



Solution of 3D elasticity problems using meshless local equilibrated basis functions

D. Afifi, N. Noormohammadi*, B. Boroomand

Department of Civil Engineering, Isfahan University of Technology, Isfahan, Iran

ABSTRACT: A mesh-free method is presented for 3D elasto-static problems in homogenous media using Equilibrated Basic functions. The method treats satisfaction of the Partial Differential Equation independent of the boundary conditions, using a weak weighted residual integration over a cubic fictitious domain embedding the main domain. All 3D integrals break into the combination of 1D library integrals, resulting in the omission of the numerical integration. Chebyshev polynomials of the first kind are used to approximate the solution function, and exponential functions combined with polynomials are used as weight functions. The weights vanish over the boundaries of the cubic fictitious domain, removing the boundary integrals. The meshless method considers some nodes for the definition of the Degrees of Freedom throughout the domain. Each node corresponds to a local sub-domain called cloud, including 98 other nodes than the main central one. The overlap between adjacent clouds ensures the continuity of both the displacement as well as stress components, an advantage with respect to the formulations. The approximation order within each cloud is 4. Boundary conditions are applied over a set of boundary points independent of the domain nodes, granting the method the ability of application for arbitrarily shaped domains without the drawback of irregularity in the nodal grid. The definition of curved boundary surfaces is easily done by inserting the coordinates of some boundary points located on them. Three numerical examples with various geometries and boundaries are presented to challenge the method. The results are compared with either the available exact solutions or the FEM.

Review History:

Received: Jun. 03, 2021

Revised: Jul. 12, 2022

Accepted: Aug. 14, 2022

Available Online: Aug. 27, 2022

Keywords:

Elasticity

Three dimensional

Equilibrated basis functions

Meshless method

Weighted residual approach

1- Introduction

To solve the Partial Differential Equations (PDEs) governing engineering problems, including the elasticity equations, there are various numerical modeling, among which the finite element method (FEM) is the most popular and widely used. In general, it is desired that the mesh is as ideal as possible and well-structured, since distorted geometry may have a negative impact on the solution accuracy. In order to overcome such drawbacks of mesh-based methods, meshless methods have been developed for solving PDEs in engineering and other sciences. The principal feature of meshless methods is the use of appropriate approximation schemes that can approximate the data specified on the randomly located nodes without the use of pre-defined mesh. Need for a truly meshless method leads to the development of Element Free Galerkin (EFG) method [1] and Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) method [2]. The use of Exponential Basis Functions (EBFS) to develop a local meshfree method which uses explicit relations to satisfy only PDEs with constant coefficients was considered in [3, 4]. In 2015, the Mesh-less Equilibrated Basis Functions (MLEqBFs) were presented in [5], which were extended to

solve two-dimensional problems in heterogeneous media, including FGM problems. The most important innovations of the present paper compared to the previous related studies can be stated as: the first formulation of Equilibrated Basis functions (EqBFs) for three-dimensional elasto-static problems, development of the method in local meshless form, while all previous works were in boundary form, and separation of the main domain points and boundary points, which leads to an easier definition of arbitrary geometries as well as the absence of irregularity in the nodal grid, and thus its undesirable outcomes.

2- Methodology

The general form of the equilibrium PDE is considered according to (1),

$$\mathbf{S}^T \mathbf{D}\mathbf{S}\mathbf{u} + \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad \text{in } \Omega, \quad \mathbf{B}(\mathbf{u}) = \mathbf{f}_b \quad \text{on } \Gamma \quad (1)$$

*Corresponding author's email: Noormahammadi@iut.ac.ir



The homogeneous part of the solution to the above PDE is set as,

$$\mathbf{u}_h \approx \hat{\mathbf{u}}_h = \sum_{j=1}^N \mathbf{f}_j \mathbf{c}_j = \mathbf{f}^T \mathbf{c} \quad (2)$$

Equation (2) is not able to satisfy the homogeneous part of the PDE, therefore it should be estimated in the form of the weighted residual integral over a fictitious cubic domain,

$$\int_{\Omega} \mathbf{w}_i \mathbf{S}^T \mathbf{D} \mathbf{S} (\mathbf{f}^T \mathbf{c}) d\Omega = \mathbf{0}, \quad i = 1, \dots, M \quad (3)$$

This process will eventually lead to the formation of a matrix equation as in (4) using all weight functions,

$$\mathbf{A} \mathbf{c} = \mathbf{0} \quad \mathbf{A} = \int_{\Omega} \mathbf{w}_i \mathbf{S}^T \mathbf{D} \mathbf{S} \mathbf{f}^T d\Omega \quad (4)$$

If \mathbf{c} is a member of the null-space of \mathbf{A} , Equilibrated Basis Functions could be extracted. So, Equation (2) converts into (5),

$$\hat{\mathbf{u}}_h = \sum_{r=1}^{\bar{M}} \mathbf{f}^T \boldsymbol{\varphi}_r d_r = \mathbf{f}^T \boldsymbol{\varphi} \mathbf{d} \quad (5)$$

Unknown coefficients \mathbf{d} are found by applying the boundary conditions. Solving the problem in two parts, homogeneous solution (h) and private solution (p) is expressed in the form of (6),

$$\mathbf{u}_h^i \approx \hat{\mathbf{u}}_h^i = \mathbf{F}_i \mathbf{d}_i = \mathbf{f}_i^T \boldsymbol{\varphi}_i \mathbf{d}_i. \quad \mathbf{u}_p^i \approx \hat{\mathbf{u}}_p^i = \mathbf{f}_p^i \mathbf{c}_p^i. \quad (6)$$

In the above relation, the index i indicates the allocation of the homogeneous solution to a cloud-centered at the i -th node. Establishing a relationship between the unknown coefficients of the solution series with the degrees of freedom of the nodes within the cloud, leads to the following,

$$\mathbf{U}_E^{h,i} = \mathbf{f}_i^E \boldsymbol{\varphi}_i \mathbf{d}_i = \boldsymbol{\Psi}_E^{h,i} \mathbf{d}_i, \quad \mathbf{d}_i = \left(\boldsymbol{\Psi}_E^{h,i} \right)^+ \mathbf{U}_E^{h,i}. \quad (7)$$

In the above, the + sign indicates the Moore-Penrose pseudo-inverse. A relationship between the central node of the cloud and the other nodes leads to,

$$\mathbf{u}_h^i \Big|_{\mathbf{x}_c} = \mathbf{U}_C^{h,i} = \mathbf{f}_i^T \Big|_{\mathbf{x}_c} \boldsymbol{\varphi}_i \left(\boldsymbol{\Psi}_E^{h,i} \right)^+ \mathbf{U}_E^{h,i} \quad (8)$$

For the total solution, the contribution of the homogeneous part should be calculated by considering the contribution of the particular solution in each of the cloud nodes, which leads to,

$$\mathbf{U}_C^i - \mathbf{f}_i^T \Big|_{\mathbf{x}_c} \boldsymbol{\varphi}_i \left(\boldsymbol{\Psi}_E^{h,i} \right)^+ \mathbf{U}_E^i = \mathbf{U}_C^{p,i} - \mathbf{f}_i^T \Big|_{\mathbf{x}_c} \boldsymbol{\varphi}_i \left(\boldsymbol{\Psi}_E^{h,i} \right)^+ \mathbf{U}_E^{p,i} \quad (9)$$

For imposing the Dirichlet and Neumann boundary conditions, Equations (10) and (11) will be built at the corresponding boundary point,

$$\mathbf{T}_n \mathbf{f}_i^T \Big|_{\mathbf{x}_{Bj} - \mathbf{x}_{Ci}} \boldsymbol{\varphi}_i \left(\boldsymbol{\Psi}_E^{h,i} \right)^+ \left(\mathbf{U}_E^i - \mathbf{U}_E^{p,i} \right) = \mathbf{U}_{Bj} \quad (10)$$

$$\mathbf{n} \mathbf{D} \mathbf{S} \mathbf{f}_i^T \Big|_{\mathbf{x}_{Bj} - \mathbf{x}_{Ci}} \boldsymbol{\varphi}_i \left(\boldsymbol{\Psi}_E^{h,i} \right)^+ \left(\mathbf{U}_E^i - \mathbf{U}_E^{p,i} \right) = \mathbf{t}_{Bj}. \quad (11)$$

By adding the boundary equations to the continuity equations, the overall matrix set is completed as follows.

$$\mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{U}_B \quad (12)$$

The rows of matrix \mathbf{K} are made from Equations (9-11).

3- Results and Discussion

To show that the proposed method does not need to produce a structured nodal grid according to the geometry of the domain, a 3D elasticity problem with a hollow spherical domain subjected to inner pressure is investigated. The exact solution for stress and displacement is,

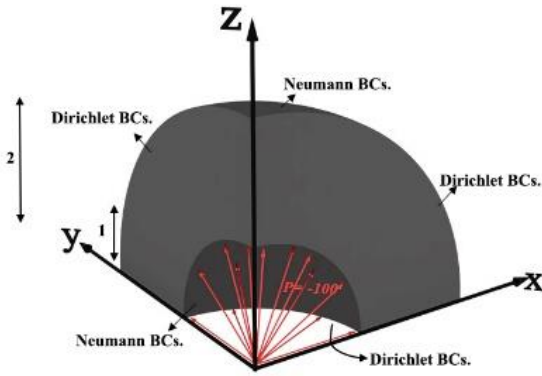


Fig. 1. Spherical problem and its boundary conditions

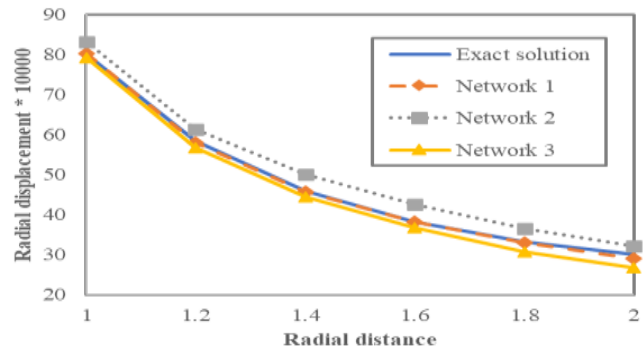


Fig. 2. Radial displacement comparison with the exact solution

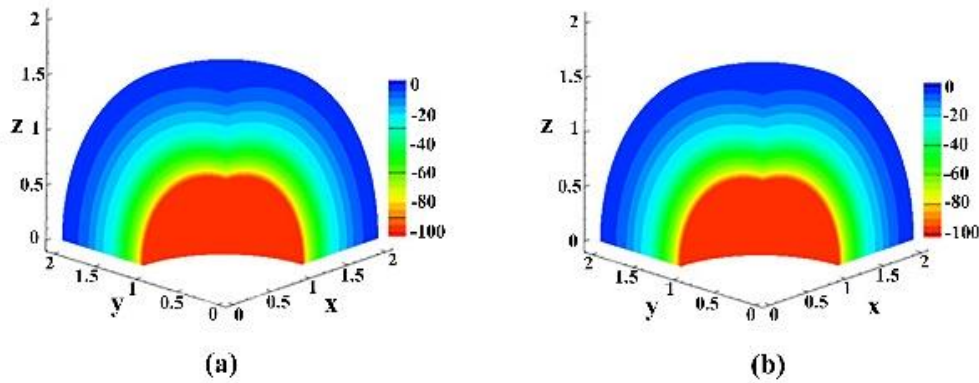


Fig. 3. Comparison of σ_r using (a) exact solution and (b) present method

$$\begin{aligned}
 u_r &= \frac{Pa^r r}{E(b^r - a^r)} \left[(1 - \nu) + (1 + \nu) \frac{b^r}{r r^r} \right], \\
 \sigma_r &= \frac{Pa^r (b^r - r^r)}{r^r (a^r - b^r)}.
 \end{aligned}
 \tag{13}$$

Due to symmetry, only 1/8 of the whole domain is considered. Boundary conditions are shown in Figure 1. The material properties are $E = 10^4 N / m^2$ and $\nu = 0.3$. The approximation order within the clouds is 4, and the number of points in each cloud is 98. In order to measure the effects of the number and the arrangement of the nodes on the accuracy of the answer, three grid cases are selected to solve this problem, Grid-1: 912 nodes uniformly distributed, Grid-2: 641 nodes non-uniformly distributed 641 nodes. Grid-3: 558 nodes uniformly distributed.

The stress contour using both the exact solution and the present method is also shown in Figure 3.

4- Conclusions

In the proposed method, the homogeneous PDE is satisfied independently of its boundary conditions using the weak form of the weighted residual integral. Equilibrated Basis functions are expanded as solution bases in sub-domains called cloud, containing 98 nodes around a central node, with the approximation order equal to 4. Overlapping of the clouds ensures proper continuity of the displacement and stress throughout the domain.

References

- [1] P. Krysl, T. Belytschko, The element free Galerkin method for dynamic propagation of arbitrary 3-D cracks, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 44(6) (1999) 767-800.
- [2] S.N. Atluri, T. Zhu, A new meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) approach in computational mechanics, *Computational mechanics*, 22(2) (1998) 117-127.
- [3] B. Boroomand, S. Soghrati, B. Movahedian, Exponential basis functions in solution of static and time harmonic elastic problems in a meshless style, *International Journal*

- for Numerical Methods in Engineering, 81(8) (2010) 971-1018.
- [4] E. Soleimanifar, B. Boroomand, F. Mossaiby, A meshless method using local exponential basis functions with weak continuity up to a desired order, *Computational Mechanics*, 53(6) (2014) 1355-1374.
- [5] N. Noormohammadi, Solution of solid mechanics problems using equilibrated basis functions and mesh-free methods, Ph.D Thesis, Isfahan university of technology, 2015. (In Persian)
- [6] B. Boroomand, N. Noormohammadi, Weakly equilibrated basis functions for elasticity problems, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 37(12) (2013) 1712-1727.
- [7] N. Noormohammadi, B. Boroomand, A fictitious domain method using equilibrated basis functions for harmonic and bi-harmonic problems in physics, *Journal of Computational Physics*, 272 (2014) 189-217

HOW TO CITE THIS ARTICLE

D. Afifi, N. Noormohammadi, B. Boroomand, Solution of 3D elasticity problems using meshless local equilibrated basis functions, Amirkabir J. Civil Eng., 54(11) (2023) 841-844.

DOI: [10.22060/ceej.2022.20119.7345](https://doi.org/10.22060/ceej.2022.20119.7345)





حل مسائل سه بعدی الاستیسیته با استفاده از روش بدون شبکه محلی توابع پایه متعادل شده

دانیال عفیفی، نیما نورمحمدی*، بیژن برومند

دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان، ایران.

تاریخچه داوری:

دریافت: ۱۴۰۰/۰۳/۱۳
بازنگری: ۱۴۰۱/۰۴/۲۱
پذیرش: ۱۴۰۱/۰۵/۲۳
ارائه آنلاین: ۱۴۰۱/۰۶/۰۵

کلمات کلیدی:

الاستواستاتیک
سه بعدی
توابع پایه متعادل شده
روش بدون شبکه محلی
انتگرال باقی مانده وزنی

خلاصه: یک روش بدون شبکه محلی برای حل مسائل الاستواستاتیک با استفاده از توابع پایه متعادل شده در فضای سه بعدی همگن ارائه شده است. ارضای معادله دیفرانسیل مستقل از شرایط مرزی با استفاده از فرم ضعیف انتگرال وزنی در یک دامنه تصویری مکعبی دربرگیرنده ناحیه اصلی حل انجام می‌شود. پارامترهای مسئله قابلیت تفکیک به ضرب سه جزء متعامد را دارند که به واسطه آن، انتگرال‌های سه بعدی لازم به ترکیب انتگرال‌های یک بعدی کتابخانه‌ای تبدیل می‌شوند. این موضوع حذف انتگرال‌گیری عددی را به دنبال دارد. به منظور تقریب پاسخ از چند جمله‌ای‌های چپ‌شف‌نوع اول، و برای وزن‌دهی از ترکیب توابع نمایی و چند جمله‌ای استفاده می‌شود. با صفر شدن توابع وزن در مرز ناحیه تصویری، انتگرال مرزی از بین می‌رود. در فرم بدون شبکه محلی، از تعدادی گره در شبکه منظم که محل تعریف درجات آزادی هستند، برای گسسته‌سازی دامنه استفاده می‌شود. زیرناحیه‌هایی تحت عنوان ابر، متشکل از نود و نه گره مجاور یکدیگر، تشکیل می‌شوند که به واسطه همپوشانی با یکدیگر ارتباط برقرار کرده و پیوستگی مولفه‌های جابه‌جایی و تنش در سرتاسر ناحیه حل گسترده خواهد شد. این مزیتی نسبت به روش‌های دارای پیوستگی مرتبه صفر به شمار می‌آید. مرتبه تقریب درون ابر معادل چهار است. شرایط مرزی در گامی جداگانه به صورت نقطه‌ای روی نقاط مرزی مستقل از گره‌ها اعمال می‌شود که توصیف مرزهای مختلف از جمله سطوح دارای انحنا را به سادگی و با دادن مختصات صحیح نقاط روی آن میسر می‌کند. با ارائه سه مثال عددی دارای هندسه‌های مختلف، توانایی روش در برآورد میداین جابه‌جایی و تنش بررسی می‌گردد.

