Amirkabir Journal of Civil Engineering

Amirkabir J. Civil Eng., 53(12) (2022) 1143-1146
DOI: 10.22060/ceej.2021.18788.6964

Numerical Solution of Steady Incompressible Turbulent Navier–Stokes Equations using Multiquadric Radial Basis Function (MQ-RBF) Method

M. H. Mirabi, E. Jabbari*, T. Rajaee

Department of Civil Engineering, University of Qom, Qom, Iran

ABSTRACT: The inconveniences of introducing and modifying the mesh grids in mesh-based numerical methods lead the researchers to meshfree methods, among which the RBF methods are probably the most interesting and powerful ones. In this research, the numerical solution of the steady-state incompressible continuity and Navier–Stokes equations, and the standard k-Ɛ turbulence model was investigated in a 2D domain. The computational domain consisting of a 0.5 m×0.5 m square lid-driven cavity was analyzed for five Reynolds numbers of 2.5×10^5, 5×10^5, 10×10^5, 2×10^6, and 5.5×10^6. The Multiquadric Radial Basis Function (MQ-RBF), as the most successful RBF, was employed with 36 and 121 domain computational nodes to solve the PDEs. The velocity fields in two directions, the static pressure, the turbulent kinetic energy and the turbulent energy dissipation, were computed. A try–and–error algorithm was used for solving a set of non-linear equations, and the optimal values of the shape parameter c and the λ set coefficients were evaluated and discussed for each flow field. According to the results, assuming the independence of the values of the shape parameter c for each flow field at different Reynolds numbers, a predictable pattern can be obtained for the λ set for different Reynolds' numbers in the studied range. These patterns with the predictor functions of the flow fields were compared to existing benchmark results of the finite volume method (ANSYS Fluent). The Nash-Sutcliffe coefficients of 93-99% and RRSME of about %1 obtained from this comparison indicated the reasonable accuracy of the assumption concerning the independence of the shape parameter c of the Reynolds' numbers, the repeatable patterns of the normalized λ set, and polynomial predictor functions in the MQRBF method for each flow field.

Review History:

Received: Jul. 29, 2020
Revised: Feb. 14, 2021
Accepted: Mar. 01, 2021
Available Online: Mar. 13, 2021

Keywords:

Multiquadric Method
Navier-Stokes
Turbulent Flow
Lid Driven Cavity
CFD.

1- Introduction

The fluid flow analysis using continuity equation, Navier-Stokes equations, and turbulence mathematical models has numerous applications in engineering sciences. The application of Multiquadric Radial Basis Functions (MQRBF) for solving Partial Differential Equations (PDEs) is one of the famous and efficient meshless methods. In MQRBF method, the PDEs solving procedure consists of estimating two important quantities: the shape parameter (c) and the set of unknown coefficients (λ) [1-3]. These two parameters are optimized when their resulting fields exhibit good accuracy compared to other numerical methods or experimental models. In solving the system of non-linear PDEs, including the transport equations, several shape parameters and the optimal set of coefficients must be estimated so that the solution complexity will be increased. In the present study, the set of the continuity equation, Navier-Stokes equations, and mathematical turbulence model (k-Ɛ model) are analyzed assuming incompressible steady-state flow conditions consisting of five transport equations including different flow parameters and some non-linear and high-order PDE terms.

2- Methodology

The continuity and Navier-Stokes equations are applied for two-dimensional incompressible steady-state flow in isothermal conditions. Also, the k-Ɛ turbulence model with two transport equations is applied to analyze the flow turbulence parameters in high Reynolds numbers [4, 5]:

$$\rho \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \tag{1}$$

$$\rho \frac{\partial \bar{u}_i \bar{u}_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i}\right) - \rho \frac{\partial \overline{u_i' u_j'}}{\partial x_j} \tag{2}$$

$$\rho \frac{\partial \bar{u}_i k}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left((\mu + \mu_t)\left(\frac{\partial k}{\partial x_j}\right)\right) - \rho \overline{u_i' u_j'} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} - \rho\varepsilon \tag{3}$$

*Corresponding author's email: ehsan.jabbari@gmail.com

Table 1. The Nash-Sutcliffe coefficient and RRMSE error criteria for flow parameters of lid driven cavity

	Points	u1	u2	p	k	ε
N-S	36	0.97	0.96	0.97	0.99	0.98
	121	0.96	0.80	0.97	0.95	0.98
RRMSE	36	%1.12	%0.93	%0.37	%0.20	%0.81
	121	%0.39	%0.55	%0.08	%0.20	%0.25

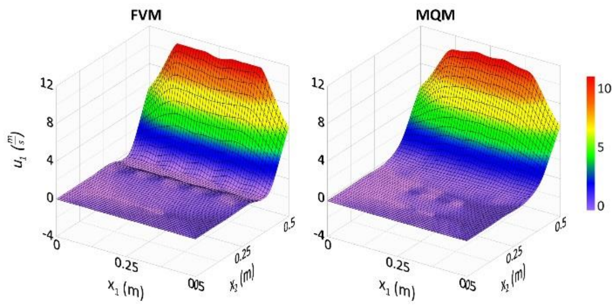


Fig. 1. u^1 velocity component in lid driven cavity for MQM and FVM

$$\rho\frac{\partial \overline{u_i}\varepsilon}{\partial x_i}=\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\left(\mu+\frac{\mu_t}{1.3}\right)\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j}\right)\right)+1.44\frac{\varepsilon}{k}\left[-\rho\overline{u_i'u_j'}\frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i}\right]-1.92\rho\frac{\varepsilon^2}{k} \quad (4)$$

In the above equations, x represents the component of the coordinate system in principal directions, $\overline{u}$ are the mean velocity vector components, $\overline{u_i'u_j'}$ is the Reynolds stress tensor, ρ and μ are the density and dynamic viscosity, $\overline{p}$ is the static pressure, k is the turbulence kinetic energy, μ_t is the turbulent dynamic viscosity and ε is the turbulent kinetic energy dissipation [6-8]. For solving the non-linear PDEs using MQRBF method, the following estimation function form is considered for all five domain parameters of the PDEs [9-12]:

$$f\left(x_{1_i},x_{2_i}\right)=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^f\sqrt{\left(x_{1_i}-x_{1_j}\right)^2+\left(x_{2_i}-x_{2_j}\right)^2+c_f^2} \quad (5)$$

where x_1 and x_2 are the components of the coordinate system, c is the shape parameter, λ is the unknown coefficient, and n is the number of center points in the domain. The first and second-order derivatives of the main flow fields are derived, then the obtained MQ form of the derivatives are substituted in five transport equations (1 to 4) which result in the system of non-linear equations. Due to non-linear terms in the system of equations, a combination of try and error and Newton methods will be employed as the solution procedure. The results are compared with the existing benchmarks of the finite volume method using two well-known error criteria of Nash-Sutcliffe and Relative Root-Mean-Square Error for evaluating the computations accuracy.

3- Results and Discussion

The problem is solved for two cases of a lid-driven cavity benchmark with 36 and 121 center points and a sudden expansion problem with 342 center points. The results of the solved examples show that assumptions of independence of shape parameter c and predictability of λ coefficients are acceptable. Two predictor relations for λ coefficients regions based on the lid velocity U and Reynolds number are as follow in which the a_i coefficients are to be determined:

$$\underset{Min}{Max}\,\lambda=a_3U_{Re}^3+a_2U_{Re}^2+a_1U_{Re}+a_0 \qquad n=3 \quad (6)$$

$$\underset{Min}{Max}\,\lambda=a_2U_{Re}^2+a_1U_{Re}+a_0 \qquad n=2 \quad (7)$$

In most of the predicted flow fields, the results were found to be in good agreement with those of the FVM (ANSYS Fluent). The Nash-Sutcliffe coefficients of 93-99% and RRSME of about %1 indicated the reasonable accuracy of the assumption concerning the independence of the shape parameter c of the Reynolds' numbers, the repeatable patterns of the normalized λ set, and polynomial predictor functions in the MQRBF method for each flow field (Table 1).

4- Conclusions

In this study, the MQRBF meshfree method was examined for solving the governing equations of 2D incompressible turbulent steady flow in a lid-driven cavity benchmark problem by comparing the results to those of FVM (ANSYS Fluent). The main challenge is to find the appropriate shape parameters (c) and set of unknown coefficients (λ) for the selected number of center points. The hypothesis of shape parameters independence from Reynolds numbers and predictability of λ coefficients was validated and the high accuracy of results was indicated in addition to presenting some predictor polynomial relations for λ coefficients. The comparison between the results of the presented approach and those obtained by the FVM shows that the proposed technique may be applied to solve the PDEs of 2D steady turbulent incompressible flow.

References

[1] R. L. Hardy, Multiquadric equations of topography and other irregular surfaces, Journal of geophysical research, 76(8) (1971) 1905-1915.

[2] R. Franke, Scattered data interpolation: tests of some methods, Mathematics of computation, 38(157) (1982) 181-200.

[3] E.J. Kansa, Multiquadrics—A scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics—I surface approximations and partial derivative estimates, Computers & Mathematics with applications, 19(8-9) (1990) 127-145.

[4] R. Marinova, C. Christov, T. Marinov, A fully coupled solver for incompressible Navier–Stokes equations using operator splitting, International Journal of Computational Fluid Dynamics, 17(5) (2003) 371-385.

[5] K. Poochinapan, Numerical implementations for 2D lid-driven cavity flow in stream function formulation, ISRN Applied Mathematics, 2012 (2012).

[6] A.R. Firoozjaee, M.H. Afshar, Steady-state solution of incompressible Navier–Stokes equations using discrete least-squares meshless method, International Journal for Numerical Methods in Fluids, 67(3) (2011) 369-382.

[7] G. Bourantas, E. Skouras, V. Loukopoulos, G. Nikiforidis, Numerical solution of non-isothermal fluid flows using local radial basis functions (LRBF) interpolation and a velocity-correction method, Computer Modeling in Engineering & Sciences, 64(2) (2010) 187-212.

[8] N. Mai-Duy, T. Tran-Cong, Numerical solution of Navier–Stokes equations using multiquadric radial basis function networks, International journal for numerical methods in fluids, 37(1) (2001) 65-86.

[9] A. Fallah, E. Jabbari, R. Babaee, Development of the Kansa method for solving seepage problems using a new algorithm for the shape parameter optimization, Computers & Mathematics with Applications, 77(3) (2019) 815-829.

[10] M. Kooshki, R. Babaee, E. Jabbari, Application of RBF multiquadric method for solving seepage problems using a new algorithm for optimization of the shape parameter, Amirkabir Civil Engineering Journal, 52(4) (2020), 1009-1024, In Persian.

[11] R. Babaee, E. Jabbari, M. Eskandari-Ghadi, Application of Multiquadric Radial Basis Function method for Helmholtz equation in seismic wave analysis for reservoir of rigid dams, Amirkabir Civil Engineering Journal, 52(12) (2021), 3015-3030, In Persian.

[12] H. Kahid Basiri, R. Babaee, A.R. Fallah, E. Jabbari, Development of multiquadric meshless method for solving dam-break problem, Journal of Hydraulics, 14(4) (2020), 83-98.

HOW TO CITE THIS ARTICLE

M. H. Mirabi, E. Jabbari, T. Rajaee , Numerical Solution of Steady Incompressible Turbulent Navier–Stokes Equations using Multiquadric Radial Basis Function (MQ-RBF) Method, Amirkabir J. Civil Eng., 53(12) (2022) 1143-1146.

DOI: 10.22060/ceej.2021.18788.6964

نشریه مهندسی عمران امیرکبیر

نشریه مهندسی عمران امیرکبیر، دوره ۵۳، شماره ۱۲، سال ۱۴۰۰، صفحات ۵۳۲۵ تا ۵۳۵۶
DOI: 10.22060/ceej.2021.18788.6964

حل عددی معادلات ناویر استوکس در حالت پایای تراکم‌ناپذیر آشفته با استفاده از روش تابع پایه شعاعی چند ربعی

محمد حسین میرآبی، احسان جباری*، طاهر رجایی

گروه مهندسی عمران، دانشگاه قم، قم، ایران.

تاریخچه داوری:
دریافت: ۱۳۹۹/۰۵/۰۸
بازنگری: ۱۳۹۹/۱۱/۲۶
پذیرش: ۱۳۹۹/۱۲/۱۱
ارائه آنلاین: ۱۳۹۹/۱۲/۲۳

کلمات کلیدی:
روش چند ربعی
معادلات ناویر استوکس
جریان آشفته
حفره با درپوش متحرک
دینامیک سیالات محاسباتی

خلاصه: در روش های عددی هزینه و انرژی قابل توجهی صرف ایجاد و در مراحل بعدی اعمال تغییرات لازم در شبکه می شود. روش های بدون شبکه عمدتا به دلیل عدم نیاز به یک شبکه گرهی و استفاده از مجموعه نقاطی بدون ارتباط خاص با یکدیگر و سایر مزایایی که هر یک از انواع آن نسبت به روش های با شبکه دارند، به سرعت در حال توسعه و به کارگیری در مسائل فیزیکی و مهندسی هستند. یکی از انواع این روش ها، روش‌های تابع پایه شعاعی هستند که روش چند ربعی یکی از توانمندترین آن‌هاست. در این پژوهش، روش تابع پایه شعاعی چند ربعی برای حل معادلات تراکم‌ناپذیر جریان پایا شامل معادلات پیوستگی، ناویراستوکس و مدل آشفتگی k-ε استاندارد، در یک میدان دو بعدی مورد ارزیابی قرار گرفته است. این میدان شامل یک هندسه حفره با درپوش متحرک مربعی، به ابعاد ۰/۵ m×۰/۵ m می‌باشد که در پنج عدد رینولدز ۲/۵×۱۰^۵، ۵×۱۰^۵، ۱×۱۰^۶، ۲×۱۰^۶ و ۵/۵×۱۰^۶ تحلیل گردیده است. دامنه مذکور دو بار با تعداد نقاط داخلی ۳۶ و ۱۲۱ مورد حل قرار گرفته و متغیرهای سرعت در هر دو جهت، فشار استاتیکی، انرژی جنبشی آشفته و استهلاک انرژی آشفته، محاسبه شده‌اند. طی این فرآیند، ضمن به کارگیری یک الگوریتم مبتنی بر روش سعی و خطا جهت حل دسته معادلات حاکم غیرخطی، دو کمیت مهم متغیر شکل c بهینه و مجموعه ضرایب λ بهینه برای هر میدان جریان، مورد بحث و بررسی قرار گرفته است. نتایج نشان می‌دهد، با اتخاذ فرض استقلال مقادیر پارامتر c، برای هر میدان جریان در اعداد رینولدز مختلف مورد مطالعه، می‌توان به یک الگوی قابل پیش‌بینی برای مجموعه λ، در سایر اعداد رینولدز داخل بازه مورد نظر، دست یافت. الگوهای مذکور به همراه توابع پیش‌بین میدان‌های جریان مورد نظر، با نتایج روش حجم محدود (نرم افرار انسیس فلوئنت)، مورد مقایسه قرار گرفتند. ضرایب نش–ساتکلیف ۹۳ الی ۹۹ درصد و بیشینه خطای جذر میانگین مربعات نسبی در حد یک درصد، به دست آمده از این مقایسه برای پنج متغیر مستقل میدان محاسباتی در جداول و نمودارهای ارائه شده، نشان دهنده قابل اعتماد بودن ترکیب فرض مستقل بودن پارامتر c از اعداد رینولدز، الگوهای تکرارپذیر مجموعه ضرائب λ نرمال شده و نیز توابع پیش‌بینی‌کننده آن‌ها، و همچنین دقت قابل قبول نتایج برای متغیرهای میدان سیال می‌باشند.

۱– مقدمه

تحلیل انواع جریان به کمک معادلات ناویر استوکس و معادله پیوستگی، دارای کاربردهای بی‌شماری در علوم مهندسی است. در جریان‌های آشفته، با تلفیق معادلات انتقال رینولدز، معادلات مذکور و در نتیجه محاسبات باز هم پیچیده‌تر می‌گردند. روش‌های مختلف تحلیل عددی معادلات انتقال غیرخطی مرتبه بالا، دارای ویژگی‌ها و مزایای مختلفی هستند. روش عددی حجم محدود، که یکی از شناخته شده‌ترین روش‌های حاضر، جهت تحلیل معادلات انتقال است، با تکیه بر گسسته‌سازی فضایی معادلات انتقال به کمک قضیه دیورژانس در دامنه محاسباتی و الگوهای مختلف خطی و مراتب بالاتر، نتایج را با دقت مناسبی به دست می‌آورد. همچنین محدود کننده‌های شار و شیب، با کنترل مقدار شار در سطوح هر حجم محدود و گرادیان کمیت‌های نرده‌ای (اسکالر) و برداری جریان، عدم همگرایی را محدود، و هزینه زمانی همگرایی را کاهش می‌دهند. روش حجم محدود در گروه روش‌های با شبکه قرار می‌گیرد که برای انجام محاسبات نیازمند تعریف شبکه نقاط است که هم وقت‌گیر است و هم دقت پاسخ‌ها کاملا وابسته به ویژگی‌های مختلف شبکه است. مشکل تعریف و اصلاحات مکرر این شبکه در میدان‌های دو و به ویژه سه بعدی به مراتب بیشتر خواهد بود. در سال‌های اخیر روش‌های بدون شبکه متعددی معرفی شده‌اند که بی‌نیاز از تعریف شبکه و ارتباط بین نقاط آن، صرفا با معرفی نقاطی در میدان (بدون

* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: ehsan.jabbari@gmail.com

ارتباط خاص بین آن‌ها) امکان حل معادلات یا حتی به دست آوردن یک تابع پاسخ تقریبی را فراهم می‌کنند. استفاده از توابع پایه شعاعی[1] در حل معادلات دیفرانسیل پاره‌ای یکی از روش‌های مشهور و کارآمد بدون شبکه است که اولین بار توسط کانزا با به کارگیری تابع پایه شعاعی چند ربعی[2] که یکی از کارآمدترین توابع پایه شعاعی است [۱] و پیش‌تر توسط هاردی [۲] ارائه شده بود معرفی گردید. در روش چند ربعی با تخمین دو کمیت مهم متغیر شکل c و مجموعه ضرائب λ، و با توجه به محل قرارگیری نقاط دامنه و شرایط مرزی، و همچنین نحوه توزیع آن‌ها، معادلات حل می‌گردند. این دو پارامتر زمانی بهینه می‌شوند که میدان‌های حاصله از آن‌ها، دقت مناسبی در مقایسه با روش‌های عددی دیگر و یا مدل‌های آزمایشگاهی، از خود نشان دهند. متغیر شکل c با آزمون و خطا، بر اساس تجربه و یا از برخی الگوریتم‌ها و روابط تجربی موجود و ضرائب λ از حل دستگاه معادلات جبری به دست می‌آیند. جریان‌های آشفته به دلیل پیچیدگی‌های ذاتی، تخمین پارامترهای مذکور را دشوارتر می‌سازند. به کارگیری مدل‌های ریاضی آشفتگی علاوه بر معادلات پیوستگی و ناویر استوکس، بر تعداد مجهولات و در نتیجه بر تعداد متغیرهای شکل می‌افزایند. این افزایش در تعداد متغیرهای مستقل اختصاص یافته به هر میدان سیال، باعث افزایش عبارات غیرخطی و مرتبه بالاتر معادلات شده، و روند یافتن متغیرهای شکل و مجموعه‌های λ را به طور چشمگیری دشوار می‌سازند. از این رو محاسبات جریان‌های آشفته به روش عددی تابع چند ربعی، واجد ملاحظات ویژه‌ای است.

