



## Study of Growth of Cohesive Crack in two Phase Environments with Extended Finite Element Method

A. Shoostari\*, S. Baygi

Ferdowsi University of Mashhad, Department of Civil Engineering, Iran

**ABSTRACT:** Initiation and progression of cracks in a saturated porous media is an important topic which has attracted considerable attention from researchers in the recent years. Extended finite element method (EFEM) is a contemporary technique removing the necessity of consecutive meshing of the problem in the analysis process. In the EFEM by enriching the elements whose discontinuity there exists, there is no need for re-meshing at each step of the analysis. In this paper, EFEM is used to evaluate progression of cohesive crack in a two phase saturated porous media. To analyze the saturated porous media, at the first, the equations of mass conservation, momentum conservation, and energy conservation are established to consider simultaneous effects of displacement, pressure, and temperature on the crack progression. The cohesive model is used to simulate crack progression. Heavy-side functions are used to enrich finite elements and the resulting system of equations are solved by Newton Raphson method. Finally, the numerical model were analyzed by other researchers is considered to evaluate the derived relationships. Numerical result show that maximum variation by other researchers is 5%.

### Review History:

Received: 2019-04-15

Revised: 2019-06-05

Accepted: 2019-06-07

Available Online: 2019-07-04

### Keywords:

Extended finite element method  
meshing

saturated porous media

cohesive crack

growth of crack

## 1. INTRODUCTION

The extended finite element was used for the first time by Belytschko and Black in 1999 [1]. They utilized crack-tip displacement functions to enrich crack tip elements. Later, Moes et al. developed this approach and named it "extended finite element method" (XFEM) [2]. The XFEM was used to analyze two-phase problem for the first time by Belytschko and Chisa [3]. In 2007, Tethore et al, modeled cracked saturated porous medium for the first time [4]. Schrefler also proposed a new model which takes into account effect of different parameters such as displacement, temperature, capillary pressure and porous media pressure for a two-phase environment, simultaneously [5]. Vaziri proposed a finite element formulation which take into account the effects of heat and fluid flow in a multi-phase environment [6]. In the following of the mentioned studies, Pandey et al. investigated the effects of fluid injection on the crack in a non-isothermal porous medium [7].

In this study, the development of cohesive cracks in saturated two-phase environments has been investigated using the XFEM. Accordingly, first the relations of momentum, mass and energy conservations in saturated porous media are established, and then the relationships for the cohesive cracks were modified and rewrote by the matrix notation using the XFEM. Finally, to study the derived relations, the numerical

\*Corresponding author's email: ashoost@um.ac.ir

model that has been developed is analyzed and evaluated using MATLAB program.

## 2. FORMULATION

The weak form of the momentum equation can be represented as equation 1.

$$\int_{\Omega} N_u^T (S^T \sigma + \rho_i b - \rho_i \ddot{u}) d\Omega = 0 \quad (1)$$

in which,  $N_u^T$  is the shape function of the standard finite element method. Using the part-by-part integration method and the divergence theorem, the equation (1) can be rewritten in the form of equation (2).

$$\int_{\Omega} B^T \sigma d\Omega + \int_{\Omega} N_u^T \rho_i \ddot{u} d\Omega = \int_{\Gamma} N_u^T t d\Gamma + \int_{\Omega} N_u^T \rho_i b d\Omega \quad (2)$$

$B = SN_u$

In this equation, represent the boundary of the environment. In order to consider the crack effects, the difference of variables between the two sides of the crack should be included in the relations. Using divergence theorem and the relations of cohesive cracks, the equation of momentum can be rewritten in the following form (Eq. 3):



$$\int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{N}_u^T) \sigma \, d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{N}_u^T \rho \ddot{\mathbf{u}} \, d\Omega = \int_{\Gamma} \mathbf{N}_u^T \mathbf{t} \, d\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{N}_u^T \rho \mathbf{b} \, d\Omega - \int_{\Gamma_d} \langle \mathbf{N}_u^T \rangle \cdot \mathbf{t} \, d\Gamma_d + \int_{\Gamma_d} \langle \mathbf{N}_u^T \rangle \cdot \mathbf{n}_{\Gamma_d} \, p \, d\Gamma_d \quad (3)$$

Equations 4 and 5 are the mass and energy conservation relations in the cracked porous medium.

$$\int_{\Omega} \nabla \mathbf{N}_p^T \mathbf{k} \nabla p \, d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T m \mathbf{B} \dot{\mathbf{u}} \, d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \dot{p} \left[ \frac{1-n}{K_s} + \frac{n}{K_f} \right] \, d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \beta \dot{T} \, d\Omega = \int_{\Gamma} \mathbf{N}_p^T \mathbf{q}_f \, d\Gamma - \int_{\Gamma_d} \langle \mathbf{N}_p^T \mathbf{n}_f \mathbf{Q}_f \rangle \, d\Gamma_d \quad (4)$$

$$\int_{\Omega} \nabla \mathbf{N}_{\theta}^T \mathbf{k}_{eff} \nabla T \, d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{N}_{\theta}^T \{ (\rho c)_{eff} \dot{T} + \rho_f c_f \mathbf{k} (-\nabla p + \rho_f \mathbf{g}) \} \cdot \nabla T \, d\Omega = \int_{\Gamma} \mathbf{N}_{\theta}^T \mathbf{q}'' \, d\Gamma - \int_{\Gamma_d} \langle \mathbf{N}_{\theta}^T \mathbf{Q}'' \rangle \, d\Gamma_d \quad (5)$$

Equation 6 is derived by transforming momentum relation into the matrix notation, using the XFEM.

$$\int_{\Omega} \mathbf{B}^T \sigma' \, d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \alpha \mathbf{m} p \, d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{N}_u^T \rho \ddot{\mathbf{u}} \, d\Omega + \mathbf{F}_{int} = \mathbf{F}_{ext}$$

$$\mathbf{F}_{int} = \left( \int_{\Gamma_d} (\mathbf{N}_u^{enr})^T \mathbf{n}_{\Gamma_d} \, d\Gamma_d \right) \bar{p} - \int_{\Gamma_d} (\mathbf{N}_u^{enr})^T \cdot \mathbf{t} \, d\Gamma_d \quad (6)$$

$$\mathbf{F}_{ext} = \int_{\Gamma} \mathbf{N}_u^T \mathbf{t} \, d\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{N}_u^T \rho \mathbf{b} \, d\Omega$$

Which,  $\mathbf{N}_u^{enr}$  is the enriched displacement shape function. The matrix forms of the mass and energy conservation relations using the XFEM are presented by Equations 7 and 8.

$$\int_{\Omega} \nabla \mathbf{N}_p^T \mathbf{k} \nabla p \, d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T m \mathbf{B} \dot{\mathbf{u}} \, d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \dot{p} \left[ \frac{1-n}{K_s} + \frac{n}{K_f} \right] \, d\Omega + \mathbf{q}_{ine} = \mathbf{q}_{ext} \quad (7)$$

$$\mathbf{q}_{int} = \int_{\Gamma_d} (\mathbf{N}_p^{enr})^T \mathbf{n}_f \mathbf{Q}_f \cdot \mathbf{n}_{\Gamma_d} \, d\Gamma_d$$

$$\int_{\Omega} \nabla \mathbf{N}_{\theta}^T \mathbf{k}_{eff} \nabla T \, d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{N}_{\theta}^T \{ (\rho c)_{eff} \dot{T} + \rho_f c_f \mathbf{k} (-\nabla p + \rho_f \mathbf{g}) \} \cdot \nabla T \, d\Omega + \mathbf{Q}_{int} = \mathbf{Q}_{ext} \quad (8)$$

$$\mathbf{Q}_{int} = \int_{\Gamma} \mathbf{N}_{\theta}^T \mathbf{q}'' \, d\Gamma, \mathbf{Q}_{ext} = \int_{\Gamma_d} (\mathbf{N}_{\theta}^{enr})^T \mathbf{Q}'' \cdot \mathbf{n}_{\Gamma_d} \, d\Gamma_d$$

$$\mathbf{q}_{ext} = \int_{\Gamma} \mathbf{N}_p^T \mathbf{q}_f \, d\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \beta \dot{T} \, d\Omega$$

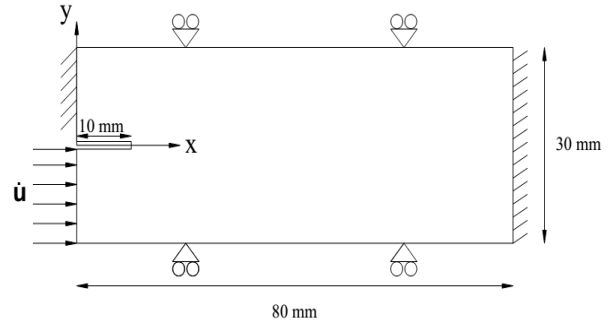


Fig. 1: geometry for model investigation.

