Amirkabir Journal of Civil Engineering

Amirkabir J. Civil Eng., 53(9) (2021) 893-896
DOI: 10.22060/ceej.2020.18186.6796

Formulating a new efficient simple element for statics, buckling and free vibration analysis of Timoshenko's beam

M. Yaghoobi[1,]*, M. Sedaghatjo[1], R. Alizadeh1, M. Karkon[2]

[1]Engineering Faculty, University of Torbat Heydarieh, Torbat Heydarieh, Iran.
[2]Civil Engineering Department, Larestan Branch Islamic Azad University, Larestan, Iran

ABSTRACT: The beams are really useful for a large number of engineering structures. In this article, a simple, robust beam element will be formulated. Other researchers utilized several theories such as Euler-Bernoulli, Timoshenko and higher-order shear for analyzing the beams. The proposed formulation will be written based on satisfying the equilibrium equation. Using the equilibrium equation reduces the number of unknowns in addition to improving the efficiency of the new element. The suggested element has only two nods and two degrees of freedom per node. The third and second-order polynomials will be used for vertical displacement and rotation fields, respectively. After calculating the matrix of shape functions, the governing equations of statics, free vibration and buckling analysis can be written. Finally, using the suggested element, static analysis, free vibration and buckling were performed on several problems. To prove the efficiency of the new element, a large number of benchmark tests will be utilized. These numerical tests have various support conditions and different aspect ratios. With the help of these tests, rapid convergence and high accuracy of the proposed element will be shown. The new element has high efficiency in all of the static, free vibration and buckling analysis for both thin and thick beams besides its simplicity. Good element answers of other researchers will be available to have a better comparison. .

Review History:

Received: Mar. 31,2020
Revised: Apr. 23, 2020
Accepted: May, 11, 2020
Available Online: May, 28, 2020

Keywords:

Beam element
Equilibrium equation
Static analysis
Free vibration
Buckling.

1- Introduction

The beams are common structural members in most engineering structures. The static and dynamic characteristics of beams are evaluated using classical deformation theories or modified shear deformation theories. The first theory of beam bending was based on the Euler-Bernoulli hypothesis. This theory overestimates the buckling load of the beam by ignoring the effects of shear deformation and the concentration of transverse stress. Hence, this theory applies only to narrow beams. In this approach, by increasing the thickness of the beam and shear effect deformation, the error of response is increasing. The next method used in bending beam analysis is the Timoshenko beam theory or the first-order shear deformation theory, which can take into account the shear deformation effect to some extent. In this theory, since it is difficult to calculate the actual transverse shear stress distribution on the cross-section to assume a plane cross-section after deformation, a shear correction factor is needed to correct the shear stiffness in the calculations. The effect of shear transformation is formulated in Timoshenko's theory. Therefore, this method has a better result, especially in deep beams in which the shear effect is impressive. Up to now, many elements have been presented based on Timoshenko's theory. These elements are classified into two groups which are simple and higher-order elements.

Li et al., by establishing a relationship between Timoshenko's beam theory and classical shear deformation theory, proposed a new strategy for determining the natural free vibrational frequencies of beams [1]. A new isogeometric method was developed based on Timoshenko's beam theory to study the free vibration of thick Timoshenko beam by Lee and Park. They used three modified methods in the beam analysis. They also identified shear locking errors in the analysis using numerical tests [2]. Arvin proposed a new relationship for the analysis of the free vibration of micro-rotating beams based on the strain gradient theory and the hypotheses of the Timoshenko and Euler-Bernoulli beam models. He used the differential transform method to obtain axial natural frequencies [3]. Isogeometric collocation methods for solving the problem of Timoshenko's beam were proposed by Veiga et al. Using this solution will eliminate the shear locking error[4]. Torabi et al. proposed a close-form solution for analyzing the free vibration of Timoshenko's beams under the arbitrary load [5]. A new Timoshenko's beam element was presented by Zhang et al. They analyzed the behavior of static bending, free vibration and buckling of Timoshenko's micro beams [6]. Hsu developed an enriched finite element method for the free-vibration analysis of various Timoshenko beam models. They used both generalized finite element (GFEM) and hierarchical finite element (HFEM) methods for element formulation[7].

*Corresponding author's email: majidyaghoobi@torbath.ac.ir

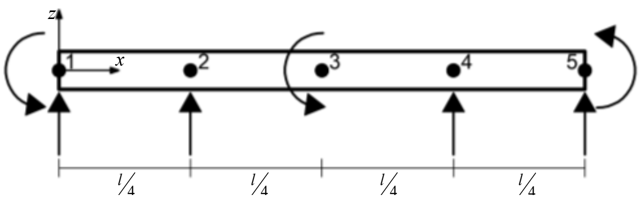


Fig. 2. Initial geometry of suggested element.

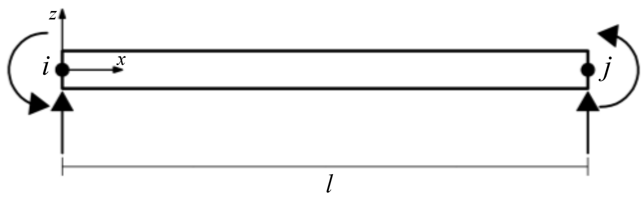


Fig. 3. Final geometry of proposed element.

In this article, a simple, robust beam element is formulated with the help of Timoshenko's theory. This formulation is written based on satisfying the equilibrium equation. Using the equilibrium equation reduces the number of unknowns in addition to improving the efficiency of the new element. The suggested element has only two nod and two degrees of freedom per node.

2- Proposed element's formulation

In the beginning, the third and second-order polynomials are used for vertical displacement and rotation fields, respectively. After calculating the shape functions' matrix, all of the fields were written based on the nodal unknowns' vector. The initial geometry of the proposed element is represented in Figure 1
. Equation (1) shows the governing relation for the Timoshenko beam. Using matrix form of suggested fields in equilibrium equation reduced the number of unknowns. A satisfying equilibrium equation creates a dependency between the nodal degrees of freedom as Equation (2). Where E, G, A, I, and l represent elasticity modules, shear modules, area, the moment of inertia, shear correction factor and length, respectively. By eliminating three degrees of freedom(, ,), the final geometry of the element has only two nodes and two degrees of freedom per node, same as Figure 2.

$$\frac{dw}{dx} = \phi - \frac{1}{k_s GA}\frac{d}{dx}\left(EI\frac{d\phi}{dx}\right)l \qquad (1)$$

$$\left[w_2 \quad w_4 \quad \phi_3\right]^T = \mathbf{C}_{24}^{-1}\mathbf{C}_{13}\left[\phi_1 \quad \phi_5 \quad w_1 \quad w_5\right]^T \qquad (2)$$

$$\mathbf{C}_{24} = \begin{bmatrix} \frac{9}{l} & -\frac{9}{2l} & -\frac{8EI}{k_s GAl^2} \\ -\frac{45}{l^2} & \frac{36}{l^2} & -\frac{4}{l} \\ \frac{81}{2l^3} & -\frac{81}{2l^3} & \frac{4}{l^2} \end{bmatrix} \qquad (3)$$

$$\mathbf{C}_{13} = \begin{bmatrix} 1-\frac{4EI}{k_s GAl^2} & -\frac{4EI}{k_s GAl^2} & \frac{11}{2l} & -\frac{1}{l} \\ -\frac{3}{l} & -\frac{1}{l} & -\frac{18}{l^2} & \frac{9}{l^2} \\ \frac{2}{l^2} & \frac{2}{l^2} & \frac{27}{2l^3} & -\frac{27}{2l^3} \end{bmatrix} \qquad (4)$$

With the help of these new fields, the strain energy function is calculated. By minimizing strain energy, the stiffness matrix will be available the same as Equation (5). Also, by utilizing Hamilton's principle and external work of axial force, the mass matrix and geometric stiffness matrix are obtained, respectively. These matrices are as below:

$$\mathbf{K} = \int_0^l \left[\begin{array}{l} EI\left(\frac{\partial \mathbf{N}_\phi}{\partial x}\right)^T\left(\frac{\partial \mathbf{N}_\phi}{\partial x}\right) + \\ k_s GA\left(\begin{array}{l} \left(\frac{\partial \mathbf{N}_w}{\partial x}\right)^T\left(\frac{\partial \mathbf{N}_w}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \mathbf{N}_w}{\partial x}\right)^T \mathbf{N}_\phi \\ -\mathbf{N}_\phi^T\left(\frac{\partial \mathbf{N}_w}{\partial x}\right) + \mathbf{N}_\phi^T\mathbf{N}_\phi \end{array} \right) \end{array} \right] dx \qquad (5)$$

$$\mathbf{M} = \int_0^l \left[(\rho I)\mathbf{N}_\phi^T\mathbf{N}_\phi + (\rho A)\mathbf{N}_w^T\mathbf{N}_w\right] dx \qquad (6)$$

$$\mathbf{K}_g = \int_0^l \left(\frac{\partial \mathbf{N}_w}{\partial x}\right)^T\left(\frac{\partial \mathbf{N}_w}{\partial x}\right) dx \qquad (7)$$

Where $\mathbf{N}_w$ and $\mathbf{N}_\phi$ show shape function matrices of vertical deflection and rotation, respectively. Also, represents density.

3- Results and Discussion

For proving the excellent efficiency of the proposed element, several different benchmarks are used. In the beginning, calculating the frequency results of the new element compared with the isoparametric Timoshenko beam shows rapid convergence of the suggested element. The proposed element results in high accuracy even for coarse meshes. Then, the ability of the proposed element in free vibration analysis of beam with several support conditions is evaluated. For this purpose, six different support conditions containing clamped, pinned, sliding and free conditions were utilized. In addition, the beam in each support condition has been analyzed for seven different aspect ratios. Responses of good elements of other researchers in each one are available. Comparing the results of a new element with good elements of others shows the high accuracy of the proposed element even for higher modes' natural frequencies responses. For the exhibition the efficiency of new elements, static and buckling analysis is performed beside the free vibration numerical tests. Based on these benchmarks, the proposed element has an excellent performance also in the static and buckling problems.

4- Conclusions

In this article, a new beam element is proposed. Satisfying the equilibrium equation, in addition to the efficiency of the proposed element, reduces the number of unknowns. The simple suggested element has high accuracy and rapid convergence for all static, free vibration and buckling analyses. Several numerical tests with various boundary conditions and different aspect ratios for the beam are utilized to prove the efficiency of the proposed element.

References

[1] X.F. Li, Z.W. Yu, H. Zhang, Free vibration of shear beams with finite rotational inertia, Journal of Constructional Steel Research, 67(10) (2011) 1677-1683.

[2] S.J. Lee, K.S. Park, Vibrations of Timoshenko beams with isogeometric approach, Applied Mathematical Modelling, 37(22) (2013) 9174-9190.

[3] H. Arvin, Free vibration analysis of micro rotating beams based on the strain gradient theory using the differential transform method: Timoshenko versus Euler-Bernoulli beam models, European Journal of Mechanics - A/Solids, 65 (2017).

[4] L. Beirão da Veiga, C. Lovadina, A. Reali, Avoiding shear locking for the Timoshenko beam problem via isogeometric collocation methods, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 241-244 (2012) 38-51.

[5] K. Torabi, A. Jafarzadeh Jazi, E. Zafari, Exact closed form solution for the analysis of the transverse vibration modes of a Timoshenko beam with multiple concentrated masses, Applied Mathematics and Computation, 238 (2014) 342-357.

[6] B. Zhang, Y. He, D. Liu, Z. Gan, L. Shen, Non-classical Timoshenko beam element based on the strain gradient elasticity theory, Finite Elements in Analysis and Design, 79 (2014) 22-39.

[7] Y. Shang Hsu, Enriched finite element methods for Timoshenko beam free vibration analysis, Applied Mathematical Modelling, 40(15) (2016) 7012-7033.

HOW TO CITE THIS ARTICLE

M. Yaghoobi, , M. Sedaghatjo, R. Alizadeh, M. Karkon ,Formulating a new efficient simple element for statics, buckling and free vibration analysis of Timoshenko's beam , Amirkabir J. Civil Eng., 53(9) (2021) 893-896.

DOI: 10.22060/ceej.2020.18186.6796

نشریه مهندسی عمران امیرکبیر

نشریه مهندسی عمران امیرکبیر، دوره ۵۳، شماره ۹، سال ۱۴۰۰، صفحات ۴۰۶۱ تا ۴۰۸۰
DOI: 10.22060/ceej.2020.18186.6796

رابطه‌سازی یک جزء ساده‌ی کارا در تحلیل استاتیکی، کمانش و ارتعاش آزاد تیر تیموشنکو

مجید یعقوبی*[1]، محسن صداقت‌جو[1]، ریحانه علیزاده[1]، محمد کارکن[2]

۱-گروه مهندسی عمران و معماری، دانشکده‌ی فنی و مهندسی، دانشگاه تربت حیدریه، تربت حیدریه، ایران
۲-گروه مهندسی عمران، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد لارستان، لارستان، ایران

تاریخچه داوری:
دریافت: ۱۳۹۹/۰۱/۱۲
بازنگری: ۱۳۹۹/۰۲/۰۴
پذیرش: ۱۳۹۹/۰۲/۲۲
ارائه آنلاین: ۱۳۹۹/۰۳/۰۸

کلمات کلیدی:
جزء تیری
معادله‌ی تعادل
تحلیل استاتیکی
ارتعاش آزاد
کمانش

خلاصه: تیرها به طور گسترده‌ای در سازه‌های مهندسی کاربرد دارند. در این مقاله یک جزء ساده‌ی کارای تیری رابطه‌سازی خواهد شد. برای تحلیل تیرها تئوری های متفاوتی همچون اولر-برنولی، تیموشنکو و برش مرتبه‌ی بالا ارائه شده است. در رابطه‌سازی جزء پیشنهادی از برقراری معادله‌ی حاکم بر تیر تیموشنکو بهره‌جویی می‌شود. این‌کار، افزون بر توانمندسازی جزء نو، شمار مجهول‌ها را خواهد کاست. جزء پیشنهادی تنها دو گره و در هر گره تنها دو درجه آزادی دارد. همچنین، از چند جمله‌ای مرتبه سوم و دوم، به ترتیب، برای میدان‌های جابه‌جایی و دوران استفاده می‌شود. پس از محاسبه‌ی ماتریس تابع‌های شکل جزء پیشنهادی، معادله‌های حاکم بر مسئله‌های استاتیکی، ارتعاش آزاد و کمانش برپا خواهند شد. در پایان، برای اثبات کارایی بالای جزء پیشنهادی، تحلیل‌های استاتیکی، ارتعاش آزاد و کمانش بر روی چندین مسئله انجام خواهد گرفت. در این مسئله‌ها از انواع مختلف شرایط تکیه‌گاهی استفاده خواهد شد. همچنین، با هدف سنجش توانایی‌های جزء پیشنهادی در تیرهای نازک و ضخیم، پاسخ‌ها برای تیر با نسبت‌های طول به ضخامت متفاوت حساب می‌شوند. در تحلیل ارتعاش آزاد پاسخ مودهای بالاتر نیز بررسی می‌گردند. آزمون‌های عددی، سرعت بالای همگرایی و دقت بالای جزء پیشنهادی و همچنین نبود مشکل قفل برشی را در تمامی مسئله‌های استاتیکی، ارتعاش آزاد و کمانش به اثبات می‌رسانند.

