-
۵	۰	۱۳۸,۰۱	۱۴۰,۰۷	۱,۴۷	-
۵	۱	۲۸۷,۲۱	۲۹۱,۳۹	۱,۴۳	-

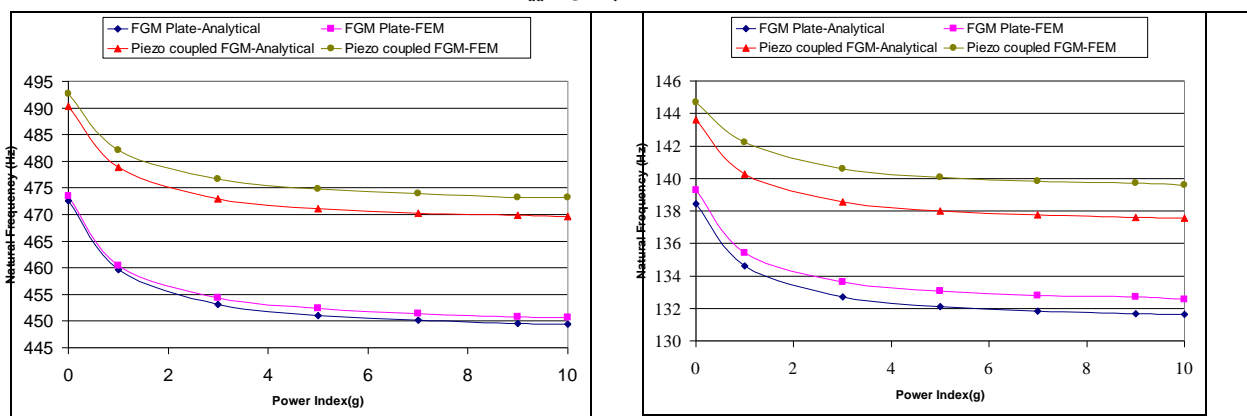
۲	۰	۴۷۱,۱۶	۴۷۴,۸۱	۰,۷۷	-
۷	۰	۱۳۷,۷۶	۱۳۹,۸۲	۱,۴۷	-
۷	۱	۲۸۹,۶۹	۲۹۰,۸۳	۱,۴۳	-
۷	۲	۴۷۰,۳۰	۴۷۳,۹۵	۰,۷۷	-
۹	۰	۱۳۷,۶۲	۱۳۹,۷۳	۱,۵۱	-
۹	۱	۲۸۶,۴۰	۲۹۰,۵۴	۱,۴۳	-
۹	۲	۴۶۹,۸۳	۴۷۳,۱۶	۰,۷۰	-
۱۰	۰	۱۳۷,۵۷	۱۳۹,۶۱	۱,۴۶	-
۱۰	۱	۲۸۹,۳۳	۲۹۰,۴۱	۱,۴۲	-
۱۰	۲	۴۶۹,۶۶	۴۷۳,۲۶	۰,۷۶	-

همانطور که از جداول (۲) و (۳) مشخص می‌گردد نتایج حاصل از روش تحلیلی حاضر در حالت صفحه فولادی برابری بسیار خوبی با نتایج مرجع [۱۴] و همچنین همخوانی قابل قبولی با نتایج حاصل از تحلیل اجزاء محدود برای گرادیانهای تابعی مختلف دارد.

در مرحله بعد بررسی اثر تغییر گرادیان تابعی بر روی مشخصات ارتعاشی صفحه مربوطه انجام شد. نتایج ارائه شده در جداول (۲) و (۳) نشان می‌دهد که با افزایش مقدار گرادیان تابعی، فرکانس طبیعی مربوط به تمامی مدهای فرکانسی سیستم کاهش می‌یابد. به علاوه این روند کاهش فرکانسی برای مقادیر کوچکتر گرادیان آشکارتر می‌باشد. به عنوان نمونه مطابق نتایج جدول (۲)، با افزایش مقدار گرادیان از ۱ به ۳ (افزایشی برابر ۲۰۰ درصد)، فرکانس طبیعی مد اول سیستم به مقدار ۱/۴۳ درصد کاهش می‌یابد در حالی که برای همین صفحه، با افزایش مقدار گرادیان از ۳ به ۹ (افزایشی برابر ۲۰۰ درصد)، فرکانس طبیعی مربوط به همین مد فرکانسی به مقدار ۰/۷۶ درصد کاهش می‌یابد. این روند در مورد مدهای دیگر ارتعاشی صفحه تابعی بدون و یا لایه های پیزوالکتریک نیز درست است. به عنوان مثال مطابق جدول شماره (۳)، با افزایش مقدار گرادیان از صفر به ۳، فرکانس طبیعی مد سوم سیستم صفحه تابعی کوپل با لایه های پیزوالکتریک به مقدار ۳/۵۴ درصد کاهش می‌یابد در حالی که برای همین صفحه، با افزایش مقدار گرادیان از ۵ به ۱۰، فرکانس طبیعی مربوط به همین مد فرکانسی در حدود ۰/۳۲ درصد کاهش می‌یابد. برای دیدن بهتر این روند و بررسی اثرات تغییر گرادیان بر روی فرکانسهای طبیعی سیستم، شکلهای شماره (۱) و (۲) برای نمایش این اثرات در مورد مدهای فرکانسی اول و سوم سیستم ارائه شده است. همانطور که از شکلهای شماره (۱) و (۲) دیده می‌شود روند کاهش فرکانس طبیعی با افزایش مقدار گرادیان مربوط به تمامی مدهای فرکانسی سیستم و برجسته بودن این اثر در مورد مدهای فرکانسی پایین تر در تمامی حالات مورد مطالعه

۸- نتیجه گیری

در تحقیق حاضر یک مدل تحلیلی برای ارتعاش یک صفحه دایروی مرکب از یک صفحه تابعی کوپل شده با لایه های پیزوالکتریک براساس تئوری صفحه کرشلف ارائه شده است. معادلات دیفرانسیل حرکت برای اولین بار به صورت تحلیلی برای صفحه با شرایط مرزی گیردار حل شده و پاسخهای تحلیلی بدست آمده است. درستی روش تحلیلی ارائه شده از طریق مقایسه نتایج با نتایج ارائه شده در تحقیقات مشابه و همچنین با مقایسه با نتایج حاصل از روش المان محدود سه بعدی تایید شده است.