۱- مقدمه

مکانیک جامدات تنها راه حل عملی ممکن استفاده از روش‌های عددی برای تحلیل این مسائل است. از جمله می‌توان به روش اجزاء محدود^۱ اشاره کرد که علی‌رغم تمام قابلیت‌های خود، به دلیل توزیع شبکه المان در دامنه حل بسیار می‌تواند در حل برخی مسائل همانند وجود فرکانس‌های بالا پر هزینه و زمان‌بر باشد. از این رو استفاده از روش‌هایی که به چنین شبکه‌ای از المان‌ها نیاز نداشته باشند می‌تواند راه حل مفیدی تلقی شود. ایده اساسی روش‌های این رده عدم نیاز به یک شبکه المان‌بندی در دامنه حل مورد نظر و یا جایگزینی شبکه مذکور با شبکه‌هایی دارای ساختار بسیار ساده‌تر و هزینه محاسبات کمتر است. روش‌های بدون شبکه بر همین مبنا به وجود آمده‌اند. می‌توان این روش‌ها را به دو دسته کلی روش‌های مرزی و محلی تقسیم نمود. روش‌های محلی شبکه المان را با تعدادی گره در دامنه حل و مرزهای آن جایگزین می‌کنند، حال آن که روش‌های مرزی تنها مرز ناحیه را گسسته می‌سازند. دسته‌ای از روش‌های مرزی تحت عنوان روش‌های استفاده از

با پیشرفت علم و توسعه صنعت، هر روزه بر گستردگی و پیچیدگی مسائل مکانیک جامدات افزوده می‌شود. از آنجا که الگوی رفتاری بسیاری از این مسائل قابل بیان در قالب معادلات دیفرانسیل می‌باشد، در نتیجه توان حل این معادلات کلید اساسی بررسی الگوی رفتاری رخدادهای فیزیکی است. از مهم‌ترین و پرکاربردترین معادلات حاکم بر مسائل مکانیک جامدات می‌توان به معادلات الاستیسیته اشاره کرد که با تعیین تنش و تغییر شکل در یک سیستم جامد الاستیک تحت اثر بارهای مکانیکی سر و کار دارد. به طور قطع می‌توان گفت تمامی سازه‌های زیربنایی صنعتی و اجزاء مکانیکی ماشین‌آلات طراحی مقاومت و پایداری خود را مرهون علم الاستیسیته و پیشرفت‌های آن هستند. از این رو با حل معادلات الاستیسیته حاکم بر مسائل گوناگون مکانیک جامدات می‌توان رفتار استاتیکی یک مسئله را به خوبی مشاهده کرد. به دلیل تنوع و پیچیدگی بالای مسائل در حیطه

1 Finite Element Method (FEM)

* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: Noormahmadi@iut.ac.ir

حقوق مؤلفین به نویسندگان و حقوق ناشر به انتشارات دانشگاه امیرکبیر داده شده است. این مقاله تحت لیسانس آفرینندگی مردمی (Creative Commons License) در دسترس شما قرار گرفته است. برای جزئیات این لیسانس، از آدرس <https://www.creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode> دیدن فرمایید.



تحقیقات مربوطه نشان داده شد که برآورد انتگرال‌های مربوطه بدون نیاز به انتگرال‌گیری عددی در طول حل و تنها با ترکیب مجموعه‌ای از انتگرال‌های یک بعدی هم پایه صورت می‌گیرد و از این منظر، سرعت کار قابل مقایسه با روش توابع پایه‌نمایی است. توانایی روش همچنین در حل مسائل سازه‌ای بزرگ مقیاس و نیز مسائل دارای تکینگی^۶ به اثبات رسیده است [۱۵-۹].

علی‌رغم تمام مزایای روش‌های توابع پایه از جمله همگرایی بسیار سریع، تقریب پاسخ با مرتبه بالا و پیوستگی در سرتاسر ناحیه حل، همانند تمام روش‌های طیفی دیگر در حل مسائل با مقیاس بزرگ دچار مشکل می‌شوند. این مشکل عمدتاً به دلیل بدرفتاری معادلات ماتریسی برآمده و یا انتشار آلودگی ناشی از تکینگی مرزی یا خارج از مرز به سرتاسر ناحیه حل است که با افزایش مراتب تقریب وضعیت بدتری نیز پیدا می‌کند. از این رو استفاده از روش‌هایی که دامنه کلی حل مسئله را با تقسیم‌بندی به تعدادی زیرناحیه و محدود کردن ابعاد اجزای آن تسهیل می‌کنند می‌تواند راه حل مفیدی تلقی شود. یکی از این راهکارها استفاده از روش‌های بدون شبکه محلی^۷ است که برای نخستین بار برای حل مسائل نجومی روشی تحت عنوان روش هیدرودینامیک ذرات هموار شده^۸ توسط لوسی [۱۶] و گینگلد و موناگان [۱۷] به طور جداگانه ارائه گردید. در این روش با تجزیه دامنه مادی به اجزای کوچک‌تر تحت عنوان ذره و سپس با تعریف تابع هسته^۹ مناسب، هر خاصیت فیزیکی ماده به صورت حاصل جمع خواص مورد نظر روی تعدادی ذره بیان می‌گردد. به منظور رفع مشکل پایداری این روش در حالت تحت کشش و عدم تطابق هسته در سال ۱۹۹۵ روش ذره‌ای با هسته بازسازی کننده^{۱۰} توسط لیو و همکارانش ارائه گردید [۱۸]. در سال ۱۹۹۲ روش المان‌های پراکنده^{۱۱} با استفاده از تقریب حداقل مربعات وزن‌دار برای ایجاد ارتباط بین گره‌های پراکنده در ناحیه به عنوان جایگزین شبکه المان توسط نیرولز و همکارانش ارائه گردید [۱۹]. در سال ۱۹۹۴ روش بدون شبکه گالرکین^{۱۲} که اساس آن روش المان‌های پراکنده بود با اقدام به ارضای معادلات دیفرانسیل با استفاده از انتگرال ضعیف وزنی و استفاده از روش تقریب حداقل مربعات متحرک توسط بلیچکو و همکارانش ارائه گردید [۲۰]. با توسعه این روش مسائلی در حوزه‌های مختلف از قبیل تحلیل دینامیکی انتشار ترک در سه بعد به روش بدون شبکه گالرکین توسط بلیچکو و کرایسل ارائه گردید [۲۱].

توابع پایه، یک گام فراتر رفته و با تفکیک مراحل اعمال معادله دیفرانسیل و شرایط مرزی از یکدیگر، حجم عملیات لازم را بسیار محدود نموده‌اند. از نخستین ایده‌های استفاده از توابع پایه می‌توان به روش ترفتن^۱ اشاره کرد [۲]، که مبنای آن استفاده از پایه‌های صدق‌کننده در عملگر معادله دیفرانسیل است و به این شکل قادر است صورت همگن معادله دیفرانسیل را به طور دقیق ارضا کند. بنابراین تنها مرحله باقی‌مانده اعمال شرایط مرزی به سری متشکل از پایه‌های مذکور خواهد بود. به دلیل دشواری در یافتن پایه‌های ترفتن حتی در مورد معادلاتی با ساختار ساده، در سال ۱۹۶۴ میلادی ایده حل‌های اساسی^۲ با در نظر گرفتن تابع حل دقیق مسئله معادل $L(u) = \delta(x_p)$ توسط الکسیدزه و کوپرازه پیشنهاد گردید [۳]، به گونه‌ای که p نقطه‌ای خارج از ناحیه حل بوده و بنابراین پاسخ حاصل معادل با ارضای صورت همگن معادله در ناحیه حل است. در سال ۱۹۷۸ میلادی برپیا از حل‌های اساسی یک عملگر به عنوان وزن‌های صورت انتگرالی معادله دیفرانسیل استفاده نمود که با بازنویسی انتگرال در فرم ضعیف وزنی و به دنبال آن حذف انتگرال روی ناحیه و به نوعی انتقال آن به مرزها، منجر به روش المان‌های مرزی^۳ گردید [۴].

به دلیل دشواری‌های موجود در یافتن پایه‌های مناسب در روش ترفتن و همچنین روش حل‌های اساسی، ایده روش توابع پایه‌نمایی^۴ توسط برومند و همکاران ارائه گردید [۵-۷]، که مشکل به دست آوردن توابع پایه مناسب برای عملگرهای دارای ضرایب ثابت را تا حد زیادی برطرف می‌کند. تطابق آن‌ها با عملگرهای مختلف با برقراری یک رابطه صریح در توان توابع‌نمایی صورت می‌گیرد که بسیار ساده‌تر از دو روش قبل است. با این حال و با وجود تمام قابلیت‌های روش توابع پایه‌نمایی، ضعف آن در تحلیل معادلات با ضرایب غیرثابت همچنان به قوت خود باقی‌مانده است. روش توابع پایه متعادل شده^۵ در ادامه این تحقیقات توسط نورمحمدی و برومند [۸] ارائه گردیده است و توانایی ارضای صورت همگن معادلات دیفرانسیل دارای ضرایب متغیر را به خوبی دارا می‌باشد. این روش به جای ارضای دقیق معادله دیفرانسیل به فرم قوی، از فرم انتگرال وزنی آن استفاده می‌کند که باعث عدم نیاز به وجود پایه‌های صدق‌کننده در معادله دیفرانسیل می‌شود. چنین منطقی گستره مسائل قابل حل را بسیار گسترده نموده و تشابه زیادی بین روابط روش برای معادلات مختلف به وجود می‌آورد. در ضمن

6 Singularity
7 Local Mesh-Free Method
8 Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH)
9 Kernel function
10 Reproducing Kernel Particle Method (RKPM)
11 Diffuse Element Method (DEM)
12 Element Free Galerkin (EFG)

1 Trefftz Method
2 Fundamental Solution
3 Boundary Element Method (BEM)
4 Exponential Basis Functions (EBFs)
5 Equilibrated Basis Functions (EqBFs)

شده که پیش‌تر در فضای دو بعدی در مرجع [۱] ارائه گشته است، تحقیق حاضر به توسعه آن برای تحلیل مسائل الاستیسیته در فضای سه بعدی می‌پردازد. این روش با گسسته‌سازی دامنه حل توسط تعدادی نقطه گره‌ای که محل تعریف درجات آزادی هستند و سپس تعریف زیرناحیه‌هایی تحت عنوان ابر متناظر با هر یک از نقاط مذکور که شامل تعدادی گره غیر از آن نیز هستند، اقدام به محلی‌سازی بازه حل به تعدادی مسئله جزئی می‌نماید. به واسطه برقراری شرایط پیوستگی زیرناحیه‌ها با یکدیگر ارتباط پیدا کرده و این ارتباط در سرتاسر ناحیه حل برقرار خواهد شد. جهت ارضای صورت همگن معادله دیفرانسیل از توسعه توابع پایه متعادل شده در فضای سه بعدی که قابلیت ارضای تقریبی معادله را دارند استفاده می‌شود. اعمال شرایط مرزی در گامی جداگانه و با در نظر گرفتن تعدادی نقطه پراکنده در مرزهای ناحیه که حاوی درجات آزادی نبوده و تنها محل تشکیل معادلات شرایط مرزی می‌باشند صورت می‌پذیرد. با این شیوه تحلیل مسائل در دامنه‌های غیرمکعبی بدون نگرانی از افت کیفیت پاسخ در اثر نامنظمی نقاط برطرف می‌شود. مثال‌های ارائه شده به خوبی بیانگر عملکرد موثر روش پیشنهادی هستند. به طور خلاصه می‌توان مهم‌ترین نوآوری‌های مقاله حاضر را نسبت به کارهای مرتبط پیشین همانند مراجع [۱۰ و ۸] در موارد زیر بیان نمود،

- نخستین ارائه فرمول‌بندی روش توابع پایه متعادل شده برای مسائل الاستواستاتیک سه بعدی
- توسعه روش به صورت بدون شبکه محلی، در حالی که کلیه کارهای قبلی به فرم مرزی بوده‌اند.
- تفکیک ماهیت نقاط دامنه (دارای درجه آزادی) و مرز (بدون درجه آزادی)، که به تعریف آسان‌تر مرزهای دلخواه، و نیز عدم آشفتگی شبکه نقاط گرهی و پیامدهای نامطلوب آن منجر می‌شود.

۲- توابع پایه متعادل شده در فضای سه بعدی

صورت کلی معادلات تعادل حاکم بر مسئله و شرایط مرزی آن مطابق با رابطه (۱) در نظر گرفته شده است،

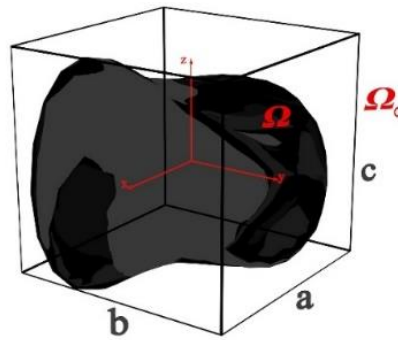
$$\mathbf{S}^T \mathbf{D} \mathbf{S} \mathbf{u} + \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad \text{in } \Omega \quad \mathbf{B}(\mathbf{u}) = \mathbf{f}_b \quad \text{on } \Gamma \quad (1)$$

در رابطه فوق بردار جابه‌جایی مسئله $\mathbf{u} = [u \quad v \quad w]^T$ برای مسائل الاستیسیته در فضای سه بعدی دارای سه مولفه است. \mathbf{S} عملگر کرنش، \mathbf{D} ماتریس ضرایب مادی و \mathbf{b} بردار نیروی بدنه است. مرز ناحیه اصلی رویه‌ای است که به دو بخش مرز دریشه (Γ_D) با جابه‌جایی معلوم و مرز نویمان

این روش امروزه نیز مورد توجه است و مسائل گوناگون با آن تحلیل می‌شود [۲۲]. روش‌های المان‌های پراکنده و بدون شبکه گالرکین صورت انتگرال وزنی معادله را روی کل دامنه در نظر می‌گیرند که موجب کاهش سرعت این روش‌ها به دلیل افزایش حجم عملیات انتگرال‌گیری عددی می‌شود. در سال ۱۹۹۸ روش بدون شبکه محلی پترو-گالرکین^۱ که انتگرال‌های ضعیف وزنی را در ناحیه کوچکی در اطراف نقاط دامنه در نظر می‌گیرد توسط آتلوری و همکارانش ارائه شد [۲۳]. در سال ۱۹۹۶ روش نقاط محدود آمبلی بر تقریب پاسخ به روش حداقل مربعات وزن‌دار و ارضای فرم قوی معادله دیفرانسیل توسط اونیاته و همکاران ارائه گردید [۲۴]. در سال ۲۰۰۹ برومند و همکاران روش نقاط محدود تعمیم یافته^۲ را برای حل مسئله الاستیسیته ارائه نمودند [۲۵]. استفاده از روش توابع پایه نمایی برای توسعه یک روش بدون شبکه محلی توسط مسیبی ارائه گردید [۷]. در این روش تقریب پاسخ معادله روی یک ابر شامل یک نقطه مرکزی و تعدادی نقاط در اطراف آن به وسیله سری پاسخ متشکل از پایه‌های نمایی محاسبه می‌شود. این روش توانایی ارضای دقیق معادله دیفرانسیل را به خوبی دارا می‌باشد، اما به نامنظمی نقاط درون شبکه بسیار حساس است. به منظور حل مشکل نامنظمی نقاط سلیمانی‌فر و همکاران با افزایش مرتبه پیوستگی بین نقاط دامنه و مرز، روش بدون شبکه مذکور را اصلاح نمودند و حساسیت آن را به نامنظمی شبکه نقاط از بین بردند [۲۶]. این ایده البته حجم عملیات لازم برای حل مسئله را بالا می‌برد. برای رفع مشکل شبکه نقاط نامنظم ایده دیگری توسط شجاعی و همکاران ارائه گردید [۲۷]. برای حل مسائل در محیط ناهمگن نورمحمدی و برومند در ابتدا با توسعه روش توابع پایه متعادل شده و پس از آن توسعه یک روش بدون شبکه محلی بر مبنای آن اقدام نمودند [۸ و ۱]. تفاوت اساسی روش توابع پایه متعادل شده با روش توابع نمایی در شیوه ارضای معادله دیفرانسیل است. توابع پایه نمایی صورت همگن معادله دیفرانسیل را به صورت دقیق ارضا می‌کنند و همین موضوع سبب محدودیت کاربرد آن‌ها به مواد همگن می‌شود، زیرا باید بتوانند ضرایب موجود در توان خود را متناسب با معادله دیفرانسیل تنظیم نمایند تا به قابلیت مذکور برسند. این در حالی است که توابع پایه متعادل شده از اعمال وزنی معادله دیفرانسیل بهره می‌برند، بنابراین محدودیتی در شکل عملگر معادله نداشته و می‌توانند مسائل محیط‌های ناهمگن را نیز حل کنند.

در ادامه تحقیقات مربوط به روش بدون شبکه محلی توابع پایه متعادل

- 1 Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG)
- 2 Finite Point Method (FPM)
- 3 Generalized Finite Point Method (GFPM)



شکل ۱. نواحی اصلی و تصویری حل و موقعیت مبدا مختصات.

Fig. 1. The main and the fictitious domains and the position of the origin of the coordinate system.