۱- مقدمه

با توجه به کاربرد وسیع تیرها در سازه‌های مکانیکی و عمرانی، مطالعه‌ی رفتار دینامیکی تیرها در مهندسی اهمیت بسیار زیادی دارد. از این رو، نظریه‌های متعددی برای تحلیل تیرها ارائه شده است. نخستین تئوری شناخته شده برای تیرها در ابتدای قرن هجدهم میلادی توسط اولر و برنولی پیشنهاد شد. بر پایه‌ی این نظریه، صفحه‌ی عمود بر تار خنثی، بعد از تغییر شکل عمود بر محور خنثی باقی می‌ماند. به سخن دیگر، از تغییر شکل‌های برشی در این راهکار صرف نظر می‌گردد. این شیوه در تیرهای با نسبت‌های طول به ضخامت کم، پاسخ را بیشتر از اندازه‌ی دقیق نتیجه می‌دهد. لرد رایلی در قرن نوزدهم با معرفی تأثیر اینرسی دورانی[1] بر روی حرکت‌های ارتعاشی تیر و فرکانس‌های طبیعی، این نظریه را یک گام فراتر برد و کاستی‌های نظریه‌ی اولر-برنولی را اصلاح نمود. با این حال، هنوز معرفی الگوی برش شایسته در برخی مسئله‌های خاص برای بهبود دقت فرکانس‌های طبیعی مورد نیاز بود. بر این اساس، تیموشنکو در اوایل قرن بیستم با بهره‌گیری از مدل تیر رایلی یک نظریه‌ی تیری جدید را پیشنهاد داد. وی در این فن اثر تغییر شکل برشی و اینرسی چرخشی را بر روی حرکت ارتعاشی تیر واکاوی نمود. این نظریه هم‌اکنون با نام نظریه‌ی تیر تیموشنکو یا تغییر شکل برشی مرتبه اول شناخته می‌شود. اهمیت نظریه‌ی تیر تیموشنکو در هنگام تحلیل مسئله‌های ارتعاش آزاد تیرهای با نسبت طول به ضخامت پایین آشکار می‌شود. در این روش، توزیع کرنش برشی در ضخامت تیر ثابت فرض می‌شود. از این رو، عامل اصلاح برش به صورت نسبت میانگین فشار برشی در مقطع عرضی به فشار برشی در بخش مرکزی معرفی می‌گردد. کاپور ضریب اصلاح برشی برای مقاطع مختلف را تصحیح نمود [۱]. هاتچینسون با مقایسه‌ی راه حل تیر تیموشنکو با یک راه حل سه بعدی جدید برای یک تیر با تکیه‌گاه ساده، رفتار ضریب اصلاح برشی را در یک تیر تیموشنکو با مقطع مستطیلی واکاوی نمود [۲].

پژوهش‌های فراوانی بر روی تیر تیموشنکو انجام گرفته است. ارتعاش آزاد تیرهای چند دهانه با بهره‌گیری از روش رایلی-ریتز توسط ژائو بررسی

1 Rotary inertia

* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: majidyaghoobi@torbath.ac.ir

شد. وی در تحلیل تیر از تابع‌های تیر تیموشنکو بهره جست [۳]. لی و همکاران با برقراری ارتباط میان نظریه‌ی تیر تیموشنکو و نظریه‌ی تغییر شکل برشی کلاسیک، یک راهکار نو برای تعیین فرکانس‌های طبیعی ارتعاش آزاد تیرها ارائه نمودند [۴]. یک روش ایزوژئومتریک جدید بر پایه‌ی نظریه‌ی تیر تیموشنکو برای مطالعه‌ی ارتعاش آزاد تیرهای تیموشنکو ضخیم توسط لی و پارک توسعه یافت. آنها در تحلیل تیر از سه طرح اصلاح شده بهره گرفتند. همچنین، با استفاده از آزمون‌های عددی، خطای قفل برشی[۱] در تحلیل را شناسایی نمودند [۵]. آروین یک رابطه‌ی جدید برای تحلیل ارتعاش آزاد تیرهای میکرو چرخشی بر پایه‌ی نظریه‌ی گرادیان کرنش[۲] و فرضیه‌های مدل های تیر تیموشنکو و اولر-برنولی پیشنهاد داد. وی برای به دست آوردن فرکانس های طبیعی محوری از فن تبدیل دیفرانسیلی[۳] معادله‌های حرکت بهره گرفت [۶].

پس از آن، راه حل‌های دقیق برای فرکانس‌های طبیعی و مودهای یک تیر تیموشنکو تحت شرایط مرزی مختلف توسط هوآنگ ارائه شد [۷]. همچنین، وی به همراه هی از روش سختی دینامیکی[۴] برای تحلیل ارتعاش آزاد تیر تیموشنکو بهره گرفتند [۸]. دواس و همکاران یک جزء محدود تیر تیموشنکو جدید را برای بررسی اثر ضریب اصلاح برشی بر روی فرکانس‌های طبیعی تیر ارائه دادند [۹]. یک روش دقیق برای حل مسئله‌های تیر تیموشنکو توسط چن و وانگ ارائه شد. آن‌ها برای تعیین فرکانسهای طبیعی و شکل های مود از یک تیر تیموشنکو که به طور جزئی با جرم های توزیع شده در موقعیت دلخواه بارگذاری می شوند، بهره جستند [۱۰]. لی و شواتز در تحلیل ارتعاش آزاد و کمانش تیرهای تیموشنکو و صفحه‌های دایروی میندلین با شرط‌های مرزی مختلف، روش شبه طیفی[۵] چیبیشف را به کار گرفتند [۱۱]. یک طرح عددی جدید برای مطالعه‌ی دقیق ارتعاش آزاد تیرهای تیموشنکو با شرط‌های مرزی مختلف توسط فریرا و فاسشوئر معرفی شد. آن‌ها از ترکیب تابع‌های پایه شعاعی[۶] (RBF) و روش شبه طیفی برای این طرح استفاده کردند [۱۲]. روش‌های روی هم‌گذاری ایزوژئومتریک[۷] در حل مسئله‌های تیر تیموشنکو توسط بیروا و همکاران پیشنهاد شد. استفاده از این راهکار حذف خطای برشی را به همراه دارد [۱۳]. تربتی و همکاران یک راه‌حل صریح برای تحلیل ارتعاش آزاد تیرهای تیموشنکو زیر بارگذاری دلخواه

1 Shear locking error
2 Strain gradient theory
3 Differential transform method
4 Dynamic stiffness method
5 Pseudo-spectral method
6 Radial basis function
7 Isogeometric collocation methods

پیشنهاد نمودند [۱۴]. یک جزء محدود تیر تیموشنکو جدید بر پایه‌ی نظریه‌ی گرادیان کرنش کشسان توسط زانگ و همکاران ارائه شد. آن‌ها رفتار خمش استاتیک، ارتعاش آزاد و کمانش میکرو تیرهای تیموشنکو را واکاوی کردند [۱۵]. شانگ یک راهکار جزء محدود غنی شده را در تحلیل ارتعاش آزاد مدل‌های مختلف تیر تیموشنکو توسعه دادند. آن‌ها در رابطه‌سازی جزء از دو روش جزء محدود تعمیم یافته[۸] (GFEM) و روش جزء محدود سلسله مراتبی[۹] (HFEM) بهره‌گرفتند [۱۶].

در این مقاله برای میدان‌های جابه‌جایی و چرخش، به ترتیب، چند جمله‌ای‌های درجه‌ی سوم و دوم استفاده خواهد شد. برقراری معادله‌ی تعادل حاکم بر تیر تیموشنکو از شمار مجهول‌های گره‌ای می‌کاهد. کارایی جزء نو در تحلیل‌های استاتیکی، ارتعاش آزاد و کمانش با کمک شمار زیادی از آزمون‌های عددی اثبات خواهد شد. پاسخ جزء پیشنهادی به این آزمون‌ها برای شرایط مختلف تکیه‌گاهی و نسبت‌های متفاوت طول به ضخامت حساب خواهد شد. همچنین، نتایج جزءهای خوب دیگران برای این آزمون‌های عددی در دسترس قرار می‌گیرند.

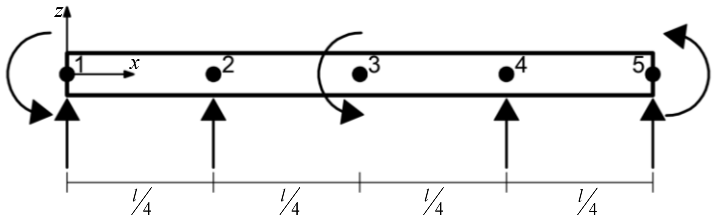
۲- رابطه‌سازی جزء محدود

در این بخش یک جزء ساده‌ی کارا برای تحلیل استاتیکی، ارتعاش آزاد و کمانش تیرهای همگن و همسان‌گرد پیشنهاد خواهد شد. در رابطه‌سازی این جزء از برقراری معادله‌ی ایستایی حاکم بر تیر تیموشنکو بهره‌جویی می‌گردد. نخست، تابع‌های شکل جزء پیشنهادی حساب می‌شوند. پس از آن، معادله‌ی حاکم بر تحلیل استاتیکی، ارتعاش آزاد و کمانش تیرها، با یافتن ماتریس‌های سختی، جرم و سختی هندسی در دسترس قرار می‌گیرند.

۲- ۱- محاسبه‌ی تابع‌های شکل

رابطه‌سازی جزء پیشنهادی بر پایه‌ی برقراری معادله‌ی ایستایی حاکم بر تیر تیموشنکو استوار است. این معادله در رابطه (۱) نشان داده شده است. با هدف برقراری معادله‌ی ایستایی، برای میدان‌های جابه‌جایی قائم و چرخش، به ترتیب، از چند جمله‌ای‌های مرتبه‌ی سوم و دوم بهره‌جویی می‌گردد. بنابراین، به هفت درجه‌ی آزادی برای تعریف این میدان‌ها نیاز است. شکل ۱ هندسه‌ی اولیه‌ی جزء پیشنهادی را نمایش می‌دهد.

8 Generalized Finite Element Method
9 Hierarchical Finite Element Method



شکل ۱. هندسه‌ی اولیه‌ی جزء پیشنهادی

Fig. 1. Initial geometry of suggested element

$$\frac{dw}{dx} = \phi - \frac{1}{k_s GA}\frac{d}{dx}\left(EI\frac{d\phi}{dx}\right)l \tag{۱}$$

برای هندسه‌ی اولیه‌ی جزء پیشنهادی، بردار جابه‌جایی‌های گره‌ای به شکل زیر خواهد بود. با کمک روش جزء محدود می‌توان ماتریس تابع‌های شکل وابسته را یافت. درایه‌های این ماتریس در پیوست خواهند آمد. تابع‌های خیز و چرخش با عامل‌های w و $\varnothing$ نشان داده شده است. همچنین، ماتریس تابع‌های شکل وابسته به هندسه‌ی اولیه جزء با $\mathbf{N}_\circ$ نشان داده می‌شود. تابع‌های شکل در پیوست (A۱) می‌آیند.

$$D_\circ \quad T[w_1 \quad \phi_1 \quad w_2 \quad \phi_3 \quad w_4 \quad w_5 \quad \phi_5] \tag{۲}$$

$$\begin{Bmatrix} w \\ \phi \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{N}_{w1} & 0 & \bar{N}_{w2} & 0 & \bar{N}_{w4} & \bar{N}_{w5} & 0 \\ 0 & \bar{N}_{\phi1} & 0 & \bar{N}_{\phi3} & 0 & 0 & \bar{N}_{\phi5} \end{bmatrix} D_\circ = N_\circ \; D_\circ \tag{۳}$$

با کمک میدان‌های فرض شده برای جابه‌جایی قائم و دوران، دو طرف معادله‌ی تعادل نشان داده شده در رابطه‌ی (۱)، به شکل ماتریسی زیر حساب می‌شود. برقراری معادله‌ی تعادل حاکم بر تیر تیموشنکو، رابطه‌هایی میان جابه‌جایی‌های گره‌ای به وجود میآورد. در ادامه، از این وابستگی‌ها برای حذف درجه‌های آزادی w_2، $\varnothing_3$ و w_4 استفاده خواهد شد.

$$\frac{dw}{dx} = [1 \quad x \quad x^2](C_1[w_1 \quad w_5]^T + C_2[w_2 \quad w_4]^T) \tag{۴}$$

$$\phi - \frac{1}{k_s GA}\frac{d}{dx}\left(EI\frac{d\phi}{dx}\right)l = \tag{۵}$$

$$[1 \quad x \quad x^2](C_3[\phi_1 \quad \phi_5]^T + C_4[\phi_3])$$

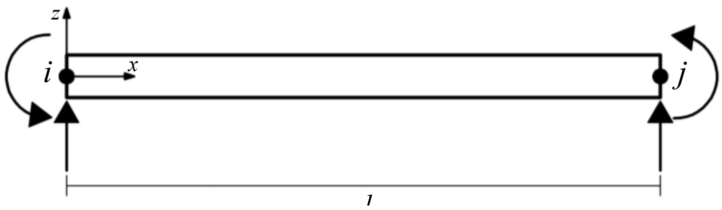
$$C_1 = \begin{bmatrix} -\frac{11}{2l} & \frac{1}{l} \\ \frac{18}{l^2} & -\frac{9}{l^2} \\ -\frac{27}{2l^3} & \frac{27}{2l^3} \end{bmatrix} \quad , C_2 = \begin{bmatrix} \frac{9}{l} & -\frac{9}{2l} \\ \frac{-45}{l^2} & \frac{36}{l^2} \\ \frac{81}{2l^3} & -\frac{81}{2l^3} \end{bmatrix} \tag{۶}$$

$$C_3 = \begin{bmatrix} 1 - \frac{4EI}{k_s GAl^2} & -\frac{4EI}{k_s GAl^2} \\ -\frac{3}{l} & -\frac{1}{l} \\ \frac{2}{l^2} & \frac{2}{l^2} \end{bmatrix} \quad , C_4 = \begin{bmatrix} \frac{8EI}{k_s GAl^2} \\ \frac{4}{l} \\ -\frac{4}{l^2} \end{bmatrix} \tag{۷}$$

رابطه‌ی (۸) شکل ماتریسی معادله‌ی تعادل تیر تیموشنکو را بر حسب مجهول‌های گره‌ای نشان می‌دهد. به کمک عملیات ریاضی درجه‌های آزادی w_2، $\varnothing_3$ و w_4 بر حسب سایر درجات آزادی نوشته می‌شوند.

