تحلیل پایداری دینامیکی ستون‌های قاب تحت اثر جرم متمرکز و میرایی ذاتی با روش اجزای محدود

امیرحسین طاهرخانی[1] و مجید امین افشار[2*]

۱- دانش‌آموختهٔ کارشناسی ارشد مهندسی عمران گرایش سازه دانشگاه بین‌المللی امام خمینی (ره) قزوین، ایران

۲- دانشیار، گروه مهندسی عمران، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه بین‌المللی امام خمینی (ره) قزوین، ایران

*قزوین، صندوق پستی ۹۶۸۱۸-۳۴۱۴۸، mj.afshar@eng.ikiu.ac.ir

چکیده

تحلیل پایداری در ستون‌ها به‌عنوان اصلی‌ترین عضو سازه‌ای از جایگاه ویژه‌ای در تحقیقات مهندسی برخوردار است. در عمدهٔ تحقیقات گذشته، عموماً پژوهشگران به مطالعه بارکمانشی استاتیکی در ستون‌های (منشوری یا غیر منشوری) در (قاب‌های ساختمانی یا سولهٔ صنعتی) پرداخته‌اند. بارکمانشی استاتیکی تنها بیانگر ظرفیت بار بحرانی استاتیکی اعضا تحت بار ثقلی است. برای طراحی ایمن سازه لازم است که پایداری دینامیکی ستون‌ها در قاب‌های ساختمانی تحت بار قائم زلزله نیز بررسی گردد. در مقالهٔ حاضر در مدلی جامع اثر توأمان میرایی ذاتی، جرم طبقه و بار قائم زلزله بر پایداری دینامیکی ستون‌ها در قاب‌های خمشی مهارنشده بررسی می‌شود. در واقع روش پیشنهادی تلفیقی از مدل‌سازی استاتیکی ژولیان - لارنس و مدل‌سازی دینامیکی بولوتین برای لحاظ اثرات دینامیکی در ستون‌های قاب بر مبنای روش اجزاء محدود است. در گام نخست، با استفاده از روش همیلتون معادله متشکله استخراج می‌شود. در گام بعدی، پاسخ معادله با استفاده از روش اجزا محدود با توابع میان‌یابی از نوع درجه سه هرمیتی به‌ازای ۵۰ جزء بررسی می‌شود. نتایج بیانگر این است که میرایی ذاتی، جرم متمرکز و سختی دورانی اتصالات نیمه‌سخت تأثیر قابل‌توجهی بر مقادیر فرکانس تشدید، طول مؤثر و ضریب بار دینامیکی بی‌بُعد دارند. با افزایش میرایی ذاتی، سختی دورانی و جرم متمرکز نمودار تغییرات طول موثر به سمت چپ محور فرکانس تحریک منتقل می‌شود. لحاظ اثر میرایی ذاتی و جرم متمرکز در مدلسازی به ترتیب ۷٪ و ۸۱ ٪ بر تغییرات فرکانس تشدید تاثیرگذار است. تطابق قابل قبولی بین نتایج مقاله‌ی حاضر و تحقیق‌های پیشین برقرار است.

کلیدواژه‌ها: کمانش دینامیکی، پایداری دینامیکی، طول مؤثر، ظرفیت بار بحرانی، تحلیل مقدار ویژه

۱- مقدمه:

پایداری سازه‌ها همواره به‌عنوان یک عامل اثرگذار در طرح سازه‌ها به‌ویژه، سازه‌های فولادی بوده است. در عضوهای سازه‌ای لاغر افزون بر مقاومت و سختی سازه، پدیده کمانش و ناپایداری نیز باید مورد بررسی قرار گیرد. بحث نیروی بحرانی و کمانش ستون‌ها نخستین‌بار توسط اویلر مطرح گردید. در واقع نیروی بحرانی بیشترین نیرویی است که سازه تحمل می‌کند و درعین‌حال دچار خیز جانبی نمی‌شود. روش اویلر[1] برای بررسی پایداری ستون صرفاً محدود به حالت‌های ایده‌آل در شرایط مرزی تکیه‌گاهی بود. درحالی‌که اتصال ستون‌ها و تیرها در قاب‌های فولادی اغلب به‌صورت نیمه‌سخت[2] است [۱].ژولیان و لارنس[3] [۲]بر همین مبنا به بررسی طول مؤثر و کمانش ستون‌ها در قاب‌های خمشی مهار شده و مهارنشده پرداختند. برای تشکیل معادله حاکم بر مجموعه، اثر تکیه‌گاه‌های ارتجاعی و اتصالات تیر به ستون با فنرهای دورانی و فنر انتقالی معادل گردید. نتایج این تحقیق به‌عنوان یک مرجع اصلی در بسیاری از آیین‌نامه‌های طراحی سازه‌های فولادی استفاده شده است. بازانت [4] و همکاران [۳]به بررسی کمانش خزشی در ستون‌های با رفتار ویسکوالاستیک پرداختند. رفتار مصالح ویسکوالاستیک به‌صورت مجموعهٔ فنر و دمپر بر اساس مدل‌های پیشنهادی کلوین[5]، مکسول[6] معادل گردید. وانگ[7] و همکاران [۴]به بررسی کمانش در اعضای سازه‌ای مختلف از جمله (ستون‌ها، تیرها و صفحات) پرداختند. صفری[8] و همکاران [۵]به بررسی پایداری ستون‌ها در یک سولهٔ صنعتی با مقطع غیر منشوری پرداختند. در مدل فوق تغییرات گشتاور دوم سطح در طول