برای یافتن پارامترهای مورد بررسی، مطالعات مختلفی انجام پذیرفته است. مارینو و همکاران [۳] معادلات ناویر استوکس پایا و تراکم‌ناپذیر را با معادله پوآسون فشار، تلفیق نمودند. پایداری روش حل ارائه شده در اعداد رینولدز بالا، به وسیله حل عددی جریان در یک دامنه حفره با درپوش متحرک[3] با نسبت ۱و ۲، در تحقیق ایشان نشان داده شده است. در این میان، رایت و گاسکل [۴] حل دقت مرتبه دوم و چهارم گسسته‌سازی فضایی را در حالت پایا، برای اعداد رینولدز بین ۱۰۰ تا ۱۰۰۰ به کار گرفتند. همچنین آن‌ها برای تحلیل عددی، از یک شبکه‌بندی ساختار یافته استفاده نمودند. برززنیاک و همکاران [۵] پژوهش‌هایی را پیرامون اعمال روش المان محدود برای گسسته‌سازی فضایی-زمانی، در معادلات ناویر استوکس دارای اختلال، انجام دادند. آن‌ها معادلات را در یک دامنه سه بعدی به کمک حل ضعیف، جهت بی اثر کردن پارامترهای گسسته‌سازی، تحلیل عددی نمودند. پوچیناپان [۶] با به کارگیری انواع الگوها و الگوریتم‌ها، معادلات ناویر استوکس دو بعدی تراکم‌ناپذیر را برای یک دامنه حفره با درپوش متحرک، به کار گرفت. وی برای حل، از یک گسسته‌ساز فضایی با دقت مرتبه دوم استفاده نمود. نتایج تحلیل نشان می‌داد که الگوهای حجم محدود با کمک روش تکرار غیرخطی داخلی، بازدهی مناسبی در اعداد رینولدز بالاتر از خود نشان می‌دهند. شیرازاکی و یاگیوا [۷] تحلیل پردازش موازی بزرگی را بر پایه روش بدون شبکه مجازی، تحت عنوان روش شبکه آزاد، مورد ارزیابی قرار دادند. این تحلیل برای جریان تراکم‌ناپذیر لزج با سه میلیون درجه آزادی و یک میلیون نقطه انجام گرفت. اکثر محققین برای تحلیل جریان، از معادلات ناویر استوکس تغییر یافته به شکل تابع چرخش استفاده می‌کنند. از جمله گیا و همکاران [۸] با تلفیق چند شبکه ضمنی، بر پایه تحقیقات رابین و کولسا [۹] در یک دامنه حفره با درپوش متحرک مربعی، با اعداد رینولدز ۱۰[4]، جریان را تحلیل نمودند. آن‌ها ضمن به کارگیری یک شبکه یکنواخت ساختار یافته با تعداد نقاط ۲۵۷×۲۵۷ و استفاده از گسسته‌سازی مرتبه دوم، نتایج مناسب و مطلوبی را به عنوان بنچ مارک برای سایر تحقیقات آتی، از خود باقی گذاشتند. وانگ [۱۰] با استفاده از حل تحلیلی در معادله انتشار، یک روش تحلیلی محدود را در دامنه فضایی و زمانی ایجاد کرد. نتایج نشان دهنده دقت قابل توجه تحلیل بود. کاپفرمن [۱۱] یک الگوی عددی برای جریان تراکم‌ناپذیر لزج بر پایه تابع جریان ارائه کرد. نتایج معادلات، به وسیله یک الگوی فشرده و تحلیل‌گر هندسی چند شبکه‌ای، گسسته‌سازی و حل گردید. میزان دقت روش مذکور، در یک دامنه حفره با درپوش متحرک با اعداد رینولدز بالا، مورد ارزیابی قرار گرفت. وو و همکاران [۱۲] مسائل جریان تراکم‌ناپذیر را با روش MLPG حل نمودند. برای غلبه بر نوسانات حل، از روش خط جریان سربالای پتروف گالرکین استفاده شد. همچنین برای ارضاء شرایط بابوسکا-برزی، روش متعادل کننده فشار پتروف گالرکین به کار گرفته شد. نتایج نشان داد که دقت روش مطلوب بوده و در اعداد رینولدز بالا همگراست.

کانزا [۱۳] اولین گام در به کارگیری توابع پایه شعاعی را برای حل در معادلات دیفرانسیل پاره‌ای برداشت. روش او در حل چندین مسئله مقدار مرزی بسیار موفق ظاهر شد. چنان که ذکر شد میزان دقت روش توابع پایه شعاعی، وابستگی بسیار زیادی به نوع تابع و متغیر شکل دارد. فیروزجایی و افشار [۱۴] جهت حل معادلات پایای ناویر استوکس تراکم‌ناپذیر، از روش بدون شبکه تلفیق یافته با روش گام کسری استفاده نمودند. آن‌ها نام این روش را بدون شبکه حداقل مربعات گسسته نامیدند. این روش، از

1 Radial Basis Functions (RBF)
2 Multiquadric
3 Lid driven cavity

حداقل مربعات متحرک برای تخمین تابع مناسب متغیر شکل، بهره می‌برد. همچنین روش حداقل مربعات، برای گسسته‌سازی معادلات حاکم بر جریان و شرایط مرزی آن‌ها به کار گرفته شد. بورانتاس و همکاران [۱۵] یک الگوریتم تابع پایه شعاعی را برای معادلات انتقال سرعت-چرخش توسعه دادند. تاکید این روش، بر پیاده‌سازی تصحیح میدان سرعت، ضمن حصول اطمینان از پایستگی جرم می‌باشد. نتایج به دست آمده نشان دهنده دقت مطلوب در عدد رینولدز 10^4، داخل شبکه‌ای به تعداد ۱۶۱×۱۶۱ نقطه است. دینگ و همکاران، روش دیفرانسیل تربیعی چند ربعی محلی را برای معادلات ناویر استوکس تراکم‌ناپذیر، در یک دامنه سه بعدی به کار گرفتند. برخلاف روش‌های دیفرانسیل تربیعی موجود، تابع وزنی، به وسیله توابع پایه شعاعی به جای چندجمله‌ای مرتبه بالا محاسبه گردید. همچنین مای دویی و تران کونگ [۱۶] یک روش عددی بر پایه توابع پایه شعاعی شبکه‌ای را برای حل معادلات ناویر استوکس تراکم‌ناپذیر لزج مورد استفاده قرار دادند. این روش، یک تخمین‌زن جامع بر پایه شبکه عصبی را در معادلات گنجانده است. به کارگیری این روش، آسان و به دور از هرگونه گسسته‌سازی المان محدود در دامنه و یا شرایط مرزی است. چینچاپاتنام و همکاران [۱۷] برای حل معادلات پایای ناویر استوکس تراکم‌ناپذیر، از روش بدون شبکه بر پایه توابع پایه شعاعی، استفاده کردند. مدل آن‌ها، قابلیت حل معادلات حاکم بر جریان، به صورت توزیع نقاط پراکنده در دامنه را دارد. کارایی روش مذکور با حل سه مسئله مختلف مورد ارزیابی قرار گرفت. نتایج حکایت از دقت مناسب روش دارند. چینچاپاتنام و همکاران [۱۸] از روش بدون شبکه برای حل جریان و اندرکنش آن با سازه، بهره بردند. گسسته‌سازی فضایی معادلات ناویر استوکس تراکم‌ناپذیر، به کمک روش اختلاف محدود توابع پایه شعاعی و گسسته‌سازی زمانی آن نیز بر اساس روش‌های صریح گام زمانی اولر و کرانک نیکلسون انجام پذیرفت. وانگ و همکاران [۱۹] یک روش بدون شبکه بر پایه توابع پایه شعاعی را جهت حل معادلات ناویر استوکس تراکم‌ناپذیر، توسعه دادند. توزیع نقاط برای ذخیره‌سازی متغیرها، بر اساس فلسفه شبکه‌بندی بدون ساختار، بنا نهاده شد. نتایج نشان‌گر دقت مطلوب روش آن‌ها می‌باشند. سلونتوس و سکویرا [۲۰] برای حل معادلات دو بعدی ناویر استوکس تراکم‌ناپذیر، معادله انتگرال مرزی محلی بدون شبکه را به کار گرفتند. در روش آن‌ها، نقاط شبکه‌بندی در دامنه تحلیلی پخش گردیده و توابع پایه شعاعی در حالت بهینه، برای دامنه و شرایط مرزی استفاده شده‌اند. فلاح و همکاران [۲۱] جهت حل پدیده تراوش در دامنه دو بعدی و سه بعدی، از روش عددی چند ربعی تابع پایه شعاعی کانزا بهره جستند. کاربرد عمده این روش در محیط‌های متخلخل محصور و غیر محصور بوده و برای به دست آوردن مقدار متغیر شکل بهینه، الگوریتمی با هزینه محاسباتی مناسب، مورد استفاده قرار گرفت. جهت ارزیابی کارایی الگوریتم به کار رفته، از تعداد و توزیع مختلف نقاط در دامنه محاسباتی، و مقایسه آن با جواب‌های روش تحلیلی مستقیم، استفاده گردید.

کوشکی و همکاران [۲۲] اقدام به تخمین متغیر شکل با استفاده از الگوریتم ژنتیک و به کارگیری فواصل نقاط به عنوان حدود بالا و پایین نمودند. نتایج علاوه بر نمایش توانایی و دقت بالای الگوریتم، حاکی از استقلال متغیر شکل بهینه از تعداد نقاط محاسباتی در هندسه های دلخواه بود. بابایی و همکاران [۲۳] روش بدون شبکه چند ربعی را برای حل معادله هلمهولتز در تحلیل لرزه‌ای دو بعدی مخازن سدهای صلب توسعه داده و نتیجه گرفتند که فرم‌های اصلی و مختلط تابع هلمهولتز به ترتیب برای فرکانس‌های کمتر و بیشتر از فرکانس طبیعی مخزن زمان محاسبات را بهینه می‌کنند. همچنین علاوه بر ارائه یک الگوریتم کارآمد برای تخمین مقادیر بهینه متغیر شکل، آن‌ها نشان دادند که این مقادیر بهینه بر حسب فرکانس‌های مختلف بارگذاری قابل فرمول‌بندی است. پاتل و راستوگی [۲۴] روش بدون شبکه را برای محاسبات پارامترهای آب زیرزمینی به کار برده و با استفاده از نتایج دو مدل یکی عددی با شبکه، و دیگری تحلیلی مستقیم، آن را ارزیابی نمودند. نتایج حاصله نشان می‌داد که روش آن‌ها نسبت به حل عددی وابسته به شبکه، دارای هزینه زمانی کمتر، و دقتی مطلوب است. هریس و همکاران اقدام به مدل‌سازی ناپیوستگی پیشانی موج با استفاده از روش‌های توابع پایه شعاعی و حداقل مربعات متحرک برای به ترتیب جریان لزج و برای جریان غیرلزج نمودند [۲۵]. شیخی و همکاران تحقیق قبلی خود در حل معادلات جریان تراکم ناپذیر ناپایای آرام با روش MLPG و با استفاده از توابع جریان – چرخش را این بار به جریان آشفته تعمیم دادند [۲۶]. کاهید و همکاران روش بدون شبکه چند ربعی را برای حل معادلات آب کم عمق و در مسئله شکست سد در حالت دو بعدی با موفقیت به کار گرفتند [۲۷].

در پژوهش حاضر، از یک حفره با درپوش متحرک مربعی، با تعداد نقاط ۳۶ و ۱۲۱ عدد، به عنوان دامنه محاسباتی دو بعدی حل معادلات حاکم، استفاده گردیده است. معادلات حاکم شامل، معادله پیوستگی، معادلات ناویر استوکس و مدل ریاضی آشفتگی دو معادله‌ای k-ε استاندارد بوده که تحت شرایط پایای تراکم‌ناپذیر، تحلیل گردیده‌اند. جهت محاسبات عددی، از روش تابع چند ربعی از خانواده توابع پایه شعاعی استفاده شده است. معادلات

حاکم شامل پنج معادله انتقال میدان‌های مختلف جریان، و ترم‌های متعدد غیرخطی و مرتبه بالای دیفرانسیل پاره‌ای است. مضاف بر این، با توجه به پنج کمیت میدان جریان، شامل سرعت برداری در دو جهت (u_1, u_2)، فشار استاتیکی (p)، انرژی جنبشی آشفته (k) و استهلاک انرژی جنبشی آشفته (ε)، تعداد متغیرهای شکل نیز، برابر با پنج می‌باشند. لذا حل دسته معادلات غیرخطی تشکیل شده از معادلات دیفرانسیل فوق از یک سو، و یافتن متغیرهای شکل متعدد و مجموعه λ بهینه، از سوی دیگر، بر دشواری تحلیل عددی با روش مذکور، می‌افزاید. بنابراین، با تکیه بر یک الگوریتم سعی و خطا، و فرض استقلال متغیرهای شکل از تغییر عدد رینولدز، می‌توان به الگویی پیش‌بینی‌پذیر برای مجموعه λ، دست یافت. این اعداد، شامل پنج عدد رینولدز ۱۰۵×۲/۵ ، ۱۰۵×۵ ، ۱۰۶، ۱۰۶×۲ و ۱۰۶×۵/۵ است. برای مقایسه و اعتبارسنجی، نتایج به دست آمده از روش عددی حجم محدود (نرم افرار انسیس فلوئنت)، به عنوان بنچ مارک جهت مقایسه مورد استفاده قرار گرفته است. همچنین از ضرایب نش-ساتکلیف و خطای جذر میانگین مربعات نسبی، به عنوان معیار ارزیابی میزان ارتباط و دقت نتایج حاصله، استفاده شده است.

۲- معادلات حاکم بر جریان

در این پژوهش معادلات ناویر استوکس از نوع پایا و تراکم‌ناپذیر هم‌دما در حالت دو بعدی در نظر گرفته می‌شوند. در اعداد رینولدز بالای جریان، عبارات آشفتگی در این معادلات که گرادیان مولفه‌های تانسور تنش رینولدز جریان می‌باشند، قابل توجه و پس از میدان‌های مولفه‌های سرعت، عامل ارتباط این دسته از معادلات انتقال، با معادلات انتقال آشفتگی، یا همان مدل دو معادله‌ای آشفتگی k-ε استاندارد هستند. همچنین استفاده از معادله پیوستگی جریان نیز، در روند محاسبات، شرط عدم تراکم‌پذیری را محقق می‌سازد. معادلات پیوستگی جریان و ناویر استوکس، در روابط ۱ الی ۳ نشان داده شده‌اند.

$$\rho\frac{\partial\overline{u_1}\,\overline{u_1}}{\partial x_1}+\rho\frac{\partial\overline{u_1}\,\overline{u_2}}{\partial x_2}=-\frac{\partial\overline{p}}{\partial x_1}+\mu\left(\frac{\partial^2\overline{u_1}}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\overline{u_1}}{\partial x_2^2}\right)-\rho\frac{\partial\overline{u_1'u_1'}}{\partial x_1}-\rho\frac{\partial\overline{u_1'u_2'}}{\partial x_2}\tag{۱}$$

$$\rho\frac{\partial\overline{u_1}\,\overline{u_2}}{\partial x_1}+\rho\frac{\partial\overline{u_2}\,\overline{u_2}}{\partial x_2}=-\frac{\partial\overline{p}}{\partial x_2}+\mu\left(\frac{\partial^2\overline{u_2}}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\overline{u_2}}{\partial x_2^2}\right)-\rho\frac{\partial\overline{u_2'u_1'}}{\partial x_1}-\rho\frac{\partial\overline{u_2'u_2'}}{\partial x_2}\tag{۲}$$

$$\frac{\partial\overline{u_1}}{\partial x_1}+\frac{\partial\overline{u_2}}{\partial x_2}=0\tag{۳}$$

در روابط فوق و مولفه‌های مختصات در جهات اصلی، $\overline{u_1}$ و $\overline{u_2}$ مولفه‌های بردار سرعت متوسط، u_1' و u_2' نوسانات لحظه‌ای مولفه‌های بردار سرعت، و به ترتیب چگالی و لزجت دینامیکی و $\overline{p}$ فشار استاتیکی است.

در مدل آشفتگی $k-\varepsilon$ استاندارد، مولفه‌های تانسور متقارن تنش رینولدز، از فرض بوزینسک به دست می‌آیند. این فرض با اعمال برهم‌کنش بین لزجت آشفته و تانسور کرنش متوسط جریان در مولفه‌های غیرقطری، و برهم‌کنش بین لزجت آشفته، تانسور کرنش متوسط جریان و انرژی جنبشی آشفته در مولفه‌های قطری تانسور تنش رینولدز، مولفه‌های مذکور را محاسبه می‌نماید. مدل آشفتگی $k-\varepsilon$ استاندارد، شامل دو معادله انتقال، برای انرژی جنبشی آشفته، و نرخ استهلاک انرژی جنبشی آشفته است که در روابط ۴ و ۵، نشان داده شده‌اند:

$$\rho\frac{\partial\overline{u_1}k}{\partial x_1}+\rho\frac{\partial\overline{u_2}k}{\partial x_2}=(\mu+\mu_t)\left(\frac{\partial^2k}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2k}{\partial x_2^2}\right)+\left[\rho\overline{u_1'u_1'}\frac{\partial\overline{u_1}}{\partial x_1}-\rho\overline{u_1'u_2'}\left(\frac{\partial\overline{u_1}}{\partial x_2}+\frac{\partial\overline{u_2}}{\partial x_1}\right)-\rho\overline{u_2'u_2'}\frac{\partial\overline{u_2}}{\partial x_2}\right]-\rho\varepsilon\tag{۴}$$

$$\rho\frac{\partial\overline{u_1}\varepsilon}{\partial x_1}+\rho\frac{\partial\overline{u_2}\varepsilon}{\partial x_2}=\left(\mu+\frac{\mu_t}{1.3}\right)\left(\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial x_2^2}\right)+1.44\frac{\varepsilon}{k}\left[-\rho\overline{u_1'u_1'}\frac{\partial\overline{u_1}}{\partial x_1}-\rho\overline{u_1'u_2'}\left(\frac{\partial\overline{u_1}}{\partial x_2}+\frac{\partial\overline{u_2}}{\partial x_1}\right)-\rho\overline{u_2'u_2'}\frac{\partial\overline{u_2}}{\partial x_2}\right]-1.92\rho\frac{\varepsilon^2}{k}\tag{۵}$$

در روابط فوق، k انرژی جنبشی آشفته و ε استهلاک انرژی جنبشی آشفته است. متغیر μ_t یا همان لزجت آشفته، از رابطه ۶ به دست می‌آید.

$$\mu_t = 0.09\rho \frac{k^2}{\varepsilon} \tag{۶}$$

با توجه به فرضیات بوزینسک، مولفه‌های متقارن تانسور تنش رینولدز جریان، از روابط ۷ تا ۹ محاسبه می‌شوند:

$$-\rho\overline{u_1^{'}u_1^{'}} = \mu_t\left(2\frac{\partial\overline{u_1}}{\partial x_1}\right) - \frac{2}{3}\rho k \tag{۷}$$

$$-\rho\overline{u_1^{'}u_2^{'}} = -\rho\overline{u_2^{'}u_1^{'}} = \mu_t\left(\frac{\partial\overline{u_1}}{\partial x_2} + \frac{\partial\overline{u_2}}{\partial x_1}\right) \tag{۸}$$

$$-\rho\overline{u_2^{'}u_2^{'}} = \mu_t\left(2\frac{\partial\overline{u_2}}{\partial x_2}\right) - \frac{2}{3}\rho k \tag{۹}$$

واضح است که هر چه مقدار باقی‌مانده معادلات انتقال فوق به صفر نزدیک‌تر باشند، دقت میدان‌های به دست آمده، افزایش می‌یابد. لذا مقدار باقی‌مانده هریک از معادلات، پس از حل عددی، مورد بررسی قرار می‌گیرند. با حل پنج معادله فوق، پنج متغیر شامل، سرعت جریان در دو جهت، فشار استاتیکی، انرژی جنبشی آشفته و استهلاک انرژی جنبشی آشفته، به دست خواهند آمد. با توجه به اینکه متغیر فشار استاتیکی جریان، تنها در دو معادله انتقال ظاهر شده است (ناویر استوکس)، حساسیت میدان فشار در روند حل عددی، دو چندان می‌باشد. سایر متغیرها، در اکثر معادلات انتقال، حضور دارند.