$$\begin{aligned} &[1 \quad x \quad x^2](C_1[w_1 \quad w_5]^T + C_2[w_2 \quad w_4]^T) = \\ &[1 \quad x \quad x^2](C_3[\phi_1 \quad \phi_5]^T + C_4[\phi_3]) \end{aligned} \tag{۸}$$

$$[w_2 \quad w_4 \quad \phi_3]^T = C_{24}\ ^{-1} C_{13} \quad [\phi_1 \quad \phi_5 \quad w_1 \quad w_5]^T \tag{۹}$$



شکل ۲. هندسه‌ی نهایی جزء پیشنهادی

Fig. 2. Final geometry of proposed element

$$
{}_{13} = \begin{bmatrix} 1-\dfrac{4EI}{k_sGAl^2} & -\dfrac{4EI}{k_sGAl^2} & \dfrac{11}{2l} & -\dfrac{1}{l} \\ -\dfrac{3}{l} & -\dfrac{1}{l} & -\dfrac{18}{l^2} & \dfrac{9}{l^2} \\ \dfrac{2}{l^2} & \dfrac{2}{l^2} & \dfrac{27}{2l^3} & -\dfrac{27}{2l^3} \end{bmatrix}
$$

$$
C_{24} = \begin{bmatrix} \dfrac{9}{l} & -\dfrac{9}{2l} & -\dfrac{8EI}{k_sGAl^2} \\ -\dfrac{45}{l^2} & \dfrac{36}{l^2} & -\dfrac{4}{l} \\ \dfrac{81}{2l^3} & -\dfrac{81}{2l^3} & \dfrac{4}{l^2} \end{bmatrix} \tag{۱۰}
$$

برقراری معادله‌ی تعادل، کاهش تعداد درجه‌های آزادی را به همراه خواهد داشت. این کاهش تعداد مجهول‌ها، افزون بر افزایش کارایی، از حجم محاسبات خواهد کاست. هندسه‌ی نهایی جزء پیشنهادی در شکل ۲ در دسترس قرار می‌گیرد. جزء پیشنهادی دو گره و در هر گره دو درجه آزادی دارد. بردار جابه‌جایی‌های گره‌ای در معادله (۱۱) می‌آید. همچنین، شکل ماتریسی میدان‌های جابه‌جایی و چرخش به صورت رابطه‌ی (۱۲) خواهد بود. تابع‌های شکل هندسه‌ی نهایی جزء در پیوست (A۲) آمده است.

$$
D^{T[w_i \quad \phi_i \quad w_j \quad \phi_j]} \tag{۱۱}
$$

$$
\begin{Bmatrix} w \\ \phi \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{w1} & N_{w2} & N_{w3} & N_{w4} \\ N_{\phi 1} & N_{\phi 2} & N_{\phi 3} & N_{\phi 4} \end{bmatrix} D = N \quad D \tag{۱۲}
$$

۲- ۲- معادله‌ی حاکم بر ارتعاش آزاد و کمانش

با محاسبه‌ی تابع‌های شکل، میدان‌های چرخش و جابه‌جایی قائم جزء بر حسب بردار جابه‌جایی‌های گره‌ای نوشته می‌شوند. انرژی کرنشی جزء در برابری (۱۳) آمده است. در این برابری عامل‌های σ_{xx} و τ_{xz}، به ترتیب، تنش‌های محوری و برشی را نمایش می‌دهند. همچنین، کرنش محوری و برشی، به ترتیب، با ε_{xx} و γ_{xz} تعریف شده‌اند. رابطه‌ی تنش‌ها با کرنش‌های نظیرشان در برابری (۱۴) می‌آید. همچنین، کرنش محوری و برشی بر پایه‌ی رابطه‌ی (۱۵) حساب می‌شوند. میدان‌های جابه‌جایی در راستای طولی و عرضی تیر، به ترتیب، با u و w نشان داده می‌شوند. ضریب کشسانی، ضریب برشی و ضریب اصلاح برشی مقطع، به ترتیب، با عامل‌های E، G و k_s مشخص می‌گردند. برای مقطع مستطیلی، k_s اندازه‌ی $\frac{5}{6}$ دارد. ضریب برشی به صورت رابطه‌ی (۱۶) بر حسب ضریب کشسانی به دست می‌آید. ϑ نسبت پوآسون می‌باشد. در پایان، انرژی کرنشی جزء به شکل ماتریسی رابطهی (۱۷) در دسترس قرار می‌گیرد. کمینه‌سازی این انرژی نسبت به بردار جابه‌جایی‌های گره‌ای، ماتریس سختی را در دسترس قرار می‌دهد. این ماتریس نیز در برابری (۱۸) آمده است. همچنین، شکل صریح درایه‌های ماتریس سختی در پیوست (A۴) می‌آید.

$$U = \frac{1}{2}\int_0^l \int_A (\sigma_{xx}\varepsilon_{xx} + \tau_{xz}\gamma_{xz}) \quad dA \quad dx \tag{۱۳}$$

$$\sigma_{xx} = E\varepsilon_{xx}, \tau_{xz} = k_s G\gamma_{xz} \tag{۱۴}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} - \phi, \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = -z\frac{\partial \phi}{\partial x} \tag{۱۵}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{۱۶}$$

$$U = \frac{1}{2}\int_0^l \left[EI\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + k_s GA\left(\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 - 2\frac{\partial w}{\partial x}\phi + (\phi)^2\right)\right] \quad dx \tag{۱۷}$$

$$\boldsymbol{K} = \int_0^l \left[EI\left(\frac{\partial \boldsymbol{N}_\phi}{\partial x}\right)^T\left(\frac{\partial \boldsymbol{N}_\phi}{\partial x}\right) + k_s GA\left(\left(\frac{\partial \boldsymbol{N}_w}{\partial x}\right)^T\left(\frac{\partial \boldsymbol{N}_w}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial \boldsymbol{N}_w}{\partial x}\right)^T \boldsymbol{N}_\phi - \boldsymbol{N}_\phi^T\left(\frac{\partial \boldsymbol{N}_w}{\partial x}\right) + \boldsymbol{N}_\phi^T\boldsymbol{N}_\phi\right)\right] \quad dx \tag{۱۸}$$

همچنین، انرژی جنبشی جزء از رابطه‌ی (۱۹) حساب می‌شود. با جای‌گذاری میدان‌های جابه‌جایی طولی و عرضی و انتگرال‌گیری نسبت به سطح، شکل ماتریسی انرژی جنبشی همانند رابطه‌ی (۲۰) در اختیار قرار می‌گیرد. عامل ρ چگالی جرمی را نشان می‌دهد. ماتریس جرم بر پایه‌ی اصل همیلتون به صورت برابری (۲۱) حساب می‌شود. افزون بر این، شکل صریح درایه‌های ماتریس جرم در پیوست (A۵) می‌آید.

$$T = \frac{1}{2}\int_0^l \int_A \rho\left(\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2\right) \quad dA \quad dx \tag{۱۹}$$

$$T = \frac{1}{2}\int_0^l \left[\rho I\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)^2 + \rho A\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2\right] \quad dx \tag{۲۰}$$

$$\boldsymbol{M} = \int_0^l \left[(\rho I)\boldsymbol{N}_\phi^T\boldsymbol{N}_\phi + (\rho A)\boldsymbol{N}_w^T\boldsymbol{N}_w\right] \quad dx \tag{۲۱}$$

معادله‌ی حاکم بر کمانش نیز بر پایه‌ی شرایط تعادل خنثی حساب می‌شود. انرژی کار خارجی ناشی از جابه‌جایی زیر اثر بار محوری P در رابطه‌ی (۲۲) می‌آید. همچنین، بر پایه‌ی این رابطه، ماتریس سختی هندسی به صورت برابری (۲۳) در دسترس قرار می‌گیرد. پیوست (A۶) شکل صریح درایه‌های ماتریس سختی هندسی را در اختیار می‌گذارد.

$$\Delta W = \frac{1}{2}\int_0^l P\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \quad dx \tag{۲۲}$$

$$\boldsymbol{K}_g \int_0^l \left(\frac{\partial \boldsymbol{N}_w}{\partial x}\right)^T\left(\frac{\partial \boldsymbol{N}_w}{\partial x}\right) dx \tag{۲۳}$$

معادله‌ی کلی حاکم بر جزء در برابری (۲۴) در دسترس قرار می‌گیرد.

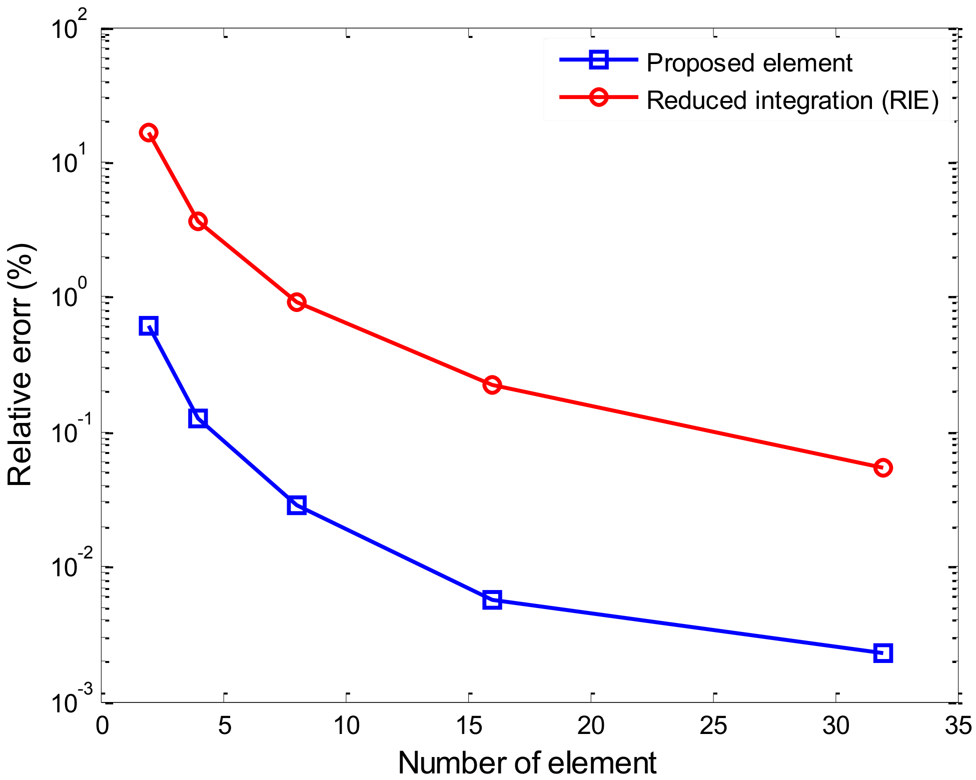
$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{D}} + \left(\boldsymbol{K} - P\cdot\boldsymbol{K}_g\right)\boldsymbol{D} = \boldsymbol{F} \tag{۲۴}$$

آزمون های عددی

در این بخش پاسخ‌های تحلیل استاتیکی، کمانش و ارتعاش آزاد جزء پیشنهادی در مقایسه با جزء‌های خوب دیگران بررسی می‌شود. در تمامی بررسی‌های ارتعاش آزاد از عامل بدون بعد $\bar{\omega}$ بهره‌جویی گردیده است. این عامل در برابری (۲۵) در اختیار قرار می‌گیرد.

$$\bar{N}_{cr} = N_{cr}\frac{L^2}{70\times 10^9 I} \tag{۲۵}$$

نخست، همگرایی جزء پیشنهادی در تحلیل ارتعاش آزاد ارزیابی می‌شود. شکل ۳ همگرایی جزء پیشنهادی را برای اولین مود ارتعاش آزاد در تیر دو سر مفصل با نسبت طول به ضخامت ۵ بررسی می‌کند. برای مقایسه‌ی بهتر، پاسخ جزء ایزوپارامتریک تیموشنکو با انتگرال‌گیری کاهشی نیز در شکل



شکل ۳. همگرایی جزء پیشنهادی در مقایسه با جزء ایزوپارامتریک تیموشنکو

Fig. 3. Converging of proposed element comparing to Timoshenko isoparametric element

۳ می‌آید [۱۷]. برای نمونه، خطای جزء پیشنهادی و جزء ایزوپارامتریک تیموشنکو در شبکه‌ی دو جزئی، به‌ترتیب، برابر با ۰/۶و ۱۶/۵ درصد می‌باشد.

جزء ایزوپارامتریک استفاده شده بر پایه‌ی نظریه‌ی تیموشنکو نوشته شده و دارای دو گره و دو درجه آزادی در هر گره می‌باشد. با توجه به تعداد درجه‌های آزادی یکسان جزء پیشنهادی و جزء ایزوپارامتریک تیموشنکو حجم محاسبات تحلیل تیر در شبکه‌بندی یکسان برای این دو جزء تفاوتی نخواهد داشت. همگرایی سریع پاسخ جزء پیشنهادی در تحلیل ارتعاش آزاد برای تیر ضخیم به روشنی بیانگر کارایی بالای آن می‌باشد. در ادامه، جدول‌های ۱ تا ۶ فرکانس‌های بدون بعد طبیعی $\bar{\omega}$ جزء پیشنهادی را در کنار نتایج جزءهای خوب دیگران نمایش می‌دهند. در این جدول‌ها، تیر با شرایط تکیه‌گاهی مختلف با به کار بردن ۴۰ جزء پیشنهادی تحلیل می‌شوند. شرایط تکیه‌گاهی دو سر گیردار، دو سر مفصل و دو سر آزاد، به ترتیب، با نمادهای C–C، P–P و F–F تعریف شده‌اند. همچنین، از نمادهای P–S، C–F، C–P و برای شرایط تکیه‌گاهی یک سر مفصل یک سر غلتک ، یک سر گیردار و یک سر گیردار یک سر مفصل استفاده می‌گردد. در هر یک

جدول ۱. فرکانس بدون بعد $\bar{\omega}=\omega l^2\sqrt{\frac{\rho A}{EI}}$ در شرایط تکیه‌گاهی C-C برای نسبت‌های طول به ضخامت متفاوت

Table 1. dimensionless natural frequencies for clamped supports with varies length to thickness ratios