از این رو باید آن را به فرم انتگرال باقی مانده وزنی ارضا مطابق رابطه (۳) برآورد نمود [۱]،

$$\int_{\Omega} w_i S^T DS(f^T c) d\Omega = 0 \quad (3)$$

در این معادله w_i ماتریس قطری 3×3 در بردارنده تابع وزن w_i بوده و متناسب با ماتریس f_i آرایش می یابد. رابطه فوق به ازای هر مقدار از i سه سطر از دستگاه معادلات نهایی را برای برآورد ضرایب مجهول سری پاسخ تشکیل می دهد. محاسبه انتگرال (۳) روی ناحیه Ω با ظاهر دلخواه می تواند بسیار وقت گیر و مشکل زا باشد؛ در نتیجه محاسبات بر روی ناحیه مکعبی Ω_0 نشان داده شده در شکل ۱ به صورت رابطه (۴) صورت می گیرد [۱]،

$$\int_{\Omega} w_i S^T DS(f^T c) d\Omega = 0, \quad i = 1, \dots, M. \quad (4)$$

این روند با استفاده از کلیه توابع وزن، در نهایت به تشکیل دستگاه ماتریسی رابطه (۵) خواهد انجامید،

$$Ac = 0, \quad A = \int_{\Omega} w_i S^T DS f^T d\Omega. \quad (5)$$

در صورتی که بردار c عضو فضای پوچ ماتریس A باشد رابطه (۵) برقرار است. فضای پوچ ماتریس مذکور با φ نمایش داده می شود. ساختار ماتریس φ را می توان به صورت رابطه (۶) نمایش داد،

(Γ_N) با تنش های معلوم تقسیم می شود. بر این مبنا عملگر شرایط مرزی (B) متناسب با نوع آن دارای اشکال متفاوتی است. مسئله بر روی دامنه همبند Ω دارای مرز $\Gamma = \partial\Omega$ تعریف می شود (شکل ۱). حل بر روی یک دامنه سه بعدی Ω با شکل دلخواه به واسطه مشکلات برآورد انتگرال های حاصل می تواند بسیار وقت گیر و پرهزینه باشد. می توان با در نظر گرفتن ناحیه تصویری Ω_0 با شکل ساده تر که ناحیه Ω را به طور کامل در برگیرد، و ارضای تعادل در محدوده آن، این مشکل را مرتفع نمود.

واضح است که با ارضای صورت همگن معادله دیفرانسیل روی ناحیه بزرگتر Ω_0 روی هر زیرمجموعه ای از این ناحیه از جمله ناحیه Ω نیز ارضا خواهد شد. در حل مسائل به روش توابع پایه متعادل شده، ابتدا بخش همگن معادله دیفرانسیل از رابطه (۱) و با فرض صفر بودن نیروی بدنه (b) (به صورت سری زیر متشکل از توابع پایه اولیه و ضرایب مجهول آن ها در نظر گرفته می شود،

$$u_h \approx \hat{u}_h = \sum_{j=1}^N f_j c_j = f^T c, \quad f = \begin{bmatrix} f_1 & 0 & 0 & \dots & \dots & f_N & 0 & 0 \\ 0 & f_1 & 0 & \dots & \dots & 0 & f_N & 0 \\ 0 & 0 & f_1 & \dots & \dots & 0 & 0 & f_N \end{bmatrix}^T, \quad (2)$$

$$c = [c_1^1 \quad c_2^1 \quad c_3^1 \quad \dots \quad c_1^N \quad c_2^N \quad c_3^N]^T.$$

در رابطه فوق f_i ماتریس قطری 3×3 در بردارنده توابع پایه اولیه بوده و بردارهای c_i ضرایب مجهول آن ها هستند. N تعداد پایه های در نظر گرفته شده است. رابطه (۲) قادر به ارضای صورت همگن معادله نیست،

همین منظور از تبدیل‌های $\xi = 2x/a$ و $\eta = 2y/b$ و $\zeta = 2z/c$ در سه راستای متعامد استفاده می‌شود. بنابراین سری پاسخ همگن تقریبی مسئله به صورت رابطه (۹) خواهد بود،

$$\hat{\mathbf{u}}_h = \sum_{m=1}^{O_x} \sum_{n=1}^{O_y} \sum_{p=1}^{O_z} T_m(\xi) T_n(\eta) T_p(\zeta) \mathbf{I}c_{(m,n,p)} \quad (9)$$

در عبارت فوق O_x ، O_y ، و O_z بالاترین درجات چند جمله‌ای مورد استفاده به ترتیب در راستاهای x ، y و z هستند. وجود ماتریس همانی \mathbf{I} نیز به دلیل هماهنگی بین سری پاسخ و میادین جابه‌جایی مسئله است. به این ترتیب کلیه عملیات محاسبه انتگرال‌های وزنی معرفی شده در روابط قبل در یک ناحیه هم‌پایه شده صورت خواهد گرفت که این موضوع باعث کاهش هزینه محاسبات می‌شود.

با استناد به تجارب مرجع [۱] از توابع نمایی جهت وزن‌دهی در انتگرال رابطه (۳) استفاده می‌شود که این امر موجب تناسب با پایه‌های انتخاب شده می‌گردد. بر اساس تجربیات این تحقیق، استفاده از فرم قوی وزنی کاستی‌هایی در روند حل مسئله دارد. به همین جهت استفاده از فرم ضعیف وزنی شالوده اصلی کار را تشکیل می‌دهد. وزن‌های متناسب با فرم ضعیف وزنی در رابطه (۱۰) آورده شده‌اند،

$$w_i = w_{(k,l,q)} = (1 - \xi^2)(1 - \eta^2) \times (1 - \zeta^2) e^{-W(\xi - \xi_i)} e^{-W(\eta - \eta_k)} e^{-W(\zeta - \zeta_q)} \quad (10)$$

دلیل انتخاب این تابع به عنوان وزن در نوع فرمول‌بندی روش نهفته است. با توجه به رابطه (۱۲) که در ادامه خواهد آمد، استفاده از تکنیک انتگرال‌گیری جزء‌به‌جزء منجر به بروز یک بخش انتگرال مرزی می‌شود که برآورد آن می‌تواند دردسرساز باشد. با توجه به آن که انتگرال‌گیری روی ناحیه تصویری مکعبی و مرزهای آن انجام می‌شود، بخش چند جمله‌ای رابطه فوق منجر به صفر شدن تابع درون انتگرال مرزی در امتداد مرزها و در نتیجه حذف بی‌دردسر این بخش می‌شود. بخش نمایی رابطه (۱۰) هم وظیفه توسعه مناسب وزن در فضای مختصات را دارد، به طوری که بیشترین وزن‌دهی در نقطه وزنی بوده و با دور شدن از آن کاهش یابد. پارامتر وزنی W در رابطه بالا تنظیم‌کننده میزان تیزی تابع وزن است و وظیفه حفظ استقلال توابع وزن از یکدیگر و در عین حال، پوشش مناسب ناحیه مجازی توسط آن‌ها را دارد. بر اساس تجارب تحقیق حاضر، این پارامتر برای مراتب پایین تقریب (که مورد نظر این روش نیز می‌باشد) می‌تواند مقدار ثابت ۳۰ را داشته باشد. برای توضیحات بیشتر در موارد مشابه به مرجع [۸] مراجعه

$$\boldsymbol{\varphi} = [\boldsymbol{\varphi}_1 \dots \boldsymbol{\varphi}_{\bar{M}}] \quad (6)$$

در رابطه (۶) عبارت $\boldsymbol{\varphi}_r$ ستون r ام از فضای پوچ ماتریس ضرایب (A) بوده و \bar{M} تعداد ستون‌های مذکور است که در عین حال، معادل با اختلاف تعداد ستون‌ها و سطرهای ماتریس \mathbf{A} نیز می‌باشد ($\bar{M} = 3N - 3M$). با جایگزینی رابطه (۶) در رابطه (۲) پایه‌های جدید تحت عنوان پایه‌های متعادل شده به صورت رابطه (۷) ساخته می‌شوند [۹]،

$$\mathbf{F}_r = \mathbf{f}^T \boldsymbol{\varphi}_r, \quad r = 1, \dots, \bar{M}. \quad (7)$$

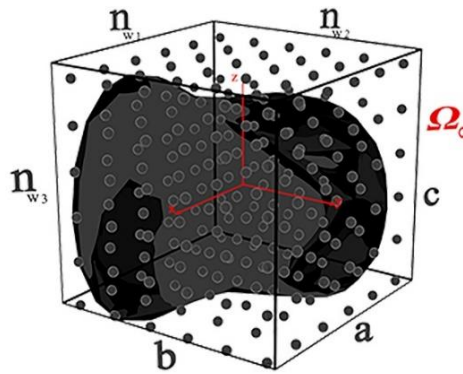
بنابراین ماتریس \mathbf{F}_r دارای بعد 3×1 است که هر سطر متناسب با یک راستای جابه‌جایی می‌باشد. پایه‌های جدید توانایی ارضای تقریبی صورت همگن معادله دیفرانسیل را دارند. در نهایت رابطه (۲) به (۸) تغییر می‌کند [۹]،

$$\hat{\mathbf{u}}_h = \sum_{r=1}^{\bar{M}} \mathbf{f}^T \boldsymbol{\varphi}_r d_r = \mathbf{f}^T \boldsymbol{\varphi} \mathbf{d} \quad (8)$$

ضرایب مجهول d_r مجهولات جدیدی هستند که باید با اعمال شرایط مرزی به دست آیند. این ضرایب در بردار \mathbf{d} مرتب شده‌اند. سری پاسخ جایگزین قابلیت ارضای تقریبی صورت همگن معادله را دارد. جهت دستیابی به پاسخ مناسب، توابع پایه و وزن باید به طور مناسب انتخاب شوند. با توجه به تجربیات تحقیق، استفاده از چند جمله‌ای‌های چبی شف نوع اول به عنوان پایه‌های اولیه حل می‌تواند به نتایج مطلوبی منجر شود. مهم‌ترین خصوصیات این توابع که به انتخاب آن‌ها به عنوان توابع پایه اولیه انجامیده است را می‌توان در موارد زیر بیان نمود،

- خاصیت کامل بودن چند جمله‌ای‌های چبی شف، که قابلیت ساخت انواع پاسخ‌های هموار را به ترکیب آن‌ها می‌دهد.
- خاصیت چند جمله‌ای بودن آن‌ها، به تسهیل عملیات انتگرال‌گیری و نیز گستردگی محدوده توابع وزن قابل استفاده در رابطه (۴) می‌انجامد.
- ارتباط چند جمله‌ای چبی شف نوع اول مرتبه m ام با بسط فوریه به صورت $T_n(x) = \cos^{-1}(\cos nx)$ ، به همگرایی مطمئن و سریع پاسخ تقریبی ساخته شده با آن‌ها منجر می‌شود.

با توجه به بازه تعریف چند جمله‌ای‌های چبی شف که به بازه $[-1, +1]$ محدود می‌شود، ابتدا باید ناحیه تصویری در سه راستا نرمال‌سازی شود. به



شکل ۲. شبکه نقاط وزن مورد استفاده برای ساخت توابع وزن نمایی.

Fig. 2. The weight point grid used to construct the exponential weight functions.

در این رابطه ماتریس دربردارنده مولفه‌های بردار یکه عمود بر مرز ناحیه متناسب با عملگر معادله دیفرانسیل است و عملکرد آن، تصویر نمودن مولفه‌های تنش در راستای عمود و مماس بر مرز می‌باشد. با دقت در صورت رابطه (۱۲) به دلیل در نظر گرفتن توابع وزن مناسب در رابطه (۱۰) به طوری که مقدار آن‌ها روی مرزهای ناحیه تصویری برابر با صفر است، می‌توان انتگرال مرزی را مساوی صفر قرار داد که باعث تسهیل روند حل شود. عملگر ماتریسی موجود در دستگاه معادلات دیفرانسیل در مسائل الاستیسیته به صورت رابطه (۱۳) است،

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 & \partial/\partial y & 0 & \partial/\partial z \\ 0 & \partial/\partial y & 0 & \partial/\partial x & \partial/\partial z & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial z & 0 & \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix}^T. \quad (13)$$

ماتریس ضرایب مادی نیز با فرض همسانگرد بودن ماده، به صورت رابطه (۱۴) قابل بیان است،

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} D_r & D_r & D_r & \cdot & \cdot & \cdot \\ D_r & D_r & D_r & \cdot & \cdot & \cdot \\ D_r & D_r & D_r & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & D_r & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & D_r & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & D_r \end{bmatrix}. \quad (14)$$

با قرار دادن روابط (۱۳) و (۱۴) در معادله (۱) ساختار نهایی مسئله الاستیسیته در فضای سه بعدی برای مواد همگن به شکل رابطه (۱۵) است.

شود. تابع وزن رابطه (۱۰) دارای مرکزی به مختصات $[\xi_k, \eta_l, \zeta_q]$ در فضای مختصات نرمال شده است. در حالتی که نقاط مذکور مطابق شکل ۲ به صورت منظم در کنار هم چیده شوند، با ترکیب سطر و ستون و ارتفاع در مختصات سه بعدی می‌توان توابع وزن متناسب با هر نقطه را ساخت.

رابطه (۱۰) را می‌توان به حاصل ضرب سه تابع یک متغیره مستقل در راستاهای x و y و z تجزیه کرد. این مسئله به تفکیک انتگرال نهایی کمک می‌کند. همانطور که در شکل ۲ نشان داده شده است تعداد ردیف‌های نقاط وزنی در سه راستای x و y و z به ترتیب برابر n_{w1} و n_{w2} و n_{w3} است. هر یک از نقاط وزن در ضمن یک ارتباط اندیسی برای تعریف یکی از توابع وزن مطابق (۱۱) قرار می‌گیرند،

$$\begin{aligned} i &= i(k, l, q), \\ k &= 1, \dots, n_{w1}, \\ l &= 1, \dots, n_{w2}, \\ q &= 1, \dots, n_{w3} \end{aligned} \quad (11)$$

در شکل ضعیف وزنی روش با استفاده از تکنیک انتگرال گیری جزء به جزء و تجزیه عملگر معادله، صورت اصلی انتگرال وزنی رابطه (۴) را می‌توان به صورت رابطه (۱۲) به مجموع دو بخش انتگرال روی دامنه و انتگرال روی مرز تفکیک کرد [۱]،

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_0} \mathbf{wS}^T \mathbf{D} \mathbf{S} (\mathbf{f}^T \mathbf{c}) d\Omega_0 = \\ \left(- \int_{\Omega_0} [(\mathbf{S}\mathbf{w})^T \mathbf{D} (\mathbf{S}\mathbf{f}^T)] d\Omega_0 + \right. \\ \left. \int_{\Gamma_0} \mathbf{w}\mathbf{n}\mathbf{D}\mathbf{S}\mathbf{f}^T d\Gamma_0 \right) \mathbf{c}. \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{bmatrix} D_x \frac{\partial^r}{\partial x^r} + D_r \left(\frac{\partial^r}{\partial y^r} + \frac{\partial^r}{\partial z^r} \right) & (D_r + D_r) \frac{\partial^r}{\partial x \partial y} & (D_r + D_r) \frac{\partial^r}{\partial x \partial z} \\ (D_r + D_r) \frac{\partial^r}{\partial x \partial y} & D_x \frac{\partial^r}{\partial y^r} + D_r \left(\frac{\partial^r}{\partial x^r} + \frac{\partial^r}{\partial z^r} \right) & (D_r + D_r) \frac{\partial^r}{\partial y \partial z} \\ (D_r + D_r) \frac{\partial^r}{\partial x \partial z} & (D_r + D_r) \frac{\partial^r}{\partial y \partial z} & D_x \frac{\partial^r}{\partial z^r} + D_r \left(\frac{\partial^r}{\partial x^r} + \frac{\partial^r}{\partial y^r} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}. \quad (15)$$

$$G_r^{k,m} = \frac{-\gamma}{I_k} \int_{-1}^1 (W \xi_k (1-\xi^r) + W \xi^r - (1+W) \xi) \times e^{-W(\xi-\xi_k)^r} \frac{\partial T_m(\xi)}{\partial \xi} d\xi,$$

$$G_r^{k,m} = \frac{-\gamma}{I_k} \int_{-1}^1 (W \xi_k (1-\xi^r) + W \xi^r - (1+W) \xi) \times e^{-W(\xi-\xi_k)^r} T_m(\xi) d\xi, \quad (19)$$

$$G_r^{k,m} = \frac{1}{I_k} \int_{-1}^1 (1-\xi^r) e^{-W(\xi-\xi_k)^r} \frac{\partial T_m(\xi)}{\partial \xi} d\xi.$$

$$G_i^{k,m} = \frac{1}{I_k} \int_{-1}^1 (1-\xi^r) e^{-W(\xi-\xi_k)^r} T_m(\xi) d\xi.$$

I_k پارامتر هم‌پایه‌ساز برای توزیع یکنواخت وزن دهی توسط توابع وزن

در بازه انتگرال‌گیری به صورت رابطه (۲۰) بیان شده است،

$$I_k = \int_{-1}^1 e^{-W(\xi-\xi_k)^r} d\xi. \quad (20)$$

برای بازسازی عملگر معادله دیفرانسیل حاکم و حفظ سازگاری ابعادی

بین متغیرهای اصلی و تبدیل‌یافته، انتگرال‌های رابطه (۱۹) در ماتریس‌های

رابطه (۲۱) قرار داده می‌شوند. توجه شود که ماتریس‌هایی با اندیس دوگانه و

سه‌گانه صرفاً از نظر جانمایی درایه دوم با ماتریس اصلی تفاوت دارند که این

موضوع جهت ساختن مولفه‌های مختلف دستگاه معادله (۱۵) است،

عملگر شرایط مرزی برای مرز درিশله با جابه‌جایی معلوم و نویمان با

تنش سطحی معلوم به صورت رابطه (۱۶) بیان می‌شود،

$$\mathbf{B} = \begin{cases} \mathbf{I} & \text{Dirichlet BCs} \\ \mathbf{n}^T \mathbf{DS} & \text{Neumann BCs} \end{cases}. \quad (16)$$

در رابطه فوق \mathbf{I} ماتریس همانی به بعد ۳ است. ماتریس \mathbf{n} اجزای بردار

یکه عمود بر مرز متناسب با عملگر معادله دیفرانسیل (S) را در خود دارد که

به صورت رابطه (۱۷) قابل بیان است.

