Amirkabir Journal of Civil Engineering

Amirkabir J. Civil Eng., 52(12) (2021) 741-744
DOI: 10.22060/ceej.2019.16443.6230

Application of Multiquadric Radial Basis Function method for Helmholtz equation in seismic wave analysis for reservoir of rigid dams

Reza Babaee[1], Ehsan Jabbari[1,*], Morteza Eskandari-Ghadi[2]

[1] Department of Civil Engineering, University of Qom, Qom, Iran
[2] School of Civil Engineering, College of Engineering, University of Tehran, Tehran, Iran

ABSTRACT: The high costs of mesh generation in mesh-dependent solution, weakness in capturing singularities, the need of modeling all over the domain, the need of problem dependent fundamental solutions, etc. are some of weaknesses in the common numerical mesh-dependent methods for solving continuum mechanics boundary value problems. In this study, aiming for eliminating some of these shortcomings, one of the well-known Radial Basis Functions (RBF) methods, Multiquadric (MQ), is developed for dynamic analysis of 2D reservoirs of rigid dams in frequency-domain. To this end, the Helmholtz equation and the governing complex boundary conditions are reproduced using MQ function in the frequency domain. The results show that with the use of real and complex forms of the MQ function, the computational time will be respectively optimized for frequencies smaller and larger than the natural frequency of the reservoir. Also, to determine the most important factors affecting both the accuracy and convergence of MQ method, first the inefficiency of some of the previously introduced methods is proved, and then a new high-speed algorithm is presented. It is shown that the optimal shape parameter for MQ method can be formulated in terms of the frequencies of seismic records. This advantage simplifies the application of MQ method in this particular problem and reduces the computational time, considerably. The high accuracy of the present method is shown in two different examples, where the effects of sediment absorption may either be considered or not. The high accuracy compared to the exact solutions achieved in this paper is due to a continuous estimation function defined all over the domain and also due to the simple algorithm used for finding the optimal shape parameter.

Review History:

Received: 2019-05-28
Revised: 2019-08-26
Accepted: 2019-08-27
Available Online: 2019-09-15

Keywords:

Multiquadric Radial Basis Function (MQ-RBF)
Concrete gravity dam
Shape parameter
Frequency domain
Hydrodynamic pressure.

1. INTRODUCTION

In order to avoid meshing and its difficulties and costs, new methods are being introduced and developed for dynamic analysis of concrete dams. In this regard, the present study develops the MQ-RBF method for the dam seismic analysis. MQ-RBF as a meshless method is more convenient and accurate than other RBF methods for solving partial differential equations (PDEs) [1, 2]. Also, this method is more efficient than the mesh-based Finite Element and Boundary Element Methods [3]. Both the accuracy and the speed of convergence of MQ-RBF depend strongly on its shape parameter. So far, researchers have been working on many methods for determining the optimal shape parameter but a comprehensive method has not been developed yet [4-6]. In this study, the commonly previous methods have been investigated for determining the optimal shape parameter and an appropriate algorithm has been presented for analyzing the reservoir of rigid dams for incoming seismic waves. The efficiency and accuracy of the present approach compared with the exact solutions have been shown through two different examples with and without considering the effects of sediment absorption.

2. METHODOLOGY

The governing PDE for distribution of frequency-domain seismic waves in reservoir of rigid dams is the Helmholtz equation:

$$\nabla^2 \varphi + K^2 \varphi = 0 \tag{1}$$

where φ is the velocity potential function and K is the wave number that is defined as the ratio of the excitation frequency to the velocity of sound waves in the water ($K = \omega / C$). Also, boundary conditions of the reservoir domain are defined for the reservoir, bed, dam body and water free surface, respectively, as follow:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = -\frac{i\omega}{C}\varphi \tag{2}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = -\frac{i\omega}{\beta C}\varphi \tag{3}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{\hat{a}_{ns}}{i\omega} \tag{4}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = -\frac{\omega^2}{g}\varphi \tag{5}$$

*Corresponding author's email: e.jabbari@qom.ac.ir

where n is the normal direction to the boundary, β indicates the acoustic impedance ratio of the foundation to the reservoir, $\hat{a}_{ns}$ implies the normal component of boundary acceleration, g is the gravitational acceleration, and $i=\sqrt{-1}$.

MQ approximates the solution of 2D Helmholtz equation with the following estimation function:

$$f(x,y)=\sum_{j=1}^{N}\lambda_j\sqrt{(x-x_j)^2+(y-y_j)^2+c^2} \qquad (6)$$

in which, (x_j, y_j) are the coordinates of the computational nodes, λ_j are unknown coefficients which will be obtained using N points in the computational domain and c is the shape parameter. A new high-speed algorithm is proposed in this study to select the optimal value of c [4]. Furthermore, regarding the imaginary part in the boundary conditions, the approximation function is extended from equation (6) to the following complex form

$$f(x,y)=\sum_{j=1}^{N}\lambda_{Rj}\sqrt{(x-x_j)^2+(y-y_j)^2+c_R^2}+ i\sum_{j=1}^{N}\lambda_{Ij}\sqrt{(x-x_j)^2+(y-y_j)^2+c_I^2} \qquad (7)$$

In this study, it has been shown that the complex form of MQ function (Equation 7) is more accurate than equation (6) for frequencies that are more than natural frequency of the reservoir.

3. RESULTS AND DISCUSSION

In order to evaluate the proposed approach, the hydrodynamic pressure distribution has been calculated in the reservoirs of two rigid gravity dams (Figures 1-3). The analytical solutions for both examples exist. In the second example, the wave absorption effect of sediments is considered in the bottom of the reservoir, while it is not considered in the first example.

The results show that the optimal shape parameter can be formulated in terms of the frequencies of seismic records (Figure 4). This advantage simplifies considerably the application of MQ method in this particular problem and reduces the computational time.

4. CONCLUSIONS

MQ-RBF benefits from the ability for creating a continuous solution function all over the domain,

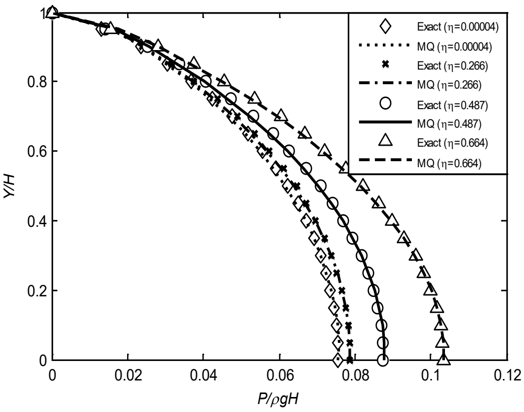


Fig. 1. Distribution of hydrodynamic pressure on dam in example 1.

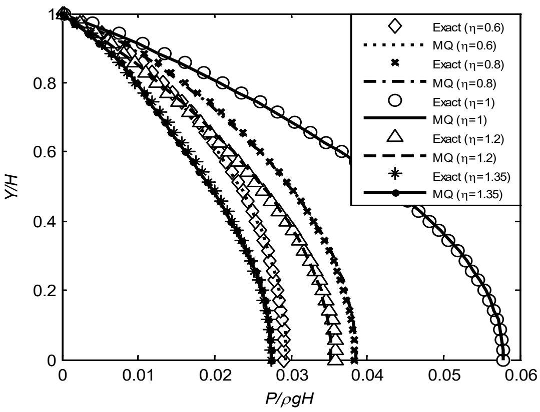


Fig. 3. Distribution of hydrodynamic pressure on dam in example 2.

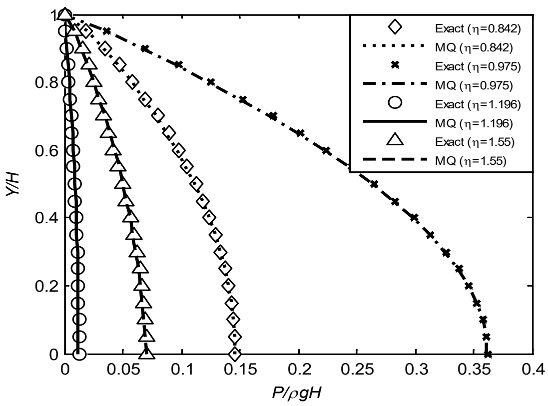


Fig. 2. Distribution of hydrodynamic pressure on dam in example 1.

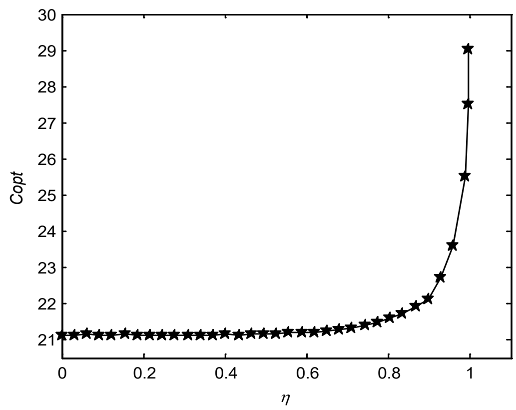


Fig. 4. Variations of optimal shape parameter in terms of frequency ratios in example 2.

independent computational points, high capability for simulating irregular and complex geometries, using domain decomposition technique for simply simulating dam-reservoir-foundation interaction problems, using the strong form of governing equations, easy generalization for 3D problems, easy to use for solving complex problems, etc. In this study, the PDEs and their complex boundary conditions governing the hydrodynamic pressure distribution in the reservoir of rigid dam have been produced for the first time, where an MQ function in the frequency domain has been used. It has been shown that the original and complex forms of this solution function are optimal in terms of accuracy and computational cost for MQ solution which depends strongly on the optimal value of the shape parameter, ten previously introduced methods have been examined and it has been found that they are not applicable for the problem considered in this paper. Subsequently, a new high-speed algorithm has been proposed for the MQ method for seismic analysis of dam reservoirs. Two different examples were solved for validation and the results show the capability and accuracy of the proposed approach compared with the exact solutions.

REFERENCES

[1]S.A. Sarra, Integrated multiquadric radial basis function approximation methods, Computers & Mathematics with Applications, 51(8) (2006) 1283-1296.
[2]S. Patel, A. Rastogi, Meshfree multiquadric solution for real field large heterogeneous aquifer system, Water Resources Management, 31(9) (2017) 2869-2884.
[3]J. Li, A.H.-D. Cheng, C.-S. Chen, A comparison of efficiency and error convergence of multiquadric collocation method and finite element method, Engineering Analysis with Boundary Elements, 27(3) (2003) 251-257.
[4]A. Fallah, E. Jabbari, R. Babaee, Development of the Kansa method for solving seepage problems using a new algorithm for the shape parameter optimization, Computers & Mathematics with Applications, 77(3) (2019) 815-829.
[5]M. Kooshki, R. Babaee, E. Jabbari, Application of RBF multiquadric method for solving seepage problems using a new algorithm for optimization of the shape parameter, Amirkabir Civil Engineering Journal (accepted for publication) doi: 10.22060/CEEJ.2019.15155.5840.
[6]A. Golbabai, E. Mohebianfar, H. Rabiei, On the new variable shape parameter strategies for radial basis functions, Computational and Applied Mathematics, 34(2) (2015) 691-704.

HOW TO CITE THIS ARTICLE

R. Babaee, E. Jabbari, M. Eskandari-Ghadi, Application of Multiquadric Radial Basis Function method for Helmholtz equation in seismic wave analysis for reservoir of rigid dams, Amirkabir J. Civil Eng., 52(12) (2021) 741-744.