۳- هندسه میدان محاسباتی و خواص فیزیکی سیال

هندسه جریان، میدان دو بعدی مربع شکل مشهور حفره با درپوش متحرک می‌باشد. شرایط مرزی مدل، مشتمل بر چهار مرز دیواره مربع بوده که از این چهار مرز، سه مرز دیواره صلب و یک مرز (دیواره فوقانی) با سرعت ثابت در نظر گرفته می‌شود. ابعاد میدان m ۰/۵×m ۰/۵ و مقدار اعداد رینولدز جریان، با توجه به سرعت‌های مختلف مرز دیواره فوقانی در راستای x_1، شامل ۱۰

در سه مرز دیواره ثابت، میدان سرعت در دو راستای x_1 و x_2، برابر صفر و شرط عدم لغزش برقرار است. مولفه سرعت u_1 در مرز دیواره فوقانی غیرصفر و متغیر و مولفه u_2 مرز دیواره متحرک نیز برابر صفر می‌باشد. برای محاسبه میدان فشار استاتیکی در شرایط مرزی دیواره، از معادلات انتقال شماره ۱ و ۲ استفاده می‌شود. بدیهی است که برخی از مولفه‌های مماسی جملات معادلات انتقال مذکور، صفر بوده، و مولفه‌های عمودی آن، جهت تخمین میدان فشار استاتیکی در مرز دیواره، مورد استفاده قرار می‌گیرند. شرایط مرزی دیواره برای دو میدان k و ε ، طی روابط ۱۰ و ۱۱ مشخص گردیده‌اند:

$$\frac{\partial k}{\partial x_n} = 0 \tag{۱۰}$$

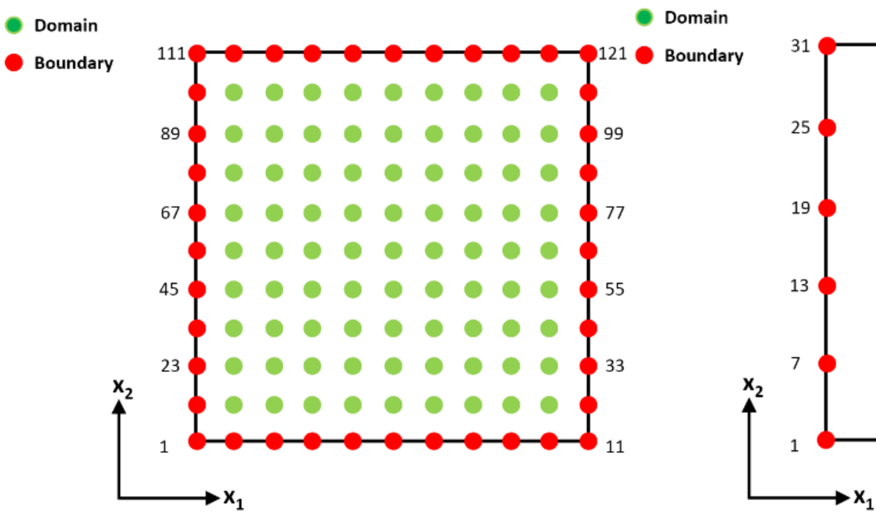
$$\varepsilon = \frac{(0.09)^{\frac{3}{4}} k^{\frac{3}{2}}}{\kappa y} \tag{۱۱}$$

که در آن κ ، ثابت فون‌کارمن و برابر ۰/۴۱۸۷ است. در رابطه ۱۱، فاصله نزدیک‌ترین مرکز حجم کنترل (در روش حجم محدود) یا گره (در روش چند ربعی) تا مرز دیواره مجاور آن می‌باشد. تعداد ۳۶ (۶×۶) و ۱۲۱ (۱۱×۱۱) نقطه (برای تعریف تابع تخمین چند ربعی)، با آرایش ساختار یافته و توزیع یکنواخت در داخل میدان و روی مرزها، در نظر گرفته شده است. نحوه توزیع نقاط داخل میدان در سرعت همگرایی و دقت پاسخ‌ها تاثیرگذار است. در این زمینه پژوهش‌های متعددی انجام شده و در حال انجام است [۲۸]. هدف از به کارگیری دو دسته از مجموعه نقاط، بررسی و ارزیابی اثر تغییرات تعداد نقاط، در روند محاسبات عددی مورد نظر است. در شکل ۱، آرایش و شماره‌گذاری دامنه‌های ۳۶ و ۱۲۱ نقطه‌ای نشان داده شده است.

سیال مورد استفاده، دارای چگالی ۹۹۸ کیلوگرم بر متر مکعب و لزجت دینامیکی آن ۰/۰۰۱ پاسکال در ثانیه بوده و تراکم‌ناپذیر فرض می‌شود. سیال مذکور، به صورت هم‌دما تحلیل شده و از فرآیندهای انتقال حرارت در دامنه محاسباتی سیال، صرف نظر می‌شود.

٤- معادلات انتقال با جایگذاری توابع پایه شعاعی چند ربعی

به منظور حل دستگاه معادلات به روش توابع پایه شعاعی، لازم است تمامی معادلات حاکم میدان‌های محاسباتی جریان، در ترکیب با تابع پایه شعاعی چند ربعی بازنویسی شوند. در روابط ۱۲ تا ۱۶ تعریف متغیرهای میدان



شکل ۱. دامنه محاسباتی ۳۶ نقطه‌ای و ۱۲۱ نقطه‌ای، به همراه مرزهای دیواره

Fig. 1. Computational domains of 36 and 121 nodes with wall boundary conditions

در شکل تابع چند ربعی نشان داده شده است. در این روابط n، تعداد نقاط دامنه (۳۶ و ۱۲۱)، c متغیر شکل است که باید مقدار بهینه آن در نظر گرفته شود و λ ضرائب مجهولی است که با حل دستگاه معادلات جبری حاصله از ارضاء معادلات حاکم در نقاط داخلی و اعمال شرایط مرزی بر روی نقاط مرزی میدان به دست خواهند آمد [۱۱].

$$\bar{u}_1\left(x_{1_i},x_{2_i}\right)=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^{u_1}\sqrt{\left(x_{1_i}-x_{1_j}\right)^2+\left(x_{2_i}-x_{2_j}\right)^2+c_{u_1}^2}\qquad \{i,j,n\}\in N\ \{x_1,x_2,\lambda,c\}\in R \tag{۱۲}$$

$$\bar{u}_2\left(x_{1_i},x_{2_i}\right)=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^{u_2}\sqrt{\left(x_{1_i}-x_{1_j}\right)^2+\left(x_{2_i}-x_{2_j}\right)^2+c_{u_2}^2}\qquad \{i,j,n\}\in N\ \{x_1,x_2,\lambda,c\}\in R \tag{۱۳}$$

$$\bar{p}\left(x_{1_i},x_{2_i}\right)=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^{p}\sqrt{\left(x_{1_i}-x_{1_j}\right)^2+\left(x_{2_i}-x_{2_j}\right)^2+c_{p}^2}\qquad \{i,j,n\}\in N\ \{x_1,x_2,\lambda,c\}\in R \tag{۱۴}$$

$$k\left(x_{1_i},x_{2_i}\right)=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^{k}\sqrt{\left(x_{1_i}-x_{1_j}\right)^2+\left(x_{2_i}-x_{2_j}\right)^2+c_{k}^2}\qquad \{i,j,n\}\in N\ \{x_1,x_2,\lambda,c\}\in R \tag{۱۵}$$

$$\varepsilon\left(x_{1_i},x_{2_i}\right)=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^{\varepsilon}\sqrt{\left(x_{1_i}-x_{1_j}\right)^2+\left(x_{2_i}-x_{2_j}\right)^2+c_{\varepsilon}^2}\qquad \{i,j,n\}\in N\ \{x_1,x_2,\lambda,c\}\in R \tag{۱۶}$$

برای به دست آوردن مشتقات مرتبه اول و دوم نسبت به دو جهت محوری، متغیرهای فوق مشتق‌گیری می‌شوند. پس از مشتق‌گیری‌های لازم، معادلات چند ربعی به دست آمده، در پنج معادله انتقال ۱ تا ۵ جایگذاری شده و دستگاه معادلات حاکم چند ربعی را تشکیل می‌دهند. همچنین با توجه به توضیحات و روابط ارائه شده پیرامون شرایط مرزی دیواره‌های ثابت و متحرک، دسته معادلات شرایط مرزی نیز تولید می‌شوند. ۲۵ جمله از مجموع ۳۴ عبارت معادلات انتقال ۱ تا ۵ مورد استفاده در دامنه محاسباتی، غیرخطی است. همچنین وجود مشتقات مرتبه دوم در اکثر عبارات معادلات مذکور، روند محاسبات میدان‌های جریان را بسیار پیچیده می‌نمایند. با این حال، وجود کوچک‌ترین نوسانات در روند حل دسته معادلات گسسته‌سازی شده چند ربعی، می‌تواند باعث بروز خطا در نتایج به دست آمده گردد. لذا جهت جلوگیری از رشد نوسانات مذکور، از محدود کننده‌های شیب، در مجاورت شرایط مرزی دیواره‌هایی که گرادیان میدانی زیادی دارند، استفاده شده است. این محدود کننده‌های شیب، با توجه به مقدار گرادیان هر میدان جریان، در جملات غیرخطی معادلات ۱تا ۵ ضرب شده است تا اثرات رشد نوسانات حل را کنترل و نتایج را با دقت بالاتری محاسبه نمایند.

۵- حل عددی معادلات حاکم در شکل چند ربعی

هدف اصلی محاسبات، اولاً حل دسته معادلات جبری غیرخطی، و ثانیاً یافتن ترکیبی مناسب و بهینه از متغیر شکل c و مجموعه λ است. با یافتن ترکیبی بهینه از متغیرهای مذکور، می‌توان پاسخ‌ها را در میدان‌های مختلف سیال به دست آورد. به دلیل وجود عبارات غیرخطی در معادلات، طبعا می‌بایست از روش‌های سعی و خطا برای استخراج جواب‌ها، بهره جست. لذا از یک الگوریتم سعی و خطا، برای حل دستگاه معادلات حاکم روش چند ربعی استفاده می‌شود. از طرفی فراوانی تعداد جملات غیرخطی در معادلات انتقال، حساسیت الگوریتم به مقادیر حدس زده شده را افزایش می‌دهد. بنابراین، برای کاهش هزینه زمانی محاسبات سعی و خطا، بر اساس تجربه و محدوده رفتاری جریان، مقادیر اولیه متغیرها در نظر گرفته و از پیش تعریف می گردد. حدس‌های اولیه خارج از مقادیر مورد انتظار، مدت زمان محاسبات را، علی‌الخصوص برای دامنه با نقاط زیاد، به صورت چشم‌گیری افزایش می‌دهد. نکته مهم در پژوهش حاضر، بررسی استقلال مقادیر متغیر شکل c از اعداد رینولدز، و وابستگی قابل پیش‌بینی مجموعه λ، با الگوهای مشخص است. به عبارت دیگر با ثابت در نظر گرفتن مقادیر متغیر شکل c و محاسبه مجموعه λ، می‌توان الگویی به دست آورد که به کمک آن، پنج میدان مختلف جریان در سایر اعداد رینولدز داخل بازه $۲/۵\times۱۰^{۵}$ الی $۵/۵\times۱۰^{۶}$ ، با دقت مطلوبی قابل پیش‌بینی باشند. لذا رویکرد این الگوریتم، با اعمال فرض مذکور، تنظیم شده است. معادلات انتقال ۱ تا ۵ در شکل ترکیب چند ربعی طی روابط ۱۷ تا ۲۱ به نمایش درآمده است. برای استفاده از الگوریتم سعی و خطای مورد نظر، ابتدا تعدادی از متغیرهای میدانی برگزیده و مقادیر آن‌ها به عنوان حدس اولیه وارد معادلات چند ربعی می‌شوند و تمامی پنج معادله انتقال را، شبه خطی می‌کنند و لذا یک دستگاه معادلات جبری خطی ایجاد می‌گردد. متغیرها شامل u_1^+، u_2^+، η^+ و S^+ بوده که به ترتیب، سرعت در راستای x_1 و x_2، لزجت دینامیکی آشفته و نرخ متوسط تانسور کرنش $\left(\sqrt{2S_{ij}S_{ij}}\right)$ می‌باشند. Ψ نیز ضریب محدود کننده گرادیان است که جهت کنترل نوسانات حل ناشی از شیب زیاد برخی میدان‌های جریان، در نقاط تحت تاثیر دیواره اعمال می‌گردد. در نقاطی که شیب میدان‌های سرعت به گونه‌ای است که در روند حل نوسان ایجاد نمی‌کنند، مقدار ψ برابر با یک در نظر گرفته می‌شود. جهت ایجاد متغیرهای خطی‌ساز در معادلات انتقال انرژی جنبشی آشفته، و استهلاک انرژی جنبشی آشفته، از معادلات ۶ تا ۹ نیز به همراه معادلات ۱ تا ۵ استفاده شده است.

$$\begin{aligned}
&\psi_1\rho u_{1_i}^{\dagger}\frac{\partial\overline{u_1}\left(x_{1_i},x_{2_i}\right)}{\partial x_1}+\\
&\psi_2\rho u_{2_i}^{\dagger}\frac{\partial\overline{u_1}\left(x_{1_i},x_{2_i}\right)}{\partial x_2}+\\
&\frac{\partial\overline{p}\left(x_{1_i},x_{2_i}\right)}{\partial x_1}-\\
&\mu\left(\frac{\partial^2\overline{u_1}\left(x_{1_i},x_{2_i}\right)}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\overline{u_1}\left(x_{1_i},x_{2_i}\right)}{\partial x_2^2}\right)-\\
&\left(2\mu_{t_i}^{\dagger}\psi_1\frac{\partial^2\overline{u_1}\left(x_{1_i},x_{2_i}\right)}{\partial x_1^2}\right)-\\
&\left(2\frac{\partial\mu_{t_i}^{\dagger}}{\partial x_1}\psi_1\frac{\partial\overline{u_1}\left(x_{1_i},x_{2_i}\right)}{\partial x_1}\right)+\\
&\frac{2}{3}\rho\frac{\partial k(x_{1_i},x_{2_i})}{x_1}-\\
&\left(\mu_{t_i}^{\dagger}\psi_2\frac{\partial^2\overline{u_1}\left(x_{1_i},x_{2_i}\right)}{\partial x_2^2}+\mu_{t_i}^{\dagger}\psi_1^{'}\frac{\partial^2\overline{u_2}\left(x_{1_i},x_{2_i}\right)}{\partial x_2 x_1}\right)-\\
&\left(\psi_2\frac{\partial\mu_{t_i}^{\dagger}}{\partial x_2}\frac{\partial\overline{u_1}\left(x_{1_i},x_{2_i}\right)}{\partial x_2}+\psi_1^{'}\frac{\partial\mu_{t_i}^{\dagger}}{\partial x_2}\frac{\partial\overline{u_2}\left(x_{1_i},x_{2_i}\right)}{\partial x_1}\right)=0
\end{aligned} \tag{۱۷}$$

$$\begin{aligned}
&\psi_1^{'}\rho u_{1_i}^{\dagger}\frac{\partial\overline{u_2}\left(x_{1_i},x_{2_i}\right)}{\partial x_1}+\\
&\psi_2^{'}\rho u_{2_i}^{\dagger}\frac{\partial\overline{u_2}\left(x_{1_i},x_{2_i}\right)}{\partial x_2}+\frac{\partial\overline{p}\left(x_{1_i},x_{2_i}\right)}{\partial x_2}-\\
&\mu\left(\frac{\partial^2\overline{u_2}\left(x_{1_i},x_{2_i}\right)}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\overline{u_2}\left(x_{1_i},x_{2_i}\right)}{\partial x_2^2}\right)\\
&-\left(\mu_{t_i}^{\dagger}\psi_2\frac{\partial^2\overline{u_1}\left(x_{1_i},x_{2_i}\right)}{\partial x_1 x_2}+\mu_{t_i}^{\dagger}\psi_1^{'}\frac{\partial^2\overline{u_2}\left(x_{1_i},x_{2_i}\right)}{\partial x_1^2}\right)\\
&-\left(\psi_2\frac{\partial\mu_{t_i}^{\dagger}}{\partial x_1}\frac{\partial\overline{u_1}\left(x_{1_i},x_{2_i}\right)}{\partial x_2}+\psi_1^{'}\frac{\partial\mu_{t_i}^{\dagger}}{\partial x_1}\frac{\partial\overline{u_2}\left(x_{1_i},x_{2_i}\right)}{\partial x_1}\right)=0
\end{aligned} \tag{۱۸}$$

$$\psi_1\frac{\partial\overline{u_1}\left(x_{1_i},x_{2_i}\right)}{\partial x_1}+\psi_2^{'}\frac{\partial\overline{u_2}\left(x_{1_i},x_{2_i}\right)}{\partial x_2}=0 \tag{۱۹}$$

جدول ۱. ضرائب محدود کننده مربوط به هر یک از عبارت در معادلات پنج گانه

Table 1. Gradiant limiter coefficients for different terms in five transport equations

عبارت	$\frac{\partial u_1}{\partial x_1}$	$\frac{\partial u_1}{\partial x_2}$	$\frac{\partial u_2}{\partial x_1}$	$\frac{\partial u_2}{\partial x_2}$	$\frac{\partial k}{\partial x_1}$	$\frac{\partial k}{\partial x_2}$	$\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_1}$	$\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_2}$
ضریب	ψ_1	ψ_2	ψ'_1	ψ'_2	ψ''_1	ψ''_2	ψ'''_1	ψ'''_2

$$\begin{aligned}&\rho u_{1_i}^{\dagger}\psi_1''\frac{\partial k\left(x_{1_i},x_{2_i}\right)}{\partial x_1}+\rho u_{2_i}^{\dagger}\psi_2''\frac{\partial k\left(x_{1_i},x_{2_i}\right)}{\partial x_2}-\\&\left(\mu+\mu_{t_i}^{\dagger}\right)\left(\psi_1''\frac{\partial^2 k\left(x_{1_i},x_{2_i}\right)}{\partial x_1^2}+\psi_2''\frac{\partial^2 k\left(x_{1_i},x_{2_i}\right)}{\partial x_2^2}\right)\\&-\left(\left(\mu+\frac{\partial \mu_{t_i}^{\dagger}}{\partial x_1}\right)\psi_1''\frac{\partial k\left(x_{1_i},x_{2_i}\right)}{\partial x_1}+\left(\mu+\frac{\partial \mu_{t_i}^{\dagger}}{\partial x_2}\right)\psi_2''\frac{\partial k\left(x_{1_i},x_{2_i}\right)}{\partial x_2}\right)\\&-\mu_{t_i}^{\dagger}S_i^{\dagger}+\rho\varepsilon\left(x_{1_i},x_{2_i}\right)=0\end{aligned} \tag{۲۰}$$

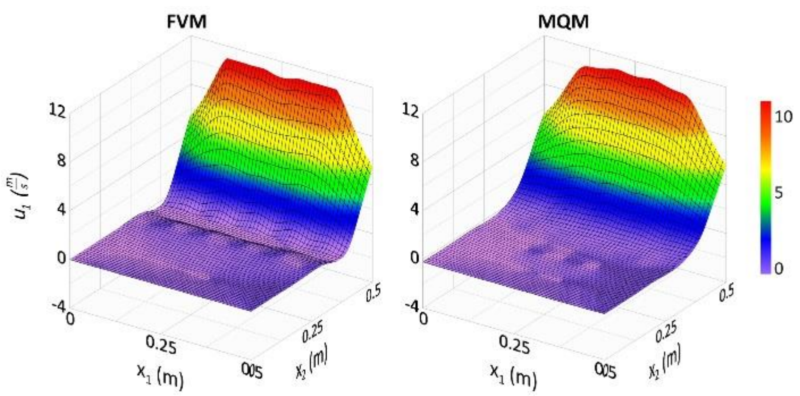
$$\begin{aligned}&\psi_1'''\rho u_{1_i}^{\dagger}\frac{\partial \varepsilon\left(x_{1_i},x_{2_i}\right)}{\partial x_1}+\psi_2'''\rho u_{2_i}^{\dagger}\frac{\partial \varepsilon\left(x_{1_i},x_{2_i}\right)}{\partial x_2}-\\&\left(\mu+\frac{\mu_{t_i}^{\dagger}}{1.3}\right)\left(\psi_1'''\frac{\partial^2 \varepsilon\left(x_{1_i},x_{2_i}\right)}{\partial x_1^2}+\psi_2'''\frac{\partial^2 \varepsilon\left(x_{1_i},x_{2_i}\right)}{\partial x_2^2}\right)\\&-\left(\left(\mu+\frac{1}{1.3}\frac{\partial \mu_{t_i}^{\dagger}}{\partial x_1}\right)\psi_1'''\frac{\partial \varepsilon\left(x_{1_i},x_{2_i}\right)}{\partial x_1}+\left(\mu+\frac{1}{1.3}\frac{\partial \mu_{t_i}^{\dagger}}{\partial x_2}\right)\psi_2'''\frac{\partial \varepsilon\left(x_{1_i},x_{2_i}\right)}{\partial x_2}\right)\\&-1.44\left(0.09\rho k\left(x_{1_i},x_{2_i}\right)\right)S_i^{\dagger}+\\&1.92\rho\left(\sqrt{\frac{0.09\rho}{\mu_{t_i}^{\dagger}}}\right)\varepsilon^{\frac{3}{2}}\left(x_{1_i},x_{2_i}\right)=0\end{aligned} \tag{۲۱}$$