[1] Euler
[2] Semi rigid
[3] Julian, Lawrence
[4] Bazant
[5] Kelvin
[6] Maxwell
[7] Wang
[8] Safari

تیرهای مورب و ستون‌ها به‌صورت تابع درجه دوم لحاظ گردیده است. رهایی[۹] و کاظمی[۱۰] [۶]به بررسی کمانش در ستون‌های با مقطع متغیر پلکانی پرداختند. برای حل معادله و بررسی کمانش در مودهای مختلف از روش انرژی استفاده شده است. ولی‌پور[۱۱] و بردفورد[۱۲] [۷]به بررسی ظرفیت بار بحرانی تیری با مقطع غیر منشوری و تکیه‌گاه ارتجاعی پرداختند. معادله مشخصه بر مبنای اصل کار مجازی استخراج شده است. از توابع شکل هرمیتی با درجات مختلف برای تخمین پاسخ معادله و دقت‌سنجی استفاده شده است. کنستانتاکوپولوس[۱۳] و همکاران[۸]به بررسی پایداری ستونی با اشکال مختلف تغییر مقطع در طول عضو (پله‌ای –شیب‌دار - افزایش عمق) پرداختند. ترینه[۱۴] و همکاران [۹]به مطالعه فرکانس طبیعی و ظرفیت بار بحرانی نانو تیری ساخته شده از مواد مدرج تابعی تحت بار دینامیکی و حرارتی پرداختند .بابایی[۱۵]و بهجت[۱۶] [۱۰]به بررسی بارکمانشی و فرکانس طبیعی نانو تیری بر بستر الاستیک با لحاظ اثرات غیر موضعی پرداختند. معادله حاکم بر رفتار مجموعه با استفاده از اصل کار مجاری به‌دست‌آمده است. از روش تحلیلی برای حل معادلات حاکم استفاده شده است. صفوی[۱۷] و همکاران [۱۱]روش تفاضل محدود و کار مجازی را برای محاسبه بارکمانشی ستونی با مقطع غیر منشوری ارائه دادند. نتایج تحقیق فوق قابل‌تعمیم به سایر قاب‌های با مقطع غیر منشوری است. سلطانی[۱۸] و همکاران [۱۲]به بررسی پایداری ستون‌های غیر منشوری با استفاده از ترکیب روش سری‌های توانی و بسط مک لورن پرداختند. در این تحقیق، تغییرات مقطع به‌صورت توابع توانی با درجه یک تا چهار و نیز به‌صورت تابع‌نمایی در نظر گرفته شده است. سلطانی[۱۹] و عسگریان[۲۰] [۱۳]به مطالعه کمانش جانبی - پیچشی تیرهای جدار نازک الاستیک دو سر مفصل با مقطع نامتقارن با استفاده از روش اختلاف محدود پرداختند. در ادامه به تحقیقات گذشته در حوزه پایداری دینامیکی اشاره می‌شود. بولوتین[۲۱] [۱۴]نخستین‌بار به بررسی کمانش دینامیکی سیستم‌های مکانیکی پرداخت. ایشان با معرفی یک بارگذاری دینامیکی مشخص برای سیستم دینامیکی بر مبنای روش‌های تحلیلی به مطالعه پایداری دینامیکی سیستم پرداخت. در بخشی از پژوهش ایشان، به بررسی کمانش دینامیکی ستون‌های الاستیک منشوری تحت بارمحوری دینامیکی پرداخت. پرادان[۲۲] و پادیکار[۲۳] [۱۵]به بررسی کمانش و ارتعاشات نانولولهٔ غیرهمگن با اثر متغیر غیرمحلی پرداختند. قنادپور[۲۴] و همکاران [۱۶]به بررسی کمانش و ارتعاشات تیر اولر - برنولی غیرمحلی به روش ریتز پرداختند. قیاسیان [۲۵] و همکاران[۱۷]به مطالعه کمانش دینامیکی تیری ساخته شده از مواد مدرج تابعی بر روی بستر الاستیک پرداختند. در این تحقیق، معادلات دینامیکی بر اساس اصل همیلتون تعمیم‌یافته است و از روش نیو مارک برای حل پاسخ دینامیکی معادله استفاده شده است. گائو[۲۶] و همکاران[۱۸]به بررسی کمانش دینامیکی تیر - ستون اویلر - برنولی تحت اثرات توأم میرایی و حرارت پرداختند. جلایی[۲۷] و همکاران [۱۹]به بررسی پایداری دینامیکی صفحهٔ گرافنی با اثر میرایی بر روی بستر وینکلر - پاسترناک پرداختند. معادلات حاکم بر حرکت از طریق روش انرژی و اصل همیلتون تعمیم‌یافته است. نتایج نشان می‌دهد افزایش میرایی بر مقدار فرکانس تحریک اثرگذار است. ژانگ[۲۸] و همکاران [۲۰]به مطالعه پایداری دینامیکی تیر ویسکوالاستیک مرتبه کسری پرداختند. لی[۲۹] و همکارش[۲۱]به بررسی کمانش دینامیکی ستونی لانه‌زنبوری با اثر کرنش برشی پرداختند. با احتساب کرنش برشی، نمودار بار بحرانی برحسب فرکانس تحریک به سمت چپ منتقل می شود. بمبائی چی و پاسبان [۳۰][۲۲] به مطالعه پایداری ناخطی قاب‌های فولادی ساده نا منشوری با تکیه‌گاه‌های کشسان و پیوند نیمه‌سخت پرداختند. در این پژوهش، به ارزیابی اثر عامل‌های ضریب شکل نا منشوری ستون، سختی تکیه‌گاه‌های کشسان، سختی پیوند نیمه‌سخت، برون‌محوری بار و نسبت لاغری عضوها، بر مسیر ایستایی و بار بحرانی قاب ساده پرداخته شده است. شارما و همکاران [۳۱] [۲۳]، به تجزیه‌وتحلیل مودال یک تیر مدرج تابعی با عملکرد محوری تحت اثر تغییرات دمایی پرداختند. نتایج نشان می‌دهد که افزایش توان ماده تابعی و درجه‌حرارت باعث کاهش فرکانس طبیعی بی‌بُعد تیر می‌شود. هم چنین اثر پارامترهای توان ماده تابعی و درجه حرارت به ازا شرایط مرزی مختلف بر فرکانس طبیعی بی‌بعد برای حالت های مودی مختلف پرداخت شده است. نتایج این تحقیق برای طراحی