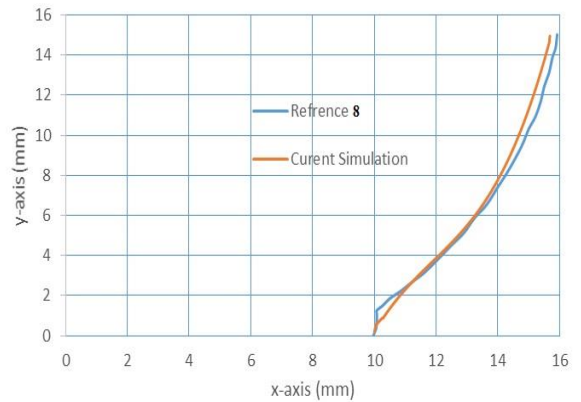


Fig. 2: Comparison between the investigation model and the reference 8.

### 3. NUMERICAL MODEL

In this section, for verification of the obtained relations, the numerical model suggested by Irzal is developed [8]. This model that is discussed in details in reference 8, evaluates a beam with a symmetrical discontinuity with the length of 10 mm, which is shown in Fig. 1. Fig. 2 shows the crack extension obtained using the developed MATLAB code as well as the reported results in reference number 8.

### 4. CONCLUSIONS

In this study, the extension of cohesive cracks in a two-phase environment was studied using the XFEM. First, in order to consider the effects of pressure, displacement and temperature, the equations of mass, momentum, and energy conservation were developed for the two-phase environment. Then, the obtained equations were discretized in the time domain. In addition, the Heavy-side function was used to enrich the cracked elements and the Newton-Raphson method was utilized to solve the relationships, simultaneously. In order to verify the obtained formulations, a numerical model that was developed by other researchers was analyzed using the suggested formulation. The obtained results showed the accuracy of the developed formulation, so that the maximum difference between the results of the model and reference 8 is 5%.

### REFERENCES

[1] T. Belytschko, T.Black, Elastic crack growth in finite

- element with minimum remeshing, *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 45 (1999) 601-620.
- [2] N. Moes, J. Dolbow, T. Belytschko, A finite element method for crack growth without remeshing, *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 46 (1999) 131-150.
- [3] J. Chessa, T. Belytschko, An extended finite element method for two phase fluids, *J Appl Mech*, 70 (2003) 10-17.
- [4] J. Rethore, R.d. Borst, M.A. Abellan, A two-scale approach for fluid flow in fractured porous media, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 71 (2007) 780-800.
- [5] B.A. Schrefler, X.Y. Zhan, L. Simoni, A coupled model for water flow, air flow and heat flow in deformable porous media, *Int J Numer Meth Heat Fluid Flow*, 5 (1995) 531-547.
- [6] H. Vaziri, Theory and application of a fully coupled thermo-hydro-mechanical finite element model, *Compos Struct*, 61 (1996) 131-146.
- [7] S.N. Pandey, A. Chaudhuri, S. Kelkar, A coupled thermo-hydro-mechanical modeling of fracture aperture alteration and reservoir deformation during heat extraction from a geothermal reservoir, *Geothermics*, 65 (2017) 17-31.
- [8] F. Irzal, J.C. Remmers, M. Huyghe, R. Brost, A large deformation formulation for fluid flow in a progressive fracturing porous material, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*, 256 (2013) 29-37.

**HOW TO CITE THIS ARTICLE**

A. Shoostari, S. Baygi, *Study of Growth of Cohesive Crack in two Phase Environments with Extended Finite Element Method*, *Amirkabir J. Civil Eng.*, 52(9) (2020) 563-566.

DOI: [10.22060/ceej.2019.16126.6138](https://doi.org/10.22060/ceej.2019.16126.6138)







## بررسی رشد ترک چسبنده در محیط دو فاز با استفاده از روش المان محدود توسعه یافته

احمد شوشتری<sup>۱\*</sup>، سجاد بایگی<sup>۲</sup>

<sup>۱</sup> استادیار، دانشکده مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد، ایران

<sup>۲</sup> دانشجوی دکتری، دانشکده مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد، ایران

### تاریخچه داوری:

دریافت: ۱۳۹۸-۰۱-۲۶

بازنگری: ۱۳۹۸-۰۳-۱۵

پذیرش: ۱۳۹۸-۰۳-۱۷

ارائه آنلاین: ۱۳۹۸-۰۴-۱۳

### کلمات کلیدی:

المان محدود توسعه یافته

مش بندی، محیط متخلخل اشباع

ترک چسبنده

رشد ترک

**خلاصه:** ایجاد و گسترش ترک در محیط متخلخل اشباع یکی از نکات مهمی است که در چند سال اخیر تحقیقات گسترده ای بر روی آن انجام شده است، یکی از روش های نوین برای بررسی و تحلیل ناپیوستگی در محیط دو فاز مانند گسترش ترک، روش المان محدود توسعه یافته می باشد. مزیت این روش نسبت به روش های دیگر عدم نیاز به مش بندی مجدد محیط در هر مرحله از آنالیز می باشد. در روش المان محدود توسعه یافته با غنی کردن المان هایی که ناپیوستگی در آن ها وجود دارد، نیاز به مش بندی مجدد در هر مرحله از تحلیل نمی باشد. در این مقاله به بررسی گسترش ترک چسبنده در محیط متخلخل اشباع دو فاز با استفاده از روش المان محدود توسعه یافته پرداخته شده است. برای تحلیل محیط متخلخل اشباع ابتدا معادلات بقای جرم، بقای مومنتوم و بقای انرژی برای در نظر گرفتن تاثیر همزمان جابجایی، فشار و دمای محیط متخلخل اشباع بر گسترش ترک بدست آمده و برای در نظر گرفتن نحوه گسترش ترک از مدل ترک چسبنده استفاده شده است. برای غنی کردن المان های ترک خورده از تابع هویساید و برای حل همزمان معادلات از روش نیوتن رافسون استفاده شده است. در انتها دو مدل عددی که توسط محققان دیگر مورد تحلیل قرار گرفته است، برای بررسی صحت سنجی روابط بدست آمده، مورد تحلیل قرار گرفته است. نتایج عددی بدست آمده نشان دهنده حداکثر ۵ درصد اختلاف با نتایج کارهای عددی گذشته می باشد.

### ۱- مقدمه

اولین بار توسط بلیچکو<sup>۱</sup> و بلک<sup>۲</sup> [۱] در سال ۱۹۹۹ انجام شد. آنها از توابع مربوط به تغییر مکان نوک ترک برای غنی سازی المان های نوک ترک استفاده کردند. پس از آن، موئز<sup>۳</sup> و همکاران [۲] روش قبل را بهبود داده و نام آن را المان محدود توسعه یافته نهادند. روش توسعه یافته براساس ایجاد تقریب غنی سازی شده از برخورد هندسه ترک با شبکه، استقلال مرز ناپیوستگی از شبکه بندی محیط را ممکن نمود. دالبو<sup>۴</sup> [۳] نیز با استفاده از تابع هویساید و توابع مجانب برای مدل سازی تنش در نوک ترک نقش عمده ای را برای توسعه این

روش المان محدود یکی از قوی ترین روش های عددی برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی می باشد. این روش در بسیاری از علوم مهندسی از جمله برای مدل سازی و پیش بینی رفتار سازه مورد استفاده قرار گرفته است. یکی از نقاط ضعف روش المان محدود هنگامی است، که در مدل مورد بررسی ترک ایجاد شده و ترک گسترش یابد. در این حالت در هر مرحله از تحلیل ترک لازم است که مش بندی مدل مورد بررسی مجدد انجام شود. روش المان محدود توسعه یافته نقطه ضعف را برطرف کرده و در هر مرحله از تحلیل ترک، نیاز به مش بندی مجدد نمی باشد. روش المان محدود توسعه یافته

\* نویسنده عهده دار مکاتبات: ashoosht@um.ac.ir

- 1 Belytschko
- 2 Black
- 3 Moes
- 4 Dolbow



بورست<sup>۹</sup> با استفاده از روش المان محدود توسعه یافته اثر جریان داخل ترک بر روی گسترش ترک را با معرفی توابع غنی سازی مناسب مورد بررسی قرار داد [۱۴]. مدل کردن ترمودینامیکی محیط متخلخل یکی از مهمترین موضوعات در مهندسی ژئوتکنیک می باشد، که تاکنون تحقیقات زیادی بر روی آن انجام شده است. اولین تئوری در این زمینه توسط ترزاقی<sup>۱۰</sup> برای خاک ها ارائه شد [۱۵]. یک مدل عددی برای شبیه سازی حرکت آرام گرما در محیط متخلخل توسط گاوین<sup>۱۱</sup> پیشنهاد شد [۱۶]. از طرفی اسچفلر<sup>۱۲</sup> مدلی که تاثیرات هم زمان جابجایی، دما و فشار موئینگی و فشار محیط متخلخل را برای محیط دو فاز در نظر می گرفت، ارائه کرد [۱۷]. فرمول بندی المان محدود با در نظر گرفتن اثرات گرما و جریان سیال در محیط چندفاز توسط وزیری پیشنهاد شد [۱۸]. همچنین گاتمیری<sup>۱۳</sup> مدل المان محدودی که تاثیرات دما بر روی آسیب دیدگی محیط چند فاز را نشان می داد، ارائه کردند [۱۹]. در ادامه کارهای گذشته که به تاثیر دما بر روی محیط متخلخل انجام گرفته بود، تارون<sup>۱۴</sup> یک مدل ترمودینامیکی برای در نظر گرفتن تاثیر دما در یک محیط متخلخل که تخلخل نقاط مختلف با یکدیگر متفاوت باشد، را پیشنهاد کردند [۲۰]. در مسائل شامل مخازن نفت به طور همزمان سه فاز وجود دارد که بررسی تاثیر همزمان سه فاز اهمیت بالایی دارد به این دلیل، گلت<sup>۱۵</sup> و همکاران برای یک محیط سه فاز دارای ترک معادلات ترمودینامیکی را ارائه دادند، متغیرهایی که آنها در نظر گرفتند شامل فشار سیال دو فاز و دما بود [۲۱]. در ادامه کارهای گذشته پانندی<sup>۱۶</sup> و همکاران به بررسی اثرات تزریق سیال بر روی ترک در محیط متخلخل غیرهم دما پرداختند [۲۲]. همچنین آساره<sup>۱۷</sup> و همکاران مدل جدیدی با استفاده از روش المان محدود توسعه یافته برای بررسی رشد ترک دینامیکی ارائه کردند. روش آن ها با استفاده از قانون چسبندگی توانست رشد ترک دینامیکی را در مواد رسانا و شکننده به خوبی پیش بینی کند [۲۳]. استفاده از روش المان محدود توسعه یافته همچنین برای بررسی تغییر شکل های بزرگ ترک نیز مورد استفاده قرار گرفته است، هیون<sup>۱۸</sup> و