DOI: 10.22060/ceej.2019.16443.6230

نشریه مهندسی عمران امیرکبیر

نشریه مهندسی عمران امیرکبیر، دوره ۵۲ شماره ۱۲، سال ۱۳۹۹، صفحات ۳۰۱۵ تا ۳۰۳۰
DOI: 10.22060/ceej.2019.16443.6230

کاربرد روش توابع پایه-شعاعی چندربعی برای حل معادله هلمهولتز به‌منظور آنالیز امواج لرزه‌ای در مخازن سدهای صلب

رضا بابایی[۱]، احسان جباری[۱*]، مرتضی اسکندری قادی[۲]

[۱] گروه مهندسی عمران، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه قم، قم، ایران
[۲] دانشکده مهندسی عمران، پردیس دانشکده های فنی، دانشگاه تهران، تهران، ایران

تاریخچه داوری:
دریافت: ۰۷-۰۳-۱۳۹۸
بازنگری: ۰۴-۰۶-۱۳۹۸
پذیرش: ۰۵-۰۶-۱۳۹۸
ارائه آنلاین: ۲۴-۰۶-۱۳۹۸

کلمات کلیدی:
روش توابع پایه-شعاعی چندربعی
سد بتنی وزنی
پارامتر شکل
حوزه فرکانس
فشار هیدرودینامیک

خلاصه: هزینه بالای ساخت شبکه، نیاز به حل اساسی وابسته به شرایط مسئله، تکینگی، شبیه‌سازی کل میدان، نیاز به شبکه منظم از خطوط متقاطع و ... از برجسته‌ترین نقاط ضعف روش‌های عددی باشبکه پرکاربرد در حل مسائل مکانیک محیط‌های پیوسته می‌باشد. در این پژوهش، با هدف رفع برخی از این نواقص، روش بدون شبکه پایه-شعاعی چندربعی برای آنالیز دوبعدی امواج لرزه‌ای در مخازن سدهای صلب توسعه داده شد. به این منظور، معادله هلمهولتز و شرایط مرزی مختلط حاکم بر مسئله با استفاده از تابع چندربعی در حوزه فرکانس بازتولید و روند حل آن ارائه گردید. نتایج نشان داد که استفاده از فرم اصلی و مختلط این تابع به ترتیب برای فرکانس‌های کمتر و بیشتر از فرکانس طبیعی مخزن، زمان محاسبات را بهینه می‌کند. همچنین برای تعیین مهم‌ترین عامل در دقت و همگرایی روش مذکور یعنی پارامتر شکل بهینه، ابتدا ناکارآمدی برخی از روش‌های پرکاربرد پیشین به اثبات رسید سپس یک الگوریتم جدید و پرسرعت معرفی گردید. نتایج این پژوهش نشان داد که پارامتر شکل بهینه برحسب فرکانس‌های مختلف بارگذاری قابل فرمول‌بندی است. چنین ویژگی کاربرد روش چندربعی در این مسئله خاص را نسبت به سایر روش‌ها آسان‌تر و هزینه‌های محاسباتی آن را کمتر می‌کند. دقت بالای روش حاضر طی دو مثال مختلف به ترتیب با و بدون در نظر گرفتن اثر جذب رسوبات کف مخزن در مقایسه با حل‌های دقیق نشان داده شد که خطای ناچیز آن به دلیل تعریف یک تابع تخمین پیوسته دقیق در کل دامنه مسئله و نیز استفاده از یک الگوریتم کارا برای پیدا کردن پارامتر شکل بهینه می‌باشد.

۱- مقدمه

جابجایی های نسبی وجه مشترک سد و مخزن به هنگام زلزله، حالت کشش موجود در جرم سیال مخزن را برهم می‌زند و باعث انعکاس و انتشار امواج فشاری در آن می‌شود. در دهه های اخیر محققین بسیاری، روش های تحلیلی و عددی متفاوتی را برای محاسبه فشار هیدرودینامیک در مخازن سدها توسعه داده اند. وسترگارد نخستین فردی بود که با فرضیات ساده کننده‌ای اقدام به حل معادله حاکم (معادله هلمهولتز[۱]) در قلمرو فرکانس نمود. با آن فرضیات، یک رابطه تحلیلی به فرم سری برای توزیع فشار بر روی بدنه سد صلب به دست آمد [۱]. در ادامه چوپرا نشان داد که حل وسترگارد تنها برای فرکانس‌های تحریک کوچک‌تر از فرکانس طبیعی اول مخزن معتبر می‌باشد. ایشان با استفاده از تحلیل مختلط و با لحاظ کردن فرضیات وسترگارد اقدام به حل تحلیلی معادله هلمهولتز نمود. چوپرا مؤلفه افقی و قائم زلزله را محاسبه نمود و نشان داد که صرف‌نظر کردن از تراکم‌پذیری و امواج سطحی در حالت تحریک افقی می‌تواند به ترتیب منجر به خطایی در حد ۵/۱ و ۵/۵ درصد در محاسبه نیروی جانبی زلزله گردد [۲]. هومار یک مدل المان‌محدود برای تحلیل و محاسبه فشار هیدرودینامیک مخزن بی‌نهایت در یک سد وزنی ارائه کرد. در این تحقیق یک شرط مرزی انتشاری که برای یک محدوده فرکانسی تحریک تقریباً وسیع کاربرد دارد، ارائه شده است. وی نشان داد که

1 Helmholtz equation

* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: e.jabbari@qom.ac.ir

با اعمال این شرط مرزی در مقایسه با شرط مرزی سامرفلد[1] نتایج واقعی‌تری به دست می‌آید. شرط مرزی مذکور وابسته به فرکانس بوده و ازاین‌رو تحلیل مخزن در قلمرو فرکانس صورت می‌گیرد [۳]. شاران مدلی برای لحاظ کردن میرایی انتشاری امواج هیدرودینامیک در سدها تحت اثر زلزله افقی با استفاده از روش المان‌محدود ارائه کرد. در این کار نشان داده شد که شرط مرزی سامرفلد و مشابه آن تنها برای فرکانس‌های تحریک بزرگ‌تر از فرکانس طبیعی اول مخزن مناسب هستند و برای فرکانس‌های پائین تر که در پاسخ سازه سهم بیشتری دارند، مناسب نمی‌باشند. ازاین‌رو مرز قطع‌شده بالادست بایستی در فاصله بزرگی از سد حدوداً (۲ برابر ارتفاع سد) قرار گیرد [۴]. روش المان‌محدود دارای قابلیت‌های خوبی در آنالیز لرزه‌ای سدهای بتنی وزنی می‌باشد ولی علاوه بر هزینه زیاد برای ساخت شبکه‌ها مشکلاتی همچون ۱) ضرورت ایجاد شبکه‌های درشت‌تر و درنتیجه کاهش دقت در شبیه‌سازی میدان‌های بزرگ‌مقیاس مانند مخزن سد، ۲) تعمیم دشوار به مسائل سه بعدی مخصوصا در هندسه های پیچیده و ۳) عدم توانایی مدل‌سازی میدان‌های نیمه بی‌نهایت را با خود به همراه دارد.

چن تأثیر جریانات سطحی و غیرخطی بودن شتاب انتقالی را در تحلیل دوبعدی سد وزنی و مخزن مطالعه کرد. سد با المان‌های محدود و مخزن با تفاضل‌های محدود گسسته سازی شد و سد پاین‌فلت به‌عنوان مطالعه موردی تحلیل شد. نتایج ایشان نشان می‌دهد که تأثیرات امواج سطحی و شتاب انتقالی در پاسخ سد بی‌اهمیت می‌باشند، اما می‌توانند منجر به خیز شدید آب در وجه بالادست شوند. در تحلیل اخیر مقدار این خیز تا حد ۷/۲ متر هم رسید. در ادامه وی یک الگوی تفاضل محدود سه‌بعدی برای تحلیل فشار هیدرودینامیکی غیرخطی بر روی یک سد قوسی را ارائه کرد. رفتار غیرخطی امواج سطحی و شتاب انتقالی در مدل لحاظ و چند سد با اشکال و دیواره‌های مخزن مختلف تحت زلزله کوبه مطالعه شدند. نتایج نشان می‌دهد که خیز اوج سطح آب برای یک سد قوسی به ۱۸ هم متر می‌رسد که به طرز مبالغه‌آمیزی اعتبار آن را زیر سؤال می‌برد [۵ و ۶]. روش تفاضل محدود به شبکه منظمی از خطوط متقاطع کمکی نیاز دارد و معمولاً تنها برای هندسه و شرایط مرزی منظم قابل کاربرد است. به‌علاوه به دلایلی همچون مدل‌سازی کل فضا، هزینه محاسباتی بالایی دارد.

1 Sommerfeld

روش المان مرزی در راستای اجتناب از وجود شبکه، مسائل را فقط با المان بندی مرزها حل می‌کند. میلان با استفاده از این روش، اثر هندسه مخازن را بر روی مقدار و توزیع فشار هیدرودینامیکی وارده بر سدهای بتنی در حوزه فرکانس بررسی کرد. ایشان نشان داد که مقدار فشار هیدرودینامیک و جابجایی سد در مدل سه‌بعدی بیشتر از مدل دوبعدی به دست می‌آید و بر لزوم به‌کارگیری مدل‌های سه‌بعدی تأکید کرد [۷]. نجیب روش المان مرزی را برای آنالیز مخازن پوشیده از یخ در سدهای بتنی تحت نیروهای هارمونیک افقی به کاربرد. وی توأماً یک شرط مرزی جدید جاذب انرژی برای دوردست مخزن پیشنهاد داد به‌طوری‌که با استفاده از آن، مرز مدل‌سازی در فاصله نزدیک‌تری از سد قرار می‌گیرد و طول مخزن یا به‌عبارت‌دیگر حجم محاسبات کاهش می‌یابد [۸]. در روش المان مرزی ضمن حل مسئله در فضایی با یک بعد کمتر از فضای فیزیکی، شرط میرایی تشعشعی[2] به صورت تحلیلی ارضا می‌شود ولی نیاز به حل اساسی[3] وابسته به شرایط مسئله و موضوع تکینگی[4] از برجسته ترین نقاط ضعف این روش محسوب می‌گردند.

روش المان مرزی-محدود مقیاس شده[5] مزایای روش المان های محدود (عدم نیاز به حل اساسی و ...) و المان های مرزی (شبکه‌بندی مرزها، ارضای شرط میرایی تشعشعی و ...) را با یکدیگر ترکیب کرده است. این روش برای آنالیز هیدرودینامیکی سد و مخزن هم در حوزه زمان و هم در حوزه فرکانس، عملکرد خوبی از خود به نمایش گذاشته است [۹ و ۱۰]. درروش المان مرزی-محدود مقیاس شده از توابع شکل کلاسیک روش المان های محدود استفاده می گردد که می‌تواند برخی از مشکلات آن را با خود به دنبال داشته باشد. همچنین این روش به حل یک دستگاه معادلات دیفرانسیل با ماتریس ضرایب پر منجر می‌شود.

روش معادلات مجزا به عنوان یک روش المان مرزی-محدود مقیاس شده توسعه‌یافته با ایجاد ویژگی‌های جدید توانسته است ماتریس‌های ضرایب دستگاه معادلات حاکم را به‌صورت قطری تولید کند و حجم محاسبات را به طور چشمگیری کاهش دهد. بابایی و همکاران با این روش، شرایط مرزی و معادله‌ی حاکم بر توزیع فشار هیدرودینامیک در مخازن سدهای بتنی را در حوزه فرکانس استخراج

2 Radiation damping
3 Fundamental solution
4 Singularity
5 Scaled boundary finite element method (SBFEM)

و حل کردند [۱۱ و ۱۲]. این روش در هندسه‌های پیچیده با مشکل مواجه می‌شود چراکه در آن، همه مرزها باید از محل مرکز مختصات محلی قابل‌رؤیت باشند.