ضرائب ψ که در معادلات ۱۷ تا ۲۱ به کار رفته‌اند مطابق جدول زیر مربوط به هر یک از جملات مشتق در معادلات مذکور می‌باشند:

سپس مقادیر مختلف متغیر شکل c، در بازه‌ای مشخص، برای هر یک از میدان‌های جریان، اختصاص می‌یابند. با تشکیل دستگاه معادلات و حل آن، مقادیر مجموعه λ نیز محاسبه گردیده و در نهایت میدان‌های جریان محاسبه می‌شوند. متغیرهای مجهول به دست آمده از حل دستگاه معادلات جبری، با حدس اولیه مقایسه شده و در صورتی که ضریب نش-ساتکلیف آن‌ها در کل نقاط دامنه، بالاتر از ۹۰ درصد باشد، به عنوان پاسخ مد نظر قرار می‌گیرند. همچنین پنج متغیر میدان جریان و مشتقات مرتبه اول آن‌ها نیز، با نتایج به دست آمده از روش حجم محدود، مورد مقایسه قرار می‌گیرند. در صورتی که ضرایب نش-ساتکلیف آن‌ها کمتر از ۹۰ درصد باشد، متغیر شکل c در نظر گرفته شده درون بازه، تغییر داده می‌شود تا شرط مذکور ارضاء گردد. تحت شرایطی که مقدار ضریب مذکور ارضاء نشود، مجدداً مقادیر جدیدی از متغیرهای اولیه حدس زده شده و مراحل محاسبات از ابتدا تکرار می‌شوند. همچنین مقادیر باقی‌مانده هر یک از معادلات ۱۷ الی ۲۱ نیز برای هر نقطه، به عنوان معیار دقت محاسبات، مورد ارزیابی قرار می‌گیرند و هر چه مقادیر باقی‌مانده به صفر نزدیک‌تر باشند پاسخ‌های به دست آمده دقت بالاتری خواهند داشت. بنابراین، ضرایب نش-ساتکلیف میدان‌های محاسبه شده جریان، به همراه مقادیر باقی‌مانده معادلات حاکم، توامان معیار همگرایی هستند. پس از ارضاء شروط همگرایی و به دست آمدن متغیر شکل c بهینه، محاسبات برای عدد رینولدز متفاوتی مجدداً تکرار می‌شود. در محاسبات جدید مقدار متغیر شکل c ثابت در نظر گرفته شده و تنها مقادیر مجموعه λ و متعاقباً میدان‌های متغیر جریان، ارزیابی می‌شوند. همانطور که بیان شد، دو معیار ضریب نش-ساتکلیف و خطای جذر میانگین مربعات نسبی به عنوان معیار ارزیابی دقت محاسبات، به کار گرفته شده‌اند. ضریب نش-ساتکلیف درجه ارتباط بین متغیرهای میدان محاسباتی روش چند ربعی با نتایج روش حجم محدود را نشان می‌دهد. بازه این ضریب از $-\infty$ تا یک است، و هر چه به یک نزدیک‌تر باشد، میزان ارتباط دو روش مذکور، بیشتر خواهد بود. با توجه به دامنه بسیار زیاد این ضریب، ارزیابی میزان دقت نتایج، با وضوح بیشتری امکان‌پذیر می‌شود. رابطه نش- ساتکلیف[1] به صورت زیر تعریف شده است:

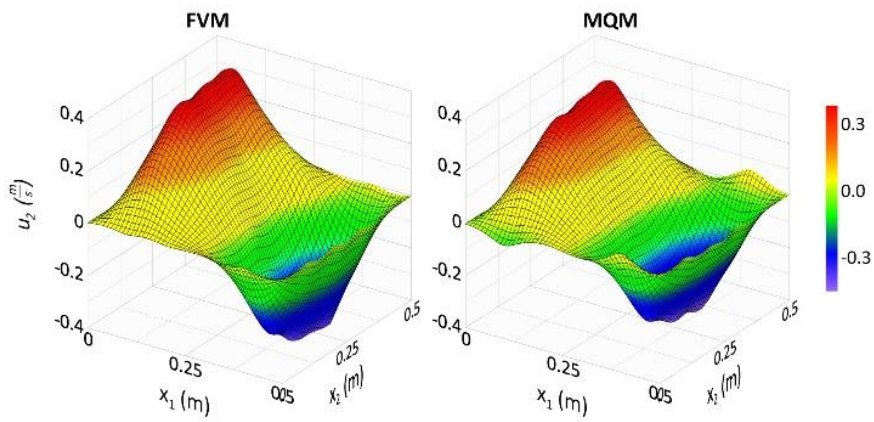
$$NSE=1-\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\phi_{MQM_i}-\phi_{FVM_i}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(\phi_{FVM_i}-\bar{\phi}_{FVM}\right)^2} \tag{۲۲}$$

1 Nash-Sutcliffe



شکل ۲. سرعت u_1، روش چند ربعی و روش حجم محدود

Fig. 2. u_1 velocity in MQ and FV methods



شکل ۳. سرعت u_2 ، روش چند ربعی و روش حجم محدود

Fig. 3. u_2 velocity in MQ and FV methods

در رابطه فوق ϕ هر یک از پنج متغیر میدان جریان بوده و n برابر با ۳۶ و ۱۲۱ است. همچنین درصد خطای جذر میانگین مربعات نسبی[1] به صورت زیر تعریف شده است [۲۹]:

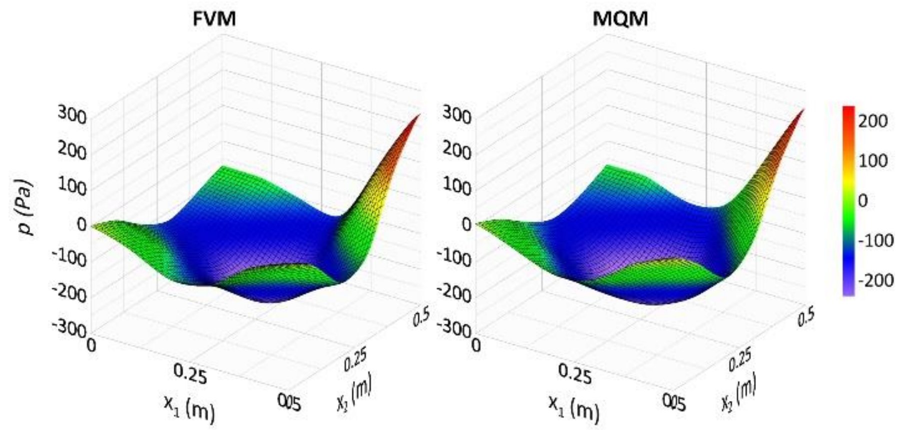
$$RRMSE=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\phi_{MQM_i}-\phi_{FVM_i}}{\phi_{FVM_i}}\right)^2}\times 100 \qquad (۲۳)$$

اندیس‌های FVM و MQM به ترتیب مربوط به روش‌های احجام محدود و چند ربعی هستند.

1 Relative Root Mean Square Error

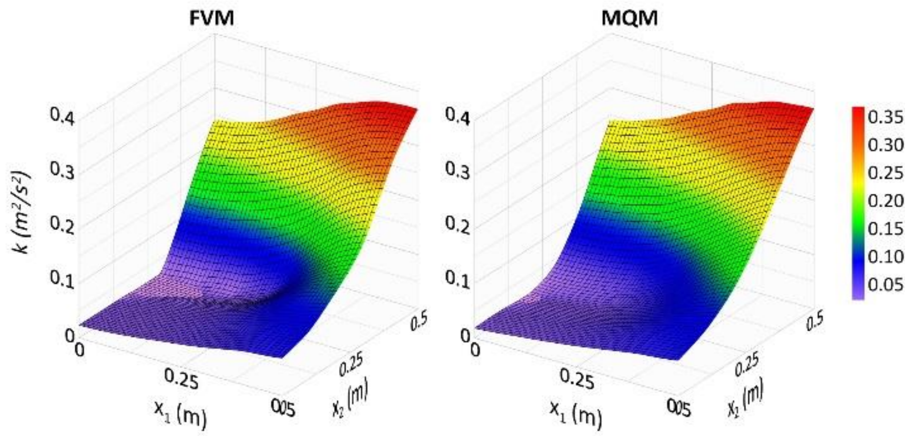
۶- تحلیل و ارزیابی نتایج

نتایج تحلیل عددی به روش تابع پایه شعاعی چند ربعی در قالب مقایسه پروفیل‌ها و کانتورهای سرعت در دو راستای x_1 و x_2، فشار استاتیکی، انرژی جنبشی آشفته و استهلاک انرژی جنبشی آشفته، و همچنین مقادیر ضرایب نش- ساتکلیف و خطای جذر میانگین مربعات نسبی، نشان داده شده‌اند. نتایج مذکور با توجه به شماره‌گذاری بیان شده در شکل شماره ۱، مشخص گردیدند. برای بررسی هر چه بهتر نتایج به دست آمده، پروفیل‌های پنج میدان جریان، به همراه مشتقات مرتبه اول آن‌ها نسبت به محور x_1 و x_2 نیز، به نمایش درآمده‌اند. بررسی پنج میدان جریان، به همراه دو مشتق مرتبه اول آن‌ها، میزان دقت در تخمین متغیرهای شکل c بهینه و مجموعه λ را، افزایش می‌دهد. شکل‌های ۲ الی ۱۱، میدان‌های جریان را نشان



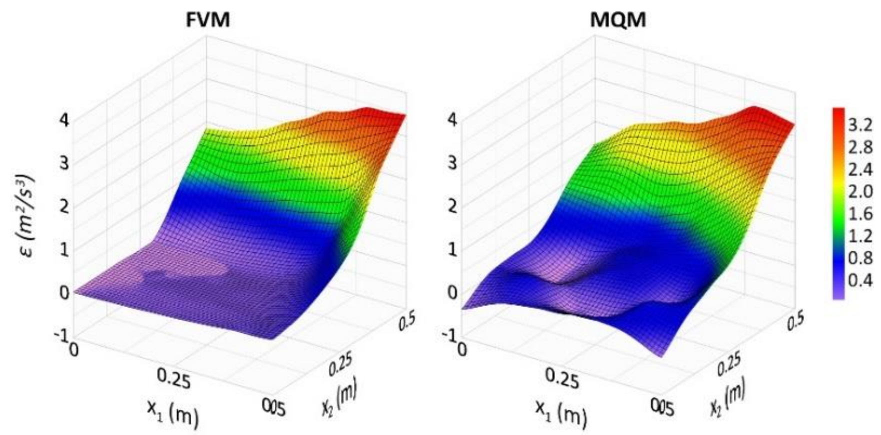
شکل ۴. فشار استاتیکی، روش چند ربعی و روش حجم محدود

Fig. 4. Static pressure in MQ and FV methods



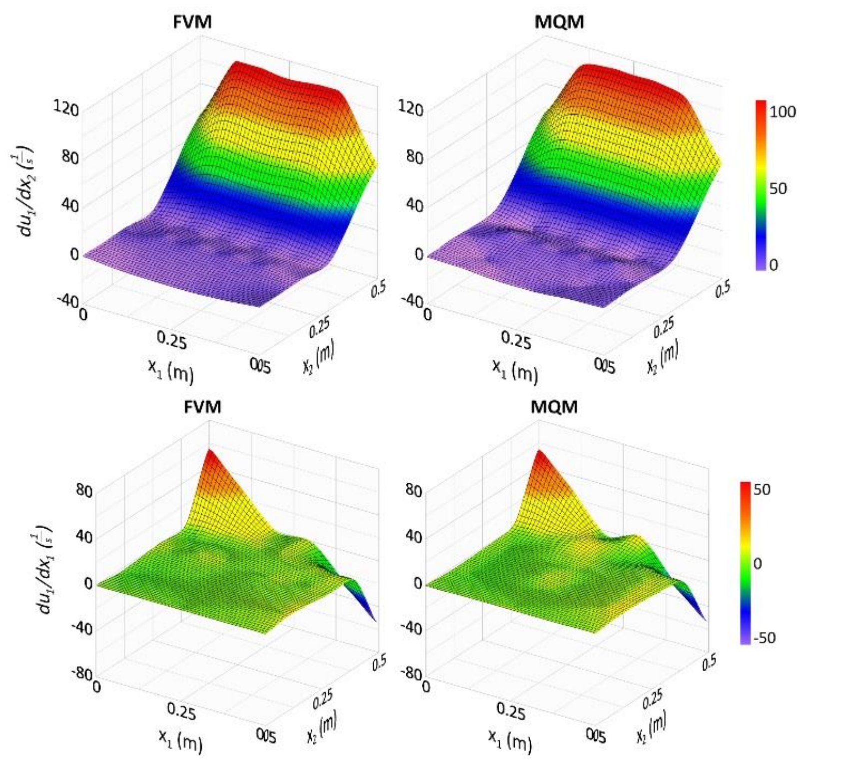
شکل ۵. انرژی جنبشی آشفته، روش چند ربعی و روش حجم محدود

Fig. 5. Turbulence kinetic energy in MQ and FV methods



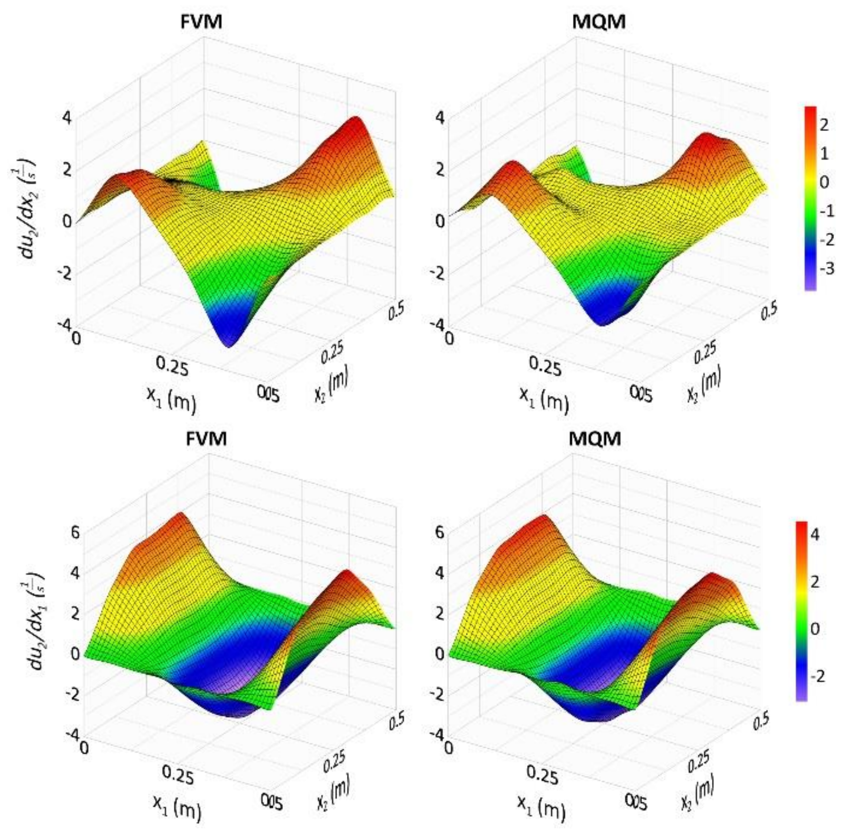
شکل ۶. استهلاک انرژی جنبشی آشفته، روش چند ربعی و روش حجم محدود

Fig. 6. Turbulence kinetic energy dissipation in MQ and FV methods



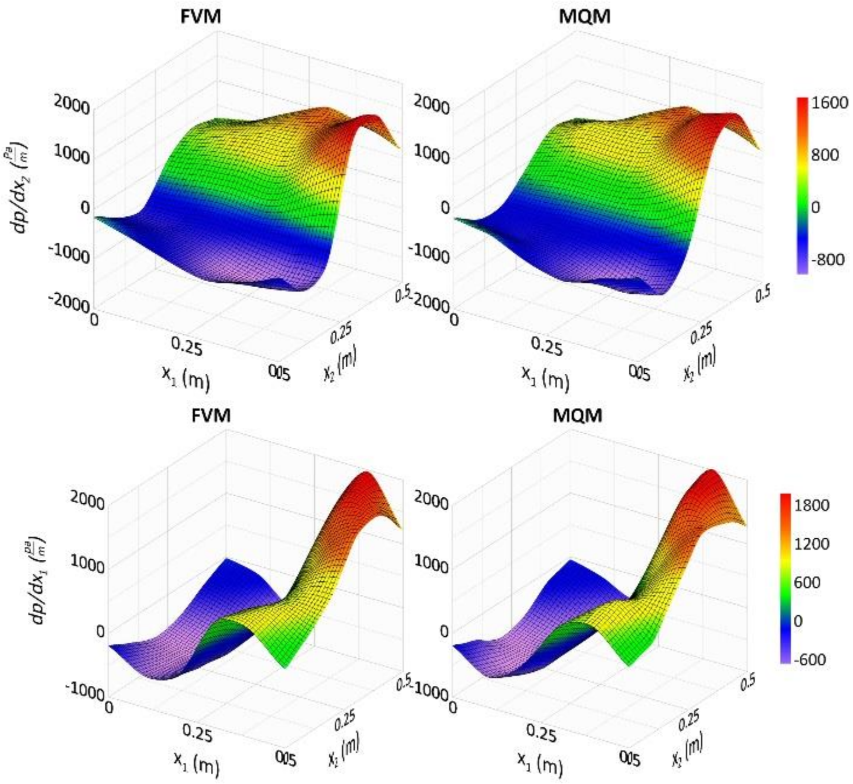
شکل ۷. مشتقات اول سرعت u_1 نسبت به محورهای x_1 و x_2، روش چند ربعی و روش حجم محدود

Fig. 7. 1st derivatives of u_1 respect to x_1 and x_2 in MQ and FV methodss



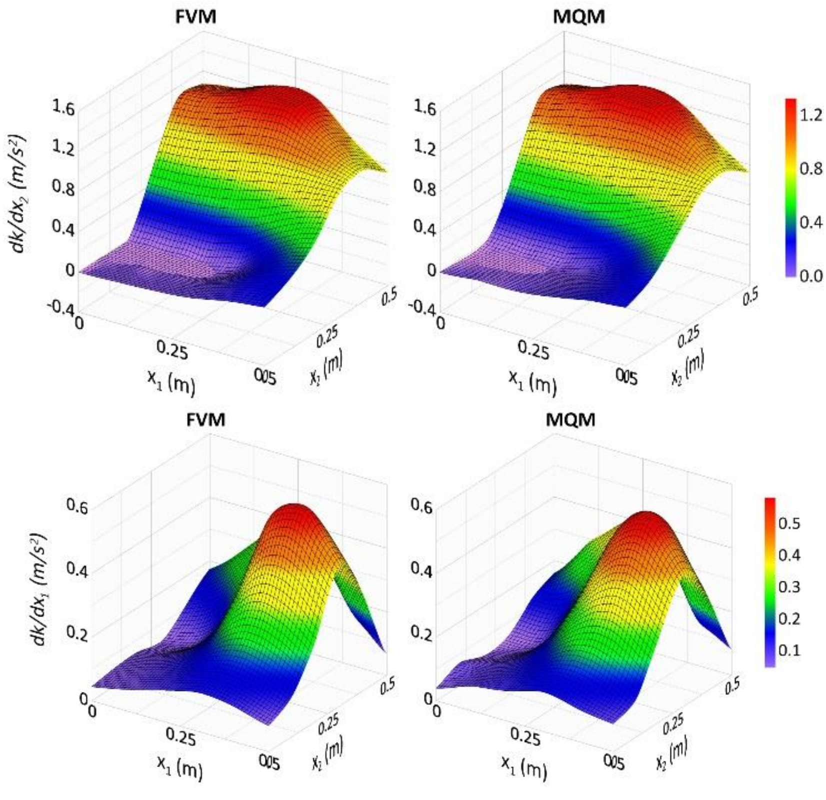
شکل ۸. مشتقات اول سرعت u_2 نسبت به محورهای x_1 و x_2، روش چند ربعی و روش حجم محدود