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} n_x & 0 & 0 & n_y & 0 & n_z \\ 0 & n_y & 0 & n_x & n_z & 0 \\ 0 & 0 & n_z & 0 & n_y & n_x \end{bmatrix}. \quad (17)$$

با الهام از مرجع [۱] جهت تشکیل شبکه نقاط وزنی برای حل مسائل

الاستیسیته می‌توان از روابط ساده (۱۸) استفاده کرد،

$$\begin{aligned} n_{w,2} &= O_x - 1 \\ n_{w,1} &= O_y - 1 \\ n_{w,3} &= O_z - 1 \end{aligned} \quad (18)$$

با این تعاریف انتگرال کلی درون ناحیه ترکیبی از انتگرال‌های یک بعدی

رابطه (۱۹) خواهد بود،

سه اندیسی \mathbf{A} و \mathbf{B} به ترتیب عبارت $[\mathbf{A}]_k$ و $[\mathbf{B}]_l$ معادل با کلیه درایه‌هایی از این ماتریس‌ها است که اندیس نخست آن‌ها به ترتیب برابر k و l باشد. همچنین ضریب (C_i) در رابطه فوق مربوط به انتگرال در راستای Z است که دارای دو اندیس موقعیت نقطه وزنی در راستای Z و مرتبه تابع پایه اولیه می‌باشد. با قرار دادن دسته‌های سه‌تایی سطرهای ماتریس فوق به ترتیب در کنار یکدیگر می‌توان بخشی از سه سطر از ماتریس ضرایب نهایی (\mathbf{A}) را متناسب با نقطه وزنی در موقعیت مختصات (l, k, q) که مربوط به مرتبه پایه در راستای Z برابر با r است تشکیل داد. به منظور تشخیص ارتباط حروف ذکر شده، به اندیس‌های رابطه (۲۳) توجه شود. تکرار این روند به ازای کلیه مراتب r از ۰ تا O_z منجر به تکمیل سه سطر مذکور از ماتریس ضرایب نهایی مربوط به نقطه وزن مشخص شده می‌گردد. شکل زیر بصورت شماتیک، نحوه تشکیل سه سطر ماتریس \mathbf{A} از درایه‌های ماتریس \mathbf{A}_h را نشان می‌دهد،

با ادامه این روند روی کلیه نقاط شبکه وزن، ماتریس ضرایب نهایی تکمیل می‌شود. پس از محاسبه فضای پوچ این ماتریس، سری پاسخ همگن تقریبی مسئله با استفاده از توابع پایه متعادل شده طبق رابطه (۸) ساخته خواهد شد.

جهت برآورد حل خصوصی معادله (\mathbf{u}_p) ابتدا سری پاسخ خصوصی تقریبی مشابه با رابطه (۲) در نظر گرفته می‌شود. به دلیل عدم ارضای عملگر معادله، پایه‌های حل همگن و حل خصوصی می‌توانند مشابه یکدیگر باشند. با در نظر گرفتن تعدادی نقطه روی دامنه اصلی حل و مرزهای آن و نیز با داشتن تابع بارگذاری مسئله (\mathbf{b}) ، به واسطه برقراری رابطه (۱) در کلیه نقاط مذکور می‌توان پاسخ خصوصی مسئله (\mathbf{u}_p) را برآورد نمود. حاصل این کار یک معادله ماتریسی است که با حل آن در ضمن عملیات تقریب حداقل مربعات، اقدام به برآورد ضرایب مجهول سری پاسخ حل خصوصی می‌گردد. ساختار مرزی روش به صورتی که در بالا شرح داده شده در قالب بدون شبکه محلی که در ادامه می‌آید استفاده خواهد گردید.

۳- روش بدون شبکه محلی توابع پایه متعادل شده^۱

روش پیشنهادی با فرض یک دستگاه معادلات دیفرانسیل با عملگر خطی \mathbf{L} و شرایط مرزی متناظر آن روی ناحیه سه بعدی همبند Ω دارای مرز $\Gamma = \partial\Omega$ ارائه می‌شود. همانند قبل مرز ناحیه به دو بخش درিশله و نویمان تقسیم می‌شود که هیچ اشتراکی با یکدیگر نداشته و اجتماع این

$$\begin{aligned} (A_{i,j})_{k,r,m+1} &= (A_{i,j})_{k,r,m+2} = (A_{i,j})_{k,r,m+3} = \frac{\gamma}{a} G_{i,j}^{k,m}, \\ (A_{i,j})_{k,r,m+1} &= (A_{i,j})_{k,r,m+2} = (A_{i,j})_{k,r,m+3} = G_{i,j}^{k,m}, \\ (A_{i,j})_{k,r,m+1} &= (A_{i,j})_{k,r,m+2} = (A_{i,j})_{k,r,m+3} = G_{i,j}^{k,m}, \\ (A_{i,j})_{k,r,m+1} &= (A_{i,j})_{k,r,m+2} = (A_{i,j})_{k,r,m+3} = \frac{a}{\gamma} G_{i,j}^{k,m}, \\ (B_{i,j})_{l,r,n+1} &= (B_{i,j})_{l,r,n+2} = (B_{i,j})_{l,r,n+3} = \frac{\gamma}{b} G_{i,j}^{l,n}, \\ (B_{i,j})_{l,r,n+1} &= (B_{i,j})_{l,r,n+2} = (B_{i,j})_{l,r,n+3} = G_{i,j}^{l,n}, \\ (B_{i,j})_{l,r,n+1} &= (B_{i,j})_{l,r,n+2} = (B_{i,j})_{l,r,n+3} = G_{i,j}^{l,n}, \\ (B_{i,j})_{l,r,n+1} &= (B_{i,j})_{l,r,n+2} = (B_{i,j})_{l,r,n+3} = \frac{b}{\gamma} G_{i,j}^{l,n}, \\ (C_{i,j})_{q,r+1} &= \frac{\gamma}{c} G_{i,j}^{q,r}, \quad (C_{i,j})_{q,r+1} = G_{i,j}^{q,r}, \\ (C_{i,j})_{q,r+1} &= G_{i,j}^{q,r}, \quad (C_{i,j})_{q,r+1} = \frac{c}{\gamma} G_{i,j}^{q,r}. \end{aligned} \quad (21)$$

ضرایب a/γ و b/γ و c/γ سازگار کننده ابعادی هستند. یادآوری می‌شود که پارامترهای a و b و c ابعاد ناحیه تصویری هستند که انتگرال اصلی در محدوده آن برآورد می‌شود. حدود تغییرات اندیس‌های عبارات فوق به قرار رابطه (۲۲) است،

$$\begin{aligned} k &= 1, \dots, n_{w2}, \quad m = 0, 1, \dots, O_x, \\ l &= 1, \dots, n_{w1}, \quad n = 0, 1, \dots, O_y, \\ q &= 1, \dots, n_{w3}, \quad r = 0, 1, \dots, O_z. \end{aligned} \quad (22)$$

اکنون عملگر معادله دیفرانسیل با استفاده از ماتریس کمکی رابطه (۲۳) بازسازی می‌شود،

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_h &= (C_{i,j})_{q,r+1} \left\{ D_{i,j} \left((\mathbf{B}_{i,j})_l (\mathbf{A}_{i,j})_k^T + (\mathbf{B}_{i,j})_l (\mathbf{A}_{i,j})_k^T \right) + \right. \\ & D_{i,j} (\mathbf{B}_{i,j})_l (\mathbf{A}_{i,j})_k^T \left. \right\} + (C_{i,j})_{q,r+1} \left\{ D_{i,j} \left((\mathbf{B}_{i,j})_l (\mathbf{A}_{i,j})_k^T + \right. \right. \\ & (\mathbf{B}_{i,j})_l (\mathbf{A}_{i,j})_k^T \left. \right\} + D_{i,j} \left((\mathbf{B}_{i,j})_l (\mathbf{A}_{i,j})_k^T + (\mathbf{B}_{i,j})_l (\mathbf{A}_{i,j})_k^T \right) \left. \right\} + \\ & (C_{i,j})_{q,r+1} \left\{ D_{i,j} \left((\mathbf{B}_{i,j})_l (\mathbf{A}_{i,j})_k^T + (\mathbf{B}_{i,j})_l (\mathbf{A}_{i,j})_k^T \right) + \right. \\ & D_{i,j} \left((\mathbf{B}_{i,j})_l (\mathbf{A}_{i,j})_k^T + (\mathbf{B}_{i,j})_l (\mathbf{A}_{i,j})_k^T \right) \left. \right\} + \\ & (C_{i,j})_{q,r+1} \left\{ D_{i,j} \left((\mathbf{B}_{i,j})_l (\mathbf{A}_{i,j})_k^T + (\mathbf{B}_{i,j})_l (\mathbf{A}_{i,j})_k^T \right) + \right. \\ & D_{i,j} \left((\mathbf{B}_{i,j})_l (\mathbf{A}_{i,j})_k^T + (\mathbf{B}_{i,j})_l (\mathbf{A}_{i,j})_k^T \right) \left. \right\} + \\ & D_{i,j} \left((\mathbf{B}_{i,j})_l (\mathbf{A}_{i,j})_k^T + (\mathbf{B}_{i,j})_l (\mathbf{A}_{i,j})_k^T \right) \left. \right\}. \end{aligned} \quad (23)$$

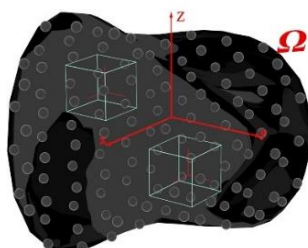
در رابطه فوق برای سادگی نوشتار فرض می‌شود که برای ماتریس‌های

1 Meshless Local Equilibrated Basis Functions (MLE-qBFs)

$$\mathbf{A}_h = \begin{bmatrix} \Delta & \Delta & \triangleleft & \triangleleft \\ \Delta & \Delta & \triangleleft & \triangleleft \\ \Delta & \Delta & \triangleleft & \triangleleft \\ \square & \square & \circ & \circ \\ \square & \square & \circ & \circ \\ \square & \square & \circ & \circ \end{bmatrix} \rightarrow \text{part of 3 rows of } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \Delta & \Delta & \triangleleft & \triangleleft & \square & \square & \circ & \circ \\ \Delta & \Delta & \triangleleft & \triangleleft & \square & \square & \circ & \circ \\ \Delta & \Delta & \triangleleft & \triangleleft & \square & \square & \circ & \circ \end{bmatrix}$$

شکل ۳. شمای کلی نحوه تشکیل سه سطر ماتریس \mathbf{A} از درآیه‌های ماتریس \mathbf{A}_h .

Fig. 3. The general scheme of how to create three rows of \mathbf{A} from the elements of \mathbf{A}_h .



شکل ۴. گسسته‌سازی دامنه حل با استفاده از شبکه نقاط و ابرهای متناظر با آن‌ها.

Fig. 4. Discretization of the solution domain using the nodal point grid and their corresponding clouds.

منظم در سرتاسر ناحیه حل پراکنده می‌شود، به طوری که هیچ گره‌ای خارج از ناحیه نباشد. علت توصیه به داشتن شبکه یکنواخت به تجارب محققین برمی‌گردد. نامنظمی شبکه با توجه به فرمول‌بندی انتخابی، به عدم تطابق مناسب بسط‌های تقریب مورد استفاده با شبکه نقاط می‌انجامد، به طوری که مقادیر گره‌ای نمی‌توانند به خوبی جایگزین ضرایب مجهول بسط پاسخ باشند. برای مشاهده تجربه‌ای در این خصوص به شکل ۱۴ در مثال ۲ مراجعه شود.

گره‌ها محل تعریف درجات آزادی مسئله در قالب مولفه‌های سه‌گانه جابه‌جایی هستند. پس از آن به مرکزیت هر گره یک ناحیه تحت عنوان ابر در نظر گرفته می‌شود که درون آن علاوه بر گره مذکور، حداقل یک گره دیگر از مجموعه کل نقاط وجود دارد (شکل ۴). در این صورت ابرها با یکدیگر همپوشانی دارند که موجب پیوستگی جواب مسئله در سرتاسر دامنه حل می‌شود. هندسه ابرها به صورت مکعبی در نظر گرفته می‌شوند که محل برخورد قطرهای این مکعب واقع بر گره مرکزی ابر باشد. در نهایت باید پایه‌های حل مسئله با توجه به محدوده و ابعاد ابر مشخص شده توسعه یابند. جهت برآورد حل خصوصی در محدوده هر ابر ابتدا با استفاده از سری

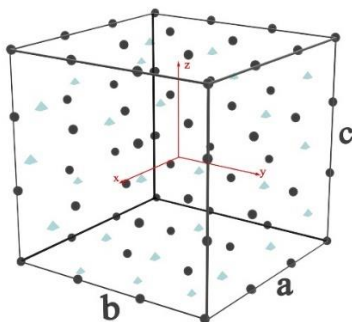
دو تمام مرز ناحیه اصلی را تشکیل می‌دهد. عملگر شرایط مرزی بر اساس شرایط دریشله و نویمان به صورت \mathbf{B}_D و مرز نویمان \mathbf{B}_N در رابطه (۲۴) نشان داده می‌شود.

$$\begin{aligned} \mathbf{L}(\mathbf{u}) + \mathbf{b} &= \mathbf{0} \quad \text{in } \Omega, \\ \mathbf{B}(\mathbf{u}) &= \mathbf{f}_b \quad \text{on} \\ \Gamma &= \Gamma_D \cup \Gamma_N \quad \& \quad \Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset \end{aligned} \quad (24)$$

روند کلی حل مسئله، تقسیم پاسخ به دو بخش همگن و خصوصی همگام با تشخیص بخش‌های جداگانه مرز به صورت رابطه (۲۵) خواهد بود،

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{u}_h + \mathbf{u}_p, \quad \mathbf{L}(\mathbf{u}_h) = 0, \\ \mathbf{L}(\mathbf{u}_p) + \mathbf{b} &= \mathbf{0} \quad \text{in } \Omega, \\ \mathbf{B}_D(\mathbf{u}) &= \mathbf{f}_b^D \quad \text{on } \Gamma_D, \\ \mathbf{B}_N(\mathbf{u}) &= \mathbf{f}_b^N \quad \text{on } \Gamma_N. \end{aligned} \quad (25)$$

به منظور گسسته‌سازی مسئله تعدادی گره در یک شبکه متعامد کاملاً



شکل ۵. نمایی از یک ابر و گره‌های آن (نقاط هرمی) در کنار شبکه نقاط فرضی برای برآورد حل خصوصی (نقاط کروی).

Fig. 5. A view of a cloud and its nodes (pyramids) and the hypothetical points for the particular solution (spheres)

در واقع، سهم بخش همگن پاسخ مسئله را از مقادیر گرهی محاسبه می‌کند،

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_E^{h,i} &= \mathbf{f}_i^E \boldsymbol{\varphi}_i \mathbf{d}_i = \boldsymbol{\Psi}_E^{h,i} \mathbf{d}_i, \\ \mathbf{U}_i^{h,i} &= \left[\mathbf{u}_h |_{x_1} \dots \mathbf{u}_h |_{x_{N_i^E}} \right], \\ \mathbf{f}_i^E &= \left[\mathbf{f}_i |_{x_1} \dots \mathbf{f}_i |_{x_{N_i^E}} \right]. \end{aligned} \quad (27)$$

در رابطه (۲۷) تعداد نقاط ابر به غیر از نقطه مرکزی با استفاده N_i^E نشان داده می‌شود که E بیانگر درجات آزادی غیرمرکزی ابر است. با معکوس کردن رابطه (۲۷) می‌توان ارتباط بین ضرایب مجهول سری تقریبی پاسخ همگن را با سهم بخش همگن از درجات آزادی غیرمرکزی درون ابر به دست آورد، که به صورت رابطه (۲۸) قابل بیان است.

$$\mathbf{d}_i = \left(\boldsymbol{\Psi}_E^{h,i} \right)^+ \mathbf{U}_E^{h,i}. \quad (28)$$

در رابطه فوق علامت + بیانگر وارون تعمیم‌یافته مور-پنروز است. استفاده از بسط‌های گسترده در سرتاسر دامنه حل، منجر به بدرفتاری و بالا بودن عدد شرط ماتریس درون پراتنز در رابطه بالا می‌گردد. بنابراین استفاده از وارون معمولی می‌تواند توام با خطاهای عددی بزرگ باشد. همین مسئله، دلیل استفاده از وارون تعمیم‌یافته مور-پنروز در رابطه بالا است که به بدرفتاری ماتریس حساس نیست. لازم به ذکر است با جایگذاری رابطه (۲۸) در (۲۶) سری پاسخ همگن مسئله در محدوده هر ابر بر اساس مقادیر درجات آزادی گره‌های غیرمرکزی ابر به دست می‌آید. حال با برآورد این پاسخ در گره مرکزی ابر با مختصات \mathbf{x}_c رابطه (۲۹) حاصل می‌شود که در

متناهی چند جمله‌ای‌های چپی شف نوع اول و برازش آن روی تعدادی نقطه در محدوده هر ابر، ضرایب مجهول سری تقریب زده شده و پاسخ خصوصی تشکیل می‌شود، (شکل ۵). لازم به ذکر است که این نقاط ارتباطی با گره‌های ابر ندارند. بخش خصوصی صرفاً وظیفه بازسازی تابع بارگذاری در محدوده ابر را دارد، حال آنکه بخش همگن وظیفه اعمال شرایط مرزی و نیز برقراری پیوستگی مناسب بین مقادیر درجات آزادی را بین گره‌های در نظر گرفته شده بر عهده دارد. پایه‌های متعادل شده نیز صورت همگن معادله را ارضا می‌نمایند.