L/h	Theory	Mode									
		۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
	Classical theory	۴/۷۳۰۰۴	۷/۸۵۳۲	۱۰/۹۹۵۶	۱۴/۱۳۷۲	۱۷/۲۷۸۸	۲۰/۴۲۰۴	۲۳/۵۶۱۹	۲۶/۷۰۳۵	۲۹/۸۴۵۱	۳۲/۹۸۶۷
۵۰۰	Lee and Schultz[11]	۴/۷۲۹۹۸	۷/۸۵۲۹۵	۱۰/۹۹۵	۱۴/۱۳۵۹	۱۷/۲۷۶۶	۲۰/۴۱۶۸	۲۳/۵۵۶۷	۲۶/۶۹۶	۲۹/۸۳۴۸	۳۲/۹۷۲۹
	Kocaturk and Simsek[18]	۴/۷۲۹۹۷	۷/۸۵۲۹۴	۱۰/۹۹۴۹	۱۴/۱۳۵۸	۱۷/۲۷۶۵	۲۰/۴۱۶۶	۲۳/۵۵۷۴	۲۶/۷۰۱۱	-	-
	Simsek and Kocaturk[19]	۴/۷۲۹۹	۷/۸۵۲۹	۱۰/۹۹۴۹	۱۴/۱۳۵۹	۱۷/۲۷۶۶	۲۰/۴۱۷	-	-	-	-
	Proposed	۴/۷۲۹۹۸	۷/۸۵۲۹۶	۱۰/۹۹۵	۱۴/۱۳۶	۱۷/۲۷۶۸	۲۰/۴۱۷۴	۲۳/۵۵۷۸	۲۶/۶۹۸	۲۹/۸۳۸۲	۳۲/۹۷۸۶
۲۰۰	Lee and Schultz[11]	۴/۷۲۹۶۳	۷/۸۵۱۶۳	۱۰/۹۹۱۷	۱۴/۱۲۹۴	۱۷/۲۶۵۱	۲۰/۳۹۸۵	۲۳/۵۲۹۲	۲۶/۶۵۶۷	۲۹/۷۸۰۸	۳۲/۹۰۰۹
	Kocaturk and Simsek[18]	۴/۷۲۹۶۲	۷/۸۵۱۶۱	۱۰/۹۹۱۶	۱۴/۱۲۹۳	۱۷/۲۶۵	۲۰/۳۹۸۳	۲۳/۵۲۹۸	۲۶/۶۶۱۸	-	-
	Simsek and Kocaturk[19]	۴/۷۲۹۶	۷/۸۵۱۶	۱۰/۹۹۱۷	۱۴/۱۲۹۴	۱۷/۲۶۵۲	۲۰/۳۹۸۹	-	-	-	-
	Proposed	۴/۷۲۹۶۳	۷/۸۵۱۶۳	۱۰/۹۹۱۷	۱۴/۱۲۹۵	۱۷/۲۶۵۵	۲۰/۳۹۹۳	۲۳/۵۳۰۸	۲۶/۶۵۹۶	۲۹/۷۸۵۸	۳۲/۹۰۹۳
۱۰۰	Lee and Schultz[11]	۴/۷۲۸۴	۷/۸۴۶۹	۱۰/۹۸	۱۴/۱۰۶۲	۱۷/۲۲۴۶	۲۰/۳۳۳۸	۲۳/۴۳۲۵	۲۶/۵۱۹۲	۲۹/۵۹۲۶	۳۲/۶۵۱۴
	Kocaturk and Simsek[18]	۴/۷۲۸۳۹	۷/۸۴۶۸۹	۱۰/۹۷۹۹	۱۴/۱۰۶۱	۱۷/۲۲۴۴	۲۰/۳۳۳۶	۲۳/۴۳۲۸	۲۶/۵۲۴۲	-	-
	Simsek and Kocaturk[19]	۴/۷۲۸۴	۷/۸۴۶۹	۱۰/۹۸۰۱	۱۴/۱۰۶۴	۱۷/۲۲۴۹	۲۰/۳۳۵	-	-	-	-
	Proposed	۴/۷۲۸۴	۷/۸۴۶۹۲	۱۰/۹۸۰۱	۱۴/۱۰۶۴	۱۷/۲۲۵۳	۲۰/۳۳۵۵	۲۳/۴۳۵۸	۲۶/۵۲۵۳	۲۹/۶۰۳۲	۳۲/۶۶۸۷
۵۰	Lee and Schultz[11]	۴/۷۲۳۵	۷/۸۲۸۱۷	۱۰/۹۳۴۱	۱۴/۰۱۵۴	۱۷/۰۶۷۹	۲۰/۰۸۶۸	۲۳/۰۶۸۲	۲۶/۰۰۸۶	۲۸/۹۰۵۲	۳۱/۷۵۵۸
	Kocaturk and Simsek[18]	۴/۷۲۳۴۷	۷/۸۲۸۱۶	۱۰/۹۳۳۹	۱۴/۰۱۵۴	۱۷/۰۶۷۵	۲۰/۰۸۶۶	۲۳/۰۶۷۸	۲۶/۰۱۳	-	-
	Simsek and Kocaturk[19]	۴/۷۲۳۵	۷/۸۲۸۳	۱۰/۹۳۴۵	۱۴/۰۱۶۷	۱۷/۰۶۹۶	۲۰/۰۹۱۱	-	-	-	-
	Proposed	۴/۷۲۳۵	۷/۸۲۸۲۲	۱۰/۹۳۴۳	۱۴/۰۱۶۲	۱۷/۰۷	۲۰/۰۹۱۶	۲۳/۰۷۷۸	۲۶/۰۲۶	۲۸/۹۳۴۵	۳۱/۸۰۲۵
۲۰	Lee and Schultz[11]	۴/۶۸۹۹۱	۷/۷۰۳۵۲	۱۰/۶۴۰۱	۱۳/۴۶۱۱	۱۶/۱۵۹	۱۸/۷۳۱۸	۲۱/۱۸۲۵	۲۳/۵۱۶۸	۲۵/۷۴۲۱	۲۷/۸۶۶۲
	Kocaturk and Simsek[18]	۴/۶۸۹۸۷	۷/۷۰۳۵۱	۱۰/۶۳۹۹	۱۳/۴۶۱۱	۱۶/۱۵۸۶	۱۸/۷۳۱۶	۲۱/۱۸۲۵	۲۳/۵۱۹۳	-	-
	Simsek and Kocaturk[19]	۴/۶۹۰۲	۷/۷۰۵۲	۱۰/۶۴۴۷	۱۳/۴۷۰۳	۱۶/۱۷۵۴	۱۸/۷۵۷۳	-	-	-	-
	Proposed	۴/۶۸۹۹۳	۷/۷۰۳۷۵	۱۰/۶۴۱۳	۱۳/۴۶۴۹	۱۶/۱۶۸۲	۱۸/۷۵۱	۲۱/۲۱۷۷	۲۳/۵۷۵۸	۲۵/۸۳۴۳	۲۸/۰۰۲۵
۱۰	Lee and Schultz[11]	۴/۵۷۹۵۵	۷/۳۳۱۲۲	۹/۸۵۶۱۱	۱۲/۱۴۵۴	۱۴/۲۳۲۴	۱۶/۱۴۸۷	۱۷/۹۲۱۵	۱۹/۵۷۲۳	۲۱/۱۱۸۵	۲۲/۵۷۳۵
	Kocaturk and Simsek[18]	۴/۵۷۹۵۱	۷/۳۳۱۲۱	۹/۸۵۵۹۵	۱۲/۱۴۵۳	۱۴/۲۳۲۳	۱۶/۱۴۷۸	۱۷/۹۲۱۴	۱۹/۳۷۸۸	-	-
	Simsek and Kocaturk[19]	۴/۵۸۲	۷/۳۴۰۷	۹/۸۸۱	۱۲/۱۸۶۱	۱۴/۳۰۱۸	۱۶/۲۳۷۳	-	-	-	-
	Proposed	۴/۵۷۹۶۲	۷/۳۳۱۹۳	۹/۸۵۹۱۸	۱۲/۱۵۴	۱۴/۲۵۱۳	۱۶/۱۸۴۱	۱۷/۹۸۰۷	۱۹/۶۶۴۱	۲۱/۲۵۲۳	۲۲/۷۵۹۸
۵	Lee and Schultz[11]	۴/۲۴۲۰۱	۶/۴۱۷۹۴	۸/۲۸۵۳۲	۹/۹۰۳۷۲	۱۱/۳۴۸۷	۱۲/۶۴۰۲	۱۳/۴۵۶۷	۱۳/۸۱۰۱	۱۴/۴۸۰۶	۱۴/۹۳۸۳
	Kocaturk and Simsek[18]	۴/۲۴۱۹۸	۶/۴۱۷۹۳	۸/۲۸۵۲۶	۹/۹۰۳۶۳	۱۱/۳۴۸۶	۱۲/۶۳۵۷	۱۳/۴۵۶۷	۱۳/۸۱۱۵	-	-
	Simsek and Kocaturk[19]	۴/۲۵۶۳	۶/۴۶۴۲	۸/۳۷۵۸	۱۰/۰۳۶۴	۱۱/۵۳۱۴	۱۲/۸۵۶۳	-	-	-	-
	Proposed	۴/۲۴۲۲	۶/۴۱۹۳۷	۸/۲۹۰۳۷	۹/۹۱۵۹۱	۱۱/۳۷۲۷	۱۲/۶۸۰۲	۱۳/۴۷۸۶	۱۳/۸۶۹۶	۱۴/۵۱۸۸	۱۵/۰۲۷۸

جدول ۲. فرکانس بدون بعد $\varpi = \omega l^2 \sqrt{\frac{\rho A}{EI}}$ در شرایط تکیه‌گاهی P-P برای نسبت‌های طول به ضخامت متفاوت

Table 2. dimensionless natural frequencies for pinned supports with varies length to thickness ratios.

L/h	Theory	Mode									
		۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
	Classical theory	۳/۱۴۱۵۹	۶/۲۸۳۱۹	۹/۴۲۴۸	۱۲/۵۶۶۴	۱۵/۷۰۸	۱۸/۸۴۹۶	۲۱/۹۹۱۱	۲۵/۱۳۲۷	۲۸/۲۷۴۳	۳۱/۴۱۵۹
۵۰۰	Lee and Schultz[11]	۳/۱۴۱۵۸	۶/۲۸۳۱	۹/۴۲۴۵	۱۲/۵۶۵۷	۱۵/۷۰۶۶	۱۸/۸۴۷۳	۲۱/۹۸۷۵	۲۵/۱۲۷۳	۲۸/۲۶۶۶	۳۱/۴۰۵۳
	Kocaturk and Simsek[18]	۳/۱۴۱۵۸	۶/۲۸۳۱۱	۹/۴۲۴۵	۱۲/۵۶۵۶	۱۵/۷۰۶۶	۱۸/۸۴۷۱	۲۱/۹۸۷۸	۲۵/۰۶۲۵	-	-
	Simsek and Kocaturk[19]	۳/۱۴۱۵	۶/۲۸۳۱	۹/۴۲۴۴	۱۲/۵۶۵۶	۱۵/۷۰۶۶	۱۸/۸۴۷۲	-	-	-	-
	Proposed	۳/۱۴۱۵۸	۶/۲۸۳۱	۹/۴۲۴۵	۱۲/۵۶۵۷	۱۵/۷۰۶۸	۱۸/۸۴۷۶	۲۱/۹۸۸۳	۲۵/۱۲۸۸	۲۸/۲۶۹۲	۳۱/۴۰۹۸
۲۰۰	Lee and Schultz[11]	۳/۱۴۱۵۳	۶/۲۸۲۶۵	۹/۴۲۳	۱۲/۵۶۲۱	۱۵/۶۹۹۷	۱۸/۸۳۵۲	۲۱/۹۶۸۴	۲۵/۰۹۸۸	۲۸/۲۲۶۱	۳۱/۳۴۹۸
	Kocaturk and Simsek[18]	۳/۱۴۱۵۲	۶/۲۸۲۶۵	۹/۴۲۳	۱۲/۵۶۲۱	۱۵/۶۹۹۶	۱۸/۸۳۵۱	۲۱/۹۶۸۷	۲۵/۱۰۲۵	-	-
	Simsek and Kocaturk[19]	۳/۱۴۱۵	۶/۲۸۲۶	۹/۴۲۲۹	۱۲/۵۶۲۱	۱۵/۶۹۹۶	۱۸/۸۳۵۲	-	-	-	-
	Proposed	۳/۱۴۱۵۳	۶/۲۸۲۶۶	۹/۴۲۳	۱۲/۵۶۲۲	۱۵/۶۹۹۹	۱۸/۸۳۵۷	۲۱/۹۶۹۵	۲۵/۱۰۱	۲۸/۲۳	۳۱/۳۵۶۴
۱۰۰	Lee and Schultz[11]	۳/۱۴۱۳۳	۶/۲۸۱۰۶	۹/۴۱۷۶	۱۲/۵۴۹۴	۱۵/۶۷۴۹	۱۸/۷۹۲۶	۲۱/۹۰۱۱	۲۴/۹۹۸۸	۲۸/۰۸۴۵	۳۱/۱۵۶۸
	Kocaturk and Simsek[18]	۳/۱۴۱۳۲	۶/۲۸۱۰۵	۹/۴۱۷۶	۱۲/۵۴۹۴	۱۵/۶۷۴۹	۱۸/۷۹۲۵	۲۱/۹۰۱۳	۲۵/۰۰۲۲	-	-
	Simsek and Kocaturk[19]	۳/۱۴۱۳	۶/۲۸۱	۹/۴۱۷۶	۱۲/۵۴۹۴	۱۵/۶۷۴۹	۱۸/۷۹۲۶	-	-	-	-
	Proposed	۳/۱۴۱۳۳	۶/۲۸۱۰۶	۹/۴۱۷۶	۱۲/۵۴۹۶	۱۵/۶۷۵۴	۱۸/۷۹۳۷	۲۱/۹۰۳۴	۲۵/۰۰۳۴	۲۸/۰۹۲۷	۳۱/۱۷۰۵
۵۰	Lee and Schultz[11]	۳/۱۴۰۵۳	۶/۲۷۴۷۱	۹/۳۹۶۳	۱۲/۴۹۹۴	۱۵/۵۷۸۴	۱۸/۶۲۸۲	۲۱/۶۴۴۳	۲۴/۶۲۲۷	۲۷/۵۵۹۹	۳۰/۴۵۳۳
	Kocaturk and Simsek[18]	۳/۱۴۰۵۲	۶/۲۷۴۷	۹/۳۹۶۳	۱۲/۴۹۹۳	۱۵/۵۷۸۴	۱۸/۶۲۸	۲۱/۶۴۴۴	۲۴/۶۲۴۹	-	-
	Simsek and Kocaturk[19]	۳/۱۴۰۵	۶/۲۷۴۷	۹/۳۹۶۳	۱۲/۴۹۹۴	۱۵/۵۷۸۴	۱۸/۶۲۸۳	-	-	-	-
	Proposed	۳/۱۴۰۵۳	۶/۲۷۴۷۲	۹/۳۹۶۴	۱۲/۴۹۹۹	۱۵/۵۷۹۸	۱۸/۶۳۱۵	۲۱/۶۵۱۳	۲۴/۶۳۵۹	۲۷/۵۸۳	۳۰/۴۹۱۲
۲۰	Lee and Schultz[11]	۳/۱۳۴۹۸	۶/۲۳۱۳۶	۹/۲۵۵۴	۱۲/۱۸۱۳	۱۴/۹۹۲۶	۱۷/۶۸۱	۲۰/۲۴۴۷	۲۲/۶۸۶۲	۲۵/۰۱۱۱	۲۷/۲۲۶۳
	Kocaturk and Simsek[18]	۳/۱۳۴۹۸	۶/۲۳۱۳۶	۹/۲۵۵۴	۱۲/۱۸۱۲	۱۴/۹۹۲۶	۱۷/۶۸۰۲	۲۰/۲۴۴۵	۲۲/۶۸۰۹	-	-
	Simsek and Kocaturk[19]	۳/۱۳۴۹	۶/۲۳۱۳	۹/۲۵۵۴	۱۲/۱۸۱۶	۱۴/۹۹۳۵	۱۷/۶۸۲۹	-	-	-	-
	Proposed	۳/۱۳۴۹۹	۶/۲۳۱۴۵	۹/۲۵۶	۱۲/۱۸۳۶	۱۴/۹۹۹	۱۷/۶۹۵۴	۲۰/۲۷۲۶	۲۲/۷۳۵۳	۲۵/۰۹۰۶	۲۷/۳۴۷۲
۱۰	Lee and Schultz[11]	۳/۱۱۵۶۸	۶/۰۹۰۶۶	۸/۸۴۰۵۲	۱۱/۳۴۳۱	۱۳/۶۱۳۲	۱۵/۶۷۹	۱۷/۵۷۰۵	۱۹/۳۱۴۲	۲۰/۹۳۲۵	۲۲/۴۴۴۱
	Kocaturk and Simsek[18]	۳/۱۱۵۶۷	۶/۰۹۰۶۶	۸/۸۴۰۴۸	۱۱/۳۴۳	۱۳/۶۱۳۱	۱۵/۶۷۶۹	۱۷/۵۷	۱۹/۱۹۲۸	-	-
	Simsek and Kocaturk[19]	۳/۱۱۵۶	۶/۰۹۰۸	۸/۸۴۱۴	۱۱/۳۴۶۳	۱۳/۶۲۰۷	۱۵/۶۹۳۸	-	-	-	-
	Proposed	۳/۱۱۵۶۹	۶/۰۹۰۹۴	۸/۸۴۲۲۹	۱۱/۳۴۹۲	۱۳/۶۲۸۲	۱۵/۷۰۹۳	۱۷/۶۲۳۹	۱۹/۳۹۹۷	۲۱/۰۶۰۶	۲۲/۶۲۵۷
۵	Lee and Schultz[11]	۳/۰۴۵۳۳	۵/۶۷۱۵۵	۷/۸۳۹۵۲	۹/۶۵۷۰۹	۱۱/۲۲۲	۱۲/۶۰۲۲	۱۳/۰۳۲۳	۱۳/۴۴۴۳	۱۳/۸۴۳۳	۱۴/۴۳۷۸
	Kocaturk and Simsek[18]	۳/۰۴۵۳۳	۵/۶۷۱۵۵	۷/۸۳۹۴۹	۹/۶۵۶۹۳	۱۱/۲۲۱۹	۱۲/۵۹۷۱	۱۳/۰۳۲۳	۱۳/۴۴۴۲	-	-
	Simsek and Kocaturk[19]	۳/۰۴۵۴	۵/۶۷۳۱	۷/۸۴۶۹	۹/۶۷۶۹	۱۱/۲۶۲۵	۱۲/۶۷۲۳	-	-	-	-
	Proposed	۳/۰۴۵۳۷	۵/۶۷۲۳۱	۷/۸۴۳۳	۹/۶۶۷۷۹	۱۱/۲۴۴۸	۱۲/۶۴۳	۱۳/۰۴۸۶	۱۳/۴۶۴۴	۱۳/۹۰۹	۱۴/۴۶۸۷