همان‌طور که اشاره شد تحقیقات در زمینه تحلیل دینامیکی مخازن سدهای بتنی در مسیر اجتناب از شبکه و مشکلات آن پیش می‌روند. پژوهش حاضر نیز در این راستا به توسعه روش بدون شبکه چندربعی[۱] باهدف رفع برخی از مشکلات نامبرده پرداخته است. اصطلاح «چندربعی» ترجمه فارسی عبارت لاتین مالتی کوادریک است که ترجمه درستی به نظر می‌رسد و براساس سایر پژوهش‌های پیشین فارسی، در این مقاله نیز استفاده شده است. این روش زیرمجموعه روش‌های توابع پایه شعاعی[۲] است که کانزا برای اولین بار از آن در حل معادلات دیفرانسیل با مشتق جزئی استفاده کرد [۱۳]. لی و همکاران طی مثال‌های مختلفی، روش چندربعی و روش المان‌محدود را مقایسه نمودند. ایشان با استفاده از بهینه‌سازی پارامتر شکل در سه مثال متفاوت، به این نتیجه رسیدند که دقت روش چندربعی ضمن کاهش حجم محاسبات از روش المان‌محدود بالاتر است [۱۴]. سارا در سال ۲۰۰۶ به گردآوری خانواده توابع پایه شعاعی و بررسی خصوصیات و ارتباط آن‌ها با یکدیگر پرداخت و با آوردن مثال‌هایی، روش چندربعی را اصلی‌ترین عضو این خانواده معرفی کرد [۱۵]. کانزا و همکاران در سال ۲۰۱۳ معادلات برگر[۳] سه‌بعدی را با روش چندربعی حل کردند. ایشان با روش تجزیه دامنه، پیچیدگی دامنه‌های بزرگ را تسهیل و دقت نتایج را با کوچک کردن پارامتر شکل افزایش دادند [۱۶]. وو و ژانگ با استفاده از روش نامبرده معادلات غیرخطی موج را گسسته‌سازی و حل کردند. نتایج آن‌ها نه‌تنها نشان‌دهنده دقت بالای جواب‌ها بود بلکه مشخصات خوبی در ردیابی طولانی‌مدت داشت [۱۷]. باستامنت و همکاران معادلات استوکس را در حالت دوبعدی در یک دامنه محدود حل کرده و تقریب مناسبی برای مقادیر سرعت و فشار به دست آوردند [۱۸]. روش چندربعی برای حل معادله هلمهولتز نیز در حالات تئوری به کار رفته است. در این حالات برخلاف تحلیل لرزه‌ای مخزن سد در حوزه فرکانس، آنالیزها مختلط نبوده است. در این راستا، لین و همکاران چند مثال دوبعدی را ارائه کرده و با فن خاصی مشکل بدحالت شدن ماتریس ضرایب را از بین برده اند [۱۹]. پاتل و همکاران در سال ۲۰۱۷ از روش چندربعی برای حل معادله لاپلاس[۴] و شبیه‌سازی آبخوان‌های نامنظم زیرزمینی استفاده کردند. ایشان در این تحقیق پارامترهایی مانند ناهمگنی، انواع شرایط مرزی و فشار متغیر را بررسی کردند و نتیجه گرفتند که روش حاضر می‌تواند از جنبه دقت و هزینه محاسباتی، به‌عنوان یک شبیه‌ساز بهینه در مدیریت آب‌های زیرزمینی نیز عمل کند [۲۰]. روش چندربعی قابلیت ترکیب با سایر روش‌های عددی را نیز داراست. به‌عنوان‌مثال لی و همکاران در سال ۲۰۱۸ ترکیب این روش را با روش اختلاف محدود در حل معادلات پخش و انتقال به کار بردند و با استفاده از توزیع خاصی از نقاط به نتایجی دقیق‌تر از روش اختلاف محدود دست یافتند [۲۱].

دقت روش چندربعی کاملاً به پارامتر شکل[۵] آن وابسته است. محققین برای یافتن پارامتر شکل بهینه روش‌های تجربی مختلفی را ارائه کرده‌اند [۲۴-۲۲]. کانزا [۲۵ و ۲۶] روابط توانی و خطی را برای تعیین پارامتر شکل متناسب با هر گره محاسباتی ارائه کرده است. سارا اثبات کرد که وقتی پارامتر شکل بزرگ می‌شود، خطای این روابط زیاد می‌شود و برای رفع این مشکل یک رابطه تصادفی را پیشنهاد داد [۲۷]. طبیعت تصادفی این رابطه باعث نتایج مختلف و غیرثابتی در تخمین توابع می‌شود. گل‌بابایی و ربیعی [۲۸] نیز یک رابطه مثلثاتی ارائه کرده‌اند که نسبت به روابط مذکور دقت بالاتری دارد. علاوه بر این، محققین دیگری با ترکیب روابط پیشین توانسته‌اند از مزایای آن‌ها به‌طور هم‌زمان بهره‌مند شوند [۲۹]. دقت روابط مذکور بسته به نوع تابع RBF، بعد مسئله، نوع مسئله (درون‌یابی یا حل معادلات دیفرانسیل) شرایط مرزی (اجباری یا طبیعی) و نوع توزیع نقاط (یکنواخت یا غیریکنواخت) متفاوت است و هر رابطه برای شرایط خاصی پاسخ قابل‌قبول ارائه داده است. همچنین روابط تعیین پارامتر شکل متغیر به دلیل ایجاد اختلافات بیشتر در درایه‌های ماتریس ضرایب، احتمال کوچک شدن عدد وضعیت و بدحالت شدن آن را بالاتر می‌برند. به‌علاوه در چنین روابطی تعیین حد پایین و حد بالای پارامترهای شکل همواره یک چالش بوده است. بی‌آزار یک روش کلی برای تعیین حدود مذکور پیشنهاد داده است. در روش ایشان مسئله ابتدا با پارامترهای شکل مختلف حل می‌شود تا حدود تقریبی آن به دست آید سپس با استفاده از آنها حل نهایی حاصل می‌گردد. واضح

1 Multiquadric (MQ)
2 Radial Basis Function (RBF)
3 Burgers equation
4 Laplace equation
5 Shape parameter

است که این الگوریتم به هزینه محاسباتی بالایی نیاز دارد [۳۰]. چن و همکاران در سال ۲۰۱۸ یک الگوریتم جدید برای یافتن پارامتر شکل ارائه دادند. این الگوریتم در ابتدا پارامتر شکل بهینه را برای مسائلی که حل تحلیلی دارند به دست می‌آورد و از آن برای حل مسائل مشابهی که حل تحلیلی ندارند استفاده می‌کند [۳۱]. آذربنی در سال ۲۰۱۸ یک الگوریتم با دقت بالاتر از سایر روش‌های تعیین پارامتر شکل بهینه ارائه داد. در این روش مسئله با تعداد N و N-2 نقطه محاسباتی به ازای پارامتر شکل‌های مختلفی حل می‌شود و پارامتری که کمترین اختلاف بین دو جواب را ارائه دهد، پارامتر بهینه است [۳۲]. فلاح و همکاران در سال ۲۰۱۹ یک روش سریع برای یافتن پارامتر شکل بهینه در روش چندربعی با کاربرد در حل مسائل تراوش ارائه دادند. در این الگوریتم از روش نصف کردن بازه پارامتر شکل ضمن مشخص کردن حدود آن استفاده می‌شود و مقدار بهینه آن مربوط به حالتی است که تغییرات پاسخ مسئله نسبت به تغییرات پارامتر شکل کمینه باشد [۳۳]. کوشکی و همکاران نیز در سال ۲۰۱۹ با استفاده از الگوریتم ژنتیک به همراه یک تابع هدف جدید، روشی برای یافتن پارامتر شکل بهینه ارائه کردند که برخلاف روش‌های پیشین، پارامتر شکل به‌دست‌آمده از آن به تغییرات تعداد نقاط محاسباتی وابسته نیست [۳۴].

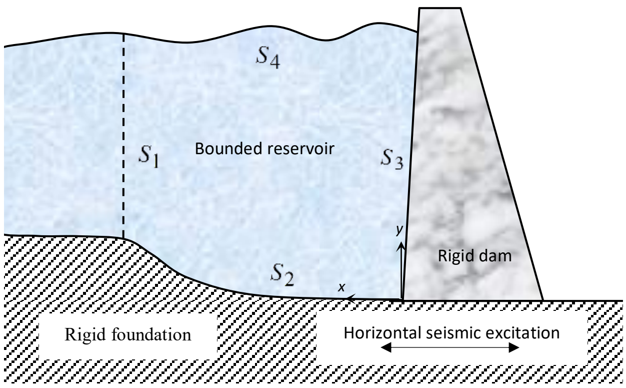
روش چندربعی تاکنون به عنوان اصلی ترین عضو خانواده توابع پایه شعاعی معرفی شده است [۱۵] یعنی دارای کاربرد ساده‌تر و دقت بالاتر از سایر توابع پایه شعاعی در حل معادلات مشتق جزئی می‌باشد. این امر در حل مسائل پتانسیل که شامل موضوع این تحقیق نیز می شود، به اثبات رسیده است [۳۵]. لذا با آگاهی از این موضوع روش چندربعی از میان خانواده توابع پایه شعاعی انتخاب شد. همچنین چون روش المان محدود پرکاربردترین روش باشکه در آنالیز سدها و مبنای نرم‌افزارهای تجاری مانند Abaqus و Ansys است و قبلا دقت و سرعت بالاتر روش چندربعی نسبت به آن به اثبات رسیده است [۱۴]، روش چندربعی در این مقاله به عنوان یک رقیب برای روش المان محدود در آنالیز سدها در نظر گرفته شد و برای اولین بار توسعه آن با حل مسئله انتشار امواج هیدرودینامیک در مخازن سدهای صلب آغاز گردید. به این منظور آنالیز مختلط در حوزه فرکانس انجام خواهد شد، چراکه شرایط مرزی مربوطه مختلط هستند. در این راستا معادلات و شرایط مرزی حاکم در حالت کلی با تابع چندربعی بازتولید و روند حل آن‌ها بیان خواهد شد. در این روند، روش‌های پرکاربرد پیشین برای تعیین پارامتر شکل بهینه بررسی و یک الگوریتم مناسب معرفی می‌گردد. پس از تعیین پارامترهای شکل بهینه متناظر با فرکانس‌های مختلف بارگذاری، رابطه بین آن‌ها مشخص خواهد شد. با در اختیار داشتن چنین رابطه‌ای دیگر نیاز به بهینه کردن پارامتر شکل در هر فرکانس بارگذاری نخواهد بود و ضمن کاربرد آسان‌تر روش چندربعی، هزینه‌های محاسباتی آن نیز به‌شدت کاهش خواهد یافت. درنهایت نتایج رویکرد پیشنهادی در قالب دو مثال متفاوت و کاربردی با روش‌های تحلیلی مقایسه و دقت و توانایی آن ارزیابی می‌شود.

۲- معادله دیفرانسیل و شرایط مرزی حاکم

تحلیل سدهای وزنی در فضای دوبعدی پاسخ قابل قبولی از رفتار واقعی آن‌ها ارائه می‌دهد. بنابراین مخزن و معادله حاکم بر آن در این مقاله به‌صورت دوبعدی در نظر گرفته می‌شود. معادله دیفرانسیل حاکم بر انتشار امواج فشار هیدرودینامیک مخزن در حوزه فرکانس به‌صورت رابطه (۱) بیان می‌شود که یک معادله دیفرانسیل پاره‌ای از نوع معادلات بیضوی با ضرایب ثابت است و با عنوان معادله هلمهولتز شناخته می‌شود [۱۱]:

$$\nabla^2\phi + K^2\phi = 0 \tag{۱}$$

در این رابطه ∇ عملگر لاپلاس، φ تابع پتانسیل سرعت و K عدد موج است که به‌صورت نسبت فرکانس حرکت هارمونیک بر سرعت امواج صوتی در محیط سیال ($K = \frac{\omega}{C}$) تعریف می‌شود. چهار شرط مرزی مطابق شکل (۱) نیز در مخزن سد وجود دارد که در ادامه به‌طور جداگانه برحسب تابع پتانسیل سرعت در حوزه فرکانس بیان می‌شوند [۱۱]:



شکل ۱. نمایش شماتیک شرایط مرزی مخزن با سد و پی صلب

Fig. 1. Illustration of Rigid dam body and foundation boundary conditions

الف) شرط مرزی بالادست (دوردست) (S_1): با ارتعاش سد امواج فشاری در مخزن ایجاد شده و به سمت دوردست منتشر می‌شوند و انرژی را از محیط دور می‌کنند. در این صورت در مرز بالادست تنها موج پیشرو خواهیم داشت که رابطه زیر برای شبیه‌سازی آن در نظر گرفته می‌شود:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = -\frac{i\omega}{C}\varphi \qquad (۲)$$

در این رابطه، n بردار یکه عمود بر مرز و $i=\sqrt{-1}$ می‌باشد. تعبیر فیزیکی رابطه (۲) این است که یک گروه مستهلک کننده برای امواج فشاری در مرز بالادست مخزن ایجاد شده است.