Fig. 8. 1st derivatives of u_2 respect to x_1 and x_2 in MQ and FV methodss



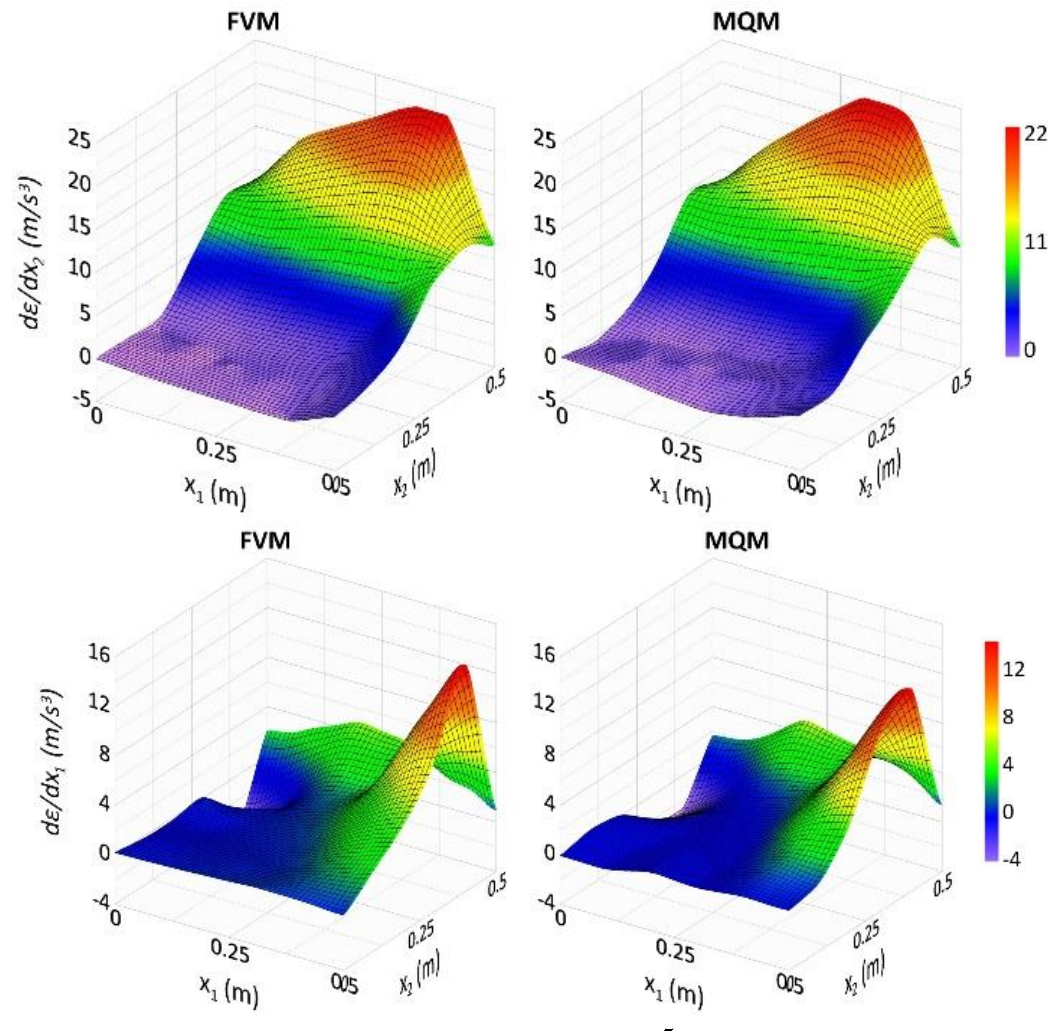
شکل ۹. مشتقات اول فشار استاتیکی نسبت به محورهای x_1 و x_2، روش چند ربعی و روش حجم محدود

Fig. 9. 1st derivatives of static pressure respect to x_1 and x_2 in MQ and FV methods



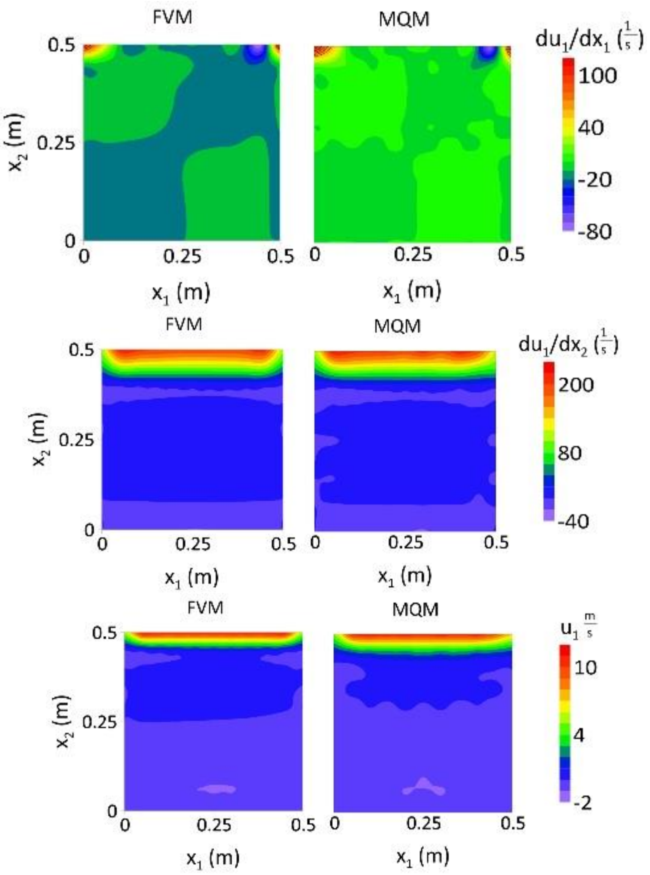
شکل ۱۰. مشتقات اول انرژی جنبشی آشفته نسبت به محورهای x_1 و x_2، روش چند ربعی و روش حجم محدود

Fig. 10. 1st derivatives of turbulence kinetic energy respect to x_1 and x_2 in MQ and FV methods



شکل ۱۱. مشتقات اول استهلاک انرژی جنبشی آشفته نسبت به محورهای x_1 و x_2، روش چند ربعی و روش حجم محدود

Fig. 11. 1st derivatives of turbulence kinetic energy dissipation respect to x_1 and x_2 in MQ and FV methods



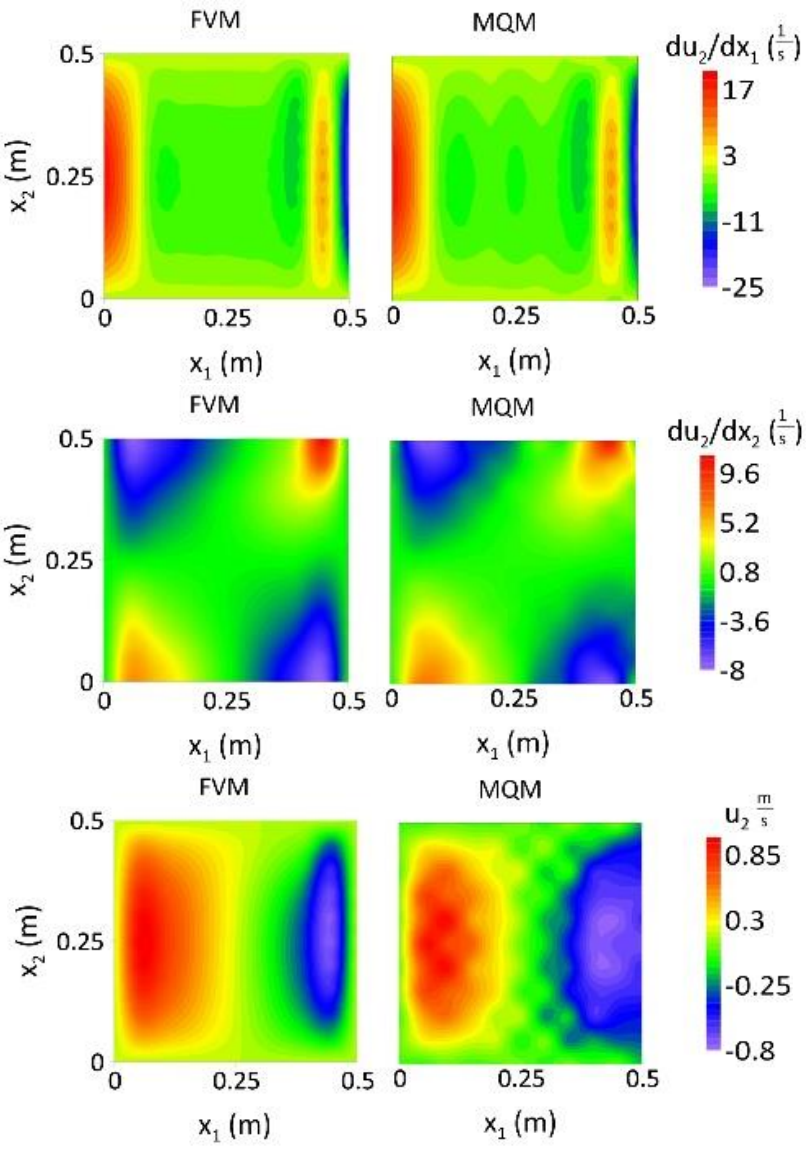
شکل ۱۲. نمودار سرعت u_1 و مشتقات مرتبه اول آن، روش چند ربعی و روش حجم محدود

Fig. 12. u_1 velocity and its first derivatives in MQ and FV methods

می‌دهند. نمودارهای مذکور، از معادلات تحلیل شده در دامنه محاسباتی ۳۶ نقطه‌ای هستند. این نمودارها، به عنوان نمونه، به ازای عدد رینولدز ۵/۵×۱۰^۶ نمایش داده شده‌اند.

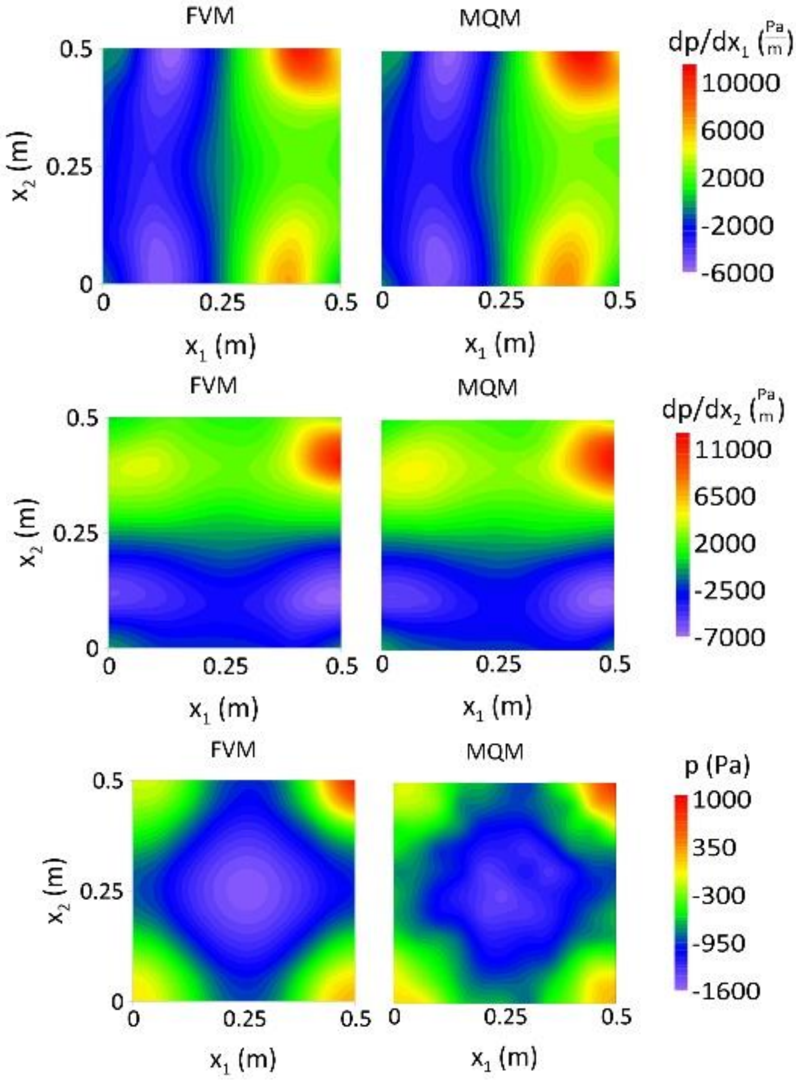
مقایسه نمودار میدان‌های جریان، نشان دهنده قابل قبول بودن نتایج روش به کار رفته است. همان گونه که مشخص است، در غالب متغیرهای میدان جریان، روش تابع پایه شعاعی چند ربعی، کاملاً با بنچ مارک روش حجم محدود، منطبق گردیده است. در برخی از نمودارها که بروز برخی از نوسانات حل، در میدان‌های جریان مشاهده می‌شود عمدتا به علت محدود نشدن شار جریان در پاره‌ای از نقاط دامنه است. در روش حجم محدود، این مشکلات با استفاده از روش‌های مختلف محدود کننده شار، کنترل شده و نتایج به دست آمده، تا حد امکان، عاری از نوسانات روش حل عددی هستند. اما به کارگیری مستقیم چنین محدود کننده‌هایی در روش عددی چند ربعی، با توجه به تفاوت مبنایی روش حل (عدم گسسته‌سازی میدان) و پیچیدگی‌های خاص آن، به آسانی امکان‌پذیر نیست. اما با توجه به نتایج و میزان دقت روش به کار رفته، مقدار این نوسانات، قابل پذیرش به نظر می‌رسند. نتایج تحلیل دامنه ۱۲۱ نقطه‌ای، در قالب کانتورهای رنگی دو بعدی به نمایش درآمده‌اند. این کانتورها، شامل میدان‌های جریان، و مشتقات مرتبه اول آن‌ها نسبت به محورهای x_1 و x_2 می‌باشند. به دلیل بیشتر بودن تعداد نقاط این دامنه، نتایج به صورت کانتورهای رنگی دو بعدی و در شکل‌های ۱۲ تا ۱۶ نشان داده شده‌اند.

نتایج به دست آمده از حل معادلات به روش عددی چند ربعی، در دامنه ۳۶ و ۱۲۱ نقطه‌ای، مورد ارزیابی قرار گرفتند. در جدول ۲، مقادیر ضرایب نش– ساتکلیف و خطای جذر میانگین مربعات نسبی محاسبه شده از رابطه ۲۲، برای میدان‌های مختلف جریان، در دو دامنه ۳۶ و ۱۲۱ نقطه‌ای و اعداد رینولدز گوناگون در مقایسه با نتایج روش احجام محدود، به نمایش گذاشته است. با توجه به ضرایب به دست آمده، دقت نتایج مطلوب به نظر می‌رسد. مقادیر ضرایب مذکور، روش تحلیل را قابل پذیرش نشان داده و می‌توان از آن برای محاسبه مقادیر متغیر شکل c و مجموعه λ، در ادامه پژوهش



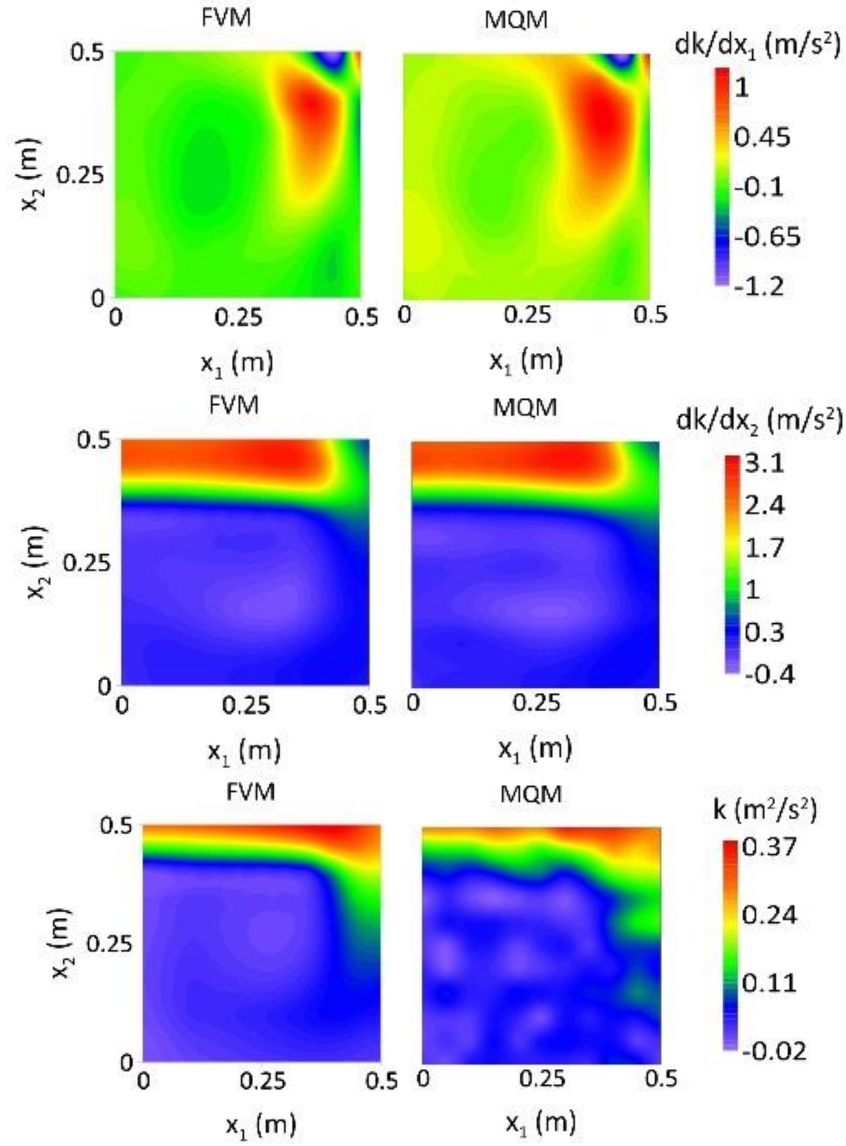
شکل ۱۳. سرعت u_2 و مشتق مرتبه اول آن، روش چند ربعی و روش حجم محدود