روش در مدل سازی محیط های دارای ترک ایفا نمود. ریمرز<sup>۱</sup> با استفاده از روش اجزاء محدود توسعه یافته رشد ترک چسبنده را مورد بررسی قرار دادند [۴]. روش های Level Set به تدریج توسعه یافتند تا بتوانند مکان ترک، شامل مکان نوک های ترک را ارائه دهند. بلیچکو و همکاران در سال ۲۰۰۱ روشی را برای مدل سازی ناپیوستگی های دلخواه در تابع و مشتقاتش در المان محدود توسعه یافته ارائه دادند. تقریب ناپیوستگی بر اساس ترم های یک تابع فاصله علامت دار ایجاد شده بود، بنابراین امکان استفاده از این تقریب به منظور به روزسانی موقعیت ناپیوستگی ها به وجود آمد [۵]. سوکومار<sup>۲</sup> و همکاران مدل سازی حفره ها و ناخالصی ها را با استفاده از روش المان محدود توسعه یافته تشریح کردند [۶].

روش اجزاء محدود توسعه یافته در حل مسائل دو فاز اولین بار توسط چیسسا<sup>۳</sup> و بلیچکو ارائه گردید [۷]. پیرس<sup>۴</sup> با استفاده از Level set نفوذ سیال درون ترک در محیط دوفاز را برای مدل سازی هیدرولیکی مورد استفاده قرار دادند [۸]. مدل سازی محیط متخلخل اشباع دارای ترک برای اولین بار توسط ریتور<sup>۵</sup> و همکاران در سال ۲۰۰۷ مطرح گردید [۹]. یکی از مسائل اساسی برای برداشت از منابع زیر زمینی شکست هیدرولیکی می باشد، لیکامپیون<sup>۶</sup> در سال ۲۰۰۹ به بررسی مسائل شکست هیدرولیکی و اثر افزایش فشار هیدرولیکی بر روی گسترش ترک به روش المان محدود پرداخت [۱۰]. همچنین در ادامه کارهای مدل کردن شکست هیدرولیکی با استفاده از روش المان محدود توسعه یافته گوردلی<sup>۷</sup> روشی برای مدل کردن ترک ایجاد شده بر اثر شکست هیدرولیکی با معرفی کردن توابع غنی سازی مناسب برای روش المان محدود توسعه یافته پیشنهاد کردند [۱۱]. در ادامه کارهای گذشته گوردلی توابع غنی سازی مناسب برای غنی کردن المان های نوک ترک ارائه کردند [۱۲]. جریان سیال در داخل ترک باعث تاثیر بر روی گسترش ترک می شود ویگنولت<sup>۸</sup> و همکاران به بررسی اثر جریان سیال بر روی ترک در یک محیط متخلخل اشباع هنگامی که سیال درون ترک جریان دارد، پرداختند [۱۳]. همچنین

9 Borst  
10 Terzaghi  
11 Gawin  
12 Schrefler  
13 Gatmiri  
14 Taron  
15 Gelet  
16 Pandey  
17 Asareh  
18 Huynh

1 Remmers  
2 Sukumar  
3 Chessa  
4 Pirec  
5 Rethore  
6 Lecampion  
7 Gordeliy  
8 Vignollet

ماتریسی روابط نوشته شده است. در انتها برای بررسی روابط بدست آمده دو مدل عددی که قبلا تحلیل شده است، با استفاده از نرم افزار متلب مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته است.

## ۲- فرمول بندی

در این بخش رابطه اندازه حرکت، بقای جرم و بقای انرژی که برای مدل کردن ترک چسبنده در محیط متخلخل اشباع مورد نیاز است، ارائه خواهد شد. رابطه اندازه حرکت را می توان به شکل رابطه ۱ نوشت [۲۸].

$$\nabla \cdot \sigma + \rho_f b - \rho_f \ddot{u} = 0 \quad (1)$$

که  $b$  نیروی بدنه  $\ddot{u}$  شتاب فاز جامد و  $\rho_f$  چگالی کل محیط می باشد. که چگالی کل محیط را می توان با توجه به حجمی از محیط متخلخل که هر فاز اشغال کرده است، از رابطه ۲ بدست آورد.

$$\rho_f = (1-n)\rho_s + n\rho_f \quad (2)$$

که  $\rho_s$ ،  $\rho_f$  و  $n$  به ترتیب چگالی فاز جامد، چگالی فاز سیال و تخلخل می باشد. رابطه بقای جرم برای هر فاز در محیط متخلخل اشباع را می توان به شکل رابطه ۳ نوشت [۲۸].

$$\frac{\partial \rho_\pi}{\partial t} + \rho_\pi \nabla \cdot v_\pi = 0 \quad (3)$$

که در آن  $\rho_\pi$  و  $v_\pi$  به ترتیب چگالی و سرعت هر فاز در محیط متخلخل اشباع می باشد. با نوشتن رابطه بقای جرم برای هر فاز و ترکیب آنها با یکدیگر می توان به رابطه ۴ رسید.

$$\frac{1-n}{\rho_s} \cdot \frac{\partial \rho_s}{\partial t} + \nabla \cdot v_s + \frac{n}{\rho_f} \cdot \frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \nabla \cdot v_d = 0 \quad (4)$$

که  $v_d$  سرعت متوسط سیال می باشد، که می توان از رابطه ۵ بدست آورد.

$$v_d = k(-\nabla p + \rho_f g) \quad (5)$$

که  $k$  ضریب نفوذ پذیری می باشد. تغییرات چگالی برحسب زمان برای فاز جامد و مایع را می توان به شکل روابط ۶ و ۷ در نظر گرفت [۲۹].

همکاران به بررسی آنالیز تغییر شکل های بزرگ ترک با استفاده از روش المان محدود توسعه یافته پرداختند. ایده آن ها استفاده از مش بندی چندضلعی با گوشه های بیشتر برای آنالیز ترک بود [۲۴]. روش المان محدود توسعه یافته در سال های اخیر در رشته هایی مختلف مورد استفاده قرار گرفته است، دنگ<sup>۱</sup> و همکاران با استفاده از روش المان محدود توسعه یافته به بررسی شکست و دچار شدن حالت پلاستیک غشاهای نازک سیلیکون پرداختند [۲۵]. از طرفی آلونسو<sup>۲</sup> و همکاران با استفاده از مدل ترک چسبنده به شبیه سازی شکست بتن تحت بارهای مختلف پرداختند [۲۶]. همچنین چن<sup>۳</sup> و همکاران با استفاده از روش المان محدود توسعه یافته به بررسی رشد ترک های چند گانه پرداختند. آن ها نشان دادند روش المان محدود توسعه یافته برای مدل کردن ترک های چندگانه از دقت بالایی برخوردار است [۲۷].

با توجه به تحقیقات انجام شده بر روی ترک در محیط دو فاز تحقیق کاملی بر روی گسترش ترک چسبنده در محیط دو فاز اشباع با استفاده از روش المان محدود توسعه یافته انجام نشده است بنابراین در این پژوهش به بررسی گسترش ترک چسبنده در محیط دو فاز اشباع با استفاده از روش المان محدود توسعه یافته پرداخته شده است. در حالتی که طول ناحیه فرآیند شکست در نوک ترک در مقایسه با طول ترک قابل صرف نظر کردن نباشد نمی توان از مدل مکانیک شکست خطی برای مدل کردن ترک استفاده کرد. در این حالت می توان از مدل ترک چسبنده استفاده می شود، که فرایند شکست را در امتداد ترک متمرکز می کند. با توجه به اینکه در محیط دو فاز اشباع عمدتا منطقه تحت تاثیر نوک ترک در مقایسه با طول ترک کوچک نمی باشد، می توان از مدل ترک چسبنده برای مدل کردن ترک در محیط دو فاز اشباع استفاده کرد. استفاده از روش المان محدود توسعه یافته برای مدل کردن محیط دو فاز اشباع نیاز مش بندی مجدد در هر مرحله از آنالیز را رفع می کند. با در این پژوهش ابتدا روابط اندازه حرکت، بقای جرم و بقای انرژی در محیط متخلخل اشباع بدست آمده است، سپس روابط بدست آمده در حوزه مکان و زمان نوشته شده است. در ادامه روابط برای ترک چسبنده اصلاح شده و با استفاده از روش المان محدود توسعه یافته فرم

1 Deng  
2 Alonso  
3 Chen

که  $(\rho c)_t$  و  $k_t$  را می توان از روابط ۱۳ و ۱۴ بدست آورد.

$$k_t = (1-n)k_s + nk_f \quad (13)$$

$$(\rho c)_t = (1-n)(\rho c)_s + n(\rho c)_f \quad (14)$$

که  $k_s$  ضریب انتقال حرارتی فاز جامد و  $k_f$  ضریب انتقال حرارتی فاز سیال می باشد.