ب) شرط مرزی کف مخزن (S_2): فرض می‌شود که کف مخزن افقی و صلب باشد. وجود لایه‌هایی از مواد رسوبی که به‌مرورزمان در کف مخزن انباشته شده‌اند، می‌تواند نقش عمده‌ای در جذب انرژی سیستم از طریق انکسار امواج فشاری به داخل پی داشته باشد. اگر از مؤلفه‌ی قائم شتاب زمین صرف‌نظر کنیم و تنها مؤلفه افقی زمین مدنظر باشد، رابطه‌ی زیر به‌عنوان شرط مرزی کف مخزن در نظر گرفته می‌شود:

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = -\frac{i\omega}{\beta C}\phi \qquad (۳)$$

در این رابطه β نسبت امپدانس آکوستیکی[1] محیط پی به محیط سیال است و به‌صورت $\beta=(1+\alpha)(1-\alpha)$ تعریف می‌شود که در آن α نسبت دامنه امواج منعکس‌شده از کف مخزن به دامنه امواج معمولی می‌باشد و ضریب بازتاب نام دارد.

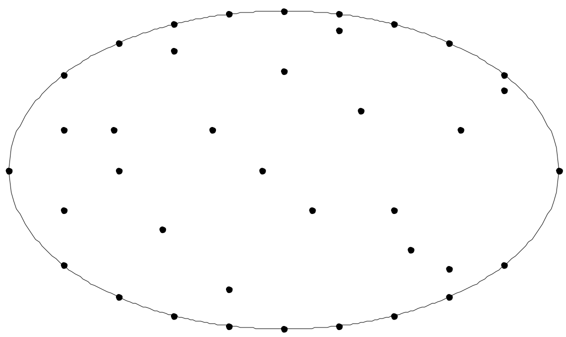
پ) شرط مرزی مشترک سد و مخزن (S_3): سرعت سیال و سد در مرز مشترک آن‌ها و در جهت عمود بر مرز یکسان است. به این منظور، شرط مرزی سینماتیکی به شکل زیر بیان می‌گردد:

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \frac{\hat{a}_{ns}}{i\omega} \qquad (۴)$$

که در آن $\hat{a}_{ns}$ دامنه شتاب عمود بر وجه بالادست سد در اثر امواج هارمونیک زمین با فرکانس ω است.

ت) شرط مرزی سطح آزاد مخزن (S_4): تحت ارتعاش سد، امواجی در سطح مخزن به وجود می‌آیند و آن را متلاطم می‌سازند. با فرض جریان غیرچرخشی و صرف‌نظر کردن از مؤلفه افقی سرعت و فشار هیدرواستاتیک،

1 Acoustic Impedance



شکل ۲. نمایش مراکز محاسباتی یک میدان دلخواه در روش چندربعی
Fig. 2. Illustration of computational nodes of MQ method in an arbitrary domain

شرط مرزی سطح آزاد مخزن به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = -\frac{\omega^2}{g}\phi \qquad (۵)$$

در این رابطه g شتاب گرانش زمین است. نشان داده شده است که اثرات امواج سطحی بر توزیع فشار هیدرودینامیک روی بدنه سدها ناچیز است، لذا در محاسبات قابل صرف‌نظر می‌باشد و می‌توان به‌جای رابطه (۵) رابطه $\varphi=0$ را در نظر گرفت.

۳- روش چندربعی

در روش چندربعی در میدان محاسباتی تعداد N مرکز محاسباتی[2] در نظر گرفته می‌شود که هم در درون میدان و هم روی مرزها قرار می‌گیرند (شکل ۲). این نقاط برخلاف روش‌های با شبکه نیاز به ارتباط اولیه با یکدیگر ندارند لذا کاربرد روش نامبرده در هندسه‌های پیچیده و مسائل سه‌بعدی بسیار ساده است و دیگر هزینه‌های پیش‌پردازش شبکه‌بندی را ندارد.

توزیع نقاط محاسباتی، بسته به نوع هندسه و پدیده موردبررسی، می‌تواند به‌صورت یکنواخت یا غیریکنواخت باشد. در این پژوهش توزیع یکنواخت مدنظر قرار گرفته است.

در روش چندربعی، جواب معادله دیفرانسیل پاره‌ای به همراه شرایط مرزی حاکم بر مسائل دوبعدی با تابع زیر تقریب زده می‌شود:

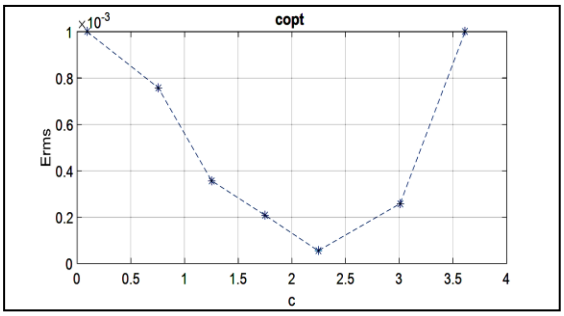
$$f(x,y)=\sum_{j=1}^{N}\lambda_j\sqrt{(x-x_j)^2+(y-y_j)^2+c^2} \qquad (۶)$$

در رابطه (۶)، (x_j, y_j) مؤلفه‌های نقاط محاسباتی هستند و c

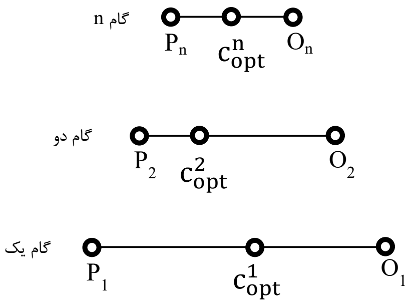
2 Computational nodes

جدول ۱. روابط پارامتر شکل متغیر
Table 1. Variable shape parameter relations

نام روش [شماره مرجع]	رابطه
ESP [۲۵]	$c_j = \left[c_{\min}^2 \left(\frac{c_{\max}^2}{c_{\min}^2} \right)^{(j-1)(N-1)} \right]^{0.5} \quad ; \quad j=1,\ldots,N$
ILSP [۲۶]	$c_j = c_{\min} + \left(\frac{c_{\max} - c_{\min}}{N-1} \right) \times j; \quad j=1,\ldots,N$
DLSP [۲۶]	$c_j = c_{\max} + \left(\frac{c_{\min} - c_{\max}}{N-1} \right) \times j; \quad j=1,\ldots,N$
RSP [۲۷]	$c_j = c_{\min} + (c_{\max} - c_{\min}) \times \mathrm{rand}(1,N); \quad j=1,\ldots,N$
TSP [۲۸]	$c_j = c_{\min} + (c_{\max} - c_{\min}) \times sin\left((j-1)\frac{\pi}{2(N-1)} \right); \quad j=1,\ldots,N$
HSP [۲۹]	$c_j = \begin{cases} \mathrm{TSP}_j \\ \mathrm{DLSP}_J \\ \mathrm{ESP}_J \end{cases} \quad ; \quad j=1,\ldots,N$
BSP [۲۹]	$c_j = \begin{cases} c_{\min} & ; \; \mathrm{j \; be \; odd} \\ c_{\max} & ; \; \mathrm{j \; be \; even} \end{cases}$



شکل ۳. تغییرات خطای جذر میانگین مربعات برحسب پارامتر شکل
Fig. 3. Erms variations vs shape parameter



شکل ۴. نمایش شماتیک روند پرسرعت انتخاب پارامتر شکل بهینه
Fig. 4. Illustration of high-speed procedure of shape parameter selection

پارامتر شکل است. λ_jها نیز ضرایب مجهولی هستند که برای به دست آوردن آن‌ها باید تعداد N نقطه برهم‌نهی در میدان محاسباتی در نظر گرفته شود. دو روش برهم‌نهی[1] و حداقل مربعات[2] برای انتخاب نقاط برهم‌نهی در میدان محاسباتی وجود دارد. در روش برهم‌نهی، نقاط انتخابی منطبق بر نقاط محاسباتی هستند ولی در روش حداقل مربعات این‌گونه نخواهد بود. در این پژوهش از روش اول استفاده می‌شود. لازم به ذکر است که این نقاط به دو بخش نقاط روی مرز و داخل میدان محاسباتی تقسیم می‌شوند، نقاط روی مرز برای اعمال شرایط مرزی مسئله و نقاط داخل میدان هم برای ارضاء معادله دیفرانسیل پاره‌ای حاکم بر میدان محاسباتی در نظر گرفته می‌شوند.

1 Collocation
2 Least squares

به این منظور مشتقات جزئی تابع فوق که در معادله دیفرانسیل حاکم بر مسئله وجود دارند، به ترتیب زیر به دست می‌آید:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j \frac{x - x_j}{\sqrt{(x-x_j)^2 + (y-y_j)^2 + c^2}} \quad (۷)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j \frac{c^2 + y^2 - 2yy_j + y_j^2}{\left((x-x_j)^2 + (y-y_j)^2 + c^2 \right)^{3/2}} \quad (۸)$$

پژوهش‌های متعدد گذشته دقت بالای روش چندربعی را تائید می‌کنند و این دقت را کاملاً وابسته به پارامتر شکل می‌دانند. این مهم در زیر بخش بعد موردبحث قرار گرفته است. پس از یافتن پارامتر شکل بهینه و ضرایب مجهول، پاسخ مسئله با استفاده از رابطه (۶) در

هر نقطه دلخواه از میدان محاسباتی به دست می‌آید.

چنانچه برای آنالیز مسائل مختلط دقت فرم اصلی تابع چندربعی (رابطه ۶) قابل‌قبول نباشد، می‌توان از فرم مختلط آن به شکل زیر استفاده کرد:

$$f(x,y)=\sum_{j=1}^{N}\lambda_{Rj}\sqrt{(x-x_j)^2+(y-y_j)^2+c_R^2}+ i\sum_{j=1}^{N}\lambda_{Ij}\sqrt{(x-x_j)^2+(y-y_j)^2+c_I^2} \qquad (۹)$$

در رابطه فوق، λ_R و λ_I ضرایب مجهول و c_R و c_I پارامترهای شکل قسمت‌های حقیقی و موهومی تابع مختلط چندربعی هستند.

۳-۱- پارامتر شکل بهینه

تاکنون تلاش‌های متعددی برای انتخاب مقدار بهینه پارامتر شکل صورت گرفته است که هرکدام از آن‌ها دارای نقاط ضعف و قوتی هستند. هاردی رابطه $c=\frac{1}{0.815d}$ را برای پارامتر شکل بهینه ارائه داد که در آن $d=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}d_i$، N تعداد مراکز محاسباتی و di فاصله هر مرکز محاسباتی تا نزدیک‌ترین مرکز مجاورش است [۲۲]. پس از وی فرانک رابطه $c=\frac{\sqrt{N}}{1.25D}$ را ارائه داد که در آن D قطر کوچک‌ترین دایره‌ای است که همه مراکز محاسباتی را پوشش می‌دهد [۲۳]. فاس‌هاور نیز رابطه $c=\frac{2}{\sqrt{N}}$ را با کاربرد در تخمین برخی توابع و حل بعضی معادلات دیفرانسیل پیشنهاد کرد [۲۴]. همان‌طور که مشخص است، روابط فوق یک پارامتر شکل ثابت برای همه مراکز محاسباتی ارائه می‌دهند. برخلاف این ایده، محققین روش‌های دیگری نیز برای پارامتر شکل متغیر و مختص هریک از مراکز محاسباتی پیشنهاد داده‌اند که در جدول (۱) آمده است. در روابط این جدول مقادیر بیشینه و کمینه پارامتر شکل به ترتیب برابر $c_{\max}=\frac{3}{\sqrt{N}}$; $c_{\min}=\frac{1}{\sqrt{N}}$ هستند.