جدول ۳. فرکانس بدون بعد $\bar{\omega} = \omega l^2 \sqrt{\frac{\rho A}{EI}}$ در شرایط تکیه‌گاهی F-F برای نسبت‌های طول به ضخامت متفاوت

Table 3. dimensionless natural frequencies for free-free condition with varies length to thickness ratios

L/h	Theory	Mode									
		۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
	Classical theory	۴/۷۳۰۰۴	۷/۸۵۳۲	۱۰/۹۹۵۶	۱۴/۱۳۷۲	۱۷/۲۷۸۸	۲۰/۴۲۰۴	۲۳/۵۶۱۹	۲۶/۷۰۳۵	۲۹/۸۴۵۱	۳۲/۹۸۶۷
۵۰۰	**Lee and Schultz[11]**	۴/۷۳	۷/۸۵۳۰۴	۱۰/۹۹۵۲	۱۴/۱۳۶۲	۱۷/۲۷۷	۲۰/۴۱۷۴	۲۳/۵۵۷۵	۲۶/۶۹۷	۲۹/۸۳۶	۳۲/۹۷۴۴
	Kocaturk and Simsek[18]	۴/۷۳	۷/۸۵۳۰۳	۱۰/۹۹۵۱	۱۴/۱۳۶	۱۷/۲۷۶۸	۲۰/۴۱۶۵	۲۳/۵۵۲۹	۲۶/۶۷۵۱	-	-
	Proposed	۴/۷۳۰۰۱	۷/۸۵۳۰۴	۱۰/۹۹۵۲	۱۴/۱۳۶۳	۱۷/۲۷۷۲	۲۰/۴۱۸	۲۳/۵۵۸۵	۲۶/۶۹۹	۲۹/۸۳۹۵	۳۲/۹۸۰۱
۲۰۰	**Lee and Schultz[11]**	۴/۷۲۹۸۲	۷/۸۵۲۱۷	۱۰/۹۹۲۸	۱۴/۱۳۱۱	۱۷/۲۶۷۸	۲۰/۴۰۲۲	۲۳/۵۳۴۱	۲۶/۶۶۳	۲۹/۷۸۸۵	۳۲/۹۱۰۴
	Kocaturk and Simsek[18]	۴/۷۲۹۸۲	۷/۸۵۲۱۶	۱۰/۹۹۲۷	۱۴/۱۳۰۹	۱۷/۲۶۷۲	۲۰/۴۰۱۲	۲۳/۵۲۷۸	۲۶/۶۴۱۱	-	-
	Proposed	۴/۷۲۹۸۲	۷/۸۵۲۱۸	۱۰/۹۹۲۸	۱۴/۱۳۱۳	۱۷/۲۶۸۱	۲۰/۴۰۳	۲۳/۵۳۵۶	۲۶/۶۶۵۹	۲۹/۷۹۳۶	۳۲/۹۱۸۷
۱۰۰	**Lee and Schultz[11]**	۴/۷۲۹۱۸	۷/۸۴۹۰۸	۱۰/۹۸۴۳	۱۴/۱۱۳۱	۱۷/۲۳۵	۲۰/۳۴۸۳	۲۳/۴۵۱۶	۲۶/۵۴۳۶	۲۹/۶۲۲۸	۳۲/۶۸۸۱
	Kocaturk and Simsek[18]	۴/۷۲۹۱۶	۷/۸۴۹۰۶	۱۰/۹۸۴۱	۱۴/۱۱۲۹	۱۷/۲۳۳۴	۲۰/۳۴۷۲	۲۳/۴۴۰۲	۲۶/۵۲۲	-	-
	Proposed	۴/۷۲۹۱۸	۷/۸۴۹۰۹	۱۰/۹۸۴۴	۱۴/۱۱۳۴	۱۷/۲۳۵۷	۲۰/۳۴۹۹	۲۳/۴۵۴۹	۲۶/۵۴۹۷	۲۹/۶۳۳۴	۳۲/۷۰۵۲
۵۰	**Lee and Schultz[11]**	۴/۷۲۶۵۹	۷/۸۳۶۷۹	۱۰/۹۵۰۸	۱۴/۰۴۲۶	۱۷/۱۰۷۸	۲۰/۱۴۱۵	۲۳/۱۳۹۴	۲۶/۰۹۷۹	۲۹/۰۱۳۸	۳۱/۸۸۴۶
	Kocaturk and Simsek[18]	۴/۷۲۶۵۸	۷/۸۳۶۷۷	۱۰/۹۵۰۵	۱۴/۰۴۲۴	۱۷/۱۰۷۷	۲۰/۱۴۰۹	۲۳/۱۳۵۸	۲۶/۰۷۷۲	-	-
	Proposed	۴/۷۲۶۵۹	۷/۸۳۶۸۳	۱۰/۹۵۱	۱۴/۰۴۳۴	۱۷/۱۱	۲۰/۱۴۶۴	۲۳/۱۴۹	۲۶/۱۱۵۳	۲۹/۰۴۳۲	۳۱/۹۳۱۵
۲۰	**Lee and Schultz[11]**	۴/۷۰۸۷۳	۷/۷۵۴۰۴	۱۰/۷۳۳۲	۱۳/۶۰۴	۱۶/۳۵۵	۱۸/۹۸۱۳	۲۱/۴۸۳۴	۲۳/۸۶۵۴	۲۶/۱۳۳۵	۲۸/۲۹۴۹
	Kocaturk and Simsek[18]	۴/۷۰۸۷۳	۷/۷۵۴۰۲	۱۰/۷۳۳۲	۱۳/۶۰۳۶	۱۶/۳۵	۱۸/۹۷۸۱	۲۱/۴۸۱۳	۲۳/۸۴۴۶	-	-
	Proposed	۴/۷۰۸۷۵	۷/۷۵۴۲۸	۱۰/۷۳۴۴	۱۳/۶۰۷۸	۱۶/۳۶۴۶	۱۹/۰۰۱۲	۲۱/۵۲۰۱	۲۳/۹۲۷	۲۶/۲۲۹۸	۲۸/۴۳۷۴
۱۰	**Lee and Schultz[11]**	۴/۶۴۸۴۹	۷/۴۹۷۱۹	۱۰/۱۲۵۵	۱۲/۵۰۷۶	۱۴/۶۶۸۲	۱۶/۶۳۵۸	۱۸/۴۳۷۵	۲۰/۰۹۵۹	۲۱/۶۲۸۳	۲۳/۰۴۵۲
	Kocaturk and Simsek[18]	۴/۶۴۸۴۹	۷/۴۹۷۱۷	۱۰/۱۲۵۴	۱۲/۵۰۷۴	۱۴/۶۶۸	۱۶/۶۳۵۲	۱۸/۴۳۷۱	۲۰/۰۷۸۲	-	-
	Proposed	۴/۶۴۸۵۶	۷/۴۹۷۹۵	۱۰/۱۲۸۹	۱۲/۵۱۷۲	۱۴/۶۸۹۱	۱۶/۶۷۴۶	۱۸/۵۰۲۱	۲۰/۱۹۴۹	۲۱/۷۷۰۴	۲۳/۲۳۸۳
۵	**Lee and Schultz[11]**	۴/۴۴۹۵۸	۶/۸۰۲۵۷	۸/۷۷۲۸۷	۱۰/۴۰۹۴	۱۱/۷۹۴۲	۱۲/۸۱۶۳	۱۳/۵۵۸۴	۱۳/۶۵۲	۱۴/۶۹۷۱	۱۴/۷۳۸۴
	Kocaturk and Simsek[18]	۴/۴۴۹۵۸	۶/۸۰۲۵۶	۸/۷۷۲۸۴	۱۰/۴۰۹۳	۱۱/۷۹۴	۱۲/۸۱۶۲	۱۳/۵۵۸۳	۱۳/۶۵۱۷	-	-
	Proposed	۴/۴۴۹۸	۶/۸۰۴۳۱	۸/۷۷۸۹۴	۱۰/۴۲۳۴	۱۱/۸۱۹۶	۱۲/۸۴۷۷	۱۳/۵۹۱۶	۱۳/۶۹۳۵	۱۴/۷۵۸۳	۱۴/۸۰۳۳

جدول ۴. فرکانس بدون بعد $\bar{\omega} = \omega l^2 \sqrt{\frac{\rho A}{EI}}$ در شرایط تکیه‌گاهی P-S برای نسبت‌های طول به ضخامت متفاوت

Table 4. dimensionless natural frequencies for pinned-sliding supports with varies length to thickness ratios