حل مسئله در دو بخش حل همگن (h) و حل خصوصی (p) به صورت رابطه (۲۶) بیان می‌شود،

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_h^i &\approx \hat{\mathbf{u}}_h^i = \mathbf{F}_i \mathbf{d}_i = \mathbf{f}_i^T \boldsymbol{\varphi}_i \mathbf{d}_i, \\ \mathbf{u}_p^i &\approx \hat{\mathbf{u}}_p^i = \mathbf{f}_p^i \mathbf{c}_p^i. \end{aligned} \quad (26)$$

در رابطه فوق اندیس i نشان دهنده اختصاص حل همگن یا خصوصی به محدوده ابر با مرکزیت گره i ام (که تحت عنوان ابر i ام شناخته می‌شود) است. با تشکیل یک ناحیه مکعبی تصویری محیط بر ابر و تقریب تابع با استفاده از درجات پیشینه منتخب در سه راستای x, y, z به صورت O_x^i و O_y^i می‌توان توابع پایه متعادل شده را به صورتی که در بخش قبل توضیح داده شد در محدوده ابر تشکیل داد. ابتدا لازم است تا ارتباطی میان مقادیر درجات آزادی نقاط دامنه با ضرایب مجهول مسئله در محدوده ابر (\mathbf{d}_i) برقرار شود. از این رو بخش همگن پاسخ روی کلیه نقاط ابر به جز نقطه مرکزی آن برآورد می‌شود تا ارتباط بین ضرایب مجهول سری پاسخ با درجات آزادی مذکور به وجود آید. این کار منجر به رابطه (۲۷) می‌شود که

غیرمرکزی ابر در تعداد درجات آزادی هر گره است و تعداد ستون‌های آن معادل با تعداد پایه‌های متعادل شده حاصل از تقریب بخش همگن پاسخ معادله می‌باشد. مورد اخیر همچنین برابر با مرتبه فضای پوچ مربوط به هر ابر است. با توجه به توضیحات ارائه شده در مسائل الاستیسیته تعداد نقاط گره‌ای غیرمرکزی هر ابر با استفاده از رابطه (۳۲) به دست می‌آید،

$$n_E = 6O_{\max}^i + 2 \quad (32)$$

در رابطه فوق O_{\max} درجه بیشینه تقریب در راستاهای سه‌گانه است که معمولاً برابر با یکدیگر اختیار می‌شوند. با استفاده از رابطه فوق ساختار ماتریس $\Phi_E^{h,i}$ مربعی می‌شود. با توجه به تجربیات به دست آمده در ضمن تحقیق برای تعیین پارامترهای حل در محدوده هر ابر و برای هر سه راستا، درجه تقریب برابر با ۴ در نظر گرفته شده است. در این صورت با توجه به رابطه (۳۲) تعداد نقاط غیرمرکزی هر ابر در مسائل الاستیسیته برابر ۹۸ خواهد بود که برحسب این مقدار تعداد درجات آزادی در هر ابر به دلیل دارا بودن سه مولفه جابه‌جایی در مسائل الاستیسیته سه بعدی به مقدار ۲۹۴ خواهد رسید. نسبت ابعاد ناحیه مکعبی مجازی برای کلیه گره‌ها برابر واحد در نظر گرفته می‌شود، حتی اگر گره‌های درون ابر به واسطه به هم ریختگی (مثلاً در نزدیکی مرز) به طور یکنواخت در محدوده آن توزیع نشوند. به عبارت دیگر مکعب تصویری مورد استفاده برای هر ابر معادل با کوچک‌ترین مکعب مربعی است که محل تقاطع قطرهای آن بر گره مرکزی ابر واقع بوده و در عین حال کلیه گره‌های آن ابر را در خود جای دهد.

جهت اعمال شرایط مرزی از ایده‌ای استفاده شده است که توانایی اعمال برای هندسه دلخواه در فضای سه بعدی را دارا باشد. اساس روش به گونه‌ای است که علاوه بر شبکه متعام منظم از نقاط گرهی که درون ناحیه مورد بررسی قرار می‌گیرند، مجموعه دیگری از نقاط در سرتاسر مرزهای ناحیه حل مسئله تحت عنوان نقاط مرزی نیز در نظر گرفته شوند. نقاط درون دامنه و نقاط مرزی هیچ‌گونه ارتباطی با یکدیگر ندارند، به گونه‌ای که نیازی به ایجاد شرط پیوستگی یا ارتباط بین گرهی برای نقاط مرزی نیست. هر یک از نقاط مرز دارای مختصات $\mathbf{x}_B = (x_B, y_B, z_B)$ هستند. با پیدا کردن نزدیک‌ترین گره اصلی به نقطه مرزی مورد نظر، جهت اعمال شرایط مرزی از مشخصات ابر مربوط به آن نقطه گره‌ای استفاده شده و شرایط اعم از درিশله یا نویمان با عملگر متناسب آن اعمال می‌شود. در شکل ۶ نمایی از نقاط گرهی و نقاط مرزی برای یک مکعب نشان داده شده است.

جهت اعمال شرایط مرزی دریشله، مختصات نقطه مرزی مورد بررسی

واقع عامل ایجاد پیوستگی بین گره‌های درون ابر و به تبع آن کلیه گره‌های توزیع شده در ناحیه است،

$$\mathbf{u}_h^i \Big|_{x_c} = \mathbf{U}_C^{h,i} = \mathbf{f}_i^T \Big|_{x_c} \Phi_i \left(\Psi_E^{h,i} \right)^+ \mathbf{U}_E^{h,j} \quad (29)$$

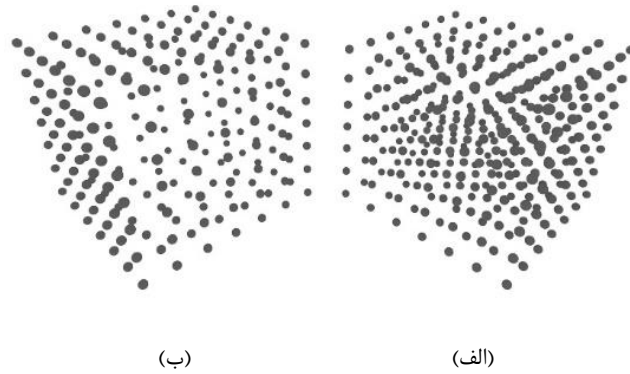
در رابطه فوق بردار $\mathbf{U}_C^{h,i}$ برابر با سهم بخش همگن پاسخ از درجات آزادی گره مرکزی ابر است. رابطه بالا معادل با سه سطر از رابطه ماتریسی نهایی مسئله مورد بررسی است. برای ورود حل کلی باید با در نظر گرفتن سهم حل خصوصی در هر یک از گره‌های ابر و کسر آن از مقدار کل درجه آزادی مربوطه، سهم بخش همگن را محاسبه و در رابطه (۲۹) وارد کرد که منجر به رابطه (۳۰) می‌شود،

$$\mathbf{U}_C^i - \mathbf{U}_C^{p,i} = \mathbf{f}_i^T \Big|_{x_c} \Phi_i \left(\Psi_E^{h,i} \right)^+ \left(\mathbf{U}_E^i - \mathbf{U}_E^{p,i} \right) \quad (30)$$

مقادیر \mathbf{U}_C^i و $\mathbf{U}_C^{p,i}$ به ترتیب بیانگر مقادیر کل درجات آزادی در گره مرکزی ابر و نیز سهم بخش خصوصی حل در آن گره، و \mathbf{U}_E^i و $\mathbf{U}_E^{p,i}$ به ترتیب بیانگر مقادیر کل درجات آزادی در گره‌های غیرمرکزی ابر و سهم بخش خصوصی حل در آن گره‌ها هستند. در نهایت با مرتب نمودن رابطه (۳۰) به صورت انتقال کلیه مجهولات به سمت چپ و کلیه معلومات به سمت راست تساوی، می‌توان سه سطر از معادله ماتریسی نهایی را با احتساب اثر حل خصوصی برآورد نمود که نتیجه در رابطه (۳۱) نشان داده شده است. یادآوری می‌شود که حل خصوصی و مقادیر گره‌ای ناشی از آن در محدوده هر ابر معلوم هستند،

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_C^i - \mathbf{f}_i^T \Big|_{x_c} \Phi_i \left(\Psi_E^{h,i} \right)^+ \mathbf{U}_E^i &= \\ \mathbf{U}_C^{p,i} - \mathbf{f}_i^T \Big|_{x_c} \Phi_i \left(\Psi_E^{h,i} \right)^+ \mathbf{U}_E^{p,i} & \end{aligned} \quad (31)$$

این فرآیند باید روی تمام نقاط گره‌ای و ابر مربوط به آن‌ها انجام شود. به این ترتیب ارتباطی بین تمام درجات آزادی با استفاده از سری پاسخ همگن برقرار خواهد شد که برای تعیین مقادیر درجات آزادی ضروری است. لازم است که تعداد نقاط غیرمرکزی در هر ابر ارتباط معناداری با درجات تقریب مورد استفاده در محدوده ابر داشته باشند. با دقت در چگونگی تشکیل ماتریس $\Psi_E^{h,i}$ می‌توان الگوی مناسب برای تعداد نقاط درون هر ابر را به دست آورد، زیرا لازم است تا حد امکان شکل این ماتریس به مربع نزدیک باشد. تعداد سطرهای ماتریس ذکر شده برابر با حاصل ضرب تعداد نقاط



شکل ۶. نمایش کلی از (الف) نقاط گره‌ای و (ب) نقاط مرزی.

Fig. 6. A general view of (a) nodal points and (b) boundary points.

سطرهای ماتریس \mathbf{K} از روابط (۳۱)، (۳۳) و (۳۴) ساخته می‌شود. به ازای هر گره دامنه، سه سطر از سمت چپ رابطه (۳۱) به \mathbf{K} و سه سطر از سمت راست رابطه مذکور به \mathbf{U}_B افزوده می‌شود. همچنین به ازای هر نقطه مرزی، بسته به نوع شرط مرزی مربوط به آن، سه سطر از سمت چپ روابط (۳۳) یا (۳۴) به \mathbf{K} و سه درایه از سمت راست روابط مذکور به تناسب به ماتریس ستونی \mathbf{U}_B افزوده می‌شود. ماتریس ستونی \mathbf{U} حاوی مجهولات گره‌ای است. در صورتی که گره‌ای واقع بر مرز با شرایط مرزی درিশله باشد مقدار آن می‌تواند به صورت معلوم در این بردار جایگذاری شود. به منظور بهبود کیفیت پاسخ می‌توان پیش از اقدام به حل نسبت به هم‌پایه‌سازی ماتریس \mathbf{K} به صورت رابطه (۳۶) اقدام نمود،

$$E_{rr} = \left\| (\mathbf{K}^T)_r \right\|, \quad \bar{\mathbf{K}} = \mathbf{E}^{-1} \mathbf{K}. \quad (36)$$

در واقع درایه‌های قطری ماتریس \mathbf{E} معادل با نرم اقلیدسی سطرهای متناظر از ماتریس \mathbf{K} هستند. می‌توان رابطه (۳۵) را در قالب حداقل مربعات اعمال نمود، که حاصل به صورت رابطه (۳۷) است.

$$\Pi = (\bar{\mathbf{K}}\mathbf{U} - \mathbf{E}^{-1}\mathbf{U}_B)^T (\bar{\mathbf{K}}\mathbf{U} - \mathbf{E}^{-1}\mathbf{U}_B), \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{d}} = \mathbf{0}. \quad (37)$$

رابطه (۳۷) به صورت رابطه (۳۸) بازنویسی می‌شود،

$$\tilde{\mathbf{K}}\mathbf{U} = \tilde{\mathbf{U}}_B, \quad \tilde{\mathbf{K}} = \bar{\mathbf{K}}^T \bar{\mathbf{K}}, \quad \tilde{\mathbf{U}}_B = \bar{\mathbf{K}}^T \mathbf{E}^{-1} \mathbf{U}_B. \quad (38)$$

با \mathbf{x}_{Bj} نشان داده می‌شود که اختلاف آن با مختصات نزدیک‌ترین گره اصلی به آن (که گره i فرض می‌شود) معادل با $\mathbf{x}_{Bj} - \mathbf{x}_{Ci}$ است. با جایگذاری این مقدار در تابع تقریب ابر مربوط به گره i و اعمال عملگر درিশله رابطه (۳۳) به دست می‌آید،

$$\mathbf{T}_n \mathbf{f}_i^T \Big|_{\mathbf{x}_{Bj} - \mathbf{x}_{Ci}} \phi_i (\psi_E^{h,i})^+ (\mathbf{U}_E^i - \mathbf{U}_E^{p,i}) = \mathbf{U}_{Bj} \quad (33)$$

در رابطه فوق \mathbf{T}_n ماتریسی حاوی درایه‌های بردار یکه نرمال بر مرز ناحیه حل مسئله در موقعیت نقطه مرزی مورد بررسی است و وظیفه آن، تصویر نمودن مولفه‌های جابه‌جایی در مختصات کلی به مختصات محلی عمود و مماس بر مرز است. با استفاده از رابطه (۳۳) شرایط درিশله اعمال می‌شود و به مجموعه معادلات لازم برای برقراری پیوستگی بین گره‌های دامنه که پیش‌تر گفته شد افزوده می‌شود. شرایط نویمان در نقطه مرزی مورد نظر به شیوه مشابهی اعمال می‌شود که به صورت رابطه (۳۴) قابل بیان است.

$$\mathbf{n} \mathbf{D} \mathbf{S} \mathbf{f}_i^T \Big|_{\mathbf{x}_{Bj} - \mathbf{x}_{Ci}} \phi_i (\psi_E^{h,i})^+ (\mathbf{U}_E^i - \mathbf{U}_E^{p,i}) = \mathbf{t}_{Bj}. \quad (34)$$

ماتریس \mathbf{n} در رابطه (۱۷) تعریف شده است. با افزودن معادلات مرزی به معادلات پیوستگی، دستگاه کلی به صورت زیر تکمیل می‌گردد،

$$\mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{U}_B. \quad (35)$$

تنظیم پارامترهای چندانی برای حل مسئله ندارد. می‌توان موارد زیر را به عنوان مراحل حل یک مسئله کلی برشمرد،

۱- پس از مشخص شدن حدود فیزیکی دامنه اصلی حل مسئله، شبکه نقاط دامنه دارای فواصل یکسان در هر سه راستا در نظر گرفته می‌شود. تنها شرط لازم، قرار گرفتن همه نقاط شبکه مذکور درون دامنه فیزیکی است. **نکته:** به سادگی می‌توان با افزایش فشردگی یکنواخت شبکه نقاط، دقت حل را بهبود بخشید.

۲- با داشتن سطوح مرز دامنه مسئله، مجموعه نقاط مرزی روی آن‌ها چیده می‌شود. نقاط آن باید حداقل میانگین فاصله‌ای در حدود نقاط دامنه با یکدیگر داشته باشند، ولی برخلاف شبکه مذکور، نظم خاصی را نمی‌طلبند. **نکته:** این فاصله حداقلی برای حصول جواب منطقی است. برای بهبود پاسخ لازم است این فاصله به حدود دو سوم تا نصف فاصله نقاط دامنه کاهش یابد.

۳- برای هر گره دامنه مجموعه ۹۸ عدد از نزدیک‌ترین گره‌های آن به عنوان نقاط همسایگی در ابر مربوط به آن گره برگزیده می‌شوند.

نکته: بنابراین فرایند پیچیده‌ای برای تشکیل ابرها طی نمی‌شود و تنها فاصله از نقطه مرکزی ملاک گزینش نقاط همسایگی است.

۴- دامنه تصویری حل مسئله در هر ابر تشکیل شود. این دامنه معادل با کوچک‌ترین مکعب مربعی است که همه نقاط ابر را در بر داشته و محل برخورد قطرهای اصلی آن منطبق بر گره مرکزی ابر باشد.

۵- درجه تقریب پاسخ درون ابر بر اساس رابطه (۹) همواره برابر با ۴ در نظر گرفته می‌شود. متناسب با آن، شبکه وزن درون دامنه تصویری ابر شبکه‌ای با ساختار $3 \times 3 \times 3$ است.

۶- انتگرال‌های مورد نیاز یک بعدی درون هر ابر از روابط (۱۹) تعیین شده و طبق رابطه (۲۳) با یکدیگر ترکیب می‌گردند تا حاصل عملگر مسئله بر توابع پایه اولیه را بسازند. ماتریس A مشابه توضیحات شکل ۳ از درایه‌های A_{ij} تشکیل می‌شود.

۷- پس از تشکیل A در هر ابر، فضای پوچ آن استخراج گشته و طی رابطه (۲۶) برای تشکیل پایه‌های متعادل شده استفاده می‌گردد.

۸- روابط بین درجات آزادی درون ابر مطابق روابط (۲۷) و (۲۸) تشکیل می‌شوند.