### ۳- گسسته سازی رابطه ها

فرم برداری رابطه اندازه حرکت را می توان به صورت رابطه ۱۵ نشان داد.

$$S^T \sigma + \rho_t b - \rho_t \ddot{u} = 0 \quad (15)$$

که در آن

$$S = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}, \sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \end{bmatrix} \quad (16)$$

رابطه بین تنش کل و تنش موثر را می توان به شکل رابطه ۱۷ نشان داد.

$$\sigma = \sigma' - \alpha m(p_f) \quad (17)$$

که  $p_f$  فشار سیال،  $\sigma$  تنش کل،  $\sigma'$  تنش موثر می باشد. افزایش دما به اندازه  $dT$  در یک محیط همگن، باعث افزایش طول یکسان در هر راستا خواهد شد. بنابراین می توان تنش موثر را به شکل رابطه ۱۸ نوشت.

$$d\sigma' = D(sdu - m \frac{\beta}{3} dT) \quad (18)$$

که در آن

$$\beta = (1-n)\beta_s + n\beta_f \quad (19)$$

و  $D$  ماتریس خواص ماده می باشد. با قرار دادن روابط ۱۷ و ۱۸ در رابطه ۱۵ و فرض  $\alpha = 1$ ، رابطه ۲۰ برای اندازه حرکت بدست

$$\frac{\partial \rho_f}{\partial t} = \rho_{f0} \left[ -\beta_f \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{K_f} \frac{\partial p_f}{\partial t} \right] \quad (6)$$

$$\frac{\partial \rho_s}{\partial t} = \frac{\rho_{s0}}{1-n} \cdot [(\alpha-n) \frac{1}{K_s} \frac{\partial p_f}{\partial t} - \beta_s (\alpha-n) \frac{\partial T}{\partial t} - (1-\alpha) \nabla \cdot v_s] \quad (7)$$

که  $\beta_f$  ضریب افزایش حجم دمایی سیال،  $\beta_s$  ضریب افزایش حجم دمایی جامد،  $K_f$  مدول بالک سیال،  $K_s$  مدول بالک جامد،  $\rho_{s0}$  و  $\rho_{f0}$  چگالی در زمان اولیه،  $p_0$  فشار در زمان اولیه و  $\alpha$  ثابت بایوت نامیده می شود.

$$\alpha = 1 - \frac{K_T}{K_s} \quad (8)$$

که  $K_T$  مدول بالک محیط می باشد. با جایگذاری رابطه ۶ و ۷ در رابطه ۴، رابطه ۹ را خواهیم داشت.

$$\left[ \frac{\alpha-n}{K_s} + \frac{n}{K_f} \right] \frac{\partial p_f}{\partial t} - [(\alpha-n)\beta_s + n\beta_f] \frac{\partial T}{\partial t} + \alpha \nabla \cdot v_s + \nabla \cdot [K(-\nabla p + \rho_f g)] = 0 \quad (9)$$

افزایش دمای محیط باعث ایجاد شار حرارتی در محیط شده و شار حرارتی در محیط باعث ایجاد افزایش انرژی درونی در آن محیط خواهد شد. که می توان رابطه شار حرارتی و انرژی را به شکل رابطه ۱۰ نوشت [۳۰].

$$q'' = k \nabla T, E = mc \Delta T \quad (10)$$

که  $q''$  شار حرارتی،  $k$  ضریب انتقال حرارتی،  $E$  انرژی اعمالی به محیط،  $m$  جرم،  $c$  ظرفیت گرمایی و  $\Delta T$  تغییرات دمای محیط می باشد. با نوشتن تعادل انرژی برای یک المان از محیط رابطه ۱۱ را خواهیم داشت.

$$\nabla \cdot (k \nabla T) = \rho c \left( \frac{\partial T}{\partial t} + v \nabla T \right) \quad (11)$$

که  $k$  ضریب انتقال حرارتی می باشد. با نوشتن رابطه تعادل انرژی برای هر فاز و ترکیب آنها با یکدیگر رابطه ۱۲ را خواهیم داشت.

$$(\rho c)_t \frac{\partial T}{\partial t} + [\rho_f c_f [K(-\nabla p + \rho_f g)]] \cdot \nabla T - k_t \nabla T^2 = 0 \quad (12)$$



خواهد آمد.

رابطه بقای جرم و بقای انرژی به شکل روابط ۲۶ و ۲۷ خواهیم رسید.

$$Q^T \dot{\bar{u}} + H\bar{p} + \tilde{S}\dot{\bar{p}} + R\dot{\bar{T}} = f_2$$

$$Q^T = \int_{\Omega} N_p^T \alpha m B d\Omega$$

$$H = \int_{\Omega} (\nabla N_p)^T k \nabla N_p d\Omega \quad (26)$$

$$\tilde{S} = \int_{\Omega} (N_p)^T \left[ \frac{1-n}{K_s} + \frac{n}{K_f} \right] N_p d\Omega$$

$$R = \int_{\Omega} -(N_p)^T \beta N_T d\Omega$$

$$f_2 = \int_{\Gamma} (N_p)^T q_f d\Gamma + \int_{\Omega} (\nabla N_p)^T (k\rho g) d\Omega$$

$$ZT + Y\dot{\bar{T}} = f_3$$

$$Z = \int_{\Omega} \left\{ N_{\theta}^T [\rho_f c_f k (-\nabla p + \rho_f g)] \cdot \nabla N_{\theta} + \right.$$

$$\left. (\nabla N_{\theta})^T k_{\text{eff}} \nabla N_{\theta} \right\} d\Omega \quad (27)$$

$$Y = \int_{\Omega} N_{\theta}^T (\rho c)_{\text{eff}} N_{\theta} d\Omega$$

$$f_3 = \int_{\Gamma} N_{\theta}^T q'' d\Gamma$$

برای در نظر گرفتن زمان در گسسته سازی معادلات با استفاده از روش نیومارک برای سه رابطه اندازه حرکت، بقای جرم و بقای انرژی گسسته سازی در حوزه زمان انجام شده است که روابط ۲۸ و ۲۹ را خواهیم داشت.

$$M\ddot{\bar{u}}_{n+1} + k\bar{u}_{n+1} - Q\bar{p}_{n+1} - L\bar{T}_{n+1} - f_{1,n+1} = 0$$

$$Q^T \dot{\bar{u}}_{n+1} + H\bar{p}_{n+1} + \tilde{S}\dot{\bar{p}}_{n+1} + R\dot{\bar{T}}_{n+1} - f_{2,n+1} = 0 \quad (28)$$

$$ZT_{n+1} + Y\dot{\bar{T}}_{n+1} - f_{3,n+1} = 0$$

$$\ddot{\bar{u}}_{n+1} = \ddot{\bar{u}}_n + \Delta \ddot{\bar{u}}_n$$

$$\dot{\bar{u}}_{n+1} = \dot{\bar{u}}_n + \ddot{\bar{u}}_n \Delta t + \beta_1 \Delta \ddot{\bar{u}}_n \Delta t$$

$$\bar{u}_{n+1} = \bar{u}_n + \dot{\bar{u}}_n \Delta t + \frac{1}{2} \ddot{\bar{u}}_n \Delta t^2 + \frac{1}{2} \beta_2 \Delta \ddot{\bar{u}}_n \Delta t^2 \quad (29)$$

$$\dot{\bar{p}}_{n+1} = \dot{\bar{p}}_n + \Delta \dot{\bar{p}}_n$$

$$\bar{p}_{n+1} = \bar{p}_n + \dot{\bar{p}}_n \Delta t + \beta_3 \Delta \dot{\bar{p}}_n \Delta t$$

$$\dot{\bar{T}}_{n+1} = \dot{\bar{T}}_n + \Delta \dot{\bar{T}}_n$$

$$\bar{T}_{n+1} = \bar{T}_n + \dot{\bar{T}}_n \Delta t + \beta_3 \Delta \dot{\bar{T}}_n \Delta t$$

$$S^T \left( D(su - m \frac{\beta}{3} T) - \alpha m p_f \right) + \rho_t b - \rho_t \ddot{u} = 0 \quad (20)$$

با نوشتن فرم برداری برای معادلات بقای جرم و بقای انرژی روابط ۲۱ و ۲۲ را خواهیم داشت.