در پژوهش پیش رو نشان داده می‌شود که روش‌های نامبرده برای آنالیز فشار هیدرودینامیک در مخزن سدهای وزنی مناسب نیستند و از یک الگوریتم جدید برای تعیین پارامتر شکل بهینه ثابت بر اساس خطای جذر میانگین مربعات[1] (رابطه ۱۰) به شرح ذیل استفاده می‌شود [۳۳]:

$$E_{rms}^{j}=\sqrt{(1/N)\sum_{i=1}^{N}\left(f(x_i,C^{j+1})-f(x_i,C^{j})\right)^2} \quad j=1,2,... \qquad (۱۰)$$

ابتدا یک بازه اولیه متناسب با کمینه و بیشینه فاصله مراکز محاسباتی برای پارامتر شکل انتخاب و به چند قسمت مساوی نسبتاً بزرگ تقسیم می‌شود، سپس خطای ریشه میانگین مربعات دو جواب از مسئله متناظر با هر دو پارامتر شکل متوالی به دست می‌آید. هر c که خطای متناظر آن کمینه باشد، به‌عنوان پارامتر شکل بهینه انتخاب می‌شود. به‌عبارت‌دیگر، آن پارامتر شکلی بهینه است که تغییرات جواب مسئله نسبت به آن کمینه شود. این موضوع در شکل (۳) نمایش داده شده است. در این نمودار نقطه ۲٫۲۵ با کم‌ترین خطای معیار، پارامتر شکل بهینه است.

در ادامه، بازه‌ای جدید که کران پایین و بالای آن به ترتیب برابر میانگین پارامتر شکل بهینه و کران پایین و بالای بازه قبلی است (روش نصف کردن)، انتخاب می‌شود. این گزاره را می‌توان به شکل ریاضی زیر یا مطابق شکل (۴) نشان داد:

$$P^{m+1}=0.5\times(P^{m}+c_{opt}^{m}) \qquad (۱۱)$$

$$O^{m+1}=0.5\times(O^{m}+c_{opt}^{m}) \qquad (۱۲)$$

به‌طوری‌که m گام حاضر و $m+1$ گام بعدی، P و O به ترتیب کران پایین و بالای بازه انتخابی جدید پارامتر شکل هستند. در این گام جدید با تقسیم بازه به‌دست‌آمده به قسمت‌های کوچک‌تری نسبت به بازه قبل، عددی به‌عنوان پارامتر شکل بهینه به دست می‌آید، این فرآیند تا رسیدن به‌دقت لازم ادامه می‌یابد. دقت لازم بسته به حدود جواب‌های مسئله تعیین می‌شود.

واضح است که به دلیل نصف شدن بازه انتخابی در هر تلاش، سرعت رسیدن به مقدار پارامتر شکل بهینه خیلی بالا خواهد بود لذا هزینه‌های محاسباتی به‌طور قابل‌ملاحظه‌ای کاهش می‌یابد.

۴- بازتولید معادلات حاکم و شرایط مرزی با تابع چندربعی

معادله هلمهولتز یا رابطه (۱) بر اساس فرم اصلی تابع چندربعی به‌صورت زیر به دست می‌آید:

$$\sum_{j=1}^{N}\lambda_j\Big(\frac{2c^2+y_i^2-2y_iy_j+y_j^2++x_i^2-2x_ix_j+x_j^2}{\left((x_i-x_j)^2+(y_i-y_j)^2+c^2\right)^{3/2}}+ \omega^2\sqrt{(x_i-x_j)^2+(y_i-y_j)^2+c^2}\Big)=0 \quad ;i=1,2,...,n_1 \qquad (۱۳)$$

در این رابطه n_1 تعداد مراکز برهم‌نهی درون مخزن می‌باشد.

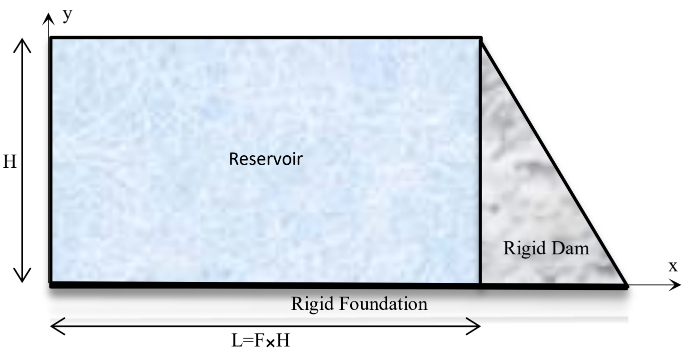
روابط (۲) تا (۵) نیز با فرض مستطیلی بودن مخزن به فرم‌های روابط (۱۴) تا (۱۷) بازنویسی می‌شوند:

$$\sum_{j=1}^{N}\lambda_j\Big(\frac{x_i-x_j}{\sqrt{(x_i-x_j)^2+(y_i-y_j)^2+c^2}}+ \frac{i\omega}{C}\sqrt{(x_i-x_j)^2+(y_i-y_j)^2+c^2}\Big)=0 \quad ;i=1,2,...,n_2 \qquad (۱۴)$$

1 Root mean square error (Erms)

جدول ۲. میانگین درصد خطا در روابط تعیین پارامتر شکل ثابت و متغیر
Table 2. Mean error percent in constant and variable shape parameter relations

تعداد مراکز محاسبات	(11×11)	(21×11)	(21×21)
رابطه پارامتر شکل	میانگین درصد خطا برای پارامتر شکل ثابت		
ESP	0.7051e+06	0.1341e+04	0.4944e+06
TSP	0.3326e+06	0.3115e+04	1.4267e+06
ILSP	0.3227+06	0.3644e+04	1.7199e+06
DLSP	0.2605+06	0.4867e+04	2.4860e+06
RSP	0.2802+06	0.4247e+04	0.7436e+06
Hardy	0.2577+06	0.4426e+04	0.7717e+06
Franke	1.9080+06	2.1188e+04	7.9076e+06
Fasshauer	0.3199+06	0.4111e+04	1.9960e+06
HSP	0.2539+06	0.5023e+04	1.7223e+06
BSP	0.4362+06	0.5162e+04	0.4021e+06
تعداد مراکز محاسبات	(41×21)	(41×41)	(51×51)
رابطه پارامتر شکل	میانگین درصد خطا برای پارامتر شکل ثابت		
ESP	0.4210e+03	0.0337e+06	0.2823e+05
TSP	0.9676e+03	0.6280e+06	2.8580e+05
ILSP	1.0185e+03	1.1051e+06	3.3062e+05
DLSP	2.0950e+03	0.9230e+06	5.0458e+05
RSP	1.3576e+03	0.0640e+06	1.0736e+05
Hardy	0.2857e+03	0.0233e+06	0.0884e+05
Franke	1.922e+03	0.2770e+06	0.7543e+05
Fasshauer	1.6529e+03	0.6216e+06	3.3215e+05
HSP	0.8526e+03	0.0137e+06	1.5140e+05
BSP	1.9483e+03	0.1082e+06	0.6636e+05



شکل ۵. هندسه مخزن آنالیز شده در مثال‌های عددی
Fig. 5. Storage geometry of analyzed numerical examples

که n_2 تعداد مراکز برهم‌نهی واقع بر مرز دوردست می‌باشد.

$$\sum_{j=1}^{N}\lambda_j\left(\frac{y_i-y_j}{\sqrt{(x_i-x_j)^2+(y_i-y_j)^2+c^2}}+\frac{i\omega}{\beta C}\sqrt{(x_i-x_j)^2+(y_i-y_j)^2+c^2}\right)=0 \quad ;i=1,2,\ldots,n_3 \qquad (۱۵)$$

که در آن n_3 تعداد مراکز برهم‌نهی در مرز کف مخزن است.

$$\sum_{j=1}^{N}\lambda_j\left(\frac{x_i-x_j}{\sqrt{(x_i-x_j)^2+(y_i-y_j)^2+c^2}}+\frac{\hat{a}_{ns}}{i\omega}\right)=0 \quad ;i=1,2,\ldots,n_4 \qquad (۱۶)$$

همچنین n_4 تعداد مراکز برهم‌نهی واقع بر مرز مشترک سد و مخزن می‌باشد.

$$\sum_{j=1}^{N}\lambda_j\left(\frac{y_i-y_j}{\sqrt{(x_i-x_j)^2+(y_i-y_j)^2+c^2}}+\frac{\omega^2}{g}\sqrt{(x_i-x_j)^2+(y_i-y_j)^2+c^2}\right)=0 \quad ;i=1,2,\ldots,n_5 \qquad (۱۷)$$

در رابطه (۱۷) n_5 تعداد مراکز برهم‌نهی واقع بر مرز سطح آزاد مخزن است. واضح است که:

$$N = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 \tag{۱۸}$$

یعنی از روابط (۱۳) تا (۱۷) تعداد N معادله جبری یا یک دستگاه معادلات جبری $N \times N$ به‌صورت زیر حاصل می‌شود:

$$[A][\lambda] = [B] \tag{۱۹}$$

که با حل آن مقادیر λ_j به دست می‌آید. با جایگذاری این مقادیر در رابطه (۶) تابع پتانسیل سرعت حاصل می‌شود که با استفاده از آن می‌توان مقدار پتانسیل سرعت در هر نقطه از میدان محاسباتی را مستقیماً و بدون درون‌یابی محاسبه نمود. همچنین مقادیر فشار هیدرودینامیک به کمک رابطه زیر حاصل می‌شوند:

$$p = -\rho i \omega \phi \tag{۲۰}$$

که در آن ρ چگالی آب مخزن می‌باشد.

چنانچه برای بازتولید معادلات و شرایط مرزی حاکم از تابع مختلط چندربعی استفاده شود، واضح است که می‌بایست تعداد $2N$ معادله جبری یا یک دستگاه معادلات جبری $2N \times 2N$ حل شود. در پژوهش حاضر برای آنالیز پدیده فیزیکی نامبرده دیده می‌شود که تابع اصلی چندربعی فقط برای فرکانس‌های بارگذاری کمتر از فرکانس طبیعی مخزن ($\varpi = \pi C / 2H$) از دقت قابل قبولی برخوردار است. دلیل این امر به دو رفتار متفاوت معادله هلمهولتز در دو حالت $k < \pi / 2H$ و $k > \pi / 2H$ برمی‌گردد. لذا برای فرکانس‌های بیشتر از فرکانس طبیعی از فرم مختلط آن مطابق رابطه (۹) استفاده می‌شود. واضح است که در این حالت هزینه محاسبات بالاتر است و برای حالت قبل توصیه نمی‌شود.

۵- مثال‌های عددی

به‌منظور ارزیابی رویکرد پیشنهادی، توزیع فشار هیدرودینامیک در مخازن، دو سد وزنی صلب با بالادست قائم محاسبه خواهد شد. این سدها به لحاظ حجم محاسباتی به موارد واقعی اجراشده در ایران مانند سدهای گله‌رود (کپرگه) و زیردان به ترتیب با ارتفاع ۸۰ و ۶۵ متر نزدیک هستند. هر دو مثال با فرض مستطیلی بودن مخزن، دارای حل تحلیلی هستند (شکل ۵). برخلاف مورد اول، در مثال دوم اثر استهلاک امواج توسط رسوبات کف مخزن در نظر گرفته شده است.

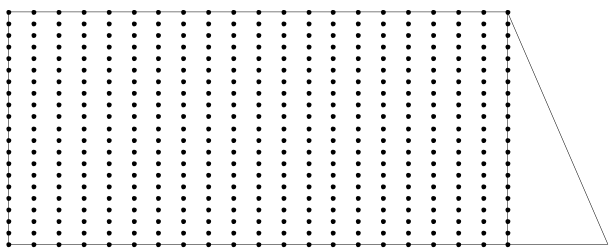
همچنین بار زلزله به‌صورت $\ddot{u}_g = \hat{a} e^{i\omega t}$ است.