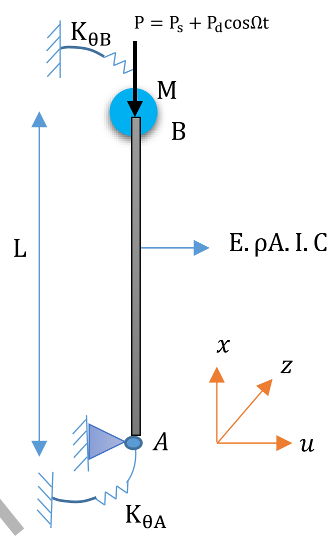
[9] Rahai
[10] Kazemi
[11] Valipour
[12] Bradford
[13] Konstantakopoulos
[14] Trinh
[15] Babaei
[16] Behjat
[17] Safavi
[18] Soltani
[19] Soltani
[20] Asgarian
[21] Bolotin
[22] Pradhan
[23] Phadikar
[24] Ghannadpour
[25] Ghiasian et al
[26] Gao
[27] Jalaei
[28] Zhang
[29] Lei
[30] Bambaeechee, Paseban
[31] Sharma et al

حسگرهای محیط کابردی است. اکباس[۳۲] [۲۴]، به مطالعه ارتعاشات اجباری تیر کنسول تیموشنکو ساخته شده از مواد مدرج تابعی پرداخت. ایشان از روش ریتز برای استخراج ماتریس های سفتی بهره گرفت و از روش شتاب متوسط نیومارک و تحلیل تاریخچه زمانی برای محاسبه حداکثر تغییرمکان تیر استفاده کرده است. آردا و آیدوگو[۳۳] [۲۵]، به بررسی ارتعاشات آزاد تیر تیموشنکو - ارنفست مدرج تابعی با روش ریتز پرداختند. اثر تغییر شکل برشی و اینرسی دورانی تیر مقطع مستطیلی با استفاده از مدل تیموشنکو-ارنفست در نظر گرفته شده است. اثر توان ماده‌ی تابعی در شرایط مرزی مختلف بر فرکانس طبیعی تیر بررسی شده است. در سال ۲۰۲۳، ساوین[۳۴] و همکاران[۲۶] مطالعه‌ای تجربی و عددی بر روی قاب‌های بتن مسلح انجام دادند که در آن سناریوی حذف ناگهانی ستون گوشه‌ای بررسی شد. آن‌ها نشان دادند که چنین سناریوهایی می‌تواند منجر به بروز خرابی پیشرونده و کاهش پایداری موضعی در سازه گردد. در همان سال، کادیم و الضعید[۳۵] [۲۷] یک مدل‌سازی اجزای محدود سه‌بعدی برای بررسی رفتار استاتیکی ستون‌های بتن مسلح مخروطی ارائه دادند. یافته‌های آن‌ها که با داده‌های آزمایشگاهی اعتبارسنجی شد، نشان داد که استفاده از مقطع متغیر می‌تواند ظرفیت باربری ستون را افزایش دهد. همچنین در سال ۲۰۲۳، اوزیل[۳۶] و همکاران [۲۸] به بررسی پایداری دینامیکی قاب‌های الماسی‌شکل با استفاده از روش اجزای محدود پرداختند. آن‌ها نتیجه گرفتند که فرم خاص هندسی این نوع قاب‌ها موجب بهبود عملکرد دینامیکی آن‌ها در برابر نوسانات خارجی می‌شود. در ادامه، نی[۳۷] و همکاران[۲۹] رفتار فشاری ستون‌های بتن مسلح با میلگردهای خورده را به‌صورت عددی مورد تحلیل قرار دادند. نتایج این تحقیق کاهش محسوس ظرفیت باربری این ستون‌ها را در اثر خوردگی نشان داد و بر لزوم لحاظ کردن اثرات خوردگی در تحلیل پایداری تأکید نمود. در سال ۲۰۲۴ نیز، فونسزا[۳۸][۳۰] تحلیل پایداری استاتیکی ستون‌های فولادی با مقاطع مربعی توخالی یکنواخت و غیریکنواخت را ارائه کرد. وی نشان داد که استفاده از مقاطع غیریکنواخت می‌تواند موجب بهبود مقاومت ستون در برابر کمانش اولیه شود.