L/h	Theory	Mode									
		۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
	Classical theory	۱/۵۷۰۸	۴/۷۱۲۳۹	۷/۸۵۴	۱۰/۹۹۵۶	۱۴/۱۳۷۲	۱۷/۲۷۸۸	۲۰/۴۲۰۴	۲۳/۵۶۱۹	۲۶/۷۰۳۵	۲۹/۸۴۵۱
۵۰۰	**Lee and Schultz[11]**	۱/۵۷۰۸	۴/۷۱۲۳۵	۷/۸۵۳۸	۱۰/۹۹۵۱	۱۴/۱۳۶۲	۱۷/۲۷۷	۲۰/۴۱۷۴	۲۳/۵۵۷۵	۲۶/۶۹۷	۲۹/۸۳۶
	Simsek and Kocaturk[19]	۱/۵۷۰۸	۴/۷۱۲۳	۷/۸۵۳۸	۱۰/۹۹۵۱	۱۴/۱۳۶۲	۱۷/۲۷۷	-	-	-	-
	Proposed	۱/۵۷۰۸	۴/۷۱۲۳۵	۷/۸۵۳۸	۱۰/۹۹۵۱	۱۴/۱۳۶۳	۱۷/۲۷۷۲	۲۰/۴۱۸	۲۳/۵۵۸۵	۲۶/۶۹۹	۲۹/۸۳۹۵
۲۰۰	**Lee and Schultz[11]**	۱/۵۷۰۸	۴/۷۱۲۱۶	۷/۸۵۲۹	۱۰/۹۹۲۷	۱۴/۱۳۱۱	۱۷/۲۶۷۷	۲۰/۴۰۲۱	۲۳/۵۳۴	۲۶/۶۶۲۹	۲۹/۷۸۸۴
	Simsek and Kocaturk[19]	۱/۵۷۰۸	۴/۷۱۲۱	۷/۸۵۲۹	۱۰/۹۹۲۷	۱۴/۱۳۱۱	۱۷/۲۶۷۷	-	-	-	-
	Proposed	۱/۵۷۰۷۹	۴/۷۱۲۱۶	۷/۸۵۳	۱۰/۹۹۲۸	۱۴/۱۳۱۲	۱۷/۲۶۸	۲۰/۴۰۲۹	۲۳/۵۳۵۶	۲۶/۶۶۵۸	۲۹/۷۹۳۵
۱۰۰	**Lee and Schultz[11]**	۱/۵۷۰۷۶	۴/۷۱۱۴۹	۷/۸۴۹۸	۱۰/۹۸۴۲	۱۴/۱۱۳	۱۷/۲۳۴۸	۲۰/۳۴۸۱	۲۳/۴۵۱۴	۲۶/۵۴۳۲	۲۹/۶۲۲۴
	Simsek and Kocaturk[19]	۱/۵۷۰۷	۴/۷۱۱۴	۷/۸۴۹۸	۱۰/۹۸۴۲	۱۴/۱۱۳۱	۱۷/۲۳۴۹	-	-	-	-
	Proposed	۱/۵۷۰۷۶	۴/۷۱۱۴۹	۷/۸۴۹۸	۱۰/۹۸۴۳	۱۴/۱۱۳۳	۱۷/۲۳۵۶	۲۰/۳۴۹۷	۲۳/۴۵۴۷	۲۶/۵۴۹۴	۲۹/۶۳۳
۵۰	**Lee and Schultz[11]**	۱/۵۷۰۶۶	۴/۷۰۸۸	۷/۸۳۷۵	۱۰/۹۵۰۵	۱۴/۰۴۲۳	۱۷/۱۰۷۳	۲۰/۱۴۰۸	۲۳/۱۳۸۴	۲۶/۰۹۶۶	۲۹/۰۱۲۳
	Simsek and Kocaturk[19]	۱/۵۷۰۶	۴/۷۰۸۸	۷/۸۳۷۵	۱۰/۹۵۰۵	۱۴/۰۴۲۳	۱۷/۱۰۷۳	-	-	-	-
	Proposed	۱/۵۷۰۶۶	۴/۷۰۸۸۱	۷/۸۳۷۵	۱۰/۹۵۰۸	۱۴/۰۴۳۱	۱۷/۱۰۹۴	۲۰/۱۴۵۶	۲۳/۱۴۸۱	۲۶/۱۱۴۲	۲۹/۰۴۲
۲۰	**Lee and Schultz[11]**	۱/۵۶۹۹۷	۴/۶۹۰۲۷	۷/۷۵۴۲	۱۰/۷۳۱۹	۱۳/۶۰۲	۱۶/۳۵۲۴	۱۸/۹۷۸۴	۲۱/۴۸۰۴	۲۳/۸۶۲۸	۲۶/۱۳۲
	Simsek and Kocaturk[19]	۱/۵۶۹۹	۴/۶۹۰۳	۷/۷۵۴۲	۱۰/۷۳۲	۱۳/۶۰۲۵	۱۶/۳۵۳۷	-	-	-	-
	Proposed	۱/۵۶۹۹۷	۴/۶۹۰۲۹	۷/۷۵۴۵	۱۰/۷۳۳۱	۱۳/۶۰۵۹	۱۶/۳۶۲۲	۱۸/۹۹۸۷	۲۱/۵۱۷۹	۲۳/۹۲۵۸	۲۶/۲۳۰۷
۱۰	**Lee and Schultz[11]**	۱/۵۶۷۴۹	۴/۶۲۷۶۹	۷/۴۹۶۳۲	۱۰/۱۲۲۳	۱۲/۵۰۵۶	۱۴/۶۶۹۷	۱۶/۶۴۴۸	۱۸/۴۵۹۳	۲۰/۱۳۷۸	۲۱/۷۰۰۷
	Simsek and Kocaturk[19]	۱/۵۶۷۵	۴/۶۲۷۷	۷/۴۹۶۷	۱۰/۱۲۴۱	۱۲/۵۱۰۶	۱۴/۶۸۰۵	-	-	-	-
	Proposed	۱/۵۶۷۴۹	۴/۶۲۷۷۶	۷/۴۹۷۱۱	۱۰/۱۲۵۸	۱۲/۵۱۵۴	۱۴/۶۹۱۵	۱۶/۶۸۵۶	۱۸/۵۲۷۶	۲۰/۲۴۳۲	۲۱/۸۵۴
۵	**Lee and Schultz[11]**	۱/۵۵۷۸۴	۴/۴۲۰۲۶	۶/۸۰۶۵۸	۸/۷۸۵۲۵	۱۰/۴۶۶۳	۱۱/۹۳۲	۱۳/۱۴۰۷	۱۳/۲۳۷۹	۱۳/۸۹۳۶	۱۴/۴۲۱۹
	Simsek and Kocaturk[19]	۱/۵۵۷۸	۴/۴۲۰۷	۶/۸۱۰۳	۸/۷۹۷۹	۱۰/۴۹۵۳	۱۱/۹۸۶۱	-	-	-	-
	Proposed	۱/۵۵۷۸۴	۴/۴۲۰۴۸	۶/۸۰۸۴۶	۸/۷۹۱۹۱	۱۰/۴۸۲۳	۱۱/۹۶۲۹	۱۳/۱۵۷۹	۱۳/۲۹۰۳	۱۳/۹۱۸۳	۱۴/۵۰۲۷

جدول ۵. فرکانس بدون بعد $\varpi = \omega l^2 \sqrt{\frac{\rho A}{EI}}$ در شرایط تکیه‌گاهی C–F برای نسبت‌های طول به ضخامت متفاوت

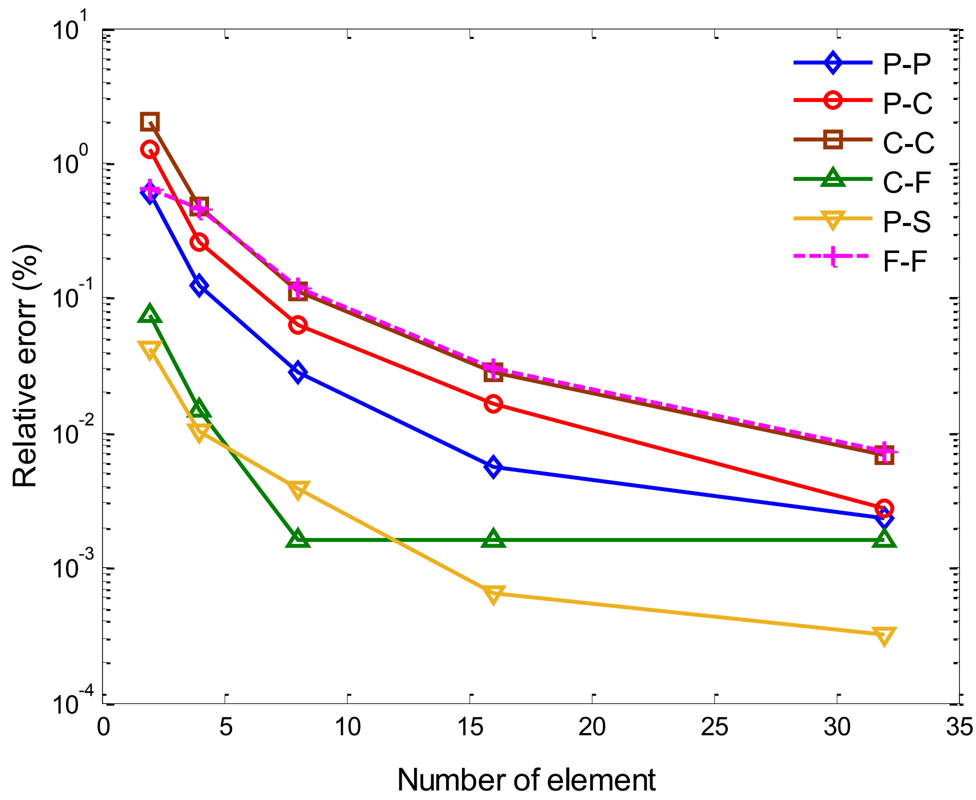
Table 5. dimensionless natural frequencies for clamped-free condition with varies length to thickness ratios

L/h	Theory	Mode									
		۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
	Classical theory	۱/۸۷۵۱	۴/۶۹۴۱	۷/۸۵۴۸	۱۰/۹۹۶	۱۴/۱۳۷۱	۱۷/۲۷۸۷	۲۰/۴۲۰۳	۲۳/۵۶۱۹	-	-
۵۰۰	Kocaturk and Simsek[18]	۱/۸۷۵۱	۴/۶۹۴	۷/۸۵۴۵	۱۰/۹۹۴۹	۱۴/۱۳۶	۱۷/۲۷۶۵	۲۰/۴۱۶۸	۲۳/۵۵۴۷	-	-
	Proposed	۱/۸۷۵۱	۴/۶۹۴۰۴	۷/۸۵۴۶	۱۰/۹۹۵	۱۴/۱۳۶۱	۱۷/۲۷۷	۲۰/۴۱۷۷	۲۳/۵۵۸۱	۲۶/۶۹۸۵	۲۹/۸۳۸۹
۲۰۰	Kocaturk and Simsek[18]	۱/۸۷۵۱	۴/۶۹۳۷	۷/۸۵۳۴	۱۰/۹۹۲۱	۱۴/۱۳۰۱	۱۷/۲۶۶۲	۲۰/۳۹۹۶	۲۳/۵۲۹	-	-
	Proposed	۱/۸۷۵۰۹	۴/۶۹۳۷۷	۷/۸۵۳۵	۱۰/۹۹۲۲	۱۴/۱۳۰۴	۱۷/۲۶۶۸	۲۰/۴۰۱۱	۲۳/۵۳۳۲	۲۶/۶۶۲۸	۲۹/۷۸۹۷
۱۰۰	Kocaturk and Simsek[18]	۱/۸۷۵	۴/۶۹۲۷	۷/۸۴۹۵	۱۰/۹۸۲	۱۴/۱۰۹۳	۱۷/۲۲۹۴	۲۰/۳۳۹۳	۲۳/۴۳۸۷	-	-
	Proposed	۱/۸۷۵۰۳	۴/۶۹۲۷۹	۷/۸۴۹۶	۱۰/۹۸۲۲	۱۴/۱۰۹۹	۱۷/۲۳۰۵	۲۰/۳۴۲۷	۲۳/۴۴۵۴	۲۶/۵۳۷۵	۲۹/۶۱۸۳
۵۰	Kocaturk and Simsek[18]	۱/۸۷۴۸	۴/۶۸۸۸	۷/۸۳۴	۱۰/۹۴۲۳	۱۴/۰۲۸۳	۱۷/۰۸۷۱	۲۰/۱۱۰۲	۲۳/۰۹۸۵	-	-
	Proposed	۱/۸۷۴۸۱	۴/۶۸۸۸۹	۷/۸۳۴۱	۱۰/۹۴۲۶	۱۴/۰۲۹۸	۱۷/۰۸۹۹	۲۰/۱۱۸۹	۲۳/۱۱۳۳	۲۶/۰۷۰۵	۲۸/۹۸۸۷
۲۰	Kocaturk and Simsek[18]	۱/۸۷۳۲	۴/۶۶۲	۷/۷۳۰۳	۱۰/۶۸۶۱	۱۳/۵۳۰۹	۱۴/۹۰۲۵	۱۸/۹۷۸	۲۱/۳۳۱۲	-	-
	Proposed	۱/۸۷۳۲۴	۴/۶۶۲۰۵	۷/۷۳۰۷	۱۰/۶۸۷۴	۱۳/۵۳۵۶	۱۶/۲۶۵۳	۱۸/۸۷۴۷	۲۱/۳۶۷۱	۲۳/۷۴۹۴	۲۶/۰۲۹۸
۱۰	Kocaturk and Simsek[18]	۱/۸۶۷۷	۴/۵۷۲۴	۷/۴۱۵۳	۱۰/۵۷۳۳	۱۲/۶۵۲۴	۱۴/۴۴۵۲	۱۶/۱۲۲۴	۱۶/۵۰۸۳	-	-
	Proposed	۱/۸۶۷۷۱	۴/۵۷۲۴۷	۷/۴۱۶۱۵	۹/۹۹۰۶	۱۲/۳۳۱۵	۱۴/۴۶۵۸	۱۶/۴۲۵۴	۱۸/۲۳۸۵	۱۹/۹۲۸۲	۲۱/۵۱۲۱
۵	Kocaturk and Simsek[18]	۱/۸۴۶۵	۴/۲۸۵۲	۶/۶۱۱۲	۱۰/۱۵۸	۱۲/۴۵۵۹	۱۲/۷۸۸۷	۱۳/۳۵۴	۱۴/۳۵۵۱	-	-
	Proposed	۱/۸۴۶۵۶	۴/۲۸۵۴۸	۶/۶۱۲۸۷	۸/۵۲۴۱۶	۱۰/۱۷۱۶	۱۱/۵۹۶۸	۱۲/۸۲۰۵	۱۳/۳۷۶۲	۱۴/۰۰۰۵	۱۴/۳۹۰۵

جدول ۶. فرکانس بدون بعد $\varpi = \omega l^2 \sqrt{\frac{\rho A}{EI}}$ در شرایط تکیه‌گاهی C-P برای نسبت‌های طول به ضخامت متفاوت

Table 6. dimensionless natural frequencies for clamped-pinned condition with varies length to thickness ratios