۵-۱-مثال یک: مخزن بدون رسوب کف

در این مثال، توانایی رویکرد حاضر برای محاسبه توزیع فشار هیدرودینامیکی بر روی بدنه یک سد وزنی صلب با ارتفاع $H = 100 \quad m$ مورد ارزیابی قرار گرفته است. طول مخزن پر از آب این سد ۴ برابر ارتفاع آن ($F = 4$)، سرعت انتشار امواج در محیط مخزن $1437 \quad m/s$، دامنه شتاب هارمونیک افقی زمین $1 \quad m/s^2$ و چگالی سیال $1000 Kg/m^3$ می‌باشد. فرض می‌شود کف مخزن از یک سنگ سالم و یکپارچه تشکیل شده یا به‌عبارت‌دیگر عاری از رسوب است. در این شرایط $\alpha = 1$ و شرط مرزی رابطه (۳) به‌صورت $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$ خواهد بود. همچنین نتایج حاصل با حل دقیق ارائه‌شده توسط چوپرا مقایسه شده است [۳۶].

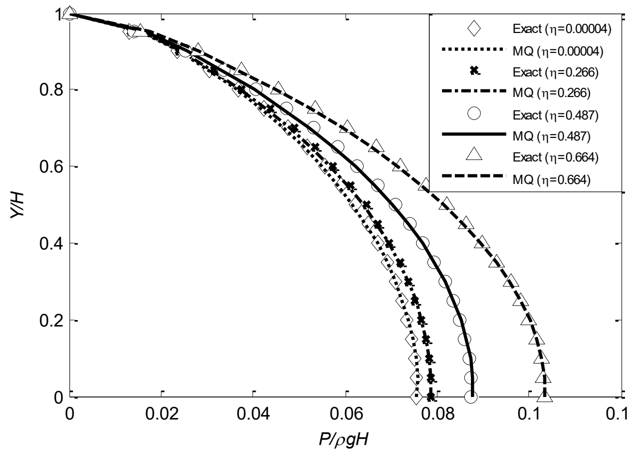
برای حل این مسئله ابتدا برای تعیین پارامتر شکل بهینه از ده رابطه ارائه‌شده در بخش ۳ استفاده شد و توزیع فشار هیدرودینامیک در ۲۱ نقطه با فاصله مساوی بر روی وجه بالادست سد به دست آمد. سپس مقدار میانگین درصد خطا نسبت به حل دقیق با استفاده از تعداد مختلفی از مراکز محاسباتی در نسبت فرکانسی $\eta = \omega / \varpi = 0.3544$ محاسبه شد (جدول ۲).

همان‌طور که مشاهده می‌شود، خطای روابط عنوان‌شده به‌منظور تعیین پارامتر شکل بهینه برای آنالیز فشار هیدرودینامیک در مخازن سدهای بتنی بسیار زیاد و کاملاً غیرقابل‌قبول است لذا می‌توان نتیجه گرفت که روابط مذکور برای معادلات، هندسه و شرایط مرزی خاصی قابل کاربرد هستند و عمومیت ندارند. لازم به ذکر است که این مقادیر خطا برای سایر نسبت‌های فرکانسی هم محاسبه گردید و تفاوت چندانی با مقادیر جدول (۲) مشاهده نشد.



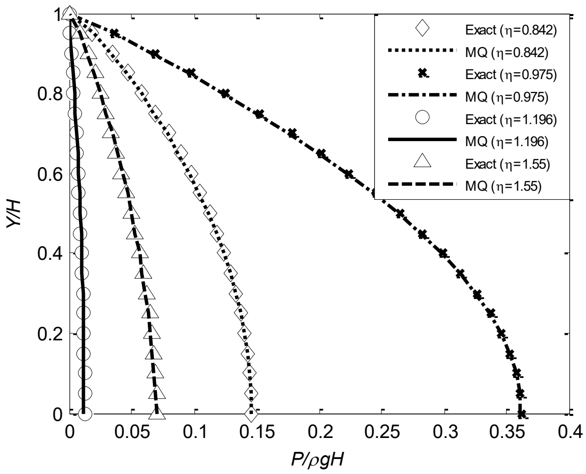
شکل ۶. آرایش مراکز محاسباتی در مثال ۵-۱

Fig. 6. Computational nodes arrangement in example 5-1



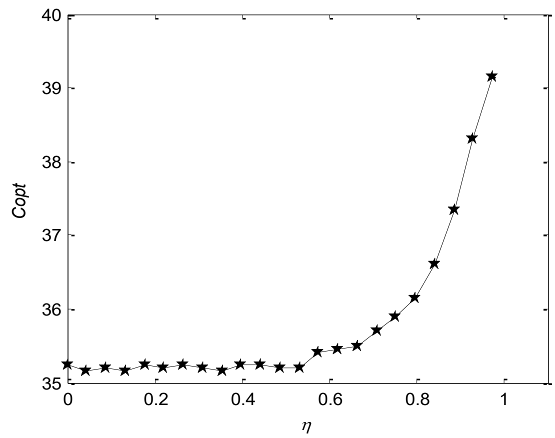
شکل ۷. توزیع فشار هیدرودینامیک روی بدنه سد با نسبت‌های فرکانسی $\eta = 0.00004, 0.266, 0.487, 0.664$ در مثال ۵-۱

Fig. 7. Hydrodynamic pressure distribution on dam body for $\eta = 0.00004, 0.266, 0.487, 0.664$ frequency ratios in example 5-1



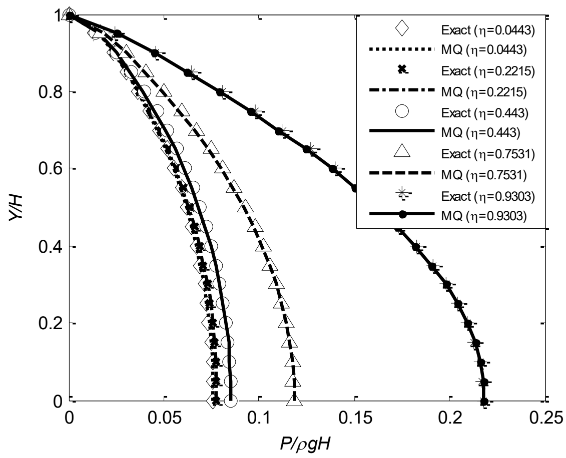
شکل ۸. توزیع فشار هیدرودینامیک روی بدنه سد با نسب‌های فرکانسی $\eta = 0.842, 0.975, 1.196, 1.5$ در مثال ۵-۱

Fig. 8. Hydrodynamic pressure distribution on dam body for $\eta = 0.842, 0.975, 1.196, 1.5$ frequency ratios in example 5-1



شکل ۹. تغییرات پارامتر شکل بهینه در برابر نسبت‌های فرکانسی در مثال ۵-۱

Fig. 9. Shape parameter variations vs frequency ratios



شکل ۱۰. توزیع فشار هیدرودینامیک روی بدنه سد با رابطه (۲۱) در مثال ۵-۱

Fig. 10. Hydrodynamic pressure distribution on dam body using equation (21) in example 5-1

در ادامه برای تعیین پارامتر شکل بهینه از الگوریتم جدید بیان‌شده در بخش ۳ استفاده گردید و تعداد ۲۱×۲۱ مرکز محاسبه مطابق شکل (۶) در نظر گرفته شد. نتایج حل مسئله با همان توزیع فشار هیدرودینامیک بر روی بدنه سد برای نسبت‌های مختلف فرکانسی در شکل‌های (۷) و (۸) ارائه شده است. نسبت های فرکانسی به صورت دلخواه به گونه ای انتخاب شده اند که فرکانس های بارگذاری کوچکتر و بزرگتر از فرکانس طبیعی مخزن لحاظ شوند و پاسخ ها در این محدوده بررسی گردند. همان‌طور که ملاحظه می‌شود، نتایج روش چندربعی تحت الگوریتم عنوان‌شده برای تعیین پارامتر شکل بهینه نسبت به حل دقیق برای آنالیز فشار هیدرودینامیکی در مخازن سدهای بتنی از دقت بالایی برخوردار است.

در شکل (۹) تغییرات پارامتر شکل بهینه (c_{opt}) در مقابل نسبت‌های فرکانسی کوچک‌تر از یک با استفاده از فرم اصلی تابع چندربعی (رابطه ۶) رسم شده است. روشن است که اولویت ارجح در طراحی سدها محدوده فرکانس های کوچکتر یا مساوی فرکانس مد اول مخزن می‌باشد زیرا بیشترین نیروی هیدرودینامیک وارده بر سد در این محدوده فرکانسی به وجود می آید.

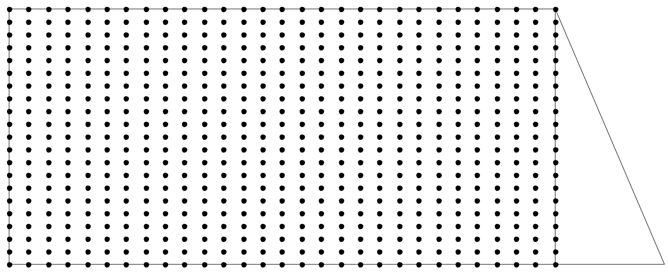
چنانکه ملاحظه می‌شود تغییرات پارامتر شکل بهینه در برابر

جدول ۳. مقادیر پارامتر شکل بهینه به همراه نسبت‌های فرکانسی متناظر
Table 3. Optimum shape parameter values with corresponding frequency ratios

نسبت فرکانسی	۰٫۰۰۰۰۴	۰٫۱۳۲۹	۰٫۲۶۵۸	۰٫۳۹۸۷
پارامتر شکل بهینه	۳۵٫۲۵	۳۵٫۱۵	۳۵٫۲۵	۳۵٫۲۵
نسبت فرکانسی	۰٫۵۳۱۶	۰٫۶۶۴۵	۰٫۷۹۷۴	۰٫۹۳۰۳
پارامتر شکل بهینه	۳۵٫۲۰	۳۵٫۵	۳۶٫۱۵	۳۸٫۳

جدول ۴. مقادیر خطا، پارامتر شکل بهینه و تعداد نقاط در مثال ۵-۱
Table 4. Error and optimum shape parameter values and node numbers in example 5-1

نسبت فرکانسی	۰٫۰۴۴۳	۰٫۲۲۱۵	۰٫۴۴۳	۰٫۷۵۳۱	۰٫۹۳۰۳
پارامتر شکل بهینه	۳۵٫۱۷۶	۳۵٫۲۰۳	۳۵٫۲۵۵	۳۵٫۸۳۵	۳۸٫۲۸۷



شکل ۱۱. آرایش مراکز محاسباتی در مثال ۵-۲
Fig. 11. Computational nodes arrangement in example 5-2

نسبت‌های فرکانسی قابل فرمول‌بندی است. به‌این‌ترتیب می‌توان مسئله را برای تعداد محدودی از نسبت‌های فرکانسی حل کرد و با استفاده از آن‌ها یک رابطه برای پارامتر شکل بهینه به دست آورد. با استفاده از رابطه به‌دست‌آمده می‌توان پارامتر شکل بهینه را برای نسبت‌های فرکانسی دلخواه محاسبه کرد. این امر موجب می‌شود که نیاز به بهینه‌سازی پارامتر شکل در هر فرکانس بارگذاری از بین برود و هزینه‌های محاسباتی روش چندربعی برای آنالیز فشار هیدرودینامیکی در مخازن سدهای بتنی به‌طور قابل‌توجهی کاهش یابد. به‌عنوان مثال پارامتر شکل بهینه برای هشت نسبت فرکانسی محاسبه شد (جدول ۳) و به عنوان نمونه یک چندجمله‌ای از درجه چهار برای برازش آن استخراج گردید (رابطه ۲۱). لازم به ذکر است که می‌توان چندجمله‌ای‌های دیگری غیر از درجه چهار، منحنی نمایی یا ... را نیز به‌شرط دقت برای برازش بر داده‌های مذکور استفاده کرد.

$$Copt(\omega) = 0.00011\omega^4 - 0.0034\omega^3 + 0.0331\omega^2 - 0.1043\omega + 35.251 \quad (۲۱)$$

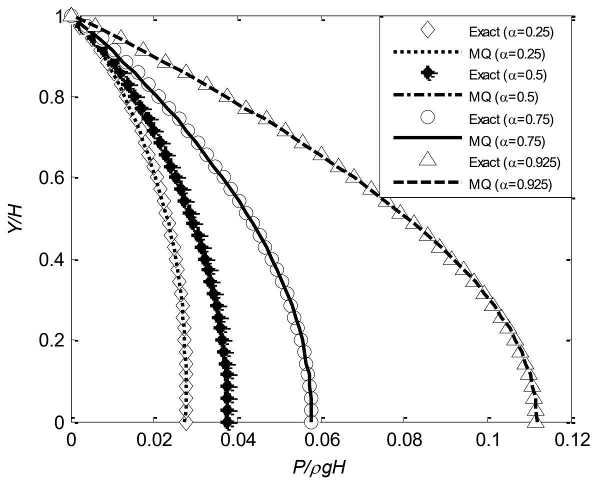
در ادامه با استفاده از این رابطه مقادیر پارامتر شکل بهینه برای نسبت‌های فرکانسی دلخواه موجود در جدول (۴) به دست آمد.