عمدهٔ تحقیقات گذشته محدود به محاسبه بارکمانشی و فرکانس طبیعی ستون‌های منشوری یا غیر منشوری در قاب‌های خمشی یا سوله ساختمانی بوده است. بارکمانشی استاتیکی تنها بیانگر ظرفیت بار بحرانی استاتیکی قاب‌های فولادی تحت بار ثقلی است. چنانچه برای طراحی سازه لازم است پاسخ دینامیکی قاب‌های فولادی تحت بار زلزله اعم از بار جانبی و قائم نیز بررسی گردد,[۳۱ و ۳۲]در مبحث دهم مقررات ملی ساختمان[۳۳]رابطه‌ای برای محاسبه کمانش دینامیکی و بررسی رفتار دینامیکی قاب‌های فولادی تحت اثر بارگذاری محوری دینامیکی (بار زلزله قائم) پیش‌بینی‌نشده است. از طرفی عمدهٔ پژوهش‌های پیشین در حوزهٔ پایداری دینامیکی، محدود به بررسی کمانش دینامیکی در تیرها است. باتوجه‌به پژوهش‌های پیشین، ملزم است در یک مدل جامع اثر توأمان میرایی ذاتی و جرم طبقه و بار قائم زلزله بر پایداری دینامیکی ستون‌ها در قاب خمشی مهارنشده بررسی شود. بدین منظور در این مقاله کمانش دینامیکی، فرکانس طبیعی و طول مؤثر ستونی در قاب خمشی مهارنشده منشوری با اثر میرایی ذاتی و جرم متمرکز (ناشی از جرم طبقه) تحت اثر بارمحوری هارمونیک بررسی می‌شود برای شبیه‌سازی اثر بار قائم زلزله در سازه، بارمحوری به‌صورت تابعی دینامیکی کسینوسی در معادلات لحاظ می‌شود. اثر میرایی ذاتی در طول ستون نیز بر مبنای روش رایلی به‌صورت مجموع ماتریس‌های سختی مصالح و جرم در معادله لحاظ می‌شود [۳۴ و ۳۵].تکیه‌گاه‌های ستون ارتجاعی فرض می‌شود و اثر پیوند نیمه‌سخت تیر به ستون به‌صورت فنر دورانی در شرایط مرزی معادله لحاظ می‌شود. در گام نخست، معادلات تعادل حاکم بر اعضای منشوری الاستیک بر اساس فرضیه تغییر شکل‌های کوچک با استفاده از اصل همیلتون[۳۹] و به کمک روش انرژی به دست می‌آید. در ادامه، از روش توابع میان‌یابی خانواده هرمیت برای استخراج ماتریس (سختی مصالح و هندسی، جرم و میرایی) و حل معادله پایداری عضو استفاده شده و پس از جای‌گذاری شرایط مرزی و حل مسئله مقادیر ویژه، مقدار بار کمانش بحرانی استاتیکی و طول مؤثر و فرکانس طبیعی عضو تحت آنالیز پایداری تعیین می گردد. بر مبنای بار کمانش استاتیکی، بار کمانش دینامیکی تحت فرکانس‌های تحریک مختلف با استفاده از الگوریتم ریشه‌یابی مولر [۳۶[۴۰]]محاسبه می‌شود. نتایج پژوهش حاضر با نتایج تحقیقات پیشین صحت سنجی و مقایسه می‌شود.