L/h	Theory	Mode									
		۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
	Classical theory	۳/۹۲۷	۷/۰۶۹	۱۰/۲۱۰۱	۱۳/۳۵۲	۱۶/۴۹۳۳	۱۹/۶۳۴۹	۲۲/۷۷۶۵	۲۵/۹۱۸۱	-	-
۵۰۰	**Kocaturk and Simsek[18]**	۳/۹۲۶۵	۷/۰۶۸۴	۱۰/۲۰۹۷	۱۳/۳۵۰۸	۱۶/۴۹۱۶	۱۹/۶۳۱۹	۲۲/۷۷۲۶	۲۵/۹۱۶۵	-	-
	Simsek and Kocaturk[19]	۳/۹۲۶۵	۷/۰۶۸۴	۱۰/۲۰۹۷	۱۳/۳۵۰۸	۱۶/۴۹۱۶	۱۹/۶۳۲۲	-	-	-	-
	Proposed	۳/۹۲۶۵۷	۷/۰۶۸۴۳	۱۰/۲۰۹۸	۱۳/۳۵۰۹	۱۶/۴۹۱۸	۱۹/۶۳۲۵	۲۲/۷۷۳	۲۵/۹۱۳۴	۲۹/۰۵۳۸	۳۲/۱۹۴۲
۲۰۰	**Kocaturk and Simsek[18]**	۳/۹۲۶۴	۷/۰۶۷۶	۱۰/۲۰۷۴	۱۳/۳۴۵۸	۱۶/۴۸۲۵	۱۹/۶۱۶۹	۲۲/۷۴۹۵	۲۵/۸۸۲۵	-	-
	Simsek and Kocaturk[19]	۳/۹۲۶۴	۷/۰۶۷۶	۱۰/۲۰۷۴	۱۳/۳۴۵۹	۱۶/۴۸۲۶	۱۹/۶۱۷۳	-	-	-	-
	Proposed	۳/۹۲۶۴۱	۷/۰۶۷۶۱	۱۰/۲۰۷۵	۱۳/۳۴۶	۱۶/۴۸۲۸	۱۹/۶۱۷۷	۲۲/۷۵۰۴	۲۵/۸۸۰۶	۲۹/۰۰۸۲	۳۲/۱۳۳۱
۱۰۰	**Kocaturk and Simsek[18]**	۳/۹۲۵۸	۷/۰۶۴۶	۱۰/۱۹۹۲	۱۳/۳۲۸۳	۱۶/۴۵۰۴	۱۹/۵۶۳۸	۲۲/۶۶۸۱	۲۵/۷۶۳۸	-	-
	Simsek and Kocaturk[19]	۳/۹۲۵۸	۷/۰۶۴۷	۱۰/۱۹۹۲	۱۳/۳۲۸۴	۱۶/۴۵۰۶	۱۹/۵۶۴۶	-	-	-	-
	Proposed	۳/۹۲۵۸۱	۷/۰۶۴۷	۱۰/۱۹۹۳	۱۳/۳۲۸۶	۱۶/۴۵۱	۱۹/۵۶۵۴	۲۲/۶۷۰۵	۲۵/۷۶۵۴	۲۸/۸۴۹	۳۱/۹۲۰۸
۵۰	**Kocaturk and Simsek[18]**	۳/۹۲۳۴	۷/۰۵۳	۱۰/۱۶۶۸	۱۳/۲۵۹۵	۱۶/۳۲۵۶	۱۹/۳۶۰۱	۲۲/۳۷۳۱	۲۵/۳۵۸	-	-
	Simsek and Kocaturk[19]	۳/۹۲۳۴	۷/۰۵۳۱	۱۰/۱۶۷۱	۱۳/۲۶	۱۶/۳۲۶۶	۱۹/۳۶۲۴	-	-	-	-
	Proposed	۳/۹۲۳۴۵	۷/۰۵۳۱	۱۰/۱۶۷۱	۱۳/۲۶۰۲	۱۶/۳۲۷۴	۱۹/۳۶۴۴	۲۲/۳۶۷۷	۲۵/۳۳۴۳	۲۸/۲۶۲۳	۳۱/۱۵۰۴
۲۰	**Kocaturk and Simsek[18]**	۳/۹۰۷۱	۶/۹۷۴۷	۹/۹۵۶۲	۱۲/۸۳۰۶	۱۵/۵۸۵۲	۱۸/۲۱۵	۲۰/۷۲۱۷	۲۳/۱۰۶۳	-	-
	Simsek and Kocaturk[19]	۳/۹۰۷۲	۶/۹۷۵۴	۹/۹۵۸۲	۱۲/۸۳۴۹	۱۵/۵۹۳۲	۱۸/۲۲۹	-	-	-	-
	Proposed	۳/۹۰۷۱۵	۶/۹۷۴۹۱	۹/۹۵۷۱	۱۲/۸۳۳۶	۱۵/۵۹۳۱	۱۸/۲۳۲۲	۲۰/۷۵۳۵	۲۳/۱۶۲۹	۲۵/۴۶۸۸	۲۷/۶۸۰۲
۱۰	**Kocaturk and Simsek[18]**	۳/۸۵۱۷	۶/۷۳۰۵	۹/۳۶۵۸	۱۱/۷۵۸۳	۱۳/۹۳۲۹	۱۵/۹۱۹۴	۱۷/۷۵	۱۹/۲۹۸۷	-	-
	Simsek and Kocaturk[19]	۳/۸۵۲۵	۶/۷۳۴۶	۹/۳۷۶۹	۱۱/۷۸۰۲	۱۳/۹۶۹۲	۱۵/۹۷۴۲	-	-	-	-
	Proposed	۳/۸۵۱۷۹	۶/۷۳۱۰۳	۹/۳۶۸۲۹	۱۱/۷۶۵۷	۱۳/۹۵	۱۵/۹۵۳۷	۱۷/۸۰۶۹	۱۹/۵۳۴۸	۲۱/۱۵۸۲	۲۲/۶۹۳۹
۵	**Kocaturk and Simsek[18]**	۳/۶۶۵۶	۶/۰۷۲۶	۸/۰۷۴۳	۹/۷۸۶	۱۱/۲۸۶۶	۱۲/۶۱۹۱	۱۳/۱۴۱۷	۱۳/۹۶۶	-	-
	Simsek and Kocaturk[19]	۳/۶۷۰۸	۶/۰۹۴۷	۸/۱۲۱۹	۹/۸۶۳۶	۱۱/۳۹۷۹	۱۲/۷۷۱۷	-	-	-	-
	Proposed	۳/۶۶۵۷	۶/۰۷۳۷۵	۸/۰۷۸۷۹	۹/۷۹۷۶۴	۱۱/۳۱۰۱	۱۲/۶۶۴۵	۱۳/۱۵۹۱	۱۳/۸۳۰۲	۱۴/۰۰۰۹	۱۴/۹۷۵۶



شکل ۴. همگرایی پاسخ ارتعاش آزاد جزء پیشنهادی در نسبت طول به ضخامت ۵ برای انواع شرایط تکیه‌گاهی

Fig.4 .Converging of proposed element’s frequency responses for length to thickness ratio of 5 and varies support conditions

از این شرایط تکیه‌گاهی، پاسخ ده مود اول تحلیل ارتعاش آزاد برای هفت نسبت مختلف طول به ضخامت در این جدول‌ها آمده است.

در جدول‌های ۱ تا ۶ پاسخ تعداد زیادی از مسئله‌های ارتعاش آزاد برای تیرهای نازک و ضخیم در شرایط تکیه‌گاهی متفاوت می‌آیند. این جدول‌ها، دقت بالای پاسخ جزء پیشنهادی در نسبت‌های ابعادی و شرایط تکیه‌گاهی مختلف، حتی برای مودهای بالاتر ارتعاش آزاد، را نشان می‌دهند. با هدف نمایش سرعت بالای همگرایی و دقت بالای پاسخ جزء پیشنهادی در تحلیل ارتعاش آزاد برای تمامی شرایط تکیه‌گاهی مختلف، نمودار همگرایی در شکل ۴ می‌آید. این نمودار برای ضخیم‌ترین حالت تیر نمایش داده شده در جدول‌ها یعنی نسبت طول به ضخامت ۵، ترسیم شده است. جزء پیشنهادی در شبکه‌ی چهار جزئی برای شرایط تکیه‌گاهی C-C و P-S، به ترتیب، تنها ۰/۴۷ درصد و ۰/۰۱ درصد خطا دارند. خطای بسیار اندک حتی در شبکه‌های درشت، سرعت همگرایی و دقت بالای جزء پیشنهادی را اثبات می‌نماید.

به منظور بررسی توانمندی جزء پیشنهادی، تحلیل کمانش تیر با شرایط مختلف تکیه‌گاهی بررسی می‌شود. در این آزمون، از عامل بدون بعد کمانش $\bar{N}_{cr}$، که در برابری (۲۶) آمده است، بهره‌جویی می‌گردد. جدول ۷ پاسخ‌های بار بحرانی کمانش بی بعد تیر با نسبت طول به ضخامت ۵ را برای انواع مختلف تکیه‌گاه‌ها نشان می‌دهد. در این تحلیل از شبکه‌ی ۴۰ جزئی کمک گرفته می‌شود. برای مقایسه‌ی بهتر، پاسخ‌های دیگر پژوهشگران نیز در این جدول می‌آیند.

جدول ۷. بار بحرانی کمانش بدون بعد $\overline{N}_{cr}=N_{cr}\frac{12l^2}{Eh^3}$ تیر با نسبت طول به ضخامت ۵

Table 7. dimensionless buckling force for length to thickness ratio of 5.

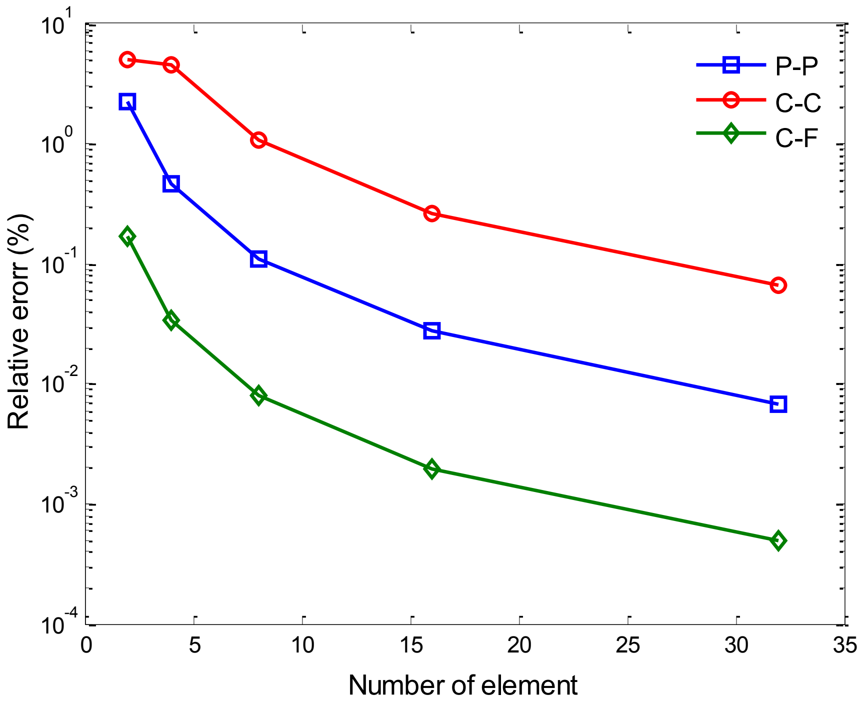
Elements	C-C	P-P	C-F
Proposed	۱۵۴/۴۱۵	۴۸/۸۳۷۲	۱۳/۰۷۷
[20].Volkan Kahya et al	۱۵۱/۹۴۳	۴۸/۵۹۰۷	۱۳/۰۵۹۴
[21].Nguyen et al	۱۵۴/۵۶۱	۴۸/۸۴۰۶	۱۳/۰۷۷۱
Vo et al.[22]	۱۵۴/۵۵	۴۸/۸۴۰۱	۱۳/۰۷۷۱
Vo et al.[23]	۱۶۰/۱۰۷	۴۹/۵۹۰۱	۱۳/۰۹۹۳
Li and Batra [24]a	۱۵۴/۳۵	۴۸/۸۳۵	۱۳/۲۱۳
Li and Batra[24] b	۱۵۴/۳۵	۴۸/۸۳۵	۱۳/۲۱۳
Li and Batra[24] c	۲۱۴/۳۱	۵۳/۵۷۸	۱۳/۳۹۴

$$\bar{\omega}=\omega L^2\sqrt{\frac{\rho A}{EI}} \quad (۲۶)$$

جدول ۷ نشان می‌دهد جزء پیشنهادی در تحلیل کمانش نیز دقت بالایی دارد. همچنین، به منظور نشان دادن کارایی بالای جزء پیشنهادی در تحلیل کمانش، نمودار همگرایی آن برای شرطهای مختلف مرزی در شکل (۵) نشان داده شده است. جزء پیشنهادی در شبکه‌ی دو جزئی برای حالت‌های C–C و C–F، به ترتیب، تنها ۵ و ۰/۱۷ درصد خطا دارد. همچنین، درصد خطای تحلیل کمانش در شبکه‌ی هشت جزئی برای شرایط گیرداریی C–C و C–F، به ترتیب، تنها ۱ و ۰/۰۰۸ درصد می‌باشد.

در پایان، توانمندی جزء پیشنهادی در تحلیل استاتیکی بررسی می‌گردد. برای این کار، جابه‌جایی ماکزیمم یک تیر با تکیه‌گاه ساده زیر بار گسترده‌ی q حساب می‌شود. در این حالت برای تحلیل تیر، ۴۰ جزء پیشنهادی به کار میرود. جدول‌های ۸ و ۹ تغییر شکل حداکثر تیر دو سر مفصل، به ترتیب، در تیرهای ضخیم و نازک را نمایش می‌دهند. در هر یک از این جدول‌ها، پاسخ‌های جزء پیشنهادی در کنار نتایج جزءهای خوب دیگر پژوهش‌گران برای تیر با نسبت‌های ابعادی مختلف می‌آیند. جابه‌جایی حداکثر در تیر با تکیه‌گاه ساده در وسط دهانه اتفاق می‌افتد. در این ارزیابی ضریب کشسانی و ضریب پوآسون، به ترتیب، اندازه‌های ۲۹۰۰۰ و ۰/۳ دارند. همچنین، شدت بار گسترده روی این تیر برابر با q=۱۰ می‌باشد.

پاسخ‌های آمده در جدول‌های ۸ و ۹ دقت بالای جزء پیشنهادی را در



شکل ۵. نمودار همگرایی پاسخ کمانش جزء پیشنهادی در نسبت طول به ضخامت ۵ برای انواع شرایط تکیه‌گاهی

Fig.5 . Converging of proposed element's buckling results for length to thickness ratio of 5 and varies support conditions

جدول ۸. جابه‌جایی حداکثر تیر ضخیم با تکیه‌گاه ساده برای نسبت‌های طول به ضخامت متفاوت زیر بار گسترده q

Table 8. maximum displacement of simply supports thick beam with varies length to thickness ratios under uniform load of q

Theory	Source	L/h			
		12/12	40/12	80/12	160/12
Proposed		۰/۰۰۲۲۶	۰/۰۹۷۷۱	۱/۳۴۸۲	۲۰/۷۱۱
EBT	EBT4[25]	۰/۰۰۰۶۴۴	۰/۰۷۹۷۱	۱/۲۷۵	۲۰/۴۱
	[26]	۰/۰۰۰۶۴۷	۰/۰۷۹۸۲	۱/۲۷۷۱	۲۰/۴۳۴
	[27]	۰/۰۰۰۶۴۷	۰/۰۷۹۸۲	۱/۲۷۷۱	۲۰/۴۳۴
FSDT	FSDT8[25]	۰/۰۰۲۲۶۱	۰/۰۹۷۸۵	۱/۳۵	۲۰/۷۵
	[26]	۰/۰۰۲۲۶۱	۰/۰۹۷۷۵	۱/۳۴۸۹	۲۰/۷۲۱
	[27]	۰/۰۰۲۲۶	۰/۰۹۷۷۵	۱/۳۴۸۸	۲۰/۷۲۱
HOBT	HOBT10[25]	۰/۰۰۲۲۱۸	۰/۰۹۷۶۲	۱/۳۴۷	۲۰/۷
	[26]	۰/۰۰۲۲۲۱	۰/۰۹۷۷۱	۱/۳۴۸۸	۲۰/۷۲۱
	[27]	۰/۰۰۲۲۲	۰/۰۹۷۷۱	۱/۳۴۸۸	۲۰/۷۲۱
	[28]	۰/۰۰۲۲۲	۰/۰۹۷۷	۱/۳۴۸۶	۲۰/۷۱۷

جدول ۹. جابه‌جایی حداکثر تیر نازک با تکیه‌گاه ساده برای نسبت‌های طول به ضخامت متفاوت زیر بار گسترده q

Table 9. maximum displacement of simply supports thin beam with varies length to thickness ratios under uniform load of q.