$$\nabla^T [K(-\nabla p + \rho_f g)] + m s \frac{du}{dt} +$$

$$\left[ \frac{1-n}{K_s} + \frac{n}{K_f} \right] \frac{\partial p_f}{\partial t} - [(1-n)\beta_s + n\beta_f] \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \quad (21)$$

$$(\rho c)_t \frac{\partial T}{\partial t} + [\rho_f c_f [K(-\nabla p + \rho_f g)]] \cdot \nabla T - k_t \nabla T^2 = 0 \quad (22)$$

فرم ضعیف معادله اندازه حرکت را می توان به صورت رابطه ۲۳ نشان داد.

$$\int_{\Omega} N_u^T (S^T \sigma + \rho_t b - \rho_t \ddot{u}) d\Omega = 0 \quad (23)$$

که  $N_u^T$  تابع شکل روش المان محدود استاندارد می باشد. استفاده از روش انتگرال جزء به جزء و قضیه دیوارژنس رابطه ۲۳ را می توان به صورت رابطه ۲۴ بازنویسی کرد.

$$\int_{\Omega} B^T \sigma d\Omega + \int_{\Omega} N_u^T \rho_t \ddot{u} d\Omega = \int_{\Gamma} N_u^T t d\Gamma +$$

$$\int_{\Omega} N_u^T \rho b d\Omega, B = S N_u \quad (24)$$

که  $\Gamma$  مرز محیط می باشد. با استفاده از رابطه ۱۷ می توان به فرم گسسته شده رابطه ۲۴ به شکل رابطه ۲۵ رسید.

$$M\ddot{\bar{u}} + k\bar{u} - Q\bar{p} - L\bar{T} = f_1$$

$$M = \int_{\Omega} N_u^T \rho N_u d\Omega$$

$$K = \int_{\Omega} B^T D B d\Omega \quad (25)$$

$$Q = \int_{\Omega} B^T m N_p d\Omega$$

$$L = \int_{\Omega} B^T D m \frac{\beta}{3} N_T d\Omega$$

$$f_1 = \int_{\Gamma} N_u^T t d\Gamma + \int_{\Omega} N_u^T \rho b d\Omega$$

با انجام روندی مشابه برای بقای جرم و بقای انرژی به فرم گسسته

اندازه حرکت به شکل رابطه ۳۱ بازنویسی می شود.

$$\int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{N}_u^T) \sigma d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{N}_u^T \rho \ddot{\mathbf{u}} d\Omega + \int_{\Gamma_d} \langle \mathbf{N}_u^T \sigma \rangle \cdot \mathbf{n}_{\Gamma_d} d\Gamma_d = \int_{\Gamma} \mathbf{N}_u^T t d\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{N}_u^T \rho b d\Omega \quad (33)$$

که  $\Gamma_d$  و  $\mathbf{n}_{\Gamma_d}$  به ترتیب مرز ترک و بردار نرمال بر ترک می باشد. تنش کل ایجاد شده در لبه ترک ناشی از فشار سیال و ترک چسبنده می باشد، که می توان از رابطه ۳۴ برای تنش کل استفاده کرد.

$$\sigma \cdot \mathbf{n}_{\Gamma_d} = t - \alpha p \mathbf{n}_{\Gamma_d} \quad (34)$$

که  $t$  بردار تنش چسبنده می باشد. با جایگذاری رابطه ۳۴ در رابطه ۳۳ رابطه ۳۵ را خواهیم داشت.

$$\int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{N}_u^T) \sigma d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{N}_u^T \rho \ddot{\mathbf{u}} d\Omega = \int_{\Gamma} \mathbf{N}_u^T t d\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{N}_u^T \rho b d\Omega - \int_{\Gamma_d} \langle \mathbf{N}_u^T \rangle \cdot t d\Gamma_d + \int_{\Gamma_d} \langle \mathbf{N}_u^T \rangle \cdot \mathbf{n}_{\Gamma_d} p d\Gamma_d \quad (35)$$

با بازنویسی روابط بقای جرم و انرژی برای محیط اشباع دارای ترک روابط ۳۶ و ۳۷ را برای بقای جرم و بقای انرژی خواهیم داشت.

$$\int_{\Omega} \nabla \mathbf{N}_p^T k \nabla p d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T m B \dot{\mathbf{u}} d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \dot{p} \left[ \frac{1-n}{K_s} + \frac{n}{K_f} \right] d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \beta \dot{T} d\Omega = \int_{\Gamma} \mathbf{N}_p^T q_f d\Gamma - \int_{\Gamma_d} \langle \mathbf{N}_p^T \mathbf{n}_f \mathbf{Q}_f \rangle d\Gamma_d \quad (36)$$

$$\int_{\Omega} \nabla \mathbf{N}_{\theta}^T k_{eff} \nabla T d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{N}_{\theta}^T \{ (\rho c)_{eff} \dot{T} + \rho_f c_f k (-\nabla p + \rho_f g) \} \cdot \nabla T d\Omega = \int_{\Gamma} \mathbf{N}_{\theta}^T q'' d\Gamma - \int_{\Gamma_d} \langle \mathbf{N}_{\theta}^T \mathbf{Q}'' \rangle d\Gamma_d \quad (37)$$

$$\int_{\Omega} \nabla \mathbf{N}_{\theta}^T k_{eff} \nabla T d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{N}_{\theta}^T \{ (\rho c)_{eff} \dot{T} + \rho_f c_f k (-\nabla p + \rho_f g) \} \cdot \nabla T d\Omega = \int_{\Gamma} \mathbf{N}_{\theta}^T q'' d\Gamma - \int_{\Gamma_d} \langle \mathbf{N}_{\theta}^T \mathbf{Q}'' \rangle d\Gamma_d \quad (37)$$

$$\int_{\Gamma} \mathbf{N}_{\theta}^T q'' d\Gamma - \int_{\Gamma_d} \langle \mathbf{N}_{\theta}^T \mathbf{Q}'' \rangle d\Gamma_d$$

بعد از بازنویسی روابط که ترک را در آن ها در نظر گرفتیم باید برای مدل کردن میدان جابجایی، فشار و دما غنی سازی انجام شود.

برای همگرا شدن معادلات بالا مقادیر  $\beta_1$ ،  $\beta_2$  و  $\beta_3$  باید عددی بزرگتر از ۰/۵ در نظر گرفته شوند [۳۱]. با نوشتن روابط در لحظه  $t_n$  می توان رفتار محیط را در حوزه مکان و زمان به شکل رابطه ۳۰ رسید.

$$\begin{aligned} \psi_{n+1}^{(1)} &= M_{n+1} \Delta \ddot{\mathbf{u}}_n + \frac{1}{2} \beta_2 \Delta t^2 K_{n+1} \Delta \ddot{\mathbf{u}}_n - \bar{\beta}_1 \Delta t Q_{n+1} \Delta \dot{\mathbf{p}}_n - F_{n+1}^{(1)} \\ \psi_{n+1}^{(2)} &= \beta_1 \Delta t Q_{n+1}^T \Delta \ddot{\mathbf{u}}_n + \bar{\beta}_1 \Delta t H_{n+1} \Delta \dot{\mathbf{p}}_n + \tilde{S}_{n+1} \Delta \dot{\mathbf{p}}_n - F_{n+1}^{(2)} \\ \psi_{n+1}^{(3)} &= \bar{\beta}_1 \Delta t Z_{n+1} \Delta \dot{\mathbf{T}}_n + Y_{n+1} \Delta \dot{\mathbf{T}}_n - F_{n+1}^{(3)} \end{aligned} \quad (30)$$

برای بدست آوردن مجهولات  $\Delta \ddot{\mathbf{u}}$ ،  $\Delta \dot{\mathbf{p}}$ ،  $\Delta \dot{\mathbf{T}}$  روش نیوتن-رافسون استفاده می شود، که به شکل رابطه ۳۱ می باشد.

$$\mathbf{J} \begin{Bmatrix} \delta \Delta \ddot{\mathbf{u}}_n \\ \delta \Delta \dot{\mathbf{p}}_n \\ \delta \Delta \dot{\mathbf{T}}_n \end{Bmatrix}^{i+1} = - \begin{Bmatrix} \psi_{n+1}^{(1)} \\ \psi_{n+1}^{(2)} \\ \psi_{n+1}^{(3)} \end{Bmatrix}^i \quad (31)$$

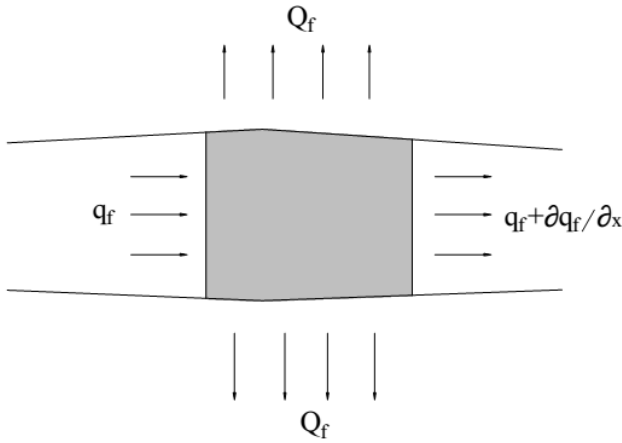
$$\begin{Bmatrix} \Delta \ddot{\mathbf{u}}_n \\ \Delta \dot{\mathbf{p}}_n \\ \Delta \dot{\mathbf{T}}_n \end{Bmatrix}^{i+1} = \begin{Bmatrix} \Delta \ddot{\mathbf{u}}_n \\ \Delta \dot{\mathbf{p}}_n \\ \Delta \dot{\mathbf{T}}_n \end{Bmatrix}^i + \begin{Bmatrix} \delta \Delta \ddot{\mathbf{u}}_n \\ \delta \Delta \dot{\mathbf{p}}_n \\ \delta \Delta \dot{\mathbf{T}}_n \end{Bmatrix}^{i+1}$$

برای محاسبه ماتریس ژاکوبین می توان از رابطه ۳۲ استفاده کرد.