[32] Akbaş
[33] Arda and Aydogdu
[34] Savin
[35] Kadhim, Al-Zaidee
[36] Ozil
[37] Ni
[38] Fonseca
[39] Hamilton's principle
[40] Muller

۲- الگوسازی و تعریف مسئله



شکل (۱): ستون قاب خمشی مهار نشده با اثر توامان جرم متمرکز و میرایی ذاتی

Figure 1. Unbraced moment-resisting frame column subjected to the effects of a concentrated mass and inherent damping

مطابق شکل (۱) ستونی در قاب خمشی مهارنشده با مشخصات گشتاور اول سطح I، مدول الاستیسیته E، جرم واحد طول ρA، طول L، سطح مقطع A و جرم مخصوص ρ فرض می‌شود. اثر میرایی ذاتی ستون با متغیر C و اینرسی ناشی از جرم طبقه به‌صورت جرم متمرکز با متغیر M لحاظ می‌شود. ستون موردنظر عضوی از قاب خمشی مهارنشده فرض شده، با این فرض ستون در نقطه ی انتهایی B در برابر حرکت جانبی سختی ندارد و دارای حرکت جانبی است. اثر سختی اتصالات نیمه‌سخت تیر به ستون در نقاط مرزی A و B به‌صورت فنرهای دورانی $k_{\theta A}$ و $k_{\theta B}$ لحاظ می شود. ستونهای قاب خمشی درزمان رخداد زلزله، تحت باردینامیکی زلزله (جانبی و قائم) قرار می گیرند. برای لحاظ اثر بار قائم زلزله، بار محوری P به صورت مجموع بارمحوری هارمونیک کسینوسی و استاتیکی لحاظ می شود. در ادامه معادله دیفرانسیل حاکم بر مجموعه با استفاده از روش هملیتون استخراج می شود. در ادامه‌ی فرضیات در نظرگرفته شده برای مدلسازی بیان می‌شود.

۲-۱- فرضیات کلی

- مقاطع تمامی اعضا منشوری است.
- تمامی اتصالات صلب است.
- در قاب‌های خمشی دوران دو انتهای تیر در هر طرف گره، از نظر بزرگی و جهت یکسان است که موجب انحنای مضاعف می شود و قید ناشی از گره‌ها به ستون‌های بالا و پایین به نسبت $\dfrac{EI}{L}$ توزیع می‌شود.
- نیروی فشاری قابل‌توجهی در تیرها وجود ندارد.
- تمامی ستون‌ها به‌صورت همزمان کمانش می‌کنند.
- اثر سختی دورانی فنرهای پیچشی مطابق با روش ژولیان - لارنس در نقاط مرزی معادله لحاظ می‌شود.
- اثر میرایی ذاتی مطابق با روش رایلی لحاظ می‌شود.
- در کنار اثر جرم واحد طول ستون، اثر جرم طبقات به‌صورت جرم متمرکز در نقطه انتهایی ستون اعمال می‌شود.

- پاسخ دینامیکی ستون تحت بارمحوری متناوب با استفاده از روش بولوتین در معادله لحاظ می‌شود.

مطابق تئوری تیر اولر - برنولی، فرضیه‌های ذیل برقرار است.

- سطح مقطع ستون بعد از تغییرشکل مسطح باقی می‌ماند. یعنی ستون دارای یک تغییر مکان در پلان $x-z$ و یک دوران حول محور y است.
- از اثرات اینرسی دورانی و تغییر شکل برشی در پلان $x-z$ صرف نظر می‌شود.
- زاویه دوران کوچک بوده به‌گونه‌ای که فرضیه زوایای کوچک صادق است.

۲-۲- استخراج معادله دیفرانسیل حرکت بر مبنای روش همیلتون

در این بخش با استفاده از روش همیلتون و اصل حساب تغییرات، معادله متشکله مجموعه موردنظر استخراج می‌گردد. بدین منظور باید اصل کار برای کارهای (جنبشی - پتانسیل) ناشی از (اینرسی در واحد طول ستون، اینرسی طبقه، بار کمانش محوری، میرایی ذاتی، انرژی کرنشی ستون و فنر دورانی در نقاط مرزی) نوشته شود.