Fig. 13. u_2 velocity and its first derivatives in MQ and FV methods



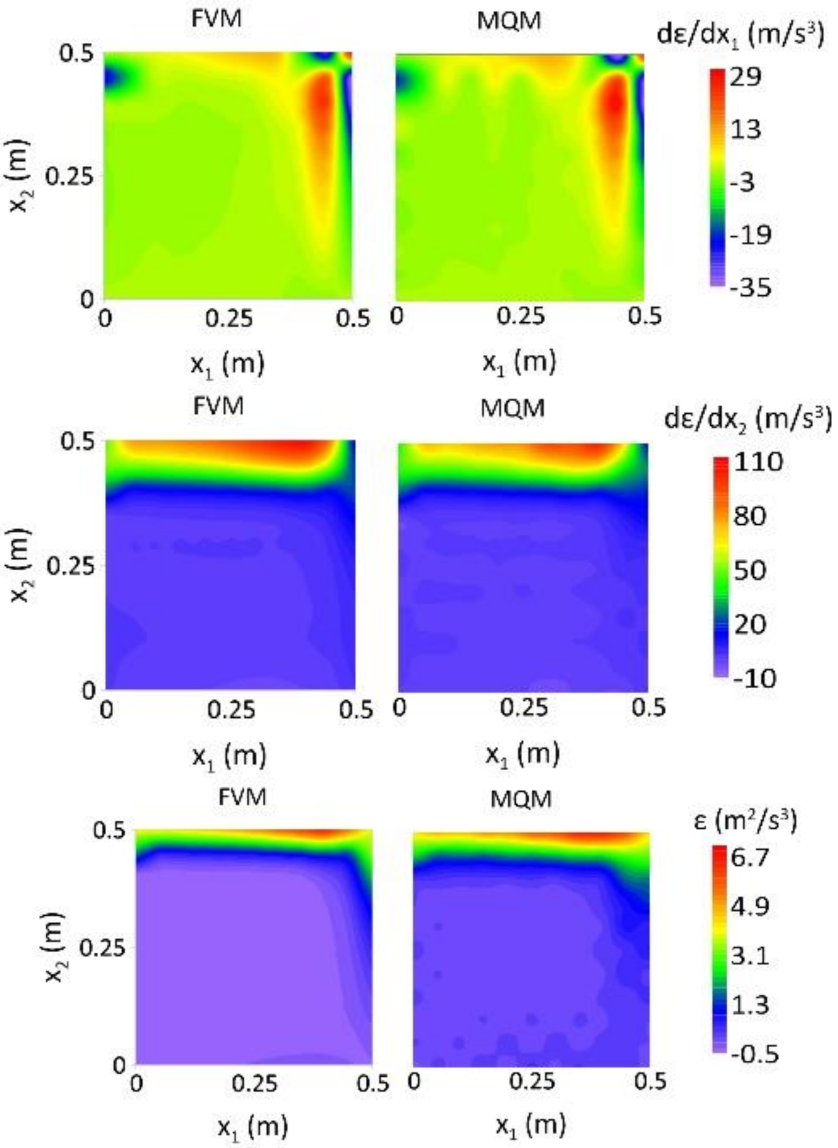
شکل ۱۴. فشار استاتیکی و مشتق مرتبه اول آن، روش چند ربعی و روش حجم محدود

Fig. 14. Static pressure and its first derivatives in MQ and FV methods



شکل ۱۵. کانتورهای انرژی جنبشی آشفته و مشتق مرتبه اول آن، روش چند ربعی و روش حجم محدود

Fig. 15. Turbulence kinetic energy and its first derivatives in MQ and FV methods



شکل ۱۶. استهلاک انرژی جنبشی آشفته و مشتق مرتبه اول آن، روش چند ربعی و روش حجم محدود

Fig. 16. Turbulence kinetic energy dissipation and its first derivatives in MQ and FV methods

جدول ۲. مقادیر مختلف ضریب نش- ساتکلیف و خطای جذر میانگین مربعات نسبی برای میدان‌های جریان در میدان‌های ۳۶ و ۱۲۱ نقطه‌ای

Table 2. Nash-Sutcliffe and RRMSE error criteria for flow parameters in 36 and 121 nodes domains

	تعداد نقاط	u_1	du_1/dx_1	du_1/dx_2	u_2	du_2/dx_1	du_2/dx_2	p	dp/dx_1	dp/dx_2	k	dk/dx_1	dk/dx_2	ε	$d\varepsilon/dx_1$	$d\varepsilon/dx_2$
N-S	۳۶	۰/۹۷	۰/۹۸	۰/۹۹	۰/۹۶	۰/۹۹	۰/۹۳	۰/۹۷	۰/۹۹	۰/۹۸	۰/۹۹	۰/۹۸	۰/۹۹	۰/۹۸	۰/۹۴	۰/۹۸
	۱۲۱	۰/۹۶	۰/۹۷	۰/۹۹	۰/۸۰	۰/۹۹	۰/۹۳	۰/۹۷	۰/۹۹	۰/۹۹	۰/۹۵	۰/۹۸	۰/۹۹	۰/۹۸	۰/۹۶	۰/۹۹
RRMSE	۳۶	٪۱/۱۲	٪۰/۸۴	٪۰/۲۳	٪۰/۹۳	٪۰/۲۹	٪۱/۱۷	٪۰/۳۷	٪۰/۲۸	٪۰/۳۴	٪۰/۲	٪۰/۲۴	٪۰/۱۵	٪۰/۸۱	٪۰/۹۵	٪۰/۲۵
	۱۲۱	٪۰/۳۹	٪۰/۴۵	٪۰/۱۱	٪۰/۵۵	٪۰/۰۸۵	٪۰/۳۴	٪۰/۰۸	٪۰/۰۴	٪۰/۰۵	٪۰/۲	٪۰/۱۸	٪۰/۰۷۵	٪۰/۲۵	٪۰/۳۵	٪۰/۱۱

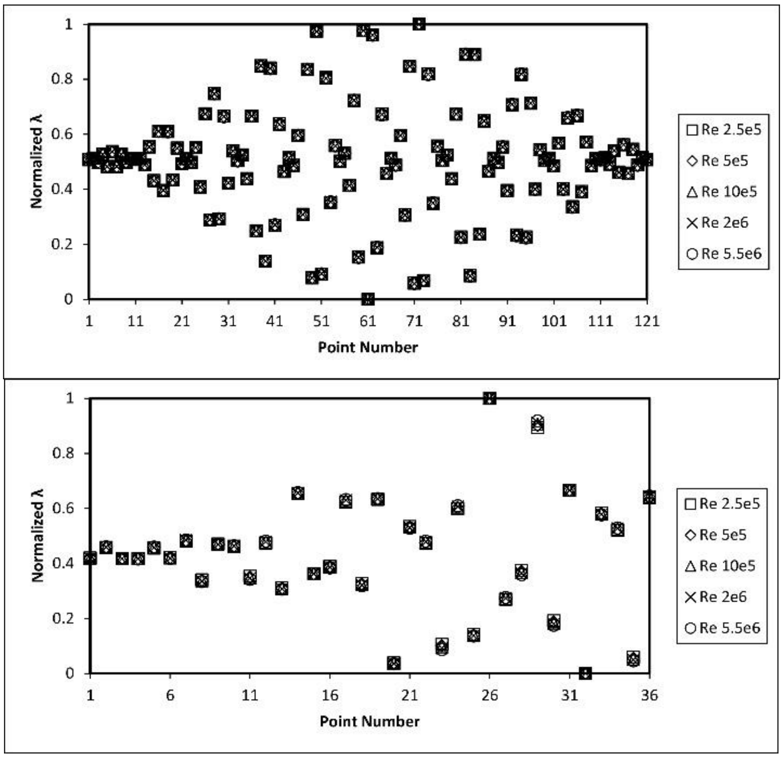
جدول ۳. مقادیر مختلف متغیر شکل c برای متغیرهای جریان در میدان‌های ۳۶ و ۱۲۱ نقطه‌ای

Table 3. Shape parameter values of flow parameters in 36 and 121 nodes domains

نقاط	u_1	u_2	p	k	ε
۳۶	۰/۲۲	۰/۰۹	۱	۱	۲
۱۲۱	۰/۳۷	۰/۴۸	۱	۱	۰/۴

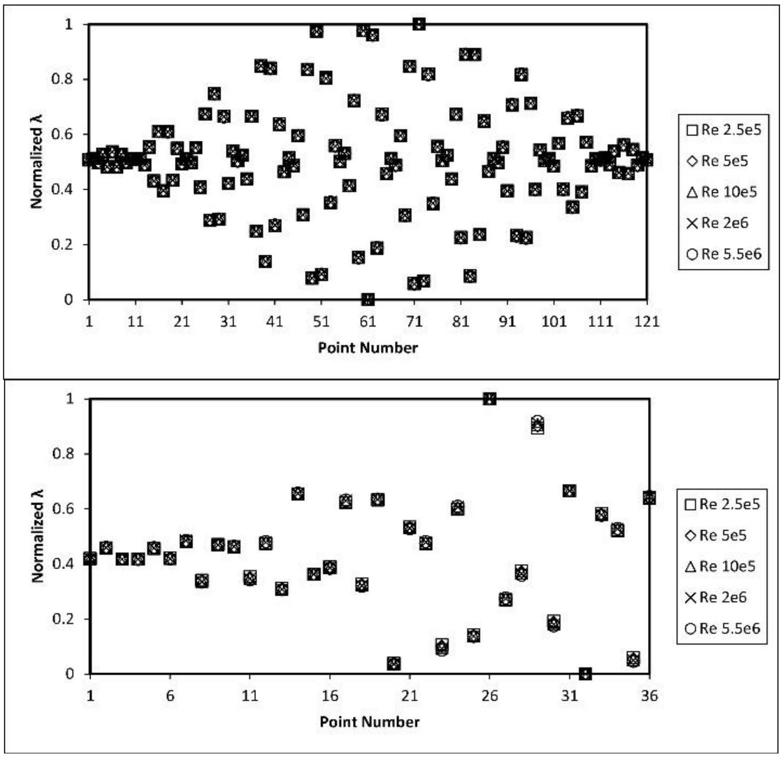
حاضر، استفاده نمود. مطابق آنچه در فرضیات تحقیق نیز بیان شد، مقادیر متغیر شکل c در هیچ یک از میدان‌های جریان، تابعی از اعداد رینولدز نبوده و مقادیر مجموعه λ، دارای الگویی قابل پیش‌بینی هستند. در جدول شماره ۳، مقادیر مختلف متغیر شکل c، برای میدان‌های مختلف جریان، در تعداد نقاط دامنه ۳۶ و ۱۲۱ نشان داده شده است.

چنان که در جدول ۳ ملاحظه می‌شود، مقادیر متغیر شکل c با وجود تغییر عدد رینولدز، کاملاً ثابت می‌باشند. این نتیجه اولاً فرضیه استقلال متغیر شکل c را تایید می‌کند، و ثانیاً این احتمال را تقویت می‌کند که مقادیر مجموعه λ می‌توانند قابل پیش‌بینی باشند. مقادیر متغیرهای شکل c میدان‌های u_1، u_2 و ε، با تغییر تعداد نقاط دامنه، تغییر می‌کنند اما دو میدان فشار استاتیکی و انرژی جنبشی آشفته جریان، از این روند تبعیت نمی‌نمایند. این دو حالت پیش آمده، محل بحث دارد. تشابه دو میدان فشار استاتیکی و انرژی جنبشی آشفته در پارامتر c، نشان می‌دهد که عملکرد آن‌ها در روند حل عددی معادلات انتقال، می‌بایست به یکدیگر نزدیک باشند. اما از طرفی، رفتار مجموعه λ متناظر با دو میدان مورد نظر، نیز باید مورد ارزیابی قرار گیرد. سایر میدان‌های جریان، دارای پارامترهای c متفاوت از یکدیگر بوده و با تغییرات تعداد نقاط دامنه، تغییرپذیرند. این تغییرپذیری، روندی طبیعی، در محاسبات متغیرهای شکل c را نشان داده و نتیجه مطالعات و پژوهش‌های گذشته نیز، موید همین مطلب بوده است. مقادیر مجموعه λ محاسبه شده در هر پنج میدان جریان، نشان می‌دهند که ساختار رفتاری آن‌ها، قابل پیش‌بینی هستند. مزیت این پیش‌بینی در آن است که با ثابت بودن مقادیر متغیرهای شکل c و با قابلیت پیش‌بینی مجموعه λ با تغییرات عدد رینولدز، می‌توان تمامی میدان‌های مجهول جریان، در سایر اعداد رینولدز داخل بازه مورد پژوهش را، به دست آورد. کافی است، مجموعه متغیر شکل c و مجموعه λ در فرمول‌بندی روش چند ربعی به کار گرفته شوند تا میدان‌های جریان در اعداد رینولدز دلخواه داخل بازه، محاسبه گردند. در حقیقت، فرضیه استقلال متغیر شکل c از اعداد رینولدز، اثر پیش‌بینی‌پذیری را، بر مجموعه λ اعمال می‌نماید. با فرض عدم استقلال متغیر مذکور، رابطه مشخص و قابل پیش‌بینی برای مجموعه λ به دست نمی‌آید. برای به دست آوردن توابع پیش‌بین، ابتدا بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین مقادیر مجموعه λ برای هر میدان را یافته، و سپس آن مجموعه را به صورت نرمال تبدیل می‌نماییم. شکل‌های ۱۷ الی ۲۱، نشان دهنده مقادیر مجموعه λ نرمال شده برای دامنه ۳۶ و ۱۲۱ نقطه‌ای هستند. این شکل‌ها نشان می‌دهند که علی‌رغم تفاوت مقادیر مجموعه λ متغیرهای میدان جریان در اعداد رینولدز مختلف، در صورت نرمال شدن آن‌ها، مقادیر متناظر نقطه به نقطه، به یکدیگر بسیار نزدیک



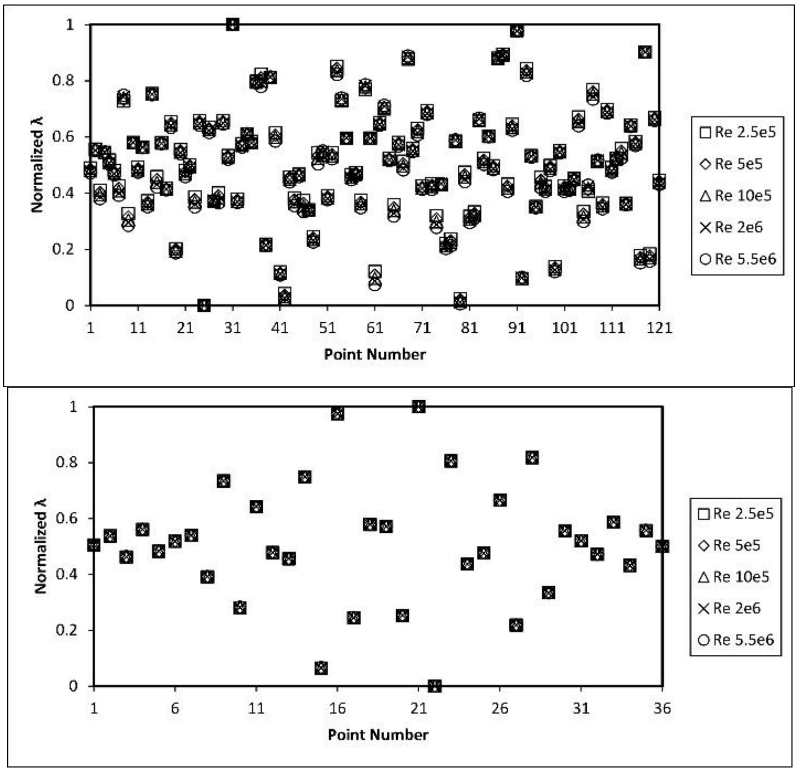
شکل ۱۷. مقادیر λ برای میدان سرعت u_1 در دامنه ۳۶ و ۱۲۱ نقطه‌ای

Fig. 17. λ values for u_1 velocity in 36 and 121 nodes



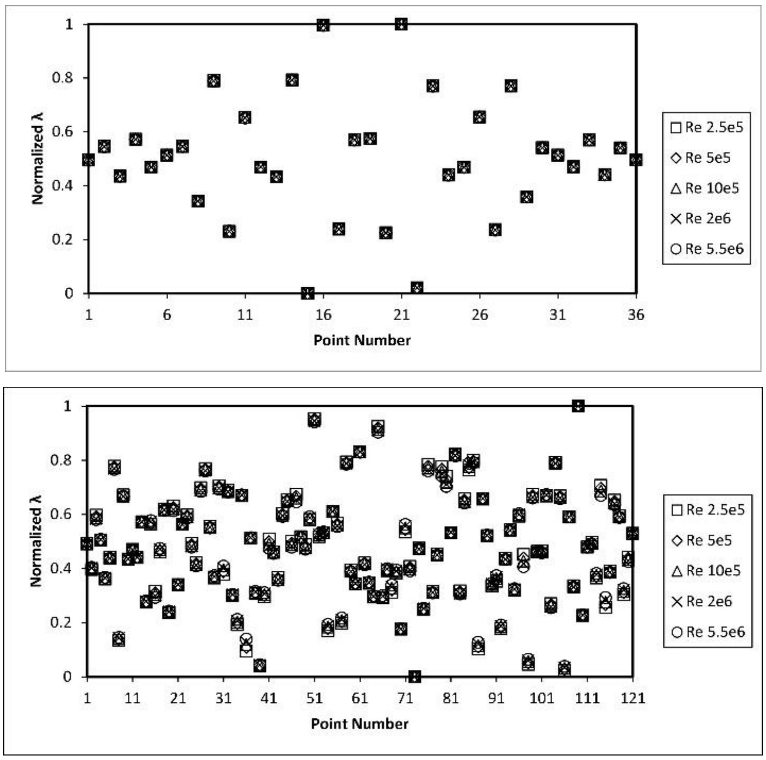
شکل ۱۸. مقادیر λ برای میدان سرعت u_2 در دامنه ۳۶ و ۱۲۱ نقطه‌ای

Fig. 18. λ values for u_2 velocity in 36 and 121 nodes



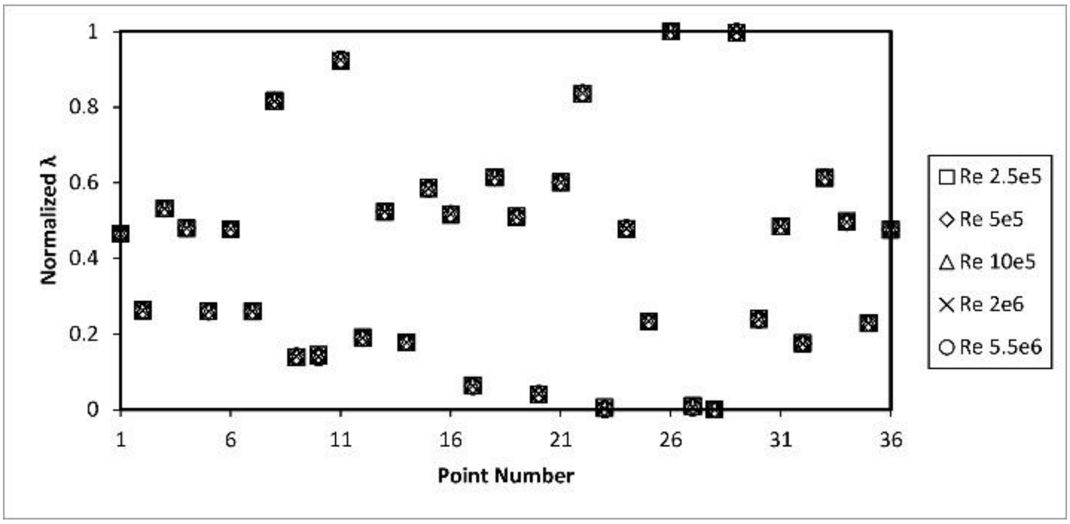
شکل ۱۹. مقادیر λ برای میدان فشار استاتیکی در دامنه ۳۶ و ۱۲۱ نقطه‌ای

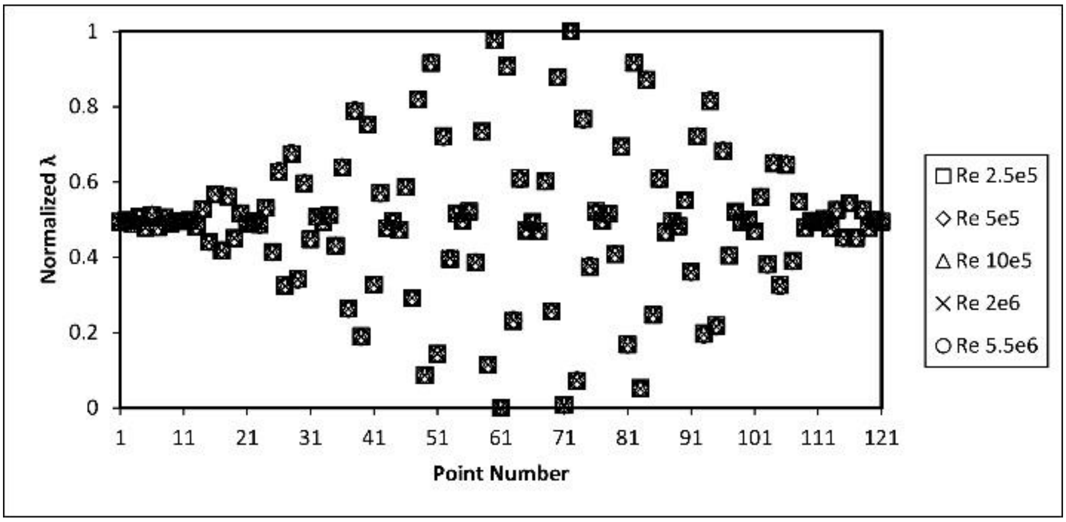
Fig. 19. λ values for static pressure field in 36 and 121 nodes



شکل ۲۰. مقادیر λ برای میدان انرژی جنبشی آشفته در دامنه ۳۶ و ۱۲۱ نقطه‌ای

Fig. 20. λ values for turbulence kinetic energy field in 36 and 121 nodes





شکل ۲۱. مقادیر λ برای میدان استهلاک انرژی جنبشی آشفته در دامنه ۳۶ و ۱۲۱ نقطه‌ای

Fig. 21. λ values for turbulence kinetic energy dissipation field in 36 and 121 nodes

خواهند شد. این نزدیکی به اندازه‌ای است که می‌توان آن‌ها را، برابر در نظر گرفت. برابری مذکور، مقدمه یافتن تابع پیش‌بینی کننده مجموعه λ، برای هر کدام از میدان‌های جریان است. در صورتی که مقادیر مجموعه λ نرمال نشوند، تناظر، برابری و روندی قابل پیش‌بینی در آن‌ها مشاهده نخواهد شد.