شکل (۱) و (۲): اثر گرادیان تابعی بر روی فرکانس های طبیعی مد اول و سوم

۹- مراجع

- [۱] Feldman, E.; Aboudi, J.; "Buckling analysis of functionally graded plates subjected to uniaxial loading", Compos Struct, Vol. 38, pp.29-36, 1997.
- [۲] Sankar, B. V.; "An elasticity solution for functionally graded beams", Compos. Sci. Technol., vol. 61, pp. 689-896, 2001.
- [۳] Yang, J.; Shen, H. S.; "Dynamic response of initially stressed functionally graded rectangular thin plates", Compos Struct, vol. 54, pp. 497-508, 2001.
- [۴] Woo, J.; Meguid, S.A.; "Nonlinear analysis of functionally graded plates and shallow shells", Int. J. Solids Struct, vol. 38, pp. 7409-7421, 2001.
- [۵] Ootao, Y.; Tanigawa, Y.; "Three-dimensional transient piezo-thermo-elasticity in functionally graded rectangular plate bonded to a piezoelectric plate", Int. J. Solids Struct., vol. 37, pp. 4377-4401, 2000.
- [۶] Reddy, J. N.; Cheng, Z. Q.; "Three-dimensional solutions of smart functionally graded plates", ASME J. Appl. Mech., vol. 68, pp. 234-241, 2001.
- [۷] Wang, B.L.; Noda, N.; "Design of smart functionally graded thermo-piezoelectric composite structure", Smart Mater. Struct., vol. 10, pp. 189-193, 2001.

سیستم صفحه تابعی هوشمند برقرار است ولی برای گرادیانهای بزرگتر از ۷، فرکانسهای طبیعی تا اندازه ای ثابت میمانند.

در واقع می توان نتیجه گرفت که برای گرادیانهای بسیار بزرگ، صفحه تابعی تبدیل به یک صفحه فلزی و صفحه مرکب مربوطه به یک صفحه هوشمند مرکب دارای هسته فلزی می گردد.

در مطالعات عددی تاکید اصلی بر بررسی اثر تغییر شاخص گرادیان صفحه تابعی بر روی مشخصات ارتعاشی سازه مربوطه می باشد. همچنین با مقایسه نتایج روش حاضر و نتایج بدست آمده از روش اجزاء محدود تطابق بسیار خوبی مشاهده شده است. همچنین برای تمامی شرایط مرزی در فرکانسهای پایینتر، روش تحلیلی پیشنهادی نتایج نزدیکتری به نتایج حاصل از روش المان محدود در مقایسه با فرکانسهای بالاتر ارائه می نماید. به علاوه با افزایش مقدار گرادیان، فرکانس طبیعی مربوط به تمامی مدهای فرکانسی سیستم برای تمامی شرایط تکیه گاهی کاهش می یابد. همچنین این روند کاهش فرکانس برای مقادیر کوچکتر گرادیان مشهودتر می باشد. پاسخهای تحلیلی و نتایج حاصل، مدل ساده شده ای برای مطالعه پارامتری و درک مشخصات ارتعاشی صفحات دایروی تابعی کوپل با لایه های پیزوالکتریک ارائه می دهد. این نتایج می تواند در طراحی سازه های هوشمند شده با لایه های پیزوالکتریک در کاربردهای صنعتی همچون موتورهای التراسونیک مورد استفاده قرار گیرد.

- He, X. Q. ; Ng, T. Y. ; Sivashanker; S. ; Liew, K. M.; "Active control of FGM plates with integrated piezoelectric sensors and actuators", *Int. J. Solids Struct.*, vol. 38, pp. 1641–1655, 2001. [۸]
- Huang, X.L.; Shen H.S.; "Vibration and dynamic response of functionally graded plates with piezoelectric actuators in thermal environments", *J. Sound Vib.*, vol. 289, pp. 25–53, 2006. [۹]
- Reddy, J.N.; Praveen, G.N.; "Nonlinear transient thermoelastic analysis of functionally graded ceramic-metal plate", *Int. J. Solids Struct*, vol. 35, pp. 4457-4476, 1998. [۱۰]
- Wetherhold, R.C.; Wang, S.; "The use of functionally graded materials to eliminate or thermal deformation", *Composite Sci Tech*, vol. 56 pp. 1099-1104, 1996. [۱۱]
- Brush, D.O.; Almroth, B.O.; *Buckling of bars plates and shells*, McGraw-Hill, 1975. [۱۲]
- Reddy, J.N.; *Theory and analysis of elastic plates*, Taylor and Francis, 1999. [۱۳]
- Wang, Q.; Quek, S.T.; Liu, X.; "Analysis of piezoelectric coupled circular plate", *Smart Mater Struct*, vol. 10, pp. 229-39, 2001. [۱۴]
- Halliday, D.; Resniek, R.; *Physics*, John Wiley and Sons, 1978. [۱۵]