و درنهایت با استفاده از مقادیر جدول (۴)، توزیع فشار هیدرودینامیک بر روی بدنه سد مطابق شکل (۱۰) محاسبه شد. شکل (۱۰) نشان می‌دهد که هرگاه از رابطه (۲۱) برای محاسبه پارامتر شکل بهینه استفاده شود، پاسخ‌ها همچنان در مقایسه با حل تحلیلی از دقت بالایی برخوردار خواهند بود.

۵-۲-مثال دو: مخزن با رسوب کف

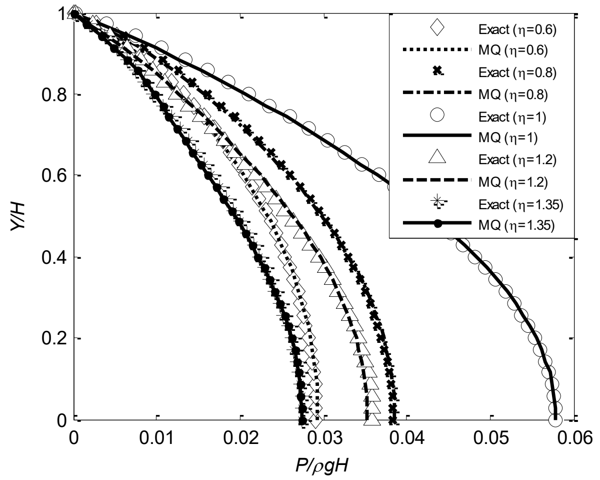
در این مثال، یک مخزن پر با ارتفاع $H = 70\ m$ و طول $L = 4H$ مدنظر قرار گرفته است. همچنین سرعت امواج فشاری در محیط سیال، چگالی آن و دامنه شتاب هارمونیک زمین به ترتیب برابر $1440\ m/s$، $1000\ kg/m^3$ و $0.3048\ m/s^2$ هستند.

این مسئله نیز دارای حل دقیق می‌باشد و برای صحت‌سنجی



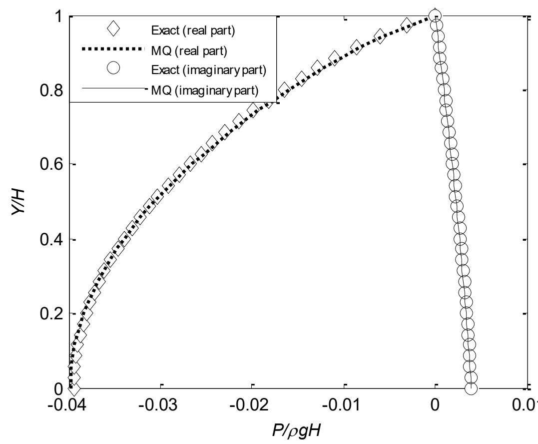
شکل ۱۲. توزیع فشار هیدرودینامیک بر روی بدنه سد با ضرایب بازتاب مختلف و نسبت فرکانسی $\eta=1$ در مثال ۵-۲

Fig. 12. Hydrodynamic pressure distribution on dam body with different reflection coefficients and $\eta=1$ in example 5-2



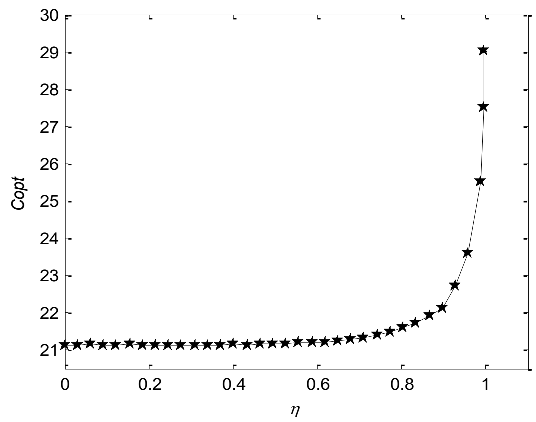
شکل ۱۳. توزیع فشار هیدرودینامیک روی بدنه سد با نسب‌های فرکانسی مختلف و ضریب بازتاب $\alpha=0.75$ در مثال ۵-۲

Fig. 13. Hydrodynamic pressure distribution on dam body with different frequency ratios and $\alpha=0.75$ in example 5-2



شکل ۱۴. قسمت حقیقی و موهومی فشار هیدرودینامیک وارده بر سد با ضریب بازتاب $\alpha=0.925$ و نسب فرکانسی $\eta=0.8$ در مثال ۵-۲

Fig. 14. Real and imaginary parts of hydrodynamic pressure on dam body with $\alpha=0.925$ and $\eta=0.8$ in example 5-2



شکل ۱۵. تغییرات پارامتر شکل بهینه در برابر نسبت‌های فرکانسی در مثال ۵-۲

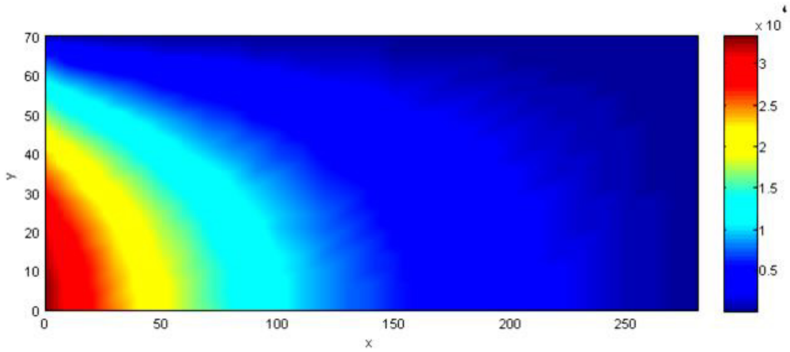
Fig. 15. Shape parameter variations vs frequency ratios in example 5-2

پاسخ‌ها از آن استفاده شده است [۳۷]. برای حل با رویکرد پیشنهادی، تعداد مراکز محاسباتی؛ $N=29\times21$ در نظر گرفته شده‌اند (شکل ۱۱). این تعداد مراکز محاسباتی با قضاوت مهندسی انتخاب شده و برای بهینه کردن تعداد یا آرایش آن ها می‌توان تحقیقات بیشتری انجام داد.

توزیع فشار هیدرودینامیکی بر روی وجه بالادست سد برای نسبت فرکانسی؛ $\eta=1$ و ضرایب بازتاب؛ $\alpha=0.25,\ 0.5,\ 0.75,\ 0.925$ با روش بدون شبکه حاضر محاسبه شده و در شکل ۱۲ در مقایسه با حل دقیق ارائه گردیده است.

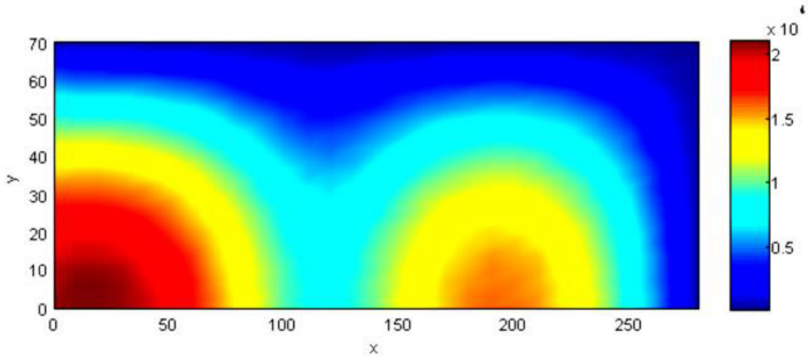
شکل ۱۳ نیز تأثیر نسبت‌های مختلف فرکانسی بر دقت رویکرد پیشنهادی را در مقدار متوسط ضریب بازتاب ($\alpha=0.75$) نشان می‌دهد.

وقتی اثر جذب رسوبات کف مخزن در نظر گرفته می‌شود، روش حاضر همراه با الگوریتم معرفی‌شده برای بهینه‌سازی پارامتر شکل همچنان نتایج قابل‌قبولی در مقایسه با حل دقیق ارائه می‌دهد. همچنین به‌عنوان نمونه، دقت این رویکرد برای محاسبه قسمت حقیقی و موهومی فشار هیدرودینامیک با $\alpha=0.925$ و $\eta=0.8$ در شکل (۱۴) قابل‌مشاهده است.



شکل ۱۶. توزیع فشار هیدرودینامیک در مخزن با ضریب بازتاب $\alpha = 0.925$ و نسب فرکانسی $\eta = 0.8683$ به روش چندربعی در مثال ۵-۲

Fig. 16. Hydrodynamic pressure distribution in storage with $\alpha = 0.925$ and $\eta = 0.8683$ using MQ method in example 5-2



شکل ۱۷. توزیع فشار هیدرودینامیک در مخزن با ضریب بازتاب $\alpha = 0.925$ و نسب فرکانسی $\eta = 1.3$ به روش چندربعی در مثال ۵-۲

Fig. 17. Hydrodynamic pressure distribution in storage with $\alpha = 0.925$ and $\eta = 1.3$ using MQ method in example 5-2

همان‌گونه که از شکل (۱۵) برمی‌آید، زمانی که اثر رسوبات کف مخزن در نظر گرفته می‌شود، مجدداً تغییرات پارامتر شکل بهینه در برابر نسبت‌های فرکانسی قابل فرمول‌بندی و به‌طور مشابه ویژگی بیان‌شده در مثال قبل به قوت خود باقی است.

شکل‌های (۱۶) و (۱۷) نتایج توزیع فشار هیدرودینامیک در کل مخزن سد را با روش چندربعی به ترتیب برای دو حالت نسبت فرکانسی کمتر و بیشتر از یک نشان می‌دهند. همان‌طور که انتظار می‌رود، در حالت نسبت فرکانسی بزرگ‌تر از یک، امواج فشاری از سد به سمت انتهای مخزن انتشار پیدا می‌کنند و بخش کمی از انرژی آن‌ها توسط رسوبات کف مخزن مستهلک می‌شود. به‌عبارت‌دیگر در این حالت، سراسر مخزن متأثر از نوسانات سد خواهد بود ولی در نسبت‌های فرکانسی پایین، فشار هیدرودینامیک عمدتاً در نواحی نزدیک به سد ایجاد می‌شود و در نواحی دوردست ناچیز خواهد بود.