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_{n+1}^{(1)}}{\partial \Delta \ddot{\mathbf{u}}_n} & \frac{\partial \psi_{n+1}^{(1)}}{\partial \Delta \dot{\mathbf{p}}_n} & \frac{\partial \psi_{n+1}^{(1)}}{\partial \Delta \dot{\mathbf{T}}_n} \\ \frac{\partial \psi_{n+1}^{(2)}}{\partial \Delta \ddot{\mathbf{u}}_n} & \frac{\partial \psi_{n+1}^{(2)}}{\partial \Delta \dot{\mathbf{p}}_n} & \frac{\partial \psi_{n+1}^{(2)}}{\partial \Delta \dot{\mathbf{T}}_n} \\ \frac{\partial \psi_{n+1}^{(3)}}{\partial \Delta \ddot{\mathbf{u}}_n} & \frac{\partial \psi_{n+1}^{(3)}}{\partial \Delta \dot{\mathbf{p}}_n} & \frac{\partial \psi_{n+1}^{(3)}}{\partial \Delta \dot{\mathbf{T}}_n} \end{bmatrix} = \quad (32)$$

$$\begin{bmatrix} M_{n+1} + \frac{1}{2} \beta_2 \Delta t^2 K_{n+1} & -Q_{n+1} \bar{\beta}_1 \Delta t & -L_{n+1} \bar{\beta}_1 \Delta t \\ Q_{n+1} \bar{\beta}_1 \Delta t & H_{n+1} \bar{\beta}_1 \Delta t + \tilde{S}_{n+1} & R_{n+1} \\ 0 & 0 & Z_{n+1} \beta_1 \Delta t + Y_{n+1} \end{bmatrix}$$

برای در نظر گرفتن ترک در روابط باید اختلاف متغیرها در دو لبه ترک را در روابط اعمال کرد، با استفاده از قانون دیوارزنی رابطه



شکل ۱: المان ترک دارای جریان سیال.  
Fig. 1. Crack schematic with fluid flow

$$T = \frac{\partial t}{\partial [u]} = \begin{bmatrix} \frac{\partial t_n}{\partial [u_n]} & \frac{\partial t_n}{\partial [u_s]} \\ \frac{\partial t_s}{\partial [u_n]} & \frac{\partial t_s}{\partial [u_s]} \end{bmatrix} \quad (42)$$

که  $t_s$  و  $t_n$  به ترتیب مولفه های نرمال و مماسی تنش چسبنده،  $[u_n]$  و  $[u_s]$  به ترتیب بردار جابجایی نسبی در جهات نرمال و مماسی می باشند. با توجه به مطالب گفته شده ماتریس سختی المان های چسبنده به صورت رابطه ۴۳ اصلاح می شود.

$$K_{adh} = \int_{\Gamma_d} (N_u^{enr})^T \cdot T \cdot N_u^{enr} d\Gamma_d \quad (43)$$

برای فرم ماتریسی رابطه بقای جرم با استفاده از روش المان محدود توسعه یافته روابط ۴۴ را خواهیم داشت.

$$\int_{\Omega} \nabla N_p^T k \nabla p d\Omega + \int_{\Omega} N_p^T m B \dot{u} d\Omega + \int_{\Omega} N_p^T \dot{p} \left[ \frac{1-n}{K_s} + \frac{n}{K_f} \right] d\Omega + q_{ine} = q_{ext} \quad (44)$$

$$q_{int} = \int_{\Gamma_d} (N_p^{enr})^T n_f Q_f n_{\Gamma_d} d\Gamma_d$$

$$q_{ext} = \int_{\Gamma} N_p^T q_f d\Gamma + \int_{\Omega} N_p^T \beta \dot{T} d\Omega$$

که  $Q_f$  دبی خروجی از طرفین ترک می باشد. برای بدست آوردن دبی خروجی از طرفین ترک باید رابطه بقای جرم را برای

بنابراین میدان جابجایی، فشار و دما به شکل رابطه ۳۸ غنی سازی می شوند.

$$\begin{aligned} u(x) &= \sum_i N_i(x) u_i + \sum_j N_j(x) H(x) a_j \\ p(x) &= \sum_i N_i(x) p_i \\ T(x) &= \sum_i N_i(x) T_i \end{aligned} \quad (38)$$

که  $N_i^T(x)$  و  $N_i^P(x)$ ،  $N_i(x)$  تابع شکل المان محدود استاندارد برای جابجایی، فشار سیال و دما،  $a_j$  درجات آزادی اضافه شده برای توابع غنی شده می باشند. همچنین  $H(x)$  تابع هویساید به شکل زیر می باشد.

$$H(x) = \begin{cases} 1 & (x - x_{\Gamma_d}) \cdot n \geq 0 \\ -1 & (x - x_{\Gamma_d}) \cdot n \leq 0 \end{cases}$$

با نوشتن روابط بدست آمده به فرم ماتریس با استفاده از روش المان محدود توسعه یافته برای رابطه اندازه حرکت، رابطه ۳۹ را خواهیم داشت.

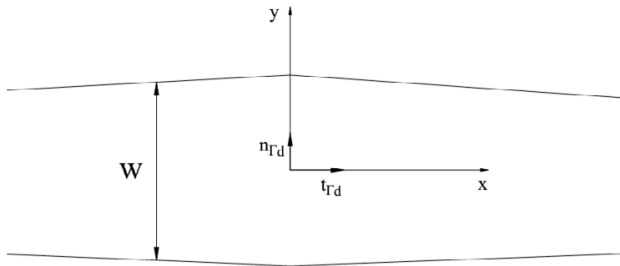
$$\begin{aligned} \int_{\Omega} B^T \sigma' d\Omega - \int_{\Omega} B^T \alpha m p d\Omega + \int_{\Omega} N_u^T \rho \dot{u} d\Omega + F_{int} &= F_{ext} \\ F_{int} &= \left( \int_{\Gamma_d} (N_u^{enr})^T n_{\Gamma_d} d\Gamma_d \right) \bar{p} - \int_{\Gamma_d} (N_u^{enr})^T \cdot t d\Gamma_d \\ F_{ext} &= \int_{\Gamma} N_u^T t d\Gamma + \int_{\Omega} N_u^T \rho b d\Omega \end{aligned} \quad (39)$$

که  $N_u^{enr}$  مقادیر غنی شده در تابع شکل جابجایی می باشند. توجه به اضافه شدن ترک چسبنده، ماتریس سختی باید به صورت روابط زیر اصلاح شود.

$$\frac{\partial F_{int}}{\partial U} = \int_{\Gamma_d} (N_u^{enr})^T \cdot t d\Gamma_d = \int_{\Gamma_d} (N_u^{enr})^T \cdot T \cdot [u] d\Gamma_d \quad (40)$$

که  $[u]$  جابجایی نسبی دو لبه ترک و  $T$  ماتریس مماسی ناپیوستگی می باشد، که از روابط ۴۱ و ۴۲ تعیین می شوند.

$$[u] = N_u^{enr} \bar{U} \quad (41)$$



شکل ۲. مختصات محلی ترک.  
Fig. 2. Local coordinates of crack

یک المان ترک نوشته شود. فرض می شود سرعت سیال داخل ترک به صورت سهموی باشد [۳۲]. در شکل ۱ المان ترک دارای جریان سیال نشان داده شده است.

$$u_y = -\frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \left( \frac{w^2}{4} - y^2 \right) \quad (45)$$

که  $\mu$  لزجت سیال می باشد. بنابراین مقدار دبی عبوری از ترک به صورت رابطه ۴۶ محاسبه می شود.

$$q = \int_{-\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}} u_y dy = -\frac{w^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (46)$$

با نوشتن رابطه بقای جرم برای یک المان از ترک که در شکل ۱ نشان داده است. خواهیم داشت.

$$q_f = \left( q_f + \frac{\partial q_f}{\partial x} dx \right) + (Q_f dx) + (\dot{w} dx) \rightarrow Q_f = -\frac{\partial q_f}{\partial x} - \dot{w} \quad (47)$$

$$Q_f = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{w^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) - \dot{w} \rightarrow Q_f =$$

$$\frac{w^2}{4\mu} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{w^3}{12\mu} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \dot{w}$$

رابطه ۴۷ براساس مختصات محلی ترک نوشته شده است، که باید آن را به سیستم مختصات کلی تبدیل کنیم. این تبدیل را می توان به صورت رابطه ۴۸ انجام داد.

$$\left[ \frac{\partial}{\partial x} (v) \right]_{\text{local}} = [t_{\Gamma_d}^T \nabla v]_{\text{global}} \quad (48)$$

$$\left[ \frac{\partial}{\partial y} (v) \right]_{\text{local}} = [n_{\Gamma_d}^T \nabla v]_{\text{global}}$$