Theory	Source	L/h			
		12/1	40/1	80/1	160/1
Proposed		۱/۱۳۶۰۵	۱۳۸/۰۷۷۲	۲۲۰۶/۶۵۴	۳۵۲۹۶/۱۳
EBT	EBT4[25]	۱/۱۱۲	۱۳۷/۳	۲۱۹۷	۳۵۱۶۰
	[27]	۱/۱۱۷۲۴	۱۳۷/۹۳۱	۲۲۰۶/۸۹۷	۳۵۳۱۰/۳۴
FSDT	FSDT8[25]	۱/۱۳۸	۱۳۸/۳	۲۲۱۰	۳۵۳۶۰
	[27]	۱/۱۳۶۶۱	۱۳۸/۱۴۶۲	۲۲۰۷/۷۵۷	۳۵۳۱۳/۷۹
HOBT	HOBT10[25]	۱/۱۳۵	۱۳۸	۲۲۰۶	۳۵۲۸۰
	[27]	۱/۱۳۶۶	۱۳۸/۱۴۶۲	۲۲۰۷/۷۵۷	۳۵۳۱۳/۷۹
	[28]	۱/۱۳۶۴	۱۳۸/۰۸	۲۲۰۶/۳	۳۵۲۸۷

تحلیل استاتیکی تیرهای ضخیم و نازک نشان می‌دهند. در این مقاله، با استفاده از چندین آزمون عددی، کارایی جزء پیشنهادی در تمامی مسئله‌های تحلیل استاتیکی، ارتعاش آزاد و کمانش به اثبات رسید.

۳- نتیجه‌گیری

در این مقاله یک جزء جدید تیری رابطه‌سازی شد. به منظور رابطه‌سازی جزء پیشنهادی، از برقراری معادله‌ی حاکم بر تیر تیموشنکو کمک گرفته شد. میدان‌های چرخش و جابه‌جایی به گونه‌ای انتخاب شدند که معادله‌ی حاکم بر تیر تیموشنکو برقرار گردد. افزون بر این، برقراری معادله‌ی حاکم بر تیر تیموشنکو وابستگی‌هایی میان مجهولات گره‌ای ایجاد نمود. این وابستگی‌ها، افزون بر کاراسازی جزء پیشنهادی، از تعداد مجهول‌ها کاست. جزء ساده و کارای پیشنهادی دقت بالا در شبکه‌های درشت و همگرایی سریع دارد. برای اثبات کارایی جزء نو از شمار فراوان و متنوعی از آزمون‌های عددی بهره‌جویی گشت. در این مقاله اثبات شد که جزء ساده‌ی پیشنهادی نه تنها در تحلیل ارتعاش آزاد بلکه در تحلیل‌های استاتیکی و کمانش نیز توانمندی بسیار عالی دارد. برای هر یک از تحلیل های استاتیکی، کمانش و ارتعاش آزاد تعدادی آزمون عددی استفاده شد. این آزمون‌های عددی، شرایط تکیه‌گاهی مختلف و نسبت‌های ابعادی متفاوت داشتند. دقت بالا در تمامی این حالت‌ها برای انواع مختلف تحلیل‌ها، کارایی عالی این جزء پیشنهادی ساده را به خوبی نمایش می‌دهد.

۴- فهرست علائم

علائم انگلیسی

A	مساحت مقطع تیر
D، $D_{\circ}$	بردار جابه‌جایی‌های گره‌ای
$\ddot{\boldsymbol{D}}$	بردار شتاب‌های گره‌ای
E	ضریب کشسانی
$\boldsymbol{F}$	بردار نیرو
G	ضریب برشی
h	ضخامت تیر
I	ممان اینرسی
$\boldsymbol{K}$	ماتریس سختی
$\boldsymbol{K}_g$	ماتریس سختی هندسی
k_s	ضریب اصلاح برشی
l	طول تیر
$\boldsymbol{M}$	ماتریس جرم
N، $N_{\circ}$	ماتریس تابع‌های شکل
$\bar{N}_{cr}$، N_{cr}	نیروی محوری بحرانی کمانش
$\boldsymbol{N}_{\phi}$، $\boldsymbol{N}_w$	ماتریس تابع‌های شکل وابسته به میدان‌های خیز و چرخش
P	نیروی محوری
q	شدت بارگسترده عرضی روی تیر
T	کارمایه‌ی جنبشی

u	میدان جابه‌جایی در راستای محوری تیر
U	کارمایه‌ی کرنشی
ν	نسبت پوآسون
w	میدان جابه‌جایی عرضی
ΔW	کار نیروی محوری

علائم یونانی

γ_{xz}, ε_{xx}	کرنش‌های نرمال و برشی
ρ	چگالی
τ_{xz}, σ_{xx}	تنش‌های نرمال و برشی
ϕ	میدان چرخش
ω, $\bar{\omega}$	فرکانس طبیعی

منابع

[1] G. Cowper, The shear coefficient in Timoshenko's beam theory, (1966).

[2] J.R. Hutchinson, On Timoshenko beams of rectangular cross-section, J. Appl. Mech., 71(3) (2004) 359-367.

[3] D. Zhou, Free vibration of multi-span Timoshenko beams using static Timoshenko beam functions, Journal of Sound and Vibration, 241(4) (2001) 725-734.

[4] X.-F. Li, Z.-W. Yu, H. Zhang, Free vibration of shear beams with finite rotational inertia, Journal of Constructional Steel Research, 67(10) (2011) 1677-1683.

[5] S.J. Lee, K.S. Park, Vibrations of Timoshenko beams with isogeometric approach, Applied Mathematical Modelling, 37(22) (2013) 9174-9190.

[6] H. Arvin, Free vibration analysis of micro rotating beams based on the strain gradient theory using the differential transform method: Timoshenko versus Euler-Bernoulli beam models, European Journal of Mechanics-A/Solids, 65 (2017) 336-348.

[7] T. Huang, The effect of rotatory inertia and of shear deformation on the frequency and normal mode equations of uniform beams with simple end conditions, (1961).

[8] Y.-S. HE, Free Vibration analysis of continuous Timoshenko beams by dynamic stiffness method, Advanced topics in vibrations, (1987) 43-48.

[9] R. Davis, R. Henshell, G. Warburton, A Timoshenko beam element, Journal of Sound and Vibration, 22(4) (1972) 475-487.

[10] K. Chan, X. Wang, Free vibration of a Timoshenko beam partially loaded with distributed mass, Journal of Sound and Vibration, 206(3) (1997) 353-369.

[11] J. Lee, W. Schultz, Eigenvalue analysis of Timoshenko beams and axisymmetric Mindlin plates by the pseudospectral method, Journal of Sound and Vibration, 269(3-5) (2004) 609-621.

[12] A. Ferreira, G. Fasshauer, Computation of natural frequencies of shear deformable beams and plates by an RBF-pseudospectral method, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 196(1-3) (2006) 134-146.

[13] L.B. da Veiga, C. Lovadina, A. Reali, Avoiding shear locking for the Timoshenko beam problem via isogeometric collocation methods, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 241 (2012) 38-51.

[14] K. Torabi, A.J. Jazi, E. Zafari, Exact closed form solution for the analysis of the transverse vibration modes of a Timoshenko beam with multiple concentrated masses, Applied Mathematics and Computation, 238 (2014) 342-357.

[15] B. Zhang, Y. He, D. Liu, Z. Gan, L. Shen, Non-classical Timoshenko beam element based on the strain gradient elasticity theory, Finite elements in analysis and design, 79 (2014) 22-39.

[16] Y.S. Hsu, Enriched finite element methods for Timoshenko beam free vibration analysis, Applied Mathematical Modelling, 40(15-16) (2016) 7012-7033.

[17] J. Reddy, On locking-free shear deformable beam finite elements, Computer methods in applied mechanics and engineering, 149(1-4) (1997) 113-132.

[18] T. Kocatürk, M. Şimşek, Free vibration analysis of Timoshenko beams under various boundary conditions, Sigma, 1 (2005) 30-44.

[19] M. Şimşek, T. Kocatürk, Free vibration analysis of beams by using a third-order shear deformation theory, Sadhana, 32(3) (2007) 167-179.

[20] V. Kahya, M. Turan, Finite element model for vibration and buckling of functionally graded beams based on the first-order shear deformation theory, Composites Part B: Engineering, 109 (2017) 108-115.

[21] T.-K. Nguyen, T.T.-P. Nguyen, T.P. Vo, H.-T. Thai, Vibration and buckling analysis of functionally graded sandwich beams by a new higher-order shear deformation theory, Composites Part B: Engineering, 76 (2015) 273-285.

[22] T.P. Vo, H.-T. Thai, T.-K. Nguyen, A. Maheri, J. Lee, Finite element model for vibration and buckling of functionally graded sandwich beams based on a refined shear deformation theory, Engineering Structures, 64 (2014) 12-22.

[23] T.P. Vo, H.-T. Thai, T.-K. Nguyen, F. Inam, J. Lee, A quasi-3D theory for vibration and buckling of functionally graded sandwich beams, Composite Structures, 119 (2015) 1-12.

[24] S.-R. Li, R.C. Batra, Relations between buckling loads of functionally graded Timoshenko and homogeneous Euler–Bernoulli beams, Composite Structures, 95 (2013) 5-9.

[25] A. Özütok, E. Madenci, Static analysis of laminated composite beams based on higher-order shear deformation theory by using mixed-type finite element method, International Journal of Mechanical Sciences, 130 (2017) 234-243.

[26] T.P. Vo, H.-T. Thai, Static behavior of composite beams using various refined shear deformation theories, Composite Structures, 94(8) (2012) 2513-2522.

[27] W. Bickford, B. WB, A consistent higher order beam theory, (1982).

[28] P. Heyliger, J. Reddy, A higher order beam finite element for bending and vibration problems, Journal of sound and vibration, 126(2) (1988) 309-326.

پیوست

$$\begin{cases} \bar{N}_{\omega 1} = -\dfrac{1}{2l^3}(3x-l)(3x-2l)(x-l) \\ \bar{N}_{\omega 2} = \dfrac{9}{2l^3}x(3x-2l)(x-l) \\ \bar{N}_{\omega 4} = -\dfrac{9}{2l^3}x(3x-l)(x-l) \\ \bar{N}_{\omega 5} = \dfrac{1}{2l^3}x(3x-l)(3x-2l) \\ \bar{N}_{\phi 1} = \dfrac{(2x-l)(x-l)}{l^2} \\ \bar{N}_{\phi 3} = \dfrac{-4x(x-l)}{l^2} \\ \bar{N}_{\phi 5} = \dfrac{x(2x-l)}{l^2} \end{cases} \tag{A1}$$

$$\begin{cases} N_{\omega 1} = \dfrac{(x-1)(2x^2 - xl - \delta)}{l\delta} \\ N_{\omega 2} = \dfrac{x(x-1)(2xl - l^2 - \delta)}{2l\delta} \\ N_{\omega 3} = \dfrac{x(2x^2 - 3xl + l^2 - \delta)}{l\delta} \\ N_{\omega 4} = \dfrac{x(x-1)(2xl - l^2 + \delta)}{2l\delta} \\ N_{\phi 1} = \dfrac{6}{l\delta} x(x-l) \\ N_{\phi 2} = \dfrac{(x-l)}{l\delta}(3xl - \delta) \\ N_{\phi 3} = -\dfrac{6}{l\delta} x(x-l) \\ N_{\phi 4} = \dfrac{x}{l\delta}(3xl - 3l^2 + \delta) \end{cases} \tag{A2}$$

$$\lambda = \frac{h^2(1+\nu)}{6f_s}, \quad \delta = l^2 + 12\lambda \tag{A3}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{K}(1{,}1) = \boldsymbol{K}(3{,}3) = -\boldsymbol{K}(3{,}1) = (5A\,G(-l^2+\delta)^2)/(6\,l\,\delta^2) + (12\,E\,I\,l)/(\delta^2) \\ \boldsymbol{K}(2{,}1) = \boldsymbol{K}(4{,}1) = -\boldsymbol{K}(3{,}2) = -\boldsymbol{K}(4{,}3) = \dfrac{l}{2}\boldsymbol{K}(1{,}1) \\ \boldsymbol{K}(2{,}2) = \boldsymbol{K}(4{,}4) = (5A\,G\,\delta^2\,l^2 + 24E\,I\,\delta^2 - 10A\,G\,\delta\,l^4 + 5A\,G\,l^6 + 72E\,I\,l^4)/(24\,l\,\delta^2) \\ \boldsymbol{K}(4{,}2) = (5A\,G\,\delta^2\,l^2 - 24E\,I\,\delta^2 - 10A\,G\,\delta\,l^4 + 5A\,G\,l^6 + 72E\,I\,l^4)/(24\,l\,\delta^2) \end{cases} \tag{A4}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{M}(1{,}1) = \boldsymbol{M}(3{,}3) = l\,\rho(70A\,\delta^2 + 7A\,\delta\,l^2 + A\,l^4 + 252I\,l^2)/(210\,\delta^2) \\ \boldsymbol{M}(2{,}1) = -\boldsymbol{M}(4{,}3) = l^2\rho(35A\,\delta^2 + 7A\,\delta\,l^2 - 420\,I\,\delta + 2A\,l^4 + 504\,I\,l^2)/(840\,\delta^2) \\ \boldsymbol{M}(3{,}1) = -l\,\rho(-35A\,\delta^2 + 7A\,\delta\,l^2 + A\,l^4 + 252\,I\,l^2)/(210\,\delta^2) \\ \boldsymbol{M}(4{,}1) = -\boldsymbol{M}(3{,}2) = l^2\rho(-35A\,\delta^2 + 7A\,\delta\,l^2 - 420\,I\,\delta + 2A\,l^4 + 504\,I\,l^2)/(840\,\delta^2) \\ \boldsymbol{M}(2{,}2) = \boldsymbol{M}(4{,}4) = l\,\rho(7A\,\delta^2\,l^2 + 280\,I\,\delta^2 - 420\,I\,\delta\,l^2 + A\,l^6 + 252\,I\,l^4)/(840\,\delta^2) \\ \boldsymbol{M}(4{,}2) = l\,\rho(-7A\,\delta^2\,l^2 + 140\,I\,\delta^2 - 420\,I\,\delta\,l^2 + A\,l^6 + 252\,I\,l^4)/(840\,\delta^2) \end{cases} \tag{A5}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{K}_g(1,1) = \boldsymbol{K}_g(3,3) = -\boldsymbol{K}_g(3,1) = \left(5\delta^2 + l^4\right)/\left(5l\,\delta^2\right) \\ \boldsymbol{K}_g(2,1) = \boldsymbol{K}_g(4,1) = -\boldsymbol{K}_g(3,2) = -\boldsymbol{K}_g(4,3) = l^4/\left(10\delta^2\right) \\ \boldsymbol{K}_g(2,2) = \boldsymbol{K}_g(4,4) = l\left(5\delta^2 + 3l^4\right)/\left(60\delta^2\right) \\ \boldsymbol{K}_g(4,2) = l\left(5\delta^2 - 3l^4\right)/\left(60\delta^2\right) \end{cases} \tag{A6}$$

چگونه به این مقاله ارجاع دهیم

M. Yaghoobi, , M. Sedaghatjo, R. Alizadeh, M. Karkon ,Formulating a new efficient simple element for statics, buckling and free vibration analysis of Timoshenko's beam , Amirkabir J. Civil Eng., 53(9) (2021) 4061-4080.

DOI: 10.22060/ceej.2020.18186.6796

این صفحه عمداً خالی است