۹- معادلات پیوستگی درجات آزادی مرکزی و غیرمرکزی ابر طبق رابطه (۳۱)، و اعمال شرایط مرزی طبق روابط (۳۳) و (۳۴) برای کلیه نقاط دامنه و مرز انجام می‌گیرد که نهایتاً به تشکیل معادله ماتریسی نهایی (۳۵)

بردار مقادیر گره‌ای مسئله به شکل زیر در قالب مقادیر مجهول درجات آزادی (با اندیس u) و مقادیر معلوم (با اندیس b) قابل تفکیک است. معلومات در واقع معادل با گره‌های واقع بر مرز دریشه هستند. البته ممکن است چیدمان آن‌ها به این صورت مجزا از یکدیگر نباشد، اما با اندکی عملیات جابه‌جایی سطر و ستون به شکل رابطه (۳۹) درمی‌آید،

$$U = [U_u^T \quad U_b^T]^T. \quad (39)$$

همگام با توزیع بالا می‌توان ماتریس ضرایب و بردار معلومات را نیز مطابق رابطه (۴۰) تجزیه نمود،

$$\tilde{K} = \begin{bmatrix} \tilde{K}_{uu} & \tilde{K}_{ub} \\ \tilde{K}_{bu} & \tilde{K}_{bb} \end{bmatrix}, \quad \tilde{U}_B = [\tilde{U}_{B,u}^T \quad \tilde{U}_{B,b}^T]. \quad (40)$$

جهت برآورد مقادیر درجات آزادی مجهول مسئله می‌توان سطرهای نخست از عبارت ماتریس نهایی را چنین توسعه داد،

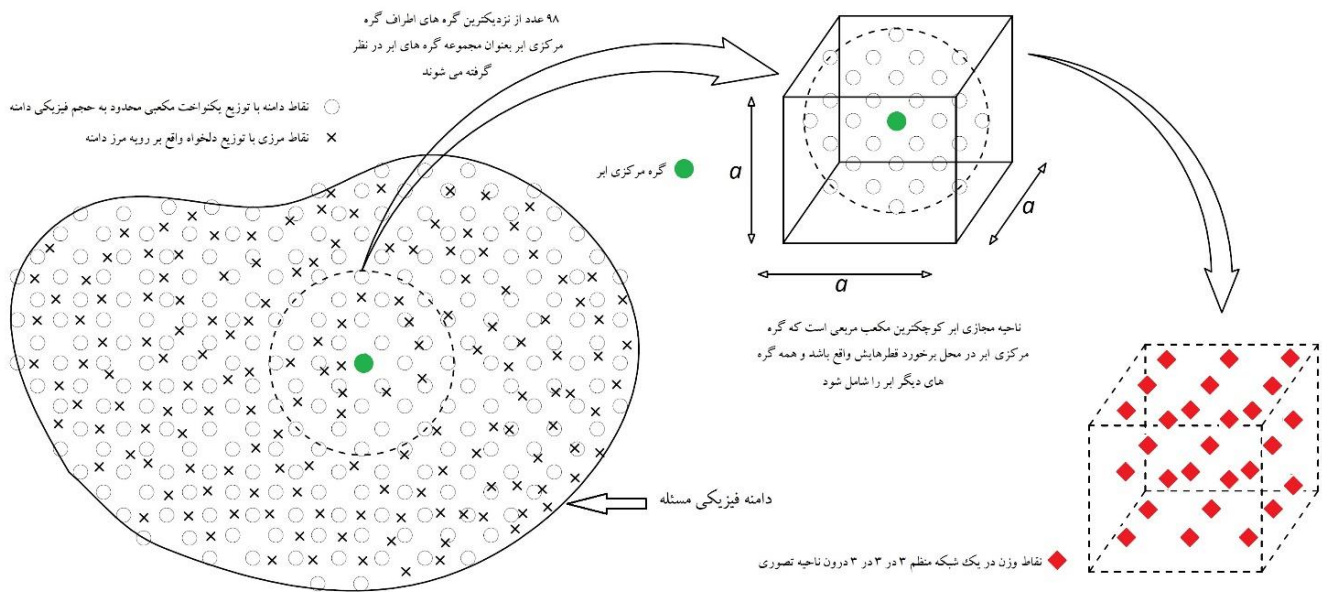
$$U_u = \tilde{K}_{uu}^{-1} (\tilde{F}_u - \tilde{K}_{ub} \tilde{U}_{B,u}). \quad (41)$$

عبارت فوق با توجه به تنگ بودن ماتریس ضرایب معادله نهایی می‌تواند توسط حل کننده‌های ماتریس‌های تنگ حل گشته و به این ترتیب زمان محاسبات را بسیار کوتاه نماید. برای محاسبه مقادیر پتانسیل مسئله در نقاط غیرگره‌ای، با در نظر گرفتن ابری که نقطه مورد نظر را در محدوده خود دارد و با وارد کردن مختصات محلی نقطه، می‌توان مقادیر مورد نظر را استخراج نمود. همچنین با اعمال اپراتور مناسب بر بردار توابع پایه اولیه می‌توان مشتقات تابع پتانسیل (تنش) را به سادگی به دست آورد. در این حالت پاسخ تقریبی معادله بر اساس رابطه (۴۲) خواهد بود،

$$u|_x = f_i^T|_x \phi_i(\psi_E^{h,i})^+ (U_E^i - U_E^{p,i}) + u_p^i|_x. \quad (42)$$

در عبارت فوق بخش درون پراوتز مقادیر گره‌ای مربوط به حل همگن در گره‌های غیرمرکزی ابر مورد بررسی و X مختصات مربوط به نقطه غیرگره‌ای مورد نظر در دستگاه محلی ابر است. به این ترتیب فرایند حل با استفاده از شکل بدون شبکه محلی روش تکمیل می‌شود.

چنانکه از توضیحات داده شده مشخص است، روش پیشنهادی نیاز به



شکل ۷. نمای کلی اجزای حل یک مسئله در روش حاضر.

Fig. 7. Overview of the solution components for a generic problem in the present method.

می‌انجامد. $E = 10^4 N/m^2$ و ضریب پواسون $\nu = 0.3$ است. شرایط مرزی درישله اعمال شده به صورت تکیه‌گاه غلطکی در وجه زیرین مکعب و شرایط نویمان تنش صفر در بقیه وجوه مکعب اعمال شده است. در شکل ۸ هندسه مسئله و شرایط مرزی حاکم بر آن آمده است. همچنین به منظور درک بهتر کارکرد روش، شبکه نقاط گره‌ای و یکی از ابرهای در نظر گرفته شده به همراه نقاط مرزی در شکل ۹ نشان داده شده است.

حل تقریبی به دست آمده از روش بدون شبکه با حل حاصل از نرم‌افزار تجاری کامسول^۱ با در نظر گرفتن 64000 المان مقایسه خواهد شد. حل این مثال با بسط چند جمله‌ای‌های چبی شف تا درجه $4 = O_x = O_y = O_z$ برای هر ابر در فرم ضعیف وزنی، همچنین با استفاده از رابطه (۳۲) و در نظر گرفتن ابرهایی با ۹۸ نقطه مجاور نقطه مرکزی تشکیل ابرها صورت می‌پذیرد. نتایج حاصل به منظور مقایسه بهتر در کنار یکدیگر در شکل ۱۰ ترسیم شده‌اند. برازش بسیار خوب نتایج نشان دهنده بازدهی مناسب روش حاضر است.

مثال دوم: مخزن کروی تحت فشار داخلی

برای نشان دادن نیاز روش پیشنهادی به تولید شبکه ساختاریافته

می‌توان با حل معادله (۳۵)، مقادیر درجات آزادی مشخص می‌شوند و می‌توان با استفاده از معادلات تقریب درون ابر، جابه‌جایی و تنش را در هر نقطه دلخواه به دست آورد.

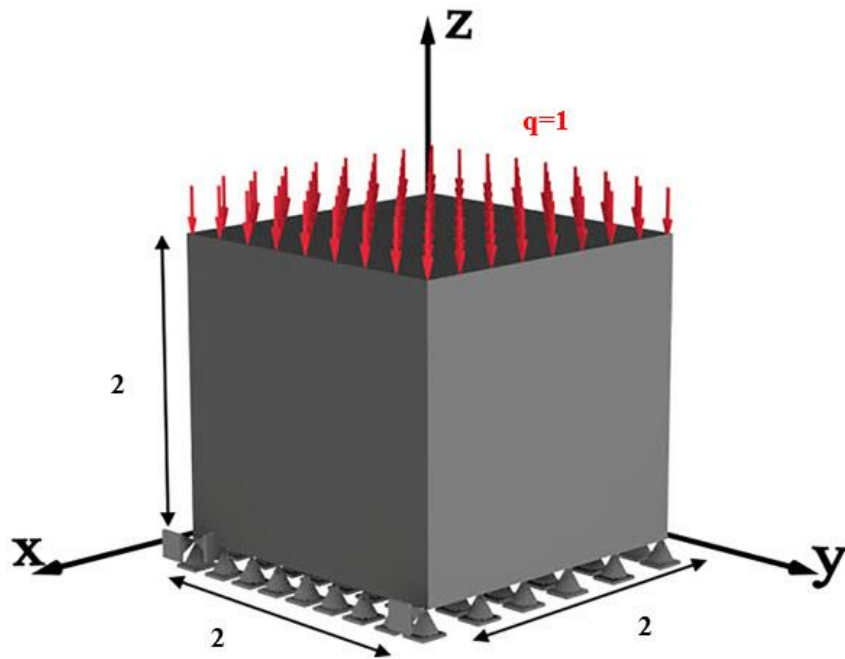
به منظور درک راحت‌تر توضیحات فوق، شکل زیر مراحل کلی انتخاب پارامترهای حل را به صورت شماتیک نشان می‌دهد. در ادامه برای نشان دادن کارایی روش و همچنین میزان حساسیت به پارامترهای آن، مثال‌های عددی مناسبی ارائه گشته‌اند.

۴- نتایج و بحث

در این بخش به ارائه مثال‌هایی جهت بررسی توانایی و خصوصیات روش در حل مسائل الاستیسیته پرداخته می‌شود. کلیه خصوصیات روش پیشنهادی بر اساس پیشنهادات بخش‌های قبلی تنظیم می‌شود.

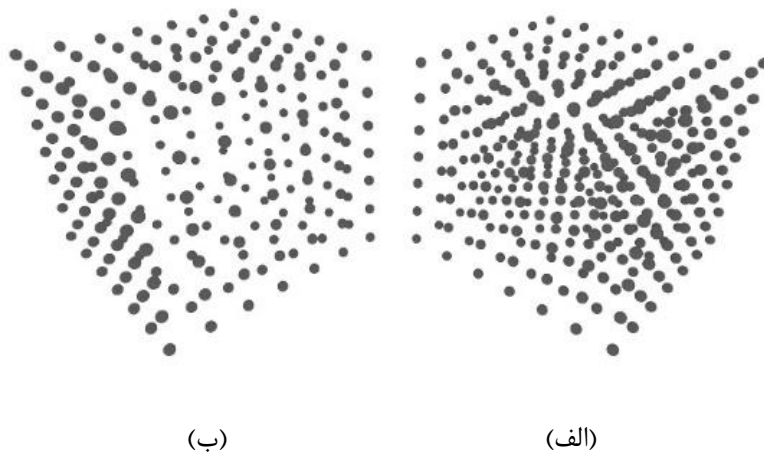
مثال اول: مکعب تحت تنش ثابت

در این مثال بررسی جابه‌جایی یک مسئله الاستیسیته روی ناحیه مکعب مربع به ابعاد ۲ مورد نظر است. مشخصات مسئله شامل اعمال تنش فشاری واحد در راستای z بر وجه فوقانی مکعب با مدول الاستیسیته



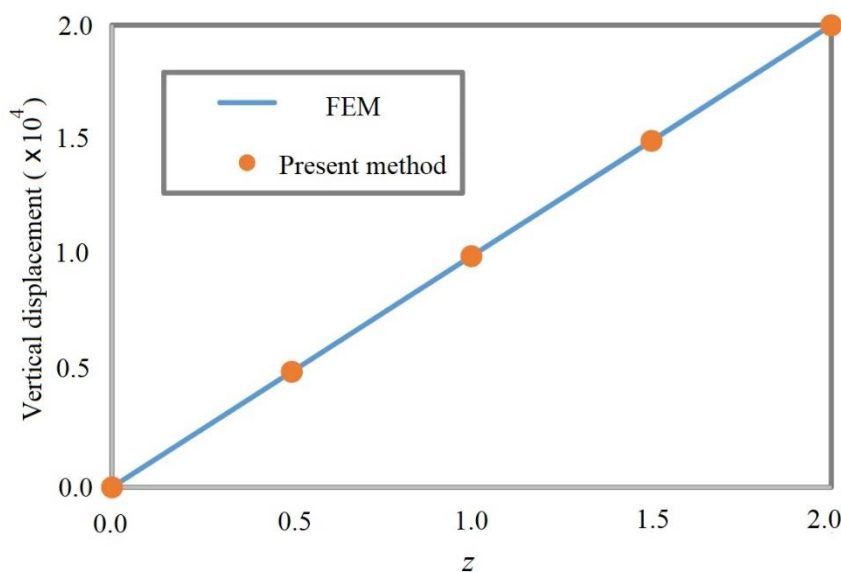
شکل ۸. هندسه مسئله و شرایط مرزی مثال ۱.

Fig. 8. Geometry and boundary conditions of Example 1.



شکل ۹. نمایی کلی از (الف) نقاط گره‌ای و (ب) نقاط مرزی در مثال ۱.

Fig. 9. General view of (a) nodal points and (b) boundary points of Example 1.



شکل ۱۰. تغییرات جابه‌جایی در راستای به دو روش توابع پایه متعادل شده محلی و نرم‌افزار کامسول در مثال اول.

Fig. 10. Vertical displacement using the MLEqBFs and COMSOL in Example 1.

رنگ سبز و نقاط ابر مربوط به آن به رنگ قرمز نشان داده شده است. تنها پارامتر موثر در این گزینش فاصله نقاط از نقطه مرکزی بوده است. همچنین به دلیل انحنای مرزهای حل، مجموعه جداگانه‌ای از نقاط مرزی مطابق شکل ۱۲-ب مستقل از نقاط گرهی تعریف می‌شود. در واقع نقاط گره‌ای ساختار مکعبی خود را حفظ نموده و هیچ تأثیری از انحنای مرزها نمی‌گیرند. به منظور سنجش اثرات تعداد و نحوه چینش نقاط شبکه بر دقت پاسخ،

سه شبکه به صورت زیر برای حل این مسئله انتخاب می‌شوند،

شبکه ۱: دارای توزیع نقاط کاملاً یکنواخت به تعداد ۹۱۲ عدد

شبکه ۲: دارای توزیع نقاط غیریکنواخت به تعداد ۶۴۱ عدد

شبکه ۳: دارای توزیع نقاط کاملاً یکنواخت به تعداد ۵۵۸ عدد

برای هر سه شبکه از تعداد ۱۰۵۶ نقطه مرزی استفاده شده است. شکل زیر نشان می‌دهد که علی‌رغم بیشتر بودن تعداد نقاط شبکه ۲ نسبت به شبکه ۳، دقت تقریب آن به طور قابل توجهی کمتر از شبکه ۳ است که این موضوع به دلیل توزیع یکنواخت شبکه ۳ نسبت به شبکه ۲ است. چنان که انتظار می‌رود، دقت تقریب شبکه ۱ با توزیع یکنواخت نسبت به هر دو شبکه دیگر بسیار بهتر است که این مشخصاً به دلیل استفاده از تعداد گره‌های بیشتر می‌باشد.

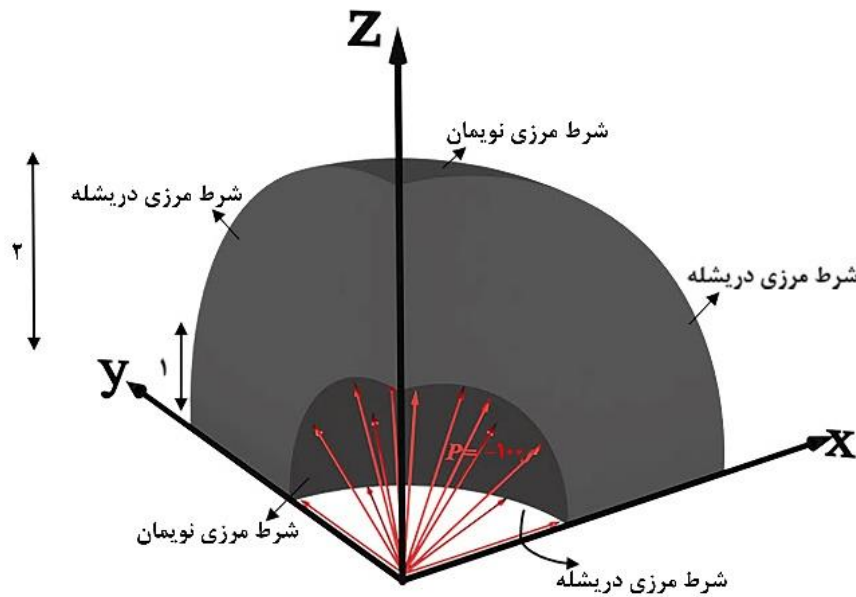
متناسب با هندسه دامنه، مسئله سه بعدی همگن الاستیسیته (لامه) در یک مخزن کروی ضخیم توخالی با شعاع داخلی واحد a و شعاع خارجی $b=2$ تحت فشار یکنواخت داخلی $P=100\text{ N/m}^2$ مورد بررسی قرار می‌گیرد. در رابطه (۴۳) توابع حل دقیق جهت محاسبه مولفه تنش و جابه‌جایی در راستای شعاعی برای مسئله مذکور بیان شده است،

$$u_r = \frac{Pa^3 r}{E(b^3 - a^3)} \left[(1-2\nu) + (1+\nu) \frac{b^3}{2r^3} \right], \quad (43)$$

$$\sigma_r = \frac{Pa^3 (b^3 - r^3)}{r^3 (a^3 - b^3)}.$$

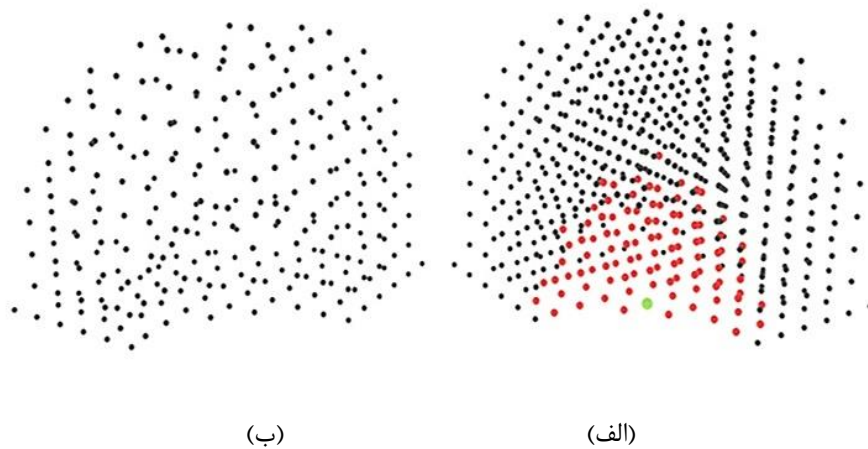
در رابطه فوق r فاصله شعاعی از مرکز کره است. به دلیل تقارن، جهت ساده‌سازی تنها یک‌هشتم مخزن کروی مورد بررسی قرار گرفته است. با توجه به تقارن، شرایط مرزی مطابق شکل ۱۱ حاکم است. پارامترهای ماده مورد استفاده $E=10^4\text{ N/m}^2$ و $\nu=0/3$ است.