به ترتیب کار جنبشی ناشی از اینرسی در طول واحد ستون و جرم متمرکز به فرم زیر نوشته می‌شود.

$$
\begin{aligned}
T_1 &= \int_0^t \frac{1}{2}\rho A\left(\frac{\partial w\,(x,t)}{\partial t}\right)^2 dt \\
T_2 &= \int_0^t \frac{1}{2}M\,\delta_d\,(x-L)\left(\frac{\partial w\,(x,t)}{\partial t}\right)^2 dt
\end{aligned}
\qquad (۱)
$$

با استفاده از اصل حساب تغییرات (عملگر وردشِی بر حسب متغیر u) رابطهٔ زیر به دست می‌آید.

$$
\begin{aligned}
\delta T_1 &= -\int_0^t \rho A\,\frac{\partial^2 w\,(x,t)}{\partial t^2}\delta w\,dt \\
\delta T_2 &= -\int_0^t M\,\frac{\partial^2 w\,(x,t)}{\partial t^2}\delta_d\,(x-L)\delta w\,dt
\end{aligned}
\qquad (۲)
$$

برای تمایز تابع دلتای دیراک $\delta_d\,(x)$ از عملگر حساب تغییرات δ، حرف d به‌صورت زیرنویس برای تابع دلتای دیراک $\delta_d\,(x)$ نوشته می شود.

کار ناشی از نیروی خارجی بار کمانش محوری به فرم زیر نوشته می‌شود.

$$
\begin{aligned}
V_1 &= -\int_0^L \frac{1}{2}\left(P_s + P_d\,\cos(\Omega t)\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dx \\
\delta V_1 &= \int_0^L \left(P_s + P_d\,\cos(\Omega t)\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\,\delta w\,dx
\end{aligned}
\qquad (۳)
$$

کار ناشی از میرایی ذاتی به فرم زیر نوشته می‌شود.

$$
\delta V_2 = \int_0^t C\,\frac{\partial w}{\partial t}\delta w\,dx \qquad (۴)
$$

کار ناشی از فنر دورانی در نقاط ابتدایی و انتهایی به فرم زیر نوشته می‌شود.

برای فنر دورانی، عملگر وردشی زیر در بازهٔ زمانی برای نقطه ابتدایی و انتهایی برقرار است. در نقطهٔ A ستون، فنر با سختی $k_{\theta A}$ مقاومت خمشی برای ستون به وجود می آورد. درنقطه ی B ستون، این مقاومت خمشی به وسیله فنری با سختی $k_{\theta B}$ حاصل می شود.

$$\delta V_3 = -\int_0^L k_{\theta A} \frac{\partial w}{\partial x} \delta_d (x-0) \delta\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) dx$$
$$\delta V_4 = \int_0^L k_{\theta B} \frac{\partial w}{\partial x} \delta_d (x-L) \delta\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) dx \qquad (۵)$$

کار پتانسیل حاصل از انرژی کرنشی ستون به فرم زیر نوشته می‌شود.

$$\delta U = EI\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(L,t)\right)\delta\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) - EI\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(0,t)\right)\delta\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)$$
$$-EI\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}(L,t)\right)\delta w + \int_0^L EI\left(\frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4}\right)\delta w\, dx \qquad (۶)$$

$$\pi = T - (U+V) \qquad (۷)$$

با استفاده از حساب تغییرات و اصل بقای انرژی رابطهٔ زیر برقرار می‌گردد:

$$\delta\pi = \delta T - \delta U - \delta V = 0$$
$$= \int_0^t \int_0^L \left[-\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - (P_s + P_d \cos(\Omega t))\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - C\frac{\partial w}{\partial t}\right]\delta w(x,t)\,dx\,dt$$
$$+\int_0^t \left[EI \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - M\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right]\delta w(L,t)\,dt + \int_0^t \left[-EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - k_{\theta B}\frac{\partial w}{\partial x}\right]\delta\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)(L,t)\,dt \qquad (۸)$$
$$+\int_0^t \left[EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + k_{\theta A}\frac{\partial w}{\partial x}\right]\delta\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)(0,t)\,dt = 0$$

پارامتر خیز جانبی $w(x, t)$ تیر مطابق اصل جداسازی متغیرها، به‌صورت ضرب $u(x)$ (پارامتر تابع شکل) در $T(t)$ (پارامتر تابع زمانی) در نظر گرفته می‌شود. از رابطهٔ پیشنهادی بولوتین [۱۴]به‌عنوان تابع پاسخ ارتعاشات دینامیکی (تابع زمانی) مجموعه استفاده می شود. در رابطهٔ زیر Ω معرف فرکانس تحریک و a_k و b_k ضرایب بسط هستند.

$$w(x,t) = u(x)\, T(t)$$
$$w(x,t) = u(x) \sum_{k=1,3,\ldots}^{\infty}\left[a_k \sin\left(\frac{k\Omega t}{2}\right) + b_k \cos\left(\frac{k\Omega t}{2}\right)\right] \qquad (۹)$$

رابطهٔ $P = P_s + P_d \cos(\Omega t)$ به فرم زیر بازنویسی می‌شود.

$$P = P_{cr}\left(\frac{P_s}{P_{cr}} + \frac{P_d}{P_{cr}}\cos(\Omega t)\right) = P_{cr}\left(\eta + \mu\cos(\Omega t)\right) \qquad (۱۰)$$

در رابطهٔ فوق $\eta = \frac{P_s}{P_{cr}}, \mu = \frac{P_d}{P_{cr}}$ است.