که  $v$  برداری دلخواه، و  $t_{\Gamma_d}^T$  و  $n_{\Gamma_d}^T$  به ترتیب بردار مماس بر ترک و بردار عمود بر ترک می باشد. که در شکل ۲ نشان داده شده است. با توجه به شکل ۲ مقدار بازشدگی ترک از رابطه ۴۹ بدست می آید.

$$w = n_{\Gamma_d} \langle N_u \rangle \bar{U} \quad (49)$$

با توجه به مطالب گفته شده می توان مقدار  $q_{\text{int}}$  را به صورت رابطه ۵۰ بازنویسی کرد.

$$q_{\text{int}} = \int_{\Gamma_d} (N_p^{\text{enr}})^T n_f Q_f n_{\Gamma_d} d\Gamma_d = \int_{\Gamma_d} (N_p^{\text{enr}})^T [(n_{\Gamma_d}^T [N_u^{\text{enr}}] \bar{U}) (t_{\Gamma_d}^T \langle N_u^{\text{enr}} \rangle \dot{U}) + (n_{\Gamma_d}^T [N_u^{\text{enr}}] \bar{U})] + \frac{1}{K_f} (n_{\Gamma_d}^T [N_u^{\text{enr}}] \bar{U}) (\langle N_p^{\text{enr}} \rangle \dot{P}) + \frac{1}{12\mu} (t_{\Gamma_d}^T (\nabla N_u^{\text{enr}}))^T (n_{\Gamma_d}^T [N_u^{\text{enr}}] \bar{U})^3 (t_{\Gamma_d}^T (\nabla N_p^{\text{enr}}) \bar{P})] d\Gamma_d \quad (50)$$

با انجام روندی مشابه برای رابطه بقای انرژی به رابطه ۵۱ خواهیم رسید.

$$\int_{\Omega} \nabla N_{\theta}^T k_{\text{eff}} \nabla T d\Omega + \int_{\Omega} N_{\theta}^T \left\{ (\rho c)_{\text{eff}} \dot{T} + \rho_f c_f k (-\nabla p + \rho_f g) \right\} \nabla T d\Omega + Q_{\text{int}} = Q_{\text{ext}} \quad (51)$$

$$Q_{\text{int}} = \int_{\Gamma} N_{\theta}^T q'' dT$$

$$Q_{\text{ext}} = \int_{\Gamma_d} (N_{\theta}^{\text{enr}})^T Q'' n_{\Gamma_d} d\Gamma_d$$

با توجه به سه رابطه ۳۹، ۴۴ و ۵۱ می توان فرم ماتریسی معادلات اندازه ی حرکت، بقای جرم و معادله انرژی را به شکل رابطه ۵۲ نوشت.

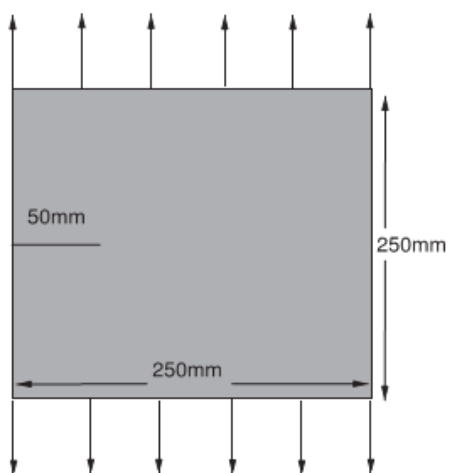
$$M \ddot{u} + K \bar{u} - Q \bar{p} - L \bar{T} + F_{\text{int}} = F_{\text{ext}}$$

$$Q^T \dot{\bar{u}} + H \bar{p} + S \dot{\bar{p}} + R \dot{\bar{T}} + q_{\text{int}} = q_{\text{ext}} \quad (52)$$

$$Z \bar{T} + Y \dot{\bar{T}} + Q_{\text{int}} = Q_{\text{ext}}$$

که در آن ماتریس سختی باید به شکل رابطه ۵۳ اصلاح شود.

$$K = K_{\text{enr}} + K_{\text{adh}} = \int_{\Omega} B_{\text{enr}}^T D B_{\text{enr}} d\Omega + \int \langle N_u^T \rangle \cdot T \cdot \langle N_u^T \rangle d\Gamma_d \quad (53)$$



شکل ۳. هندسه و بارگذاری مدل اول [۳۳].  
Fig. 3. The geometry and loading for model 1

جدول ۱. مشخصات مواد.  
Table 1. Material properties

پارامتر	مقدار
ضریب الاستیسیته	۲۸.۸۵ Gpa
مدول بالک سیال	۱۳.۴۶ Gpa
مدول بالک جامد	۰.۲ Gpa
ویسکوزیته سیال	$10^{-9}$ Mpa s
نفوذپذیری	$2.78 * 10^{-10}$ mm <sup>2</sup>
ضریب پواسون	۰.۱۸
ضریب بایوت	۱
انرژی شکست	۰.۰۹۵ N/mm
تخلخل	۰.۲

برای در نظر گرفتن اثرات فشار، جابجایی و دما معادلات بقای جرم، مومنتوم و بقای انرژی برای محیط دو فاز نوشته شد. سپس برای در نظر گرفتن زمان معادلات بدست آمده در حوزه زمان گسسته سازی شدند. همچنین برای غنی سازی المان های ترک خورده از تابع هویساید و برای حل همزمان روابط از روش نیوتن-رافسون استفاده شد. برای بررسی صحت سنجی روابط بدست آمده دو مدل عددی که توسط محققان دیگر مدل سازی شده بودند، با استفاده از روابط بدست آمده مورد تحلیل قرار گرفتند. نتایج بدست آمده صحت روابط بدست آمده را نشان می دهد. به طوری که حداکثر فشار سیال ایجاد شده در مرحله آخر تحلیل در مدل اول ۰/۱۳۲- مگاپاسکال و در

#### ۴- مدل سازی عددی

در این بخش برای صحت سنجی روابط بدست آمده دو مدل عددی که توسط محققان مورد بررسی قرار گرفته، مدل سازی شده است.

##### ۴-۱- مدل اول

مدل عددی مورد بررسی که یک محیط متخلخل اشباع می باشد در سال ۲۰۱۳ توسط ایرزال<sup>۱</sup> و همکاران مورد تحلیل قرار گرفته است [۳۳]، در مدل مورد بررسی در کنار صفحه ناپیوستگی به طول ۵۰ میلیمتر قرار دارد. هندسه ترک در شکل ۳ نشان داده شده است. فرض شده است تمام مرز صفحه نفوذپذیری نداشته باشد. آنالیز در بازه های زمانی ۰/۰۱ ثانیه انجام شده و تا هنگامی که ترک به صفحه مقابل ناپیوستگی برسد آنالیز ادامه خواهد یافت. مشخصات مصالح استفاده شده در جدول ۱ ارائه شده است. برای بدست آوردن کانتور فشار سیال با استفاده از روابط بدست آمده کد متلبی نوشته شده است که در شکل ۴ کانتور فشار سیال در مرحله آخر از تحلیل در مقایسه با مرجع ۳۳ نشان داده شده است.

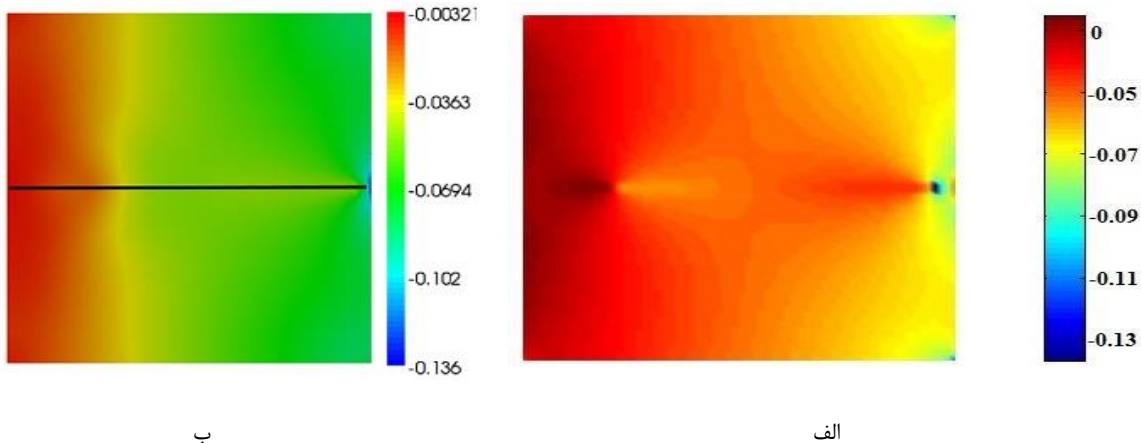
##### ۴-۲- مدل دوم

مدل دوم مورد بررسی که در مرجع شماره ۳۳ مورد بررسی قرار گرفته است، تیری را نشان می دهد که یک ناپیوستگی به اندازه ۱۰ میلی متر به طور متقارن که در شکل ۵ نشان داده شده است، قرار دارد. سمت راست تیر دارای هیچگونه حرکتی نیست. در حالی که بالا و پایین تیر دارای تکیه گاه ساده می باشد. برای شرایط مرزی پایین سمت چپ تیر فرض شده است نیروی که در شکل ۵ نشان داده شده است وارد شود. مشخصات مواد مورد استفاده در این مدل همانند جدول ۱ می باشد. شکل ۵ گسترش ترک بدست آمده با استفاده از کد متلب نوشته شده با استفاده از روابط بدست آمده و نتایج مرجع شماره ۳۳ را نشان می دهد.