مشابه مثال قبل در تحلیل این مسئله نیز از فرم ضعیف وزنی با مرتبه تقریب برابر با ۴ روی هر ابر با ۹۸ گره غیرمرکزی استفاده شده است. در شکل ۱۲-الف شبکه نقاط منظم گرهی همراه با یک گره مرکزی نمونه به



شکل ۱۱. مسئله کره توخالی و شرایط مرزی آن در مثال ۲.

Fig. 11. Hollow sphere problem and its boundary conditions in Example 2

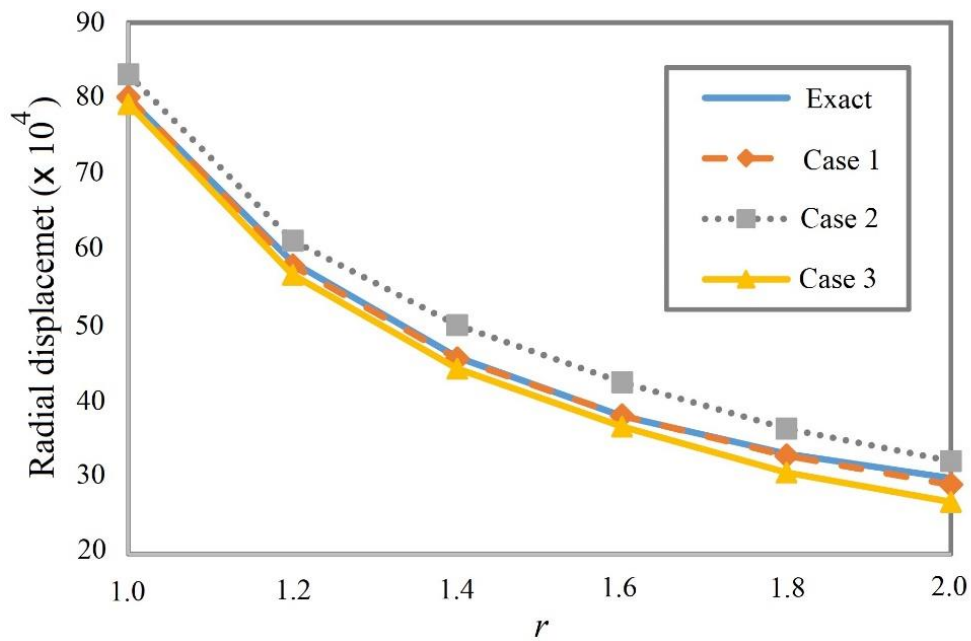


شکل ۱۲. (الف) شبکه نقاط گره‌ای، نمایش یک گره مرکزی و ابر متناظر آن و (ب) نقاط مرزی در مثال ۲.

Fig. 12. (a) Nodal points, a central node and its corresponding cloud and (b) boundary points in Example 2.

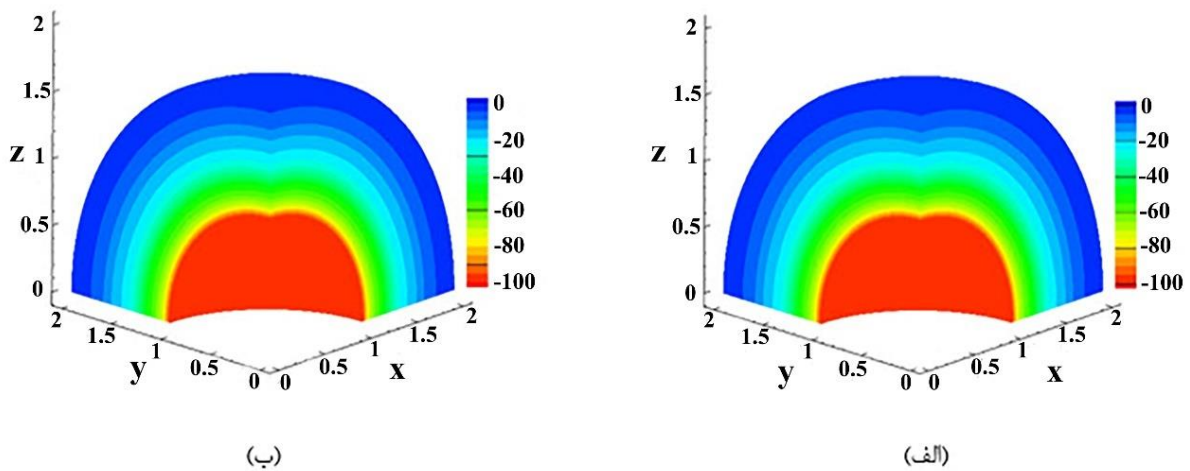
برای تایید عملکرد صحیح روش در برآورد مشتقات تابع، مولفه تنش شعاعی حاصل از روش حاضر در کنار حل دقیق مسئله به صورت کانتور در شکل ۱۴ ترسیم گشته است. توجه شود که در اثر اعمال فشار بر سطح داخلی کره و به دلیل تقارن، تنش شعاعی به صورت یکنواخت از داخل به خارج کره کاهش داشته است. در شکل ۱۵ نیز کانتور تنش دو بعدی در صفحه XY و ارتفاع $Z = 1$ برای مولفه شعاعی با استفاده از حل دقیق و روش حاضر ترسیم شده است. مقایسه نتایج ارائه شده به وضوح بیانگر عملکرد خوب روش نه تنها در تطابق نتایج مربوط به مولفه‌های جابه‌جایی با نتایج حل دقیق بلکه در مشتقات آن تحت عنوان تنش‌های ایجاد شده هستند. به منظور سنجش حساسیت روش به پارامترهای آن، مسئله حاضر با

برای تایید عملکرد صحیح روش در برآورد مشتقات تابع، مولفه تنش شعاعی حاصل از روش حاضر در کنار حل دقیق مسئله به صورت کانتور در شکل ۱۴ ترسیم گشته است. توجه شود که در اثر اعمال فشار بر سطح داخلی کره و به دلیل تقارن، تنش شعاعی به صورت یکنواخت از داخل به خارج کره کاهش داشته است. در شکل ۱۵ نیز کانتور تنش دو بعدی در صفحه



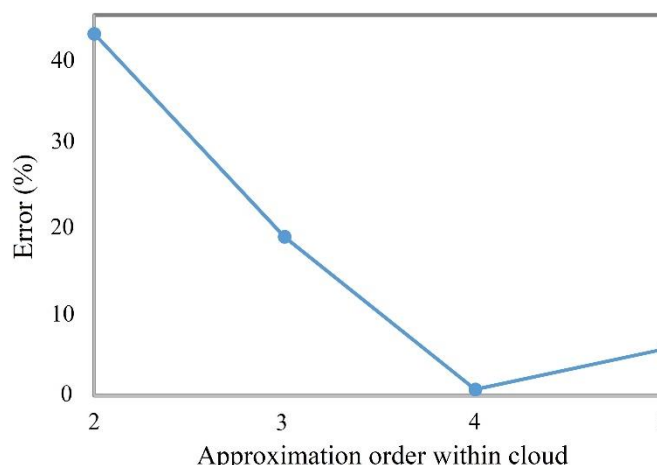
شکل ۱۳. تغییرات جابه‌جایی شعاعی و مقایسه حل دقیق و روش حاضر در مثال ۲.

Fig. 13. Radial displacement and its comparison with the exact solution in Example 2.



شکل ۱۴. مقایسه کانتورهای تنش σ_r با استفاده از (الف) حل دقیق و (ب) روش حاضر.

Fig. 14. Comparison of σ_r contours using (a) the exact solution and (b) the present method.



شکل ۱۵. درصد خطا در برابر مرتبه تقریب درون ابرها.

Fig. 15. Error percentage vs. approximation order within the clouds.

که بدان معنا است که تعداد مجهولات سری پاسخ توابع پایه متعادل شده با تعداد مجهولات گرهی درون ابر برابر باشد. طبیعتاً استفاده از مرتبه ۵ منجر به آن خواهد شد که تعداد مجهولات سری پاسخ از تعداد مجهولات گرهی بیشتر شود و در نتیجه تطابق خوبی بین آن‌ها به وجود نیاید. چنانچه ابری بخواهد با مرتبه ۵ به همین شرط دست یابد، نیاز به تعداد بیشتری گره در آن وجود دارد (۲۷۹ گره) که حجم عملیات را به شدت بالا می‌برد. به عبارت دیگر توصیه به استفاده از مرتبه تقریب ۴ با تعداد ۹۸ گره در هر ابر، یک تعادل بین حجم عملیات و دقت تقریب پاسخ در خود دارد.

در بخش بعد تاثیر تعداد نقاط دامنه بر همگرایی پاسخ بررسی می‌شود. شکل ۱۶ نمودار لگاریتمی تغییر درصد خطا همگام با افزایش تعداد نقاط دامنه را در حالی که تعداد کل نقاط مرزی ثابت و برابر ۳۶۴۵ نگه داشته شده‌اند نشان می‌دهد. شیب همگرایی نیز در این شکل مشخص شده است که نرخ بالاتری را نسبت به روش اجزاء محدود نشان می‌دهد. بر اساس این نتایج همگرایی قابل قبولی با افزایش فشردگی نقاط دامنه حاصل می‌گردد که منجر به قابلیت اعتماد به روش خواهد بود.

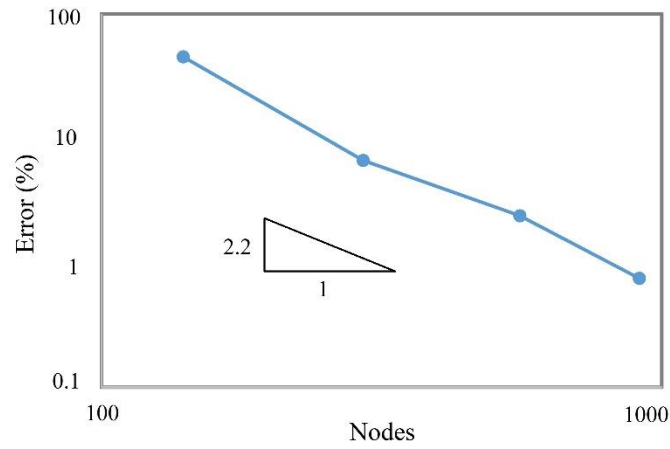
در نهایت برای بررسی تاثیر افزایش یکنواخت تعداد نقاط مرزی بر کیفیت پاسخ، شکل ۱۷ نمودار لگاریتمی تغییرات درصد خطا را در حالی که شبکه نقاط دامنه ثابت با تعداد ۹۱۲ گره است نمایش می‌دهد. مشاهده می‌شود که رفتار نمودار پس از رسیدن تعداد نقاط مرزی به حد کفایت، ثابت داشته که این نشان دهنده سازگاری بخش‌های مختلف روش با یکدیگر است.

تغییر برخی موارد موثر حل گشته و درصد خطای عددی میانگین آن طبق رابطه زیر گزارش می‌شود،

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\sum_{Nodes} (u_r^{ap} - u_r^{ex})^2}{\sum_{Nodes} (u_r^{ex})^2}} \times 100 \quad (44)$$

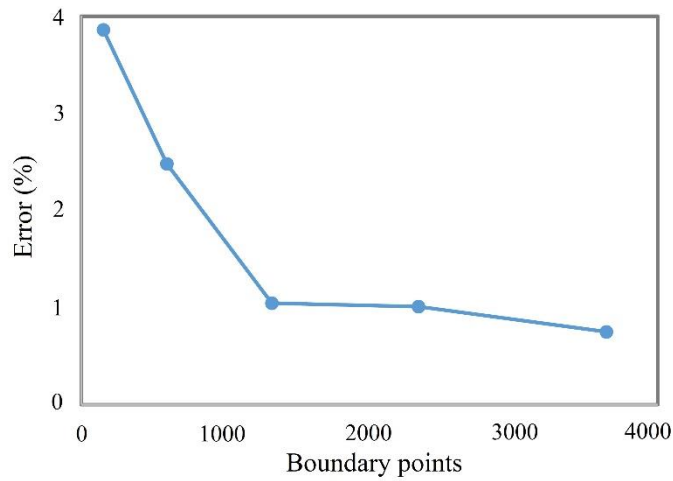
در رابطه بالا u_r^{ex} و u_r^{ap} به ترتیب مقادیر جابه‌جایی شعاعی حاصل از حل دقیق و روش حاضر هستند و جمع روی گره‌های دامنه زده می‌شود. نخست برای تایید پیشنهاد استفاده از مرتبه تقریب ۴ درون هر ابر، نمودار شکل ۱۵ تغییرات درصد خطا نسبت به مرتبه تقریب درون هر ابر را نشان می‌دهد. برای هر مرتبه تقریب، تعداد نقاط درون ابر متناسب با رابطه (۴۲) گزیده می‌شود. تعداد کل نقاط دامنه ۹۱۲ و تعداد کل نقاط مرزی ۳۶۴۵ است. چنان که واضح است، استفاده از مرتبه تقریب ۴ بهترین نتیجه را از نظر دقت دارد. بنابراین بخش‌های بعدی با این فرض پیش خواهند رفت.

علت آن که مرتبه تقریب ۴ نسبت به سایر مراتب تقریب و حتی نسبت به مرتبه ۵ پاسخ بهتری می‌دهد، در ارتباط بین فلسفه انتخاب این مرتبه و تعداد نقاط درون هر ابر به تناسب رابطه (۲۸) برمی‌گردد. در این رابطه بهترین نتیجه از نظر تناسب بین ضرایب مجهول سری پاسخ و مقادیر گرهی درون هر ابر زمانی به دست می‌آید که ساختار ماتریس $\psi_E^{h,i}$ مربعی باشد،



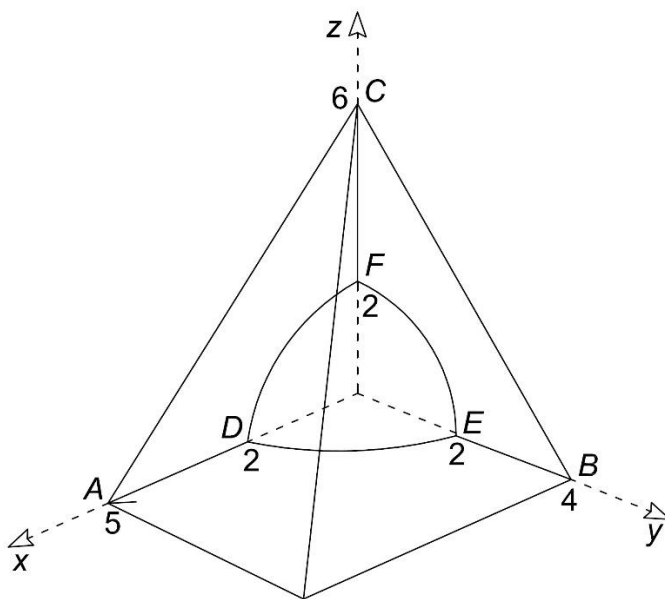
شکل ۱۶. درصد خطا در برابر تعداد نقاط دامنه در مثال دوم.

Fig. 16. Error percentage versus the number of domain points in Example 2.



شکل ۱۷. درصد خطا در برابر تعداد نقاط مرزی در مثال دوم.

Fig. 17. Error Percentage versus the number of boundary points in Example 2.



شکل ۱۸. هندسه دامنه مسئله در مثال سوم.

Fig. 18. Geometry of the problem in Example 3.

مثال سوم: هرم ناقص

مثال آخر به بررسی عملکرد روش برای یک مسئله با هندسه نامتقارن می‌پردازد تا توانایی آن را در چنین مسائلی به چالش بکشد. هندسه مسئله در شکل زیر نشان داده شده است. دامنه یک هرم پنج وجهی با قاعده مستطیلی است که یک‌هشتم کره از آن جدا شده است.