با در اختیار داشتن مجموعه λ برای هر میدان جریان، می‌توان آن‌ها را برای سایر اعداد رینولدز داخل بازه نیز یافت. مقادیر حداکثر و حداقل λ هر میدان جریان، در هر عدد رینولدز، مشخص شده است. تغییرات این دو مقدار حداقل و حداکثر، با اعداد رینولدز، و با توجه به تک‌تک میدان‌های مورد نظر، دارای توابعی با ضریب همبستگی یک بوده، و به صورت چند جمله‌ای هستند. این توابع با ورود اعداد رینولدز مختلف داخل بازه تعریف شده (۲/۵×۱۰^۵ تا ۵/۵×۱۰^۶) به آن‌ها، مقادیر حداقل و حداکثر λ هر میدان جریان را مشخص می‌نمایند. سپس با توجه به میدان مورد نظر، مقادیر مجموعه λ از حالت نرمال‌سازی شده خارج گردیده، و مجموعه λ مورد نظر، حاصل می‌شود. با داشتن مجموعه λ محاسبه شده برای هر میدان جریان، و مقادیر متغیر شکل c مستقل از تغییرات عدد رینولدز در جدول شماره ۳، می‌توان متغیرهای مورد نظر را به دست آورد. متغیرهای مذکور، مستقیماً از معادلات ۱۲ الی ۱۶ در بازه پیوسته‌ای از اعداد رینولدز، محاسبه می‌شوند. لازم به توضیح است که به دلیل بزرگی اعداد رینولدز موجود در بازه ۲/۵×۱۰^۵ الی ۵/۵×۱۰^۶، از پارامتر سرعت دیواره متحرک معادل با عدد رینولدز مورد نظر (U)، به عنوان ورودی روابط پیش‌بین، استفاده می‌شود. توابع و ضرایب مذکور، در جداول ۳ و ۴ نشان داده شده‌اند. همچنین چند جمله‌ای‌های درجه دوم و درجه سوم وابسته به سرعت دیواره متحرک معادل با عدد رینولدز، طی روابط ۲۴ و ۲۵، به نمایش درآمده‌اند.

$$\lambda_{Min}^{Max} = a_3 U_{Re}^3 + a_2 U_{Re}^2 + a_1 U_{Re} + a_0 \qquad n=3 \tag{۲۴}$$

$$\lambda_{Min}^{Max} = a_2 U_{Re}^2 + a_1 U_{Re} + a_0 \qquad n=2 \tag{۲۵}$$

که در آن ضرایب a_3 تا a_0 مقادیر ثابتی هستند که به دست خواهد آمد. برای بررسی دقت پیش‌بینی روابط فوق در سایر اعداد رینولدز داخل بازه مورد نظر، محاسبات مربوطه انجام پذیرفت. این محاسبات بر پایه تعدادی از اعداد رینولدز مختلف بوده که با استفاده از معادلات ۱۲ الی ۱۶، میدان‌های جریان متناظرشان، به دست آمده‌اند. برای مقایسه میزان دقت نتایج حاصله، نتایج روش حجم محدود به عنوان بنچ مارک، متناظر با همان اعداد رینولدز، به کار گرفته شدند. نمونه نتایج به دست آمده عدد رینولدز ۳/۵×۱۰^۶، برای میدان‌های سرعت جریان در دو جهت (u_1, u_2)، فشار استاتیکی (p)، انرژی جنبشی آشفته (k) و استهلاک انرژی جنبشی آشفته (ε)، طی شکل‌های ۲۲ الی ۲۶ به نمایش درآمده است. این شکل‌ها مربوط به یک میدان ۳۶ نقطه‌ای می‌باشند. با توجه به ضرائب همبستگی به دست آمده در جداول ۴ و ۵، نتایج حاصله از پیش‌بینی، دارای دقت مطلوبی بوده، و مقادیر آن‌ها، مشابه با نتایج حاصل از تحلیل عددی چند ربعی است.

همان گونه که در شکل‌ها مشاهده می‌شود، توابع پیش‌بینی کننده مقادیر مجموعه λ برای متغیرهای جریان، به همراه مقادیر متغیر c محاسبه شده، دقت مناسبی را از خود نشان می‌دهند. سایر نمونه‌های محاسبه شده با اعداد رینولدز دیگر نیز، موید نتایج مطلوب هستند. ضرایب نش–ساتکلیف بالای ۹۳ درصد، در مقایسه با بنچ مارک‌های روش حجم محدود (نرم افرار انسیس فلوئنت)، گواه این موضوع می‌باشند. با عنایت به توضیحات و نتایج به دست آمده، می‌توان گفت که روش ارائه شده جهت تحلیل عددی به روش تابع پایه شعاعی چند ربعی، جواب‌های قابل قبولی را نتیجه می‌دهد. همچنین فرض استقلال مقادیر متغیر c، در کنار الگوی‌های قابل پیش‌بینی مجموعه λ، نکات کلیدی در کاربرد روش عددی چند ربعی هستند. بنابراین می‌توان از مجموعه محاسبات به کار رفته، جهت تحلیل عددی روش چند ربعی، بهره جست.

۶- ۱- مثال کاربردی

در این مثال یک جت مستغرق، واقع در یک بازشدگی ناگهانی با نسبت ۲ و عدد رینولدز ۲×۱۰^۶ در نظر گرفته شده است. هندسه جریان شامل یک تونل اولیه به طول یک متر، و قطر یک متر، و یک تونل ثانویه به طول پنج متر و قطر دو متر می‌باشد. جریان از تونل اولیه با قطر کوچک‌تر، وارد تونل ثانویه با قطر بزرگ‌تر شده و هسته پتانسیل جت و نواحی چرخشی پیرامون آن را ایجاد می‌نماید. میدان محاسباتی شامل ۳۴۲ نقطه است که به صورت یکنواخت در دامنه توزیع شده‌اند. در شکل ۲۷ محدوده مذکور با رنگ قرمز مشخص گردیده است. چگالی و لزجت دینامیکی سیال به ترتیب ۹۹۸/۲ کیلوگرم بر متر مکعب و ۰/۰۰۱ پاسکال بر ثانیه است. بازشدگی‌های ناگهانی با نسبت‌های مختلف، نوعی مبدل انرژی جنبشی به انرژی استاتیکی و گرما هستند و در قسمت‌هایی از جریان که نیازمند افزایش فشار استاتیکی و یا استهلاک مقداری از انرژی جنبشی مد نظر باشد، می‌توان از بازشدگی

جدول ۴. مقادیر مختلف ضرایب چند جمله‌ای معادلات ۲۵ و ۲۶، برای میدان‌های جریان در میدان ۳۶ نقطه‌ای

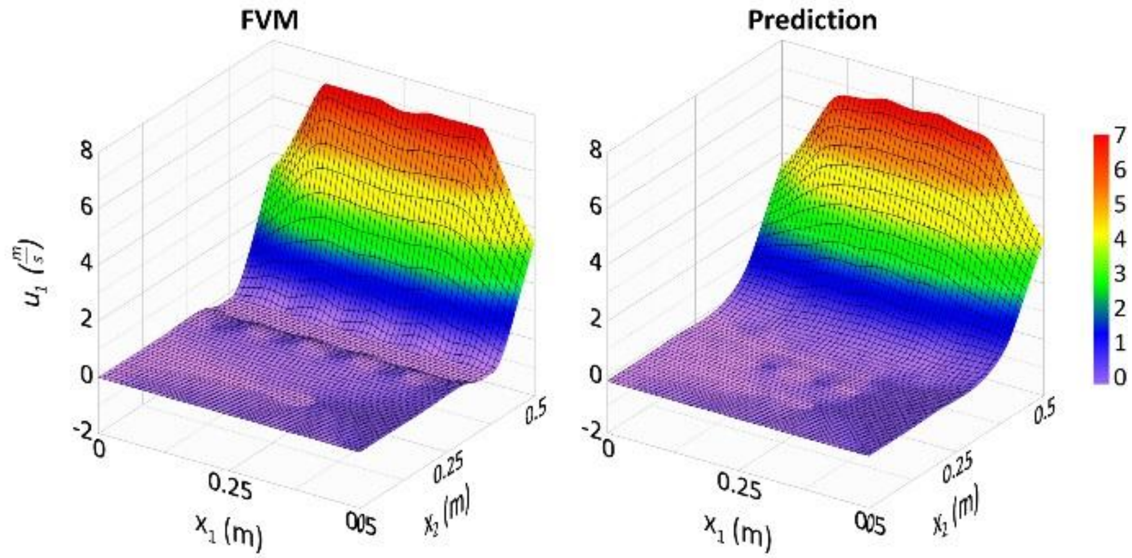
Table 4. Polynomial coefficients of equations 25 and 26 for 36 nodes domain

	n	a_3	a_2	a_1	a_0	R^2
λ حداکثر u_1	۲	-	$۱/۷۰۷۸۴۱\times۱۰^{-۲}$	$۲/۳۶۶۴۵۵\times۱۰^{۲}$	$-۱/۶۹۳۰۲۷$	۱
λ حداقل u_1	۲	-	$-۶/۸۴۵۶۳۲\times۱۰^{-۳}$	$-۱/۷۹۴۱۵۲\times۱۰^{۲}$	$۶/۸۴۹۰۳\times۱۰^{-۱}$	۱
λ حداکثر u_2	۲	-	$-۲/۳۹۸۶۲۴\times۱۰^{-۳}$	$۱/۰۸۲۹۳۳$	$۲/۳۴۷۹۵۸\times۱۰^{-۱}$	۱
λ حداقل u_2	۲	-	$۳/۳۶۳۵۲۹\times۱۰^{-۳}$	$-۱/۵۰۳۸۷۱$	$-۳/۳۱۲۴۱۳\times۱۰^{-۱}$	۱
λ حداکثر p	۳	$-۹/۰۶۲۸۴۱\times۱۰^{۷}$	$۲/۶۳۲۵۶۴\times۱۰^{۱۰}$	$۳/۰۴۷۵۶۵\times۱۰^{۱۰}$	$-۱/۳۰۳۵۹۴\times۱۰^{۱۰}$	۱
λ حداقل p	۳	$۹/۴۷۰۰۵۶\times۱۰^{۷}$	$-۲/۷۵۳۲۷۳\times۱۰^{۱۰}$	$-۳/۱۸۲۹۷۸\times۱۰^{۱۰}$	$۱/۳۶۱۷۰۲\times۱۰^{۱۰}$	۱
λ حداکثر k	۳	$-۹/۸۳۲۲۵۲\times۱۰^{۳}$	$۲/۹۸۱۸۸۹\times۱۰^{۶}$	$۳/۱۸۹۸۳۶\times۱۰^{۶}$	$-۱/۳۷۹۸۹۵\times۱۰^{۶}$	۱
λ حداقل k	۳	$۱/۰۰۵۵۶۹\times۱۰^{۴}$	$-۳/۰۳۴۶۲۳\times۱۰^{۶}$	$-۳/۲۷۴۶۸۵\times۱۰^{۶}$	$۱/۴۱۴۸۶۲\times۱۰^{۶}$	۱
λ حداکثر ε	۳	$۲/۶۷۱۱۱۸\times۱۰^{۸}$	$۲/۱۲۶۸۰۶\times۱۰^{۹}$	$-۴/۷۲۹۶۷۹\times۱۰^{۹}$	$۲/۷۴۱۵۹۱\times۱۰^{۹}$	۱
λ حداقل ε	۳	$-۱/۸۷۵۹۶۲\times۱۰^{۸}$	$-۱/۴۸۵۶۲۴\times۱۰^{۹}$	$۳/۲۹۴۳۶۵\times۱۰^{۹}$	$-۱/۹۰۸۰۲۶\times۱۰^{۹}$	۱

جدول ۵. مقادیر مختلف ضرایب چند جمله‌ای معادلات ۲۵ و ۲۶، برای میدان‌های جریان در میدان ۱۲۱ نقطه‌ای

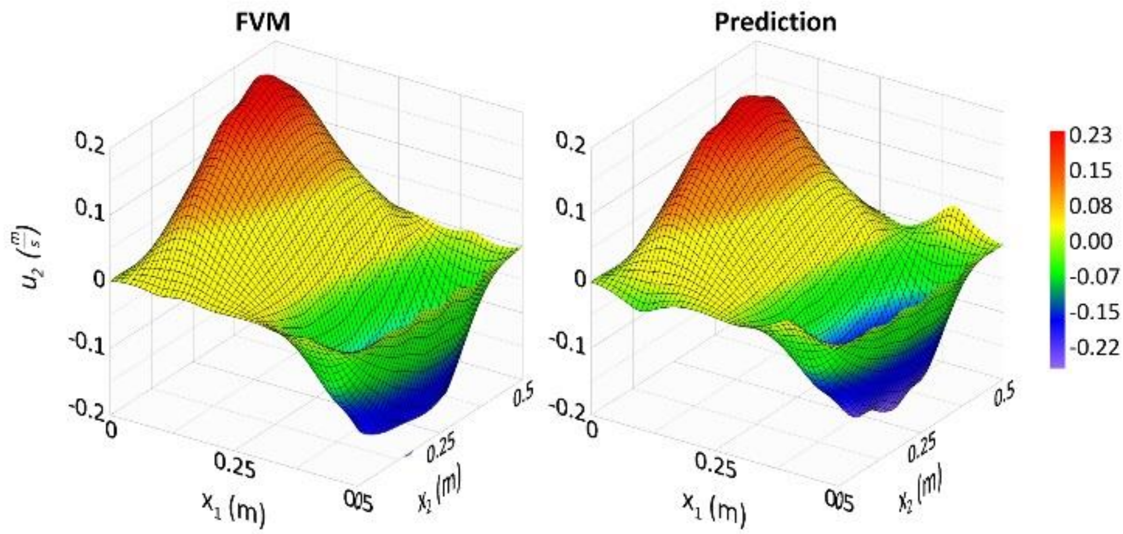
Table 5. Polynomial coefficients of equations 25 and 26 for 121 nodes domain

	n	a_3	a_2	a_1	a_0	R^2
λ حداکثر u_1	۲	-	$-۲/۷۵۷۴۳۹\times۱۰^{۵}$	$۱/۵۰۷۲۵۷\times۱۰^{۱۰}$	$۲/۵۵۹۷۴۳\times۱۰^{۷}$	۱
λ حداقل u_1	۲	-	$۵/۸۳۷۷۳۳\times۱۰^{۵}$	$-۱/۵۵۴۶۵۴\times۱۰^{۱۰}$	$-۵/۴۹۷۳۴۱\times۱۰^{۷}$	۱
λ حداکثر u_2	۳	$۸/۲۹۰۲۸\times۱۰^{۶}$	$-۶/۳۸۳۶۷۱\times۱۰^{۸}$	$۶/۶۳۳۴۸۱\times۱۰^{۱۰}$	$۵/۹۸۵۱۴۶\times۱۰^{۹}$	۱
λ حداقل u_2	۳	$-۷/۵۷۴۸۹۲\times۱۰^{۶}$	$۵/۸۲۸۶۱۹\times۱۰^{۸}$	$-۵/۹۵۲۷۷۴\times۱۰^{۱۰}$	$-۵/۵۴۹۹۵۴\times۱۰^{۹}$	۱
λ حداکثر p	۳	$-۱/۱۵۳۶۸۴\times۱۰^{۱۰}$	$۳/۶۳۲۴۶۸\times۱۰^{۱۲}$	$۳/۵۳۲۳۵۸\times۱۰^{۱۲}$	$-۱/۵۴۳۸۰۷\times۱۰^{۱۲}$	۱
λ حداقل p	۳	$۱/۰۹۵۳۴۵\times۱۰^{۱۰}$	$-۳/۴۵۱۷۲۲\times۱۰^{۱۲}$	$-۳/۸۵۹۰۶۴\times۱۰^{۱۲}$	$۱/۶۶۷۳۹۶\times۱۰^{۱۲}$	۱
λ حداکثر k	۳	$-۲/۲۰۷۰۲۷\times۱۰^{۶}$	$۶/۵۷۰۶۵۲\times۱۰^{۸}$	$۷/۱۶۳۰۵۱\times۱۰^{۸}$	$-۳/۱۳۷۳۰۴\times۱۰^{۸}$	۱
λ حداقل k	۳	$۱/۹۷۵۵۳۹\times۱۰^{۶}$	$-۵/۹۶۷۱۴۶\times۱۰^{۸}$	$-۶/۵۰۰۸۲\times۱۰^{۸}$	$۲/۸۱۷۹۸۱\times۱۰^{۸}$	۱
λ حداکثر ε	۳	$۱/۹۲۰۵۷۵\times۱۰^{۸}$	$۱/۶۵۸۳۵۱\times۱۰^{۹}$	$-۳/۶۳۶۶۳۶\times۱۰^{۹}$	$۲/۱۰۴۲۷۴\times۱۰^{۹}$	۱
λ حداقل ε	۳	$-۱/۸۸۲۰۶۶\times۱۰^{۸}$	$-۱/۶۲۵۷۶۱\times۱۰^{۹}$	$۳/۵۶۴۵۷۴\times۱۰^{۹}$	$-۲/۰۶۲۵۳۸\times۱۰^{۹}$	۱