μ و η و P_d و P_s به ترتیب معرف متغیر ضریب بار دینامیکی بی‌بعد، ضریب بار استاتیکی بی‌بعد، ضریب بار دینامیکی و ضریب بار استاتیکی است.

با جای‌گذاری معادلهٔ (۹ و ۱۰) در معادلهٔ (۸)، معادلهٔ (۸) به‌صورت رابطهٔ (۱۱) بازنویسی می‌شود.

$$\begin{aligned}
\delta\pi &= \int_0^L \left[\frac{\rho A\Omega^2 u}{4} \mp \frac{C\,\Omega u}{2} - EI\,\frac{d^4u}{dx^4} - P_{cr}\left(\eta \pm \frac{\mu}{2}\right)\frac{d^2u}{dx^2}\right]\delta u\,dx \\
&+ \left[EI\,\frac{d^3u}{dx^3}(L) + \frac{M\,\Omega^2 u(L)}{4}\right]\delta u \\
&+ \left[-EI\,\frac{d^2u}{dx^2}(L) - k_{\theta B}\,\frac{du}{dx}(L) + EI\,\frac{d^2u}{dx^2}(0) + k_{\theta A}\,\frac{du}{dx}(0)\right]\delta\left(\frac{du}{dx}\right) = 0
\end{aligned} \tag{۱۱}$$

معادله تعادل حاکم بر مجموعه و شرایط مرزی به‌صورت زیر بیان می‌شود.

$$-EI\,\frac{d^4u}{dx^4} + \left(\frac{\rho A\Omega^2}{4} \mp \frac{C\,\Omega}{2}\right)u - P_{cr}\left(\eta \pm \frac{\mu}{2}\right)\frac{d^2u}{dx^2} = 0 \tag{۱۲}$$

شرایط مرزی نیرویی و هندسی: معادله اول جزو شرایط هندسی مسئله و معادلات دوم، سوم و چهارم با استفاده از معادله همیلتون محاسبه شده است و جزو شرایط مرزی نیرویی است.

$$\begin{aligned}
&1.\quad u(0) = 0 \\
&2.\quad EI\,\frac{d^3u}{dx^3}(L) + \frac{M\,\Omega^2}{4}u(L) = 0 \\
&3.\quad -EI\,\frac{d^2u}{dx^2}(L) - \frac{du}{dx}(L) = 0 \\
&4.\quad EI\,\frac{d^2u}{dx^2}(0) + k_{\theta A}\,\frac{du}{dx}(0) = 0
\end{aligned} \tag{۱۳}$$

چنانچه در مدل حاضر، اثر جرم متمرکز M و فنر پیچشی در نقاط ابتدایی $k_{\theta A}$ و انتهایی $k_{\theta B}$ نادید گرفته شود. شرایط مرزی هندسی برای هر دو انتهای اعضای تحلیل‌شده به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

جدول (۱): شرایط مرزی مسئله

Table 1. Boundary Conditions of the Problem

شرایط مرزی هندسی	نوع شرایط مرزی
$u(0) = u(L) = \frac{d^2u(0)}{dx^2} = \frac{d^2u(L)}{dx^2} = 0$	مفصلی - مفصلی
$u(0) = u(L) = \frac{du(0)}{dx} = \frac{d^2u(L)}{dx^2} = 0$	گیردار - مفصلی
$u(0) = \frac{du(0)}{dx} = \frac{d^2u(L)}{dx^2} = \frac{d^3u(L)}{dx^3} = 0$	گیردار–آزاد
$u(0) = \frac{du(0)}{dx} = u(L) = \frac{du(L)}{dx} = 0$	گیردار–گیردار

از رابطهٔ پیشنهادی ژولیان و لارنس [۲]برای لحاظ اثر سختی خمشی پیوندهای نیمه‌سخت تیرهای پیرامونی در قاب خمشی استفاده می‌شود. L_b, E_b, I_b به ترتیب برابر گشتاور دوم سطح،مدول الاستسیته و طول تیرهای پیرامونی است.

$$k_{\theta A}=\sum\frac{6E_bI_b}{L_b},k_{\theta B}=\sum\frac{6E_bI_b}{L_b} \tag{۱۴}$$

بر اساس فرض رایلی، ماتریس میرایی سازه، متناسب با ترکیب خطی ماتریس‌های جرم و سختی آن لحاظ می‌شود.[۲۹]

$$C=\alpha[\rho A]+\beta[K_S] \tag{۱۵}$$

در رابطهٔ فوق K_Sو ρA و C به ترتیب ماتریس سختی ستون، ماتریس جرم، ماتریس میرایی هستند. αو β ضرایب میرایی هستند که براساس نسبت های میرایی مربوط به دو مود ارتعاشی مشخص سازه ω_i,ω_j در دو فرکانس مشخص تعیین می گردند. (ζ برابر با درصد میرایی است و مقادیری از (۱تا۵٪)دارد). [۳۰]

$$\alpha=\frac{2\zeta\omega_i\omega_j}{\omega_i+\omega_j},\beta=\frac{2\zeta}{\omega_i+\omega_j} \tag{۱۶}$$