سطوحی از جسم بالا که منطبق بر صفحات xy و xz و yz قرار گرفته‌اند به ترتیب در راستای z و y و x (عمود بر صفحه مربوطه) دارای قید حرکت بوده و در دو راستای دیگر آزاد هستند. سطح کروی تحت فشار ثابت 10 Pa قرار دارد و سایر سطوح باقی‌مانده آزاد هستند. مدول الاستیسیته 10^4 و نسبت پواسون 0.333 است. به منظور مقایسه، این مسئله در نرم‌افزار اجزاء محدود آباکوس با تعداد 187542 المان چهاروجهی (تتراهدرال) مدل و تحلیل شده است. در روش حاضر نیز به منظور سنجش تاثیر نقاط دامنه و مرز، از سه حالت زیر برای تحلیل استفاده شده است،

حالت اول: 396 گره و 2161 نقطه مرزی

حالت دوم: 719 گره و 3992 نقطه مرزی

حالت سوم: 1837 گره و 3992 نقطه مرزی

همانند دو مثال قبل، توزیع گره‌ها به صورت منظم با شرط محدودیت در ابعاد فیزیکی مسئله انجام شده و نقاط مرزی مستقل از گره‌ها تنها بر رویه‌های محدود کننده دامنه قرار می‌گیرند. شکل زیر توزیع گره‌ها و نقاط

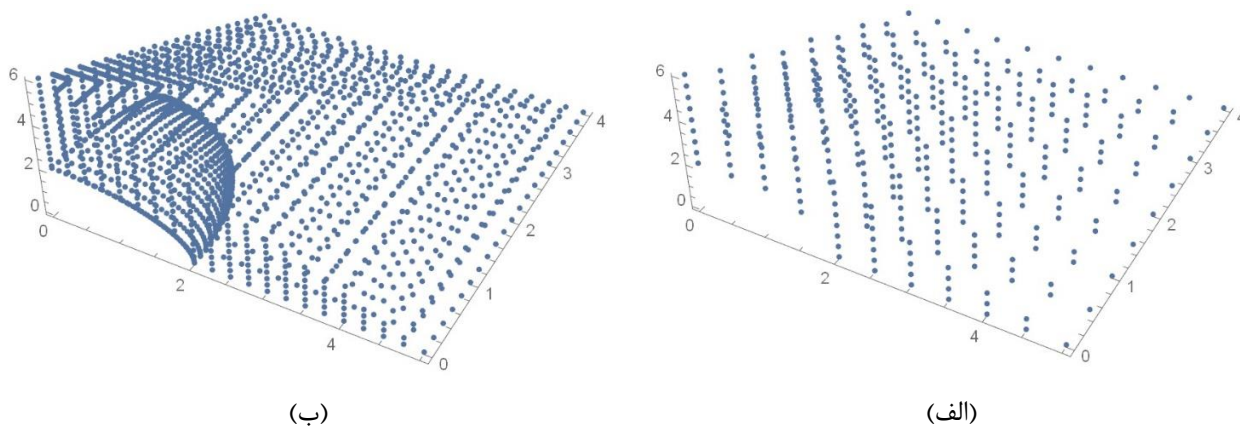
مرزی را برای حالت اول نشان می‌دهد.

نمودار زیر تغییرات جابه‌جایی راستای x را در امتداد ضلع AD جسم نشان می‌دهد. چنان که واضح است، حالت سوم بهتر از دو حالت دیگر و تقریباً به طور دقیق موفق به مدل‌سازی مسئله شده است. این در حالی است که حالت دوم با تعداد گره به مراتب کمتر، با خطای بسیار ناچیز به جواب صحیح دست یافته است که نشان از عدم نیاز روش حاضر به تعداد گره‌های بسیار بالا برای ثبت پاسخ دقیق دارد. نهایتاً حالت اول با خطایی در حدود میانگین زیر ده درصد توانسته به جواب دست یابد. این مثال ضمن تایید عملکرد روش برای مسائل با هندسه دلخواه، دقت عملکرد آن را حتی با لحاظ تعداد گره‌های نه چندان زیاد نشان می‌دهد.

در انتهای این بخش به منظور مقایسه سرعت حل روش حاضر با سایر تکنیک‌های عددی موجود، موارد زیر متذکر می‌شوند،

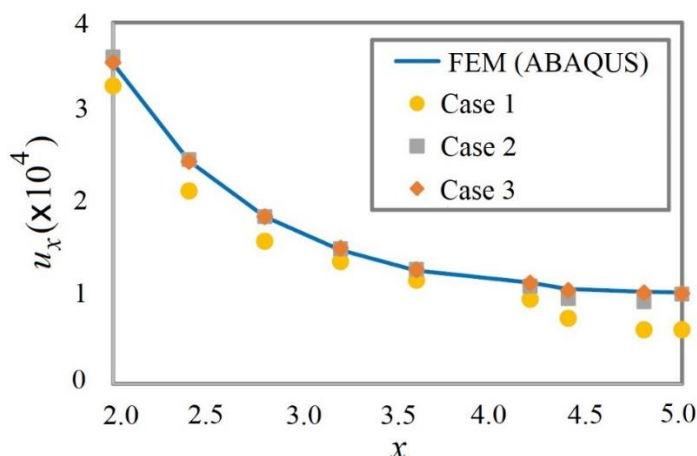
- تکنیک حاضر برخلاف روش‌های مبتنی بر شبکه، نیازمند شبکه المان‌های ساختاریافته نیست. تنها با مشخص شدن مرزهای دامنه می‌توان شبکه‌ای منظم از نقاط را بدون نیاز به اصلاح به دلیل انحنای مرزها، در درون محدوده فیزیکی آن در نظر گرفت.

- تشکیل ابرها به سادگی و تنها بر مبنای فاصله نقاط از یکدیگر بدون نیاز به هیچ‌گونه تمهیدات خاص هندسی صورت می‌گیرد. از این منظر حجم عملیات مش‌بندی که در تکنیک‌های دیگر وجود دارد حذف می‌شود.



شکل ۱۹. (الف) توزیع گره‌ها و (ب) توزیع نقاط مرزی برای حالت اول در مثال سوم.

Fig. 19. A sample of (a) nodal points and (b) boundary points in Example 3.



شکل ۲۰. تغییرات جابه‌جایی راستای x در امتداد ضلع AD در مثال سوم.

Fig. 20. Variation of x-displacement component along AD in Example 3.

است، بنابراین نیازی به انتگرال‌گیری روی سطوح مرزی ناحیه نبوده و حجم عملیات به شدت کاهش می‌یابد. در عین حال می‌توان با فشردن شبکه نقاط مرزی مستقل از نقاط دامنه، دقت اعمال نقطه‌ای شرایط مرزی را بسیار بالا برد.

- به دلیل استفاده از فضای مکعب مربع برای تشکیل معادلات در محدوده ابر، ماتریس‌های ρ_i در کلیه ابرها مشابه یکدیگر هستند. بنابراین می‌توان محاسبات مربوطه را تنها برای یک ابر انجام داد و در سایر ابرها از همان نتایج استفاده نمود که حجم قابل توجهی از عملیات را کاهش می‌دهد.

- نقاط مرزی کاملاً مستقل از نقاط شبکه انتخاب می‌شوند، بنابراین نیازی به صرف هزینه و زمان طولانی برای ساختن شبکه متناسب سطحی در دامنه‌های گوناگون وجود ندارد. به طور مثال با تشخیص مرزهای ناحیه در نرم‌افزار اتوکد، می‌توان نقاط لازم را به سادگی به آن برآزش نمود.

- انتگرال‌گیری سه بعدی در روش حاضر با ترکیب انتگرال‌های از پیش تعیین شده یک بعدی انجام می‌شود. به این ترتیب نیازی به در نظر گرفتن شبکه نقاط گوس در طول فرایند حل نیست.

- اعمال شرایط مرزی در روش حاضر با استفاده از تکنیک نقطه‌ای

ارائه شده دارای هندسه و مرزهای مختلف، و مقایسه نتایج روش با حل دقیق یا داده‌های نرم‌افزارهای تجاری، بیانگر عملکرد مناسب روش پیشنهادی هستند.

۶- فهرست علائم

ماتریس ضرایب بخش همگن	A
ماتریس‌های حاوی انتگرال‌های X	A_{1,2,3}
ماتریس کمکی بخش همگن	A_h
ابعاد ناحیه مجازی مکعبی	a, b, c
عملگر شرایط مرزی	B
عملگر شرایط مرزی درپیشله و نویمان	B_D, B_N
نیروی بدنه	b
ماتریس‌های حاوی انتگرال‌های Y	B_{1,2,3}
ماتریس‌های حاوی انتگرال‌های Z	C_{1,2,3}
بردار مجهولات اولیه سری پاسخ همگن	c
بردار مجهولات جدید (برای ابر I م)	d, d_i
ضرایب ماده	D_{1,2,3}
مدول الاستیسیته	E
بردار پایه‌های اولیه حل همگن	f
بردار پایه‌های اولیه حل خصوصی	f_p
بردار پایه‌های متعادل شده (برای ابر I م)	F, F_i
ماتریس سختی نهایی	K
موقعیت سطر و ستون و ردیف مرکز وزن	k, l, q
عملگر معادله دیفرانسیل	L
مولفه‌های بردار یکه عمود بر مرز	n_x, n_y
ماتریس تصویر تنش مرزی	n
ماتریس تصویر جابه‌جایی مرزی	T_n
بردار درجات آزادی کل	U
درجات آزادی گره مرکزی (C) و غیرمرکزی (E)	U_C, U_E
بردار جابه‌جایی	u
بخش همگن و خصوصی بردار جابه‌جایی	u_h, u_p
ماتریس فضای پوچ	Φ
ماتریس برآورد حل در نقاط گرهی غیرمرکزی	Ψ_Eⁱ

- دستگاه معادلات نهایی (۴۱) تنک است و حل آن هزینه زیادی ندارد.
 - به دلیل پیوستگی تنش در روش حاضر، هزینه‌ای برای عملیات پس‌پردازش به منظور تولید کانتورهای پیوسته تنش صرف نشده و تنها از توابع درون‌یاب ابر مطابق رابطه (۴۲) استفاده می‌شود.

۵- نتیجه‌گیری

در تحقیق حاضر به توسعه روش توابع پایه متعادل شده برای حل مسائل الاستیسیته سه بعدی در قالب بدون شبکه محلی پرداخته شد. استفاده از توابع پایه متعادل شده به دلیل قابلیت ارضای تقریبی صورت همگن معادله برخلاف توابع پایه نمایی، موجب رفع محدودیت انتخاب پایه‌های حل برای مسئله مورد نظر می‌شود. صورت همگن معادله دیفرانسیل به صورت مجزا از شرایط مرزی آن توسط فرم ضعیف انتگرال وزنی ارضا می‌شود. قابلیت ذخیره پایه‌های به دست آمده به عنوان مقادیر کتابخانه‌ای، باعث کاهش حجم عملیات لازم برای تکرار حل مسائل می‌شود. تسهیل انتگرال‌گیری با تعریف ناحیه مکعبی مجازی شامل ناحیه حل اصلی، و توسعه انتگرال‌های لازم روی آن صورت می‌گیرد. انتگرال‌های سه بعدی به ترکیبی از انتگرال‌های یک بعدی نرمال تبدیل می‌شوند، به طوری که می‌توان این انتگرال‌ها را محاسبه و به عنوان مقادیر کتابخانه‌ای برای استفاده بعدی ذخیره کرد. این امر با حذف نیاز به انتگرال‌گیری عددی گوس از چرخه حل مسئله، باعث کاهش چشمگیر زمان انجام عملیات خواهد شد. در شکل بدون شبکه، شبکه‌ای منظم از نقاط به عنوان محل تعریف درجات آزادی تعریف می‌شود. تنها شرط لازم برای تعریف این نقاط، قرار گرفتن آن‌ها در محدوده فیزیکی دامنه حل است که نسبت به پیچیدگی‌های تولید شبکه المان، بسیار ساده‌تر می‌باشد. توابع پایه متعادل شده به عنوان پایه‌های حل در زیردامنه‌هایی تحت عنوان ابر شامل ۹۸ عدد از نقاط شبکه در مجاورت یک نقطه مرکزی، و با مرتبه تقریب معادل ۴ در هر راستای مختصات، بسط می‌یابند. به واسطه همپوشانی ابرها با یکدیگر، پیوستگی کامل برای توابع جابه‌جایی و تنش در سرتاسر ناحیه برقرار خواهد بود. اعمال شرایط مرزی در نقاطی مستقل از نقاط گره‌ای باعث انعطاف روش برای حل مسائل روی نواحی با اشکال دلخواه می‌شود. همچنین تعریف مرزهای مختلف از جمله سطوح منحنی بدون نیاز به توابع ویژه و تنها با ورود مختصات تعدادی نقطه روی آن‌ها صورت می‌گیرد. با حذف شبکه‌بندی و انتگرال مرزی به واسطه صفر شدن توابع وزن در امتداد مرزهای دامنه، حجم قابل توجهی از زحمت حل کاسته می‌شود. مثال‌های

- [10] N. Noormohammadi, B. Boroomand, A fictitious domain method using equilibrated basis functions for harmonic and bi-harmonic problems in physics, *Journal of Computational Physics*, 272 (2014) 189-217.
- [11] N. Noormohammadi, B. Boroomand, A domain decomposition approach using equilibrated basis functions: special reference to structural engineering problems with varying material properties, *Iranian Journal of Science and Technology, Transactions of Civil Engineering*, 45(2) (2021) 667-681.
- [12] N. Noormohammadi, B. Boroomand, Construction of equilibrated singular basis functions without a priori knowledge of analytical singularity order, *Computers & Mathematics with Applications*, 73(7) (2017) 1611-1626.
- [13] N. Noormohammadi, B. Boroomand, Enrichment functions for weak singularities in 2D elastic problems with isotropic and orthotropic materials, *Applied Mathematics and Computation*, 350 (2019) 402-415.
- [14] O. Bateniparvar, N. Noormohammadi, B. Boroomand, Singular functions for heterogeneous composites with cracks and notches; the use of equilibrated singular basis functions, *Computers & Mathematics with Applications*, 79(5) (2020) 1461-1482.
- [15] M. Azizpooryan, N. Noormohammadi, B. Boroomand, Equilibrated Basis Functions for Static Analysis of In-plane Heterogeneous Laminated Composite Plates in Boundary and Meshfree Approaches, *Iranian Journal of Science and Technology, Transactions of Mechanical Engineering*, (2021) 1-28.
- [16] L.B. Lucy, A numerical approach to the testing of the fission hypothesis, *The astronomical journal*, 82 (1977) 1013-1024.
- [17] R.A. Gingold, J.J. Monaghan, Smoothed particle hydrodynamics: theory and application to non-spherical stars, *Monthly notices of the royal astronomical society*, 181(3) (1977) 375-389.
- [18] W.K. Liu, S. Jun, S. Li, J. Adee, T. Belytschko, [1] N. Noormohammadi, Solution of solid mechanics problems using equilibrated basis functions and mesh-free methods, Ph.D Thesis, Isfahan University of Technology, 2015. (In Persian)
- [2] E. Kita, N. Kamiya, Trefftz method: an overview, *Advances in Engineering software*, 24(1-3) (1995) 312.
- [3] V.D. Kupradze, M.A. Aleksidze, The method of functional equations for the approximate solution of certain boundary value problems, *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 4(4) (1964) 82-126.
- [4] C. Brebbia, *The Boundary Element Method for Engineers*, Pentech Press, London, Halstead Press, New York, in, 1980.
- [5] B. Boroomand, S. Soghrati, B. Movahedian, Exponential basis functions in solution of static and time harmonic elastic problems in a meshless style, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 81(8) (2010) 971-1018.
- [6] A.R. Motamedi, B. Boroomand, N. Noormohammadi, A Trefftz based meshfree local method for bending analysis of arbitrarily shaped laminated composite and isotropic plates, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 143 (2022) 237-262.
- [7] F. Mossaiby, M. Ghaderian, R. Rossi, Implementation of a generalized exponential basis functions method for linear and non-linear problems, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 105(3) (2016) 221-240.
- [8] B. Boroomand, N. Noormohammadi, Weakly equilibrated basis functions for elasticity problems, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 37(12) (2013) 1712-1727.
- [9] N. Noormohammadi, B. Boroomand, A boundary method using equilibrated basis functions for bending analysis of in-plane heterogeneous thick plates, *Archive of Applied Mechanics*, 91(1) (2021) 487-507.

- Galerkin (MLPG) approach in computational mechanics, *Computational mechanics*, 22(2) (1998) 117-127.
- [24] E. Oñate, S. Idelsohn, O. Zienkiewicz, R. Taylor, A finite point method in computational mechanics. Applications to convective transport and fluid flow, *international journal for numerical methods in engineering*, 39(22) (1996) 3839-3866.
- [25] B. Boroomand, M. Najjar, E. Oñate, The generalized finite point method, *Computational Mechanics*, 44(2) (2009) 173-190.
- [26] E. Soleimanifar, B. Boroomand, F. Mossaiby, A meshless method using local exponential basis functions with weak continuity up to a desired order, *Computational Mechanics*, 53(6) (2014) 1355-1374.
- [27] A. Shojaei, B. Boroomand, F. Mossaiby, A simple meshless method for challenging engineering problems, *Engineering Computations*, (2015).
- Reproducing kernel particle methods for structural dynamics, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 38(10) (1995) 1655-1679.
- [19] B. Nayroles, G. Touzot, P. Villon, Generalizing the finite element method: diffuse approximation and diffuse elements, *Computational mechanics*, 10(5) (1992) 307-318.
- [20] T. Belytschko, Y.Y. Lu, L. Gu, Element-free Galerkin methods, *international journal for numerical methods in engineering*, 37(2) (1994) 229-256.
- [21] P. Krysl, T. Belytschko, The element free Galerkin method for dynamic propagation of arbitrary 3-D cracks, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 44(6) (1999) 767-800.
- [22] E. Jaberzadeh, M. Azhari, B. Boroomand, Thermal buckling of functionally graded skew and trapezoidal plates with different boundary conditions using the element-free Galerkin method, *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 42 (2013) 18-26.
- [23] S.N. Atluri, T. Zhu, A new meshless local Petrov-

چگونه به این مقاله ارجاع دهیم

D. Afifi, N. Noormohammadi, B. Boroomand, Solution of 3D elasticity problems using meshless local equilibrated basis functions, Amirkabir J. Civil Eng., 54(11) (2023) 4163-4188.

DOI: [10.22060/ceej.2022.20119.7345](https://doi.org/10.22060/ceej.2022.20119.7345)