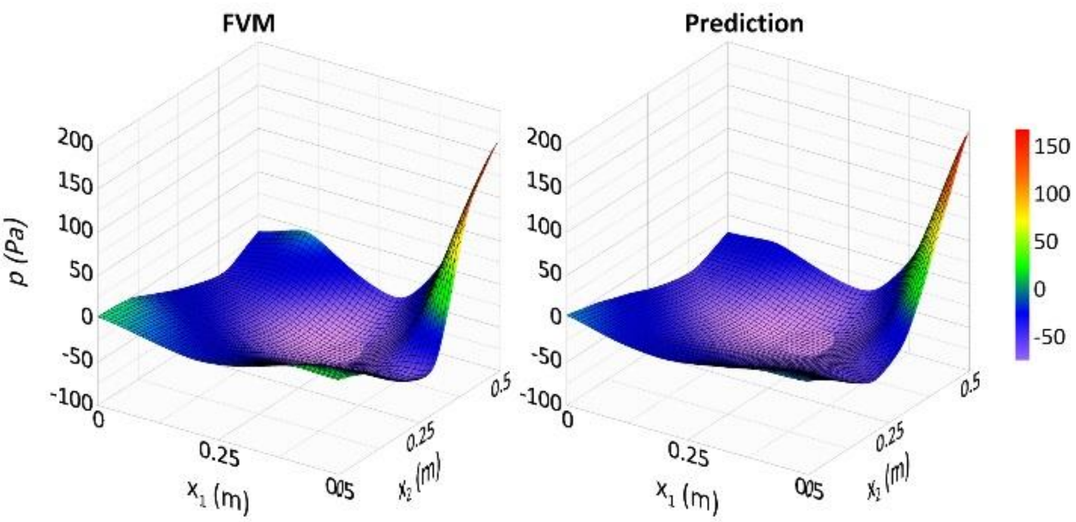
شکل ۲۲. کانتورهای سرعت u_1

Fig. 22. u_1 velocity contours



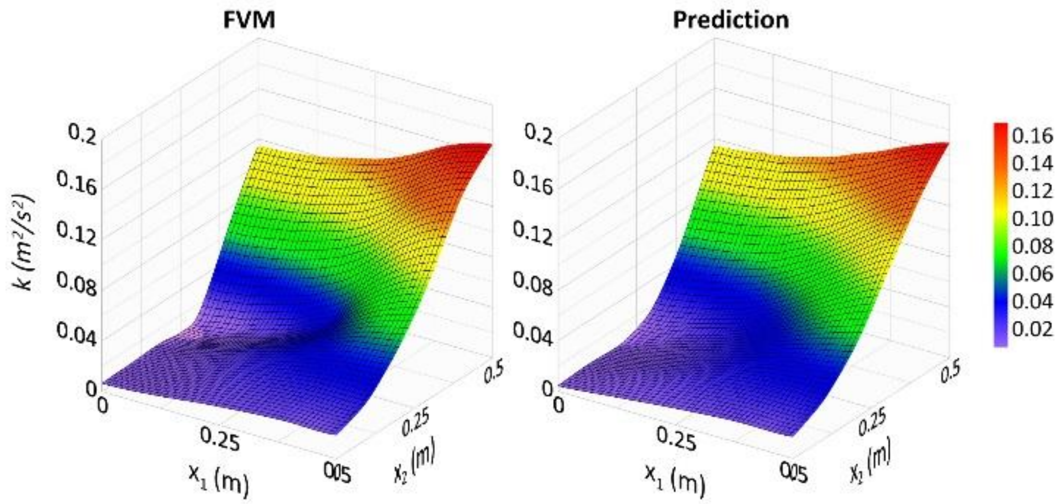
شکل ۲۳. کانتورهای سرعت u_2

Fig. 23. u_2 velocity contours



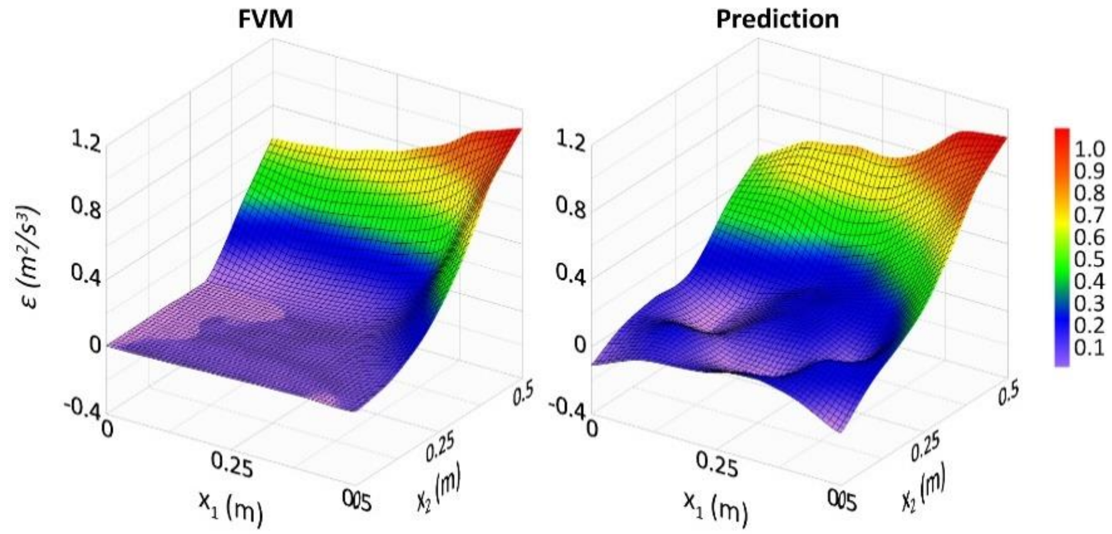
شکل ۲۴. کانتورهای فشار استاتیکی

Fig. 24. Static pressure contours



شکل ۲۵. کانتورهای انرژی جنبشی آشفته

Fig. 25. Turbulence kinetic energy contours

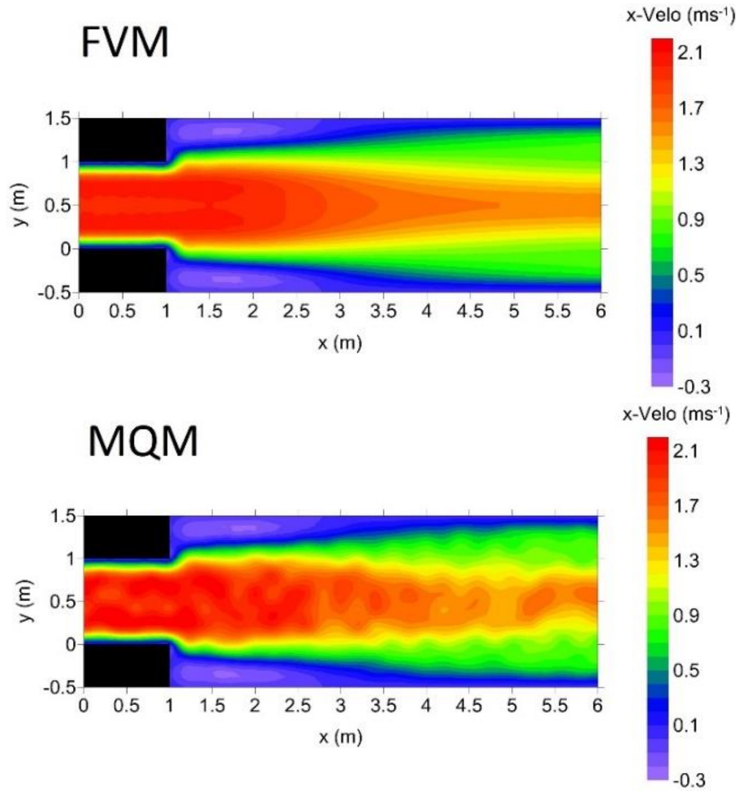


شکل ۲۶. کانتورهای استهلاک انرژی جنبشی آشفته

Fig. 26. Turbulence kinetic energy dissipation contours

شکل ۲۷. ناحیه مورد استفاده جهت مدل‌سازی عددی بازشدگی ناگهانی

Fig. 27. Turbulence kinetic energy dissipation contours



شکل ۲۸. میدان سرعت در راستای جریان، روش چند ربعی و روش حجم محدود

Fig. 28. x_1 velocity in MQ and FV methods

جدول ۶.مقادیر ضریب نش- ساتکلیف و خطای جذر میانگین مربعات نسبی برای متغیرهای جریان در دامنه بازشدگی ناگهانی

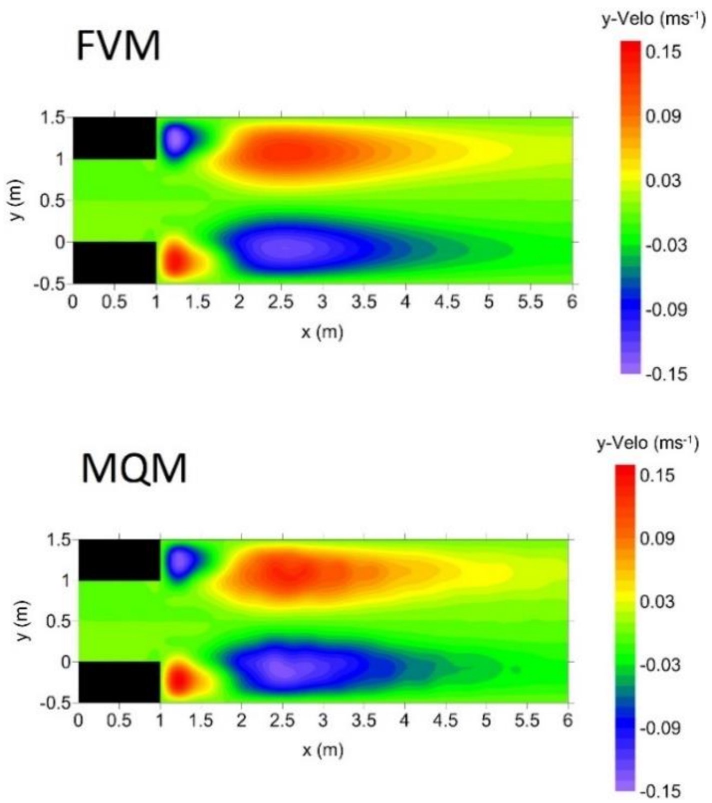
Table 6. Nash-Sutcliffe and RRMSE error criteria for flow parameters in the sudden expansion domain

معیار	u_1	u_2	p	k	ε
N-S	۰/۹۹	۰/۹۹	۰/۹۸	۰/۹۸	۰/۹۸
RRMSE	٪۰/۰۲	٪۰/۰۳	٪۰/۰۰۱	٪۰/۰۳	٪۰/۰۴

ناگهانی استفاده نمود. نتایج به دست آمده با دو روش حجم محدود (نرم افزار انسیس فلوئنت)، و چند ربعی، طی شکل‌های شماره ۲۸ تا ۳۰ نشان داده شده‌اند. اختلاف اندک بین نتایج دو روش طبعا با افزایش تعداد نقاط به سرعت کاهش می‌یابد. همچنین مقادیر ضریب نش- ساتکلیف و خطای جذر میانگین مربعات نسبی که در جدول ۶ آورده شده‌اند حاکی از انطباق بسیار زیاد نتایج دو روش می‌باشد.

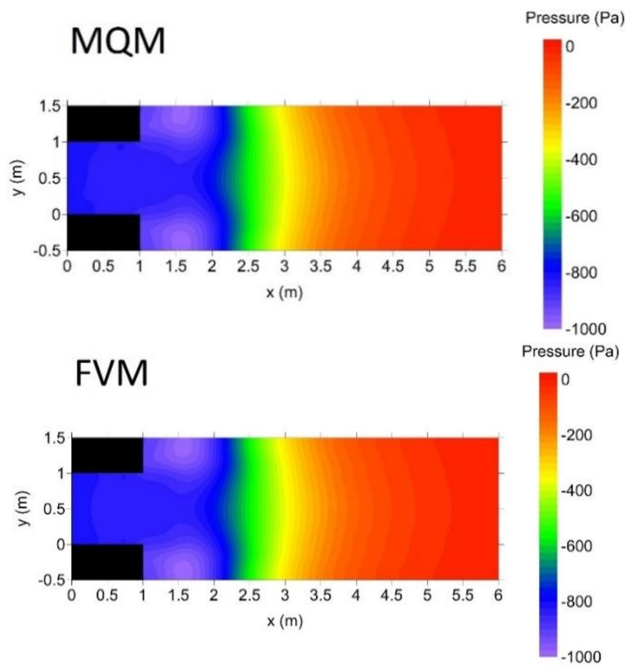
۷- نتیجه‌گیری

روش‌های بدون شبکه یکی از روش‌های جذاب و در حال توسعه برای حل معادلات حاکم بر پدیده‌های فیزیکی است که جهت احتراز از مشکلات شبکه‌بندی میدان محاسباتی معرفی شده است. کاربرد روش‌های پایه شعاعی برای حل معادلات حاکم بر سیال به دلیل تعدد معادلات حاکم و در نتیجه تعدد ضرائب شکل به ویژه در جریان آشفته پیچیده‌تر خواهد شد. در این



شکل ۲۹. میدان سرعت در راستای عمود بر جریان، روش چند ربعی و روش حجم محدود

Fig. 29. x_2 velocity in MQ and FV methods



شکل ۳۰. میدان فشار استاتیکی جریان، روش چند ربعی و روش حجم محدود

Fig. 30. Static pressure in MQ and FV methods

پژوهش از روش پایه شعاعی چند ربعی برای حل جریان در حفره با درپوش متحرک مربعی (به ابعاد m ۰/۵×m ۰/۵) که مهم‌ترین بنچ مارک معیار در روش‌های دینامیک سیالات محاسباتی است، استفاده گردید و دو آرایش از مجموعه نقاط منظم ساختار یافته، به تعداد ۳۶ و ۱۲۱ نقطه، مورد آزمون قرار گرفت. همچنین تحلیل برای پنج عدد رینولدز مختلف $۲/۵\times۱۰^{۵}$ ، ۵×۱۰^{۵} ، ۱۰×۱۰^{۵} ، ۲×۱۰^{۶} و $۵/۵\times۱۰^{۶}$ انجام گردید. این مسئله در حالت دو بعدی، آشفته و پایدار دارای پنج معادله حاکم و لذا پنج ضریب شکل مستقل است. در چنین شرایطی یافتن ضرائب شکل و مجموعه ضرائب λ مناسب به ازای نقاط انتخاب شده چالشی جدی است. در این پژوهش روشی ابتکاری برای گزینش این ضرائب پیشنهاد شد که دقت و صحت آن با مقایسه نتایج آن با روش احجام محدود (نرم افرار انسیس فلوئنت)، با استفاده از ضرائب نش-ساتکلیف در حد ۹۳ تا ۹۹ درصد و معیار خطای جذر میانگین مربعات نسبی کمتر از یک درصد برای متغیرهای سرعت در دو جهت اصلی، فشار استاتیکی، انرژی جنبشی و استهلاک انرژی جنبشی نشان داده شد. همچنین فرضیه استقلال متغیرهای شکل c از اعداد رینولدز جریان تایید و نیز روابطی برای پیش‌بینی ضرائب λ مناسب به ازای ضرائب شکل معین معرفی و دقت بسیار بالای آن‌ها نشان داده شد. در پایان، روش مورد نظر برای حل مثالی از یک بازشدگی ناگهانی، مورد ارزیابی قرار گرفت که مقایسه نتایج آن با نتایج روش حجم محدود حاکی از توانایی قابل قبول این روش عددی در حل معادلات حاکم جریان پایای آشفته دو بعدی بود.

منابع

[1] R. Franke, Scattered data interpolation: tests of some methods, Mathematics of computation, 38(157) (1982) 181-200.

[2] R. L. Hardy, Multiquadric equations of topography and other irregular surfaces, Journal of geophysical research, 76(8) (1971) 1905-1915.

[3] R. Marinova, C. Christov, T. Marinov, A fully coupled solver for incompressible Navier–Stokes equations using operator splitting, International Journal of Computational Fluid Dynamics, 17(5) (2003) 371-385.

[4] N. Wright, P. Gaskell, An efficient multigrid approach to solving highly recirculating flows, Computers & Fluids, 24(1) (1995) 63-79.

[5] Z. Brzeźniak, E. Carelli, A. Prohl, Finite-element-based discretizations of the incompressible Navier–Stokes equations with multiplicative random forcing, IMA Journal of Numerical Analysis, 33(3) (2013) 771-824.

[6] K. Poochinapan, Numerical implementations for 2D lid-driven cavity flow in stream function formulation, ISRN Applied Mathematics, 2012 (2012).

[7] M. Shirazaki, G. Yagawa, Large-scale parallel flow analysis based on free mesh method: a virtually meshless method, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 174(3-4) (1999) 419-431.

[8] U. Ghia, K.N. Ghia, C. Shin, High-Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method, Journal of computational physics, 48(3) (1982) 387-411.

[9] S. Rubin, P. Khosla, Polynomial interpolation methods for viscous flow calculations, Journal of Computational Physics, 24(3) (1977) 217-244.

[10] C. Wang, Characteristic finite analytic method (CFAM) for incompressible Navier-Stokes equations, Acta Mechanica, 143(1-2) (2000) 57-66.

[11] R. Kupferman, A central-difference scheme for a pure stream function formulation of incompressible viscous flow, SIAM Journal on Scientific Computing, 23(1) (2001) 1-18.

[12] X.-H. Wu, W.-Q. Tao, S.-P. Shen, X.-W. Zhu, A stabilized MLPG method for steady state incompressible fluid flow simulation, Journal of Computational Physics, 229(22) (2010) 8564-8577.

[13] E.J. Kansa, Multiquadrics—A scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics—I surface approximations and partial derivative estimates, Computers & Mathematics with applications, 19(8-9) (1990) 127-145.

[14] A.R. Firoozjaee, M.H. Afshar, Steady-state solution of incompressible Navier–Stokes equations using discrete least-squares meshless method, International Journal for Numerical Methods in Fluids, 67(3) (2011) 369-382.

[15] G. Bourantas, E. Skouras, V. Loukopoulos, G. Nikiforidis, Numerical solution of non-isothermal fluid flows using local radial basis functions (LRBF) interpolation and

a new algorithm for optimization of the shape parameter, Amirkabir Civil Engineering Journal (accepted for publication) doi: 10.22060/CEEJ.2019.15155.5840.

[23] R. Babaee, E. Jabbari, M. Eskandari-Ghadi, Application of Multiquadric Radial Basis Function method for Helmholtz equation in seismic wave analysis for reservoir of rigid dams, Amirkabir Civil Engineering Journal (accepted for publication) doi: 10.22060/CEEJ.2019.16443.6230.

[24] S. Patel, A. Rastogi, Meshfree multiquadric solution for real field large heterogeneous aquifer system, Water Resources Management, 31(9) (2017) 2869-2884.

[25] M.F.Harris, A.J. Kassab, E. Divo, A shock-capturing meshless scheme using RBF blended interpolation and moving least squares, Engineering Analysis with Boundary Elements, 109 (2019), 81-93.

[26] N. Sheikhi, M. Najafi, V. Enjilela, Extending the Meshless Local Petrov–Galerkin Method to Solve Stabilized Turbulent Fluid Flow Problems, International Journal of Computational Methods, 16(1) (2019).

[27] H. Kahid Basiri, R. Babaee, A.R. Fallah, E. Jabbari, Development of multiquadric meshless method for solving dam-break problem, Journal of Hydraulics, 14(4) (2020), 83-98.

[28] M. Koushki, E. Jabbari, M. Ahmadinia, Evaluating RBF methods for solving PDEs using Padua points distribution, Alexandria Engineering Journal , 59 (2020), 2999-3018.

[29] M. Despotovic, V. Nedic, D. Despotovic, S. Cvetanovic, Evaluation of empirical models for predicting monthly mean, Renewable and Sustainable Energy Reviews, 56 (2016) 246-260.

a velocity-correction method, Computer Modeling in Engineering & Sciences, 64(2) (2010) 187-212.

[16] N. Mai-Duy, T. Tran-Cong, Numerical solution of Navier–Stokes equations using multiquadric radial basis function networks, International journal for numerical methods in fluids, 37(1) (2001) 65-86.

[17] P.P. Chinchapatnam, K. Djidjeli, P.B. Nair, Radial basis function meshless method for the steady incompressible Navier–Stokes equations, International Journal of Computer Mathematics, 84(10) (2007) 1509-1521.

[18] P.P. Chinchapatnam, K. Djidjeli, P. Nair, M. Tan, A compact RBF-FD based meshless method for the incompressible Navier—Stokes equations, Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part M: Journal of Engineering for the Maritime Environment, 223(3) (2009) 275-290.

[19] Z.H. Wang, Z. Huang, W. Zhang, G. Xi, A meshless local radial basis function method for two-dimensional incompressible Navier-Stokes equations, Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals, 67(4) (2015) 320-337.

[20] E.J. Sellountos, A. Sequeira, An advanced meshless LBIE/RBF method for solving two-dimensional incompressible fluid flows, Computational Mechanics, 41(5) (2008) 617-631.

[21] A. Fallah, E. Jabbari, R. Babaee, Development of the Kansa method for solving seepage problems using a new algorithm for the shape parameter optimization, Computers & Mathematics with Applications, 77(3) (2019) 815-829.

[22] M. Kooshki, R. Babaee, E. Jabbari, Application of RBF multiquadric method for solving seepage problems using

چگونه به این مقاله ارجاع دهیم

M. H. Mirabi, E. Jabbari, T. Rajaee, Numerical Solution of Steady Incompressible Turbulent Navier–Stokes Equations using Multiquadric Radial Basis Function (MQ-RBF) Method, Amirkabir J. Civil Eng., 53(12) (2022) 5325-5356.

DOI: 10.22060/ceej.2021.18788.6964

این صفحه عمداً خالی است