#### ۵- بحث و نتیجه گیری

در این تحقیق به بررسی گسترش ترک چسبنده با استفاده از روش المان محدود توسعه یافته در محیط دو فاز پرداخته شد، ابتدا

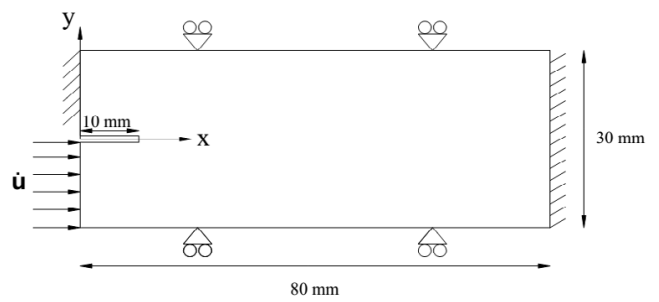
1 Irzal



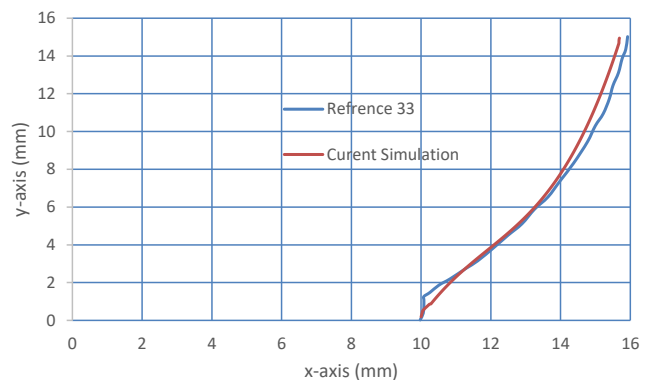
شکل ۴. کانتور فشار سیال (واحد بر حسب مگاپاسکال). الف- محاسبه شده (با کد متلب توسط نویسندگان) ب- ارائه شده در مرجع [۳۳].  
 Fig. 4. Fluid pressure profiles (MPa): (a) Current simulation and (b) Irzal et al [33]

### مراجع

- [1] T.Belytschko and T.Black, Elastic crack growth in finite element with minimum remeshing. International Journal of Numerical Methods in Engineering, 1999. 45: p. 601-620.
- [2] N.Moes, J.Dolbow, and T.Belytschko, A finite element method for crack growth without remeshing. International Journal of Numerical Methods in Engineering, 1999. 46: p. 131-150.
- [3] J.Dolbow, An extended finite element method with discontinuous enrichment for applied mechanics. 1999, Northwestern University.
- [4] J.J.C.Remmers, R.d. Borst, and A.Needleman, The simulation of dynamic crack propagation using the cohesive segment method. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 2008. 56: p. 70-92.
- [5] T.Belytschko, et al., Arbitrary discontinuities in finite elements. International Journal of Numerical Methods in Engineering, 2001. 50: p. 993-1013.
- [6] N.Sukumar, et al., Modeling holes and inclusions by level sets in the extended finite-element method. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2001. 190: p. 6183-6200.
- [7] J.Chessa and T.Belytschko, An extended finite element method for two phase fluids. J Appl Mech, 2003. 70: p. 10-17.
- [8] A.Pirec and E.Detouranay, An implicit level set method for modeling hydraulically driven fractures. Computer



شکل ۵. هندسه، بارگذاری و شرایط مرزی مدل دوم.  
 Fig. 5. The geometry, loading and boundary condition for model 2



شکل ۶. مقایسه گسترش ترک مدل دوم مدلسازی شده با مرجع شماره [۳۳].  
 Fig. 6. Comparison of the crack propagation between current simulation and reference [33]

مرجع شماره ۳۳، ۰/۱۳۶- مگاپاسکال می باشد و همچنین حداکثر اختلاف بین نتایج مدل دوم مدل شده و مرجع شماره ۲۷، ۵ درصد می باشد.

- mechanical–chemical processes in the evolution of engineered geothermal reservoirs. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.*, 2009. 46: p. 855-864.
- [21] R.Gelet, B.Loret, and N.Khalili, A thermo-hydro-mechanical coupled model in local thermal non-equilibrium for fractured HDR reservoir with double porosity. *J. Geophys. Res.*, 2012.
- [22] S.N.Pandey, A.Chaudhuri, and S.Kelkar, A coupled thermo-hydro-mechanical modeling of fracture aperture alteration and reservoir deformation during heat extraction from a geothermal reservoir. *Geothermics*, 2017. 65: p. 17-31.
- [23] I.Asareh, Y.Cheol, and J.HoonSong, A numerical method for dynamic fracture using the extended finite element method with non-nodal enrichment parameters. *International Journal of Impact Engineering*, 2018. 121 p. 63-76.
- [24] H.Hyynh, et al., An extended polygonal finite element method for large deformation fracture analysis. *Engineering Fracture Mechanics*, 2019. 209 p. 344-406.
- [25] J. Deng, N.L., H. Zhou, and W. Xue, Predicting plastic and fracture properties of silicon oxycarbide thin films using extended finite element method. *Journal of Alloys and Compounds*, 2019. 792 p. 481-486.
- [26] J. Deng, N.L., H. Zhou, and W. Xue, Predicting plastic and fracture properties of silicon oxycarbide thin films using extended finite element method. *Journal of Alloys and Compounds*, 2019. 792 p. 481-486.
- [27] J.Chen and Z.Xiao, The enhanced extended finite element method for the propagation of complex branched cracks. *Engineering Analysis With Boundary Elements*, 2019. 104: p. 46-62.
- [28] M.W.Lai, D.Rubin, and E.Krempel, *Introduction to Continuum Mechanics*. 1993, Pergamon Press.
- [29] R.T.Fernandez, *Natural Convection from cylinders buried in porous media*. 1972, Engineering University of California
- [30] J.P.Holman, *Heat Transfer*. 1968: Mc Grow-Hill.
- [31] O.C.Zienkiewicz, A.H.C.Chan, and M.Pastor, *Computational geomechanics with especial reference to Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2008. 197.
- [9] J.Rethore, R.d. Borst, and M.A.Abellan, A two-scale approach for fluid flow in fractured porous media. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2007. 71: p. 780-800.
- [10] B.Lecampion, An extended finite element method for hydraulic fracture problems. *Commun. Numer. Methods Eng*, 2009. 25: p. 121-133.
- [11] E.Gordeliy and A.Peirce, Coupling schemes for modeling hydraulic fracture propagation using the XFEM. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng*, 2013. 253: p. 305-322.
- [12] E.Gordeliy and A.Peirce, Enrichment strategies and convergence properties of the XFEM for hydraulic fracture problems. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng*, 2015. 283: p. 474-502.
- [13] J.Vignollet, S.May, and R.d. Borst, Isogeometric analysis of fluid-saturated porous media including flow in the cracks. *Int. J. Numer. Methods Eng*, 2016.
- [14] R.de.Borst, Fluid flow in fractured and fracturing porous media: A unified view. *Mechanics Research Communications*, 2017. 80: p. 47-57.
- [15] K.Terzaghi, *Theoretical Soil Mechanics*. 1943: John Wiley & Sons.
- [16] D.Gawin and P.Klemm, Coupled heat and moisture transfer with phase change in porous building materials. *Arch Civil Engng*, 1994. 40: p. 89-104.
- [17] B.A.Schrefler, X.Y.Zhan, and L.Simoni, A coupled model for water flow, air flow and heat flow in deformable porous media. *Int J Numer Meth Heat Fluid Flow*, 1995. 5: p. 531-547.
- [18] H.Vaziri, Theory and application of a fully coupled thermo-hydro-mechanical finite element model. *Compos Struct*, 1996. 61: p. 131-146.
- [19] B.Gatmiri and C.Arson, a powerful tool of thermohydro-mechanical behaviour and damage modeling of unsaturated porous media. *Comput Geotech*, 2008. 35: p. 890-915.
- [20] J.Taron and D.Elsworth, *Thermal–hydrologic–*

- [33] F.Irzala, J.C.Remmers, and M.Huyghe, A large deformation formulation for fluid flow in a progressively fracturing porous material. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2013. 256(1): p. 29-37.
- [32] R.W.Zimmerman and G.S.Bodvarsson, Hydraulic Conductivity of Rock Fractures. *Transport in Porous Media*, 1996. 23: p. 1-30.

چگونه به این مقاله ارجاع دهیم

A. Shoostari, S. Baygi, *Study of Growth of Cohesive Crack in two Phase Environments with Extended Finite Element Method*, *Amirkabir J. Civil Eng.*, 52(9) (2020) 2289-2300.

DOI: [10.22060/ceej.2019.16126.6138](https://doi.org/10.22060/ceej.2019.16126.6138)