۶- بحث و نتیجه‌گیری

روش چندربعی دارای مزایای؛ ایجاد یک تابع پیوسته پاسخ در سراسر میدان محاسباتی، عدم پیوستگی و ارتباطی خاص بین نقاط محاسباتی، قابلیت بالا در شبیه‌سازی هندسه‌های نامنظم و پیچیده، استفاده از فن تجزیه دامنه برای تسهیل در شبیه‌سازی مسائلی مانند اندرکنش سد-مخزن-پی، استفاده از فرم قوی معادلات حاکم، تعمیم آسان به مسائل سه‌بعدی، کاربرد آسان در حل مسائل مختلط و ... می‌باشد لذا در پژوهش حاضر برای اولین بار به توسعه آن برای آنالیز لرزه‌ای مخازن سدهای بتنی وزنی صلب پرداخته شد. در این راستا، برای اولین بار، معادلات مشتق جزئی و شرایط مرزی مختلط حاکم بر توزیع فشار هیدرودینامیک در محیط مخزن با استفاده از تابع چندربعی بازتولید گردید و نشان داده شد که فرم اصلی و مختلط این تابع به ترتیب برای فرکانس‌های تحریک کمتر و بیشتر از فرکانس طبیعی

مخزن از لحاظ دقت و هزینه محاسبات بهینه هستند. ازآنجایی‌که دقت روش نامبرده کاملاً به مقدار پارامتر شکل بهینه آن وابسته است، ده رابطه از دستاوردهای پژوهشگران قبلی برای محاسبه آن مورد ارزیابی قرار گرفت و مشاهده شد که این روابط حتی با افزایش تعداد مراکز محاسباتی هم برای مسئله خاص نامبرده کاربردی ندارند. این امر نشان می‌دهد که آن روابط عمومیت ندارند و فقط برای مسائل و شرایط خاصی قابل کاربرد هستند. لازم به ذکر است که الگوریتم‌های دیگری نیز برای تعیین پارامتر شکل بهینه وجود دارند که برای محاسبه فشار هیدرودینامیک در مخازن سدها نیازمند ارزیابی و پژوهش‌های آتی هستند. در این میان یک الگوریتم جدید و پرسرعت که حاصل پژوهش‌های قبلی نویسندگان این مقاله می‌باشد، بررسی شد و به‌عنوان الگوریتمی کارآمد در کنار روش چندربعی برای آنالیز لرزه‌ای مخازن سدها پیشنهاد گردید. به‌منظور صحت سنجی رویکرد پیشنهادی، دو مثال از مخازن سدهای صلب با و بدون در نظر گرفتن اثر جذب امواج به وسیله رسوبات کف آنالیز شد. نتایج حاصل نشان داد که تغییرات پارامتر شکل بهینه نسبت به فرکانس‌های مختلف بار زلزله، دارای ضابطه و قابل فرمول‌بندی است. این ویژگی باعث می‌شود که بتوان مسئله را برای تعداد کمی از فرکانس‌ها حل کرد و با استفاده از آن‌ها رابطه‌ای برای پارامتر شکل بهینه به دست آورد، سپس از آن رابطه برای به دست آوردن پارامتر شکل بهینه به ازای هر فرکانس دلخواه استفاده نمود. به‌عبارت‌دیگر، نیاز به بهینه‌سازی پارامتر شکل در همه فرکانس‌های بارگذاری از بین می‌رود و هزینه‌های محاسباتی روش چندربعی به‌طور قابل‌ملاحظه‌ای کاهش می‌یابد. همچنین پاسخ مثال‌ها با استفاده از رویکرد پیشنهادی در فرکانس‌های بارگذاری و ضرایب بازتاب متنوعی محاسبه شد و مقایسه نتایج حاصله با پاسخ‌های دقیق، توانایی و دقت رویکرد پیشنهادی را نشان داد. از نقاط ضعف این روش می‌توان به ماتریس ضرایب پر اشاره کرد که حل این مشکل نیز نیازمند تحقیقات آتی خواهد بود. همچنین به منظور ارزیابی توانایی رویکرد این پژوهش، لحاظ نمودن اثر کاویتاسیون در شبیه‌سازی پدیده فیزیکی مورد بحث، حل آن در حوزه زمان و مقایسه آن با سایر روش های بدون شبکه خارج از خانواده توابع پایه-شعاعی پیشنهاد می گردد.

۷- تقدیر و تشکر

به این وسیله نویسندگان از صندوق حمایت از پژوهشگران و فناوران کشور (INSF) که این پژوهش را طی طرح پژوهشی شماره ۹۸۰۰۱۷۲۱ مورد حمایت قرار داده اند، سپاسگزاری می نمایند.

منابع و مراجع

[1] H.M. Westergaard, Water pressures on dams during earthquakes, Trans. ASCE, 95 (1933) 418-433.

[2] A.K. Chopra, Earthquake behavior of reservoir-dam systems, Journal of the Engineering Mechanics Division, 94(6) (1968) 1475-1500.

[3] J. Humar, M. Roufaiel, Finite element analysis of reservoir vibration, Journal of Engineering Mechanics, 109(1) (1983) 215-230.

[4] S.K. Sharan, Finite element modeling of infinite reservoirs, Journal of engineering mechanics, 111(12) (1985) 1457-1469.

[5] B.-F. Chen, Nonlinear hydrodynamic effects on concrete dam, Engineering structures, 18(3) (1996) 201-212.

[6] B.-F. Chen, Y.-S. Yuan, Nonlinear hydrodynamic pressures on rigid arch dams during earthquakes, reviewing, J. Hydraulic Engineering, (1999).

[7] M. Millan, Y. Young, J. Prevost, The effects of reservoir geometry on the seismic response of gravity dams, Earthquake engineering & structural dynamics, 36(11) (2007) 1441-1459.

[8] N. Bouaanani, P. Paultre, A new boundary condition for energy radiation in covered reservoirs using BEM, Engineering analysis with boundary elements, 29(9) (2005) 903-911.

[9] S. Li, Diagonalization procedure for scaled boundary finite element method in modeling semi-infinite reservoir with uniform cross-section, International journal for numerical methods in engineering, 80(5) (2009) 596-608.

[10] G. Lin, Y. Wang, Z. Hu, An efficient approach for frequency-domain and time-domain hydrodynamic analysis of dam–reservoir systems, Earthquake Engineering & Structural Dynamics, 41(13) (2012)

[20] S. Patel, A. Rastogi, Meshfree multiquadric solution for real field large heterogeneous aquifer system, Water Resources Management, 31(9) (2017) 2869-2884.

[21] N. Li, H. Su, D. Gui, X. Feng, Multiquadric RBF-FD method for the convection-dominated diffusion problems base on Shishkin nodes, International Journal of Heat and Mass Transfer, 118 (2018) 734-745.

[22] R.L. Hardy, Multiquadric equations of topography and other irregular surfaces, Journal of geophysical research, 76(8) (1971) 1905-1915.

[23] R. Franke, A critical comparison of some methods for interpolation of scattered data, NAVAL POSTGRADUATE SCHOOL MONTEREY CA, 1979.

[24] G.E. Fasshauer, Newton iteration with multiquadrics for the solution of nonlinear PDEs, Computers & Mathematics with Applications, 43(3-5) (2002) 423-438.

[25] E.J. Kansa, Multiquadrics—A scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics—I surface approximations and partial derivative estimates, Computers & Mathematics with applications, 19(8-9) (1990) 127-145.

[26] E.J. Kansa, Multiquadrics—A scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics—II solutions to parabolic, hyperbolic and elliptic partial differential equations, Computers & mathematics with applications, 19(8-9) (1990) 147-161.

[27] S.A. Sarra, D. Sturgill, A random variable shape parameter strategy for radial basis function approximation methods, Engineering Analysis with Boundary Elements, 33(11) (2009) 1239-1245.

[28] A. Golbabai, H. Rabiei, Hybrid shape parameter strategy for the RBF approximation of vibrating systems, International Journal of Computer Mathematics, 89(17) (2012) 2410-2427.

[29] A. Golbabai, E. Mohebianfar, H. Rabiei, On the new variable shape parameter strategies for radial basis functions, Computational and Applied Mathematics, 34(2) (2015) 691-704.

[30] J. Biazar, M. Hosami, Selection of an interval for

1725-1749.

[11] R. Babaee, N. Khaji, M.T. Ahmadi, Development of decoupled equations methods for calculating hydrodynamic pressures on concrete gravity dams, Modares Civil Engineering journal, 15(4) (2014) 41-52.

[12] R. Babaee, Application of decoupled equations methods for solving dam-resorvior interaction problem, MSc thesis, Tarbiyat Moderes university, Tehran, Iran, 2013.

[13] E.J. Kansa, Multiquadrics—A scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics—II solutions to parabolic, hyperbolic and elliptic partial differential equations, Computers & mathematics with applications, 19(8-9) (1990) 147-161.

[14] J. Li, A.H.-D. Cheng, C.-S. Chen, A comparison of efficiency and error convergence of multiquadric collocation method and finite element method, Engineering Analysis with Boundary Elements, 27(3) (2003) 251-257.

[15] S.A. Sarra, Integrated multiquadric radial basis function approximation methods, Computers & Mathematics with Applications, 51(8) (2006) 1283-1296.

[16] E.J. Kansa, J. Geiser, Numerical solution to time-dependent 4D inviscid Burgers' equations, Engineering Analysis with Boundary Elements, 37(3) (2013) 637-645.

[17] Z. Wu, S. Zhang, Conservative multiquadric quasi-interpolation method for Hamiltonian wave equations, Engineering Analysis with Boundary Elements, 37(7-8) (2013) 1052-1058.

[18] C. Bustamante, H. Power, Y. Sua, W. Florez, A global meshless collocation particular solution method (integrated Radial Basis Function) for two-dimensional Stokes flow problems, Applied Mathematical Modelling, 37(6) (2013) 4538-4547.

[19] G. Lin, Y. Wang, Z. Hu, An efficient approach for frequency-domain and time-domain hydrodynamic analysis of dam–reservoir systems, Earthquake Engineering & Structural Dynamics, 41(13) (2012) 1725-1749.

[34] M. Kooshki, R. Babaee, E. Jabbari, Aplication of the RBF multiquadric method for solving seepage problems using a new algorithm for optimization of the shape parameter, Amirkabir Civil Engineering Journal (accepted for publication) doi: 10.22060/CEEJ.2019.15155.5840.

[35] E. Jabbari, A.R Fallah, Investigation of meshless methods in solving seepage equation, 12th Iranian Hydraulic Conference,Tehran, Iran, 2013.

[36] A.K. Chopra, Hydrodynamic pressures on dams during earthquakes, Journal of the Engineering Mechanics Division, 93(6) (1967) 205-224.

[37] N. Bouaanani, P. Paultre, J. Proulx, A closed-form formulation for earthquake-induced hydrodynamic pressure on gravity dams, Journal of Sound and Vibration, 261(3) (2003) 573-582.

variable shape parameter in approximation by radial basis functions, Advances in Numerical Analysis, 2016 (2016).

[31] W. Chen, Y. Hong, J. Lin, The sample solution approach for determination of the optimal shape parameter in the Multiquadric function of the Kansa method, Computers & Mathematics with Applications, 75(8) (2018) 2942-2954.

[32] H.R. Azarboni, M. Keyanpour, M. Yaghouti, Leave-Two-Out Cross Validation to optimal shape parameter in radial basis functions, Engineering Analysis with Boundary Elements, 100 (2019) 204-210.

[33] A. Fallah, E. Jabbari, R. Babaee, Development of the Kansa method for solving seepage problems using a new algorithm for the shape parameter optimization, Computers & Mathematics with Applications, 77(3) (2019) 815-829.

چگونه به این مقاله ارجاع دهیم

R. Babaee, E. Jabbari, M. Eskandari-Ghadi, Application of Multiquadric Radial Basis Function method for Helmholtz equation in seismic wave analysis for reservoir of rigid dams, Amirkabir J. Civil Eng., 52(12) (2021) 3015-3030.

DOI: 10.22060/ceej.2019.16443.6230