۳-۲- حل معادله با روش اجزا محدود

در بخش قبل معادله حاکم بر مجموعه (۱۲) و شرایط مرزی مسئله (۱۳) بر مبنای روش همیلتون استخراج شد. در این بخش بر مبنای روش عددی اجزاء محدود معادله مذکور بررسی می‌شود. بدین منظور لازم است ابتدا شکل ضعیف معادله تشکیل شود. در گام بعدی، توابع شکل از نوع درجه سوم برای استخراج ماتریس‌های اجزاء فرض می‌گردند. در ادامه ماتریس‌های سختی اجزاء به‌ازای ۵۰ جزء محاسبه می‌شود. در ادامه، ماتریس سختی ستون به‌وسیله تجمیع ماتریس‌های سختی اجزاء محاسبه می‌شود. برای افزایش دقت در حل، معادله متشکله به‌ازای ۵۰ جزء بررسی می‌شود.

۳-۲- ۱ - شکل ضعیف شده معادله مجموعه

در پژوهش حاضر از روش اجزاء محدود برای حل معادله متشکله استفاده می‌شود. در روش اجزا محدود، تابع باقیمانده در تابع وزنی ضرب شده و از حاصل آن انتگرال‌گیری می‌شود. پاسخ به‌صورت معادله نمایش داده می‌شود. دراین‌رابطه $v(x)$ تابع وزن است که باید نسبت به x حداقل دوبارمشتق پذیر باشد.

$$\begin{aligned}&\int_0^L R(x)v(x)dx=0\\&\int_{x_e}^{x_{e+1}}v(x)\left[\frac{\rho A\Omega^2u}{4}\mp\frac{C\Omega u}{2}-EI\frac{d^4u}{dx^4}-P_{cr}\left(\eta\pm\frac{\mu}{2}\right)\frac{d^2u}{dx^2}\right]dx=0\end{aligned} \tag{۱۷}$$

معادله (۱۷) دو بار انتگرال‌گیری جز به جز گردیده تا دومرتبه مشتق‌گیری با تابع وزن $v(x)$ مبادله گردد و دو مرتبه مشتق گیری روی متغیر وابسته $u(x)$ باقی بماند. در نهایت شکل ضعیف معادله به شکل رابطه زیر محاسبه می شود.

$$\begin{aligned}&\int_0^L\left[-EI\frac{d^2v}{dx^2}\frac{d^2u}{dx^2}+P_{cr}\left(\eta\pm\frac{\mu}{2}\right)\frac{dv}{dx}\frac{du}{dx}+\left(\frac{\rho A\Omega^2}{4}\mp\frac{C\Omega}{2}\right)uv\right]dx-v(L)\frac{d^3u}{dx^3}(L)\\&+v(0)\frac{d^3u}{dx^3}(0)+\frac{dv}{dx}(L)\frac{d^2u}{dx^2}(L)-\frac{dv}{dx}(0)\frac{d^2u}{dx^2}(0)=0\\&-\int_0^L\left[EI\frac{d^2v}{dx^2}\frac{d^2u}{dx^2}-P_{cr}\left(\eta\pm\frac{\mu}{2}\right)\frac{dv}{dx}\frac{du}{dx}+\left(-\frac{\rho A\Omega^2}{4}\mp\frac{C\Omega}{2}\right)uv\right]dx-v(L)\frac{M\Omega^2}{4}u(L)\\&+\left(\frac{dv}{dx}(L)-k_{\theta B}\frac{du}{dx}(L)\right)-\left(\frac{dv}{dx}(0)k_{\theta A}\frac{du}{dx}(0)\right)=0\end{aligned} \tag{۱۸}$$

۳-۲- ۲-حل معادله با روش اجزا محدود (استفاده از توابع میان‌یابی هرمیتی)

باتوجه‌به اینکه در معادله (۱۸) چهار شرط در یک جز (برای هر گره دو عدد) برقرار است. ایجاب می‌کند که توابع میان‌یابی یک جز دارای مشتقات غیرصفر و تا مرتبه دو پیوسته باشند. انتخاب توابع میان‌یابی از نوع درجه سوم هرمیت (با پیوندی درجه سه) برای حل معادله استفاده می‌شود. (در این معادله L_e برابر با طول هر جز می باشد). در ادامه جملات اول تا چهارم توابع شکل نوشته می شود.

$$u(x)=\sum_{j=1}^{4}c_j\phi_i^e,\quad V(x)=\sum_{j=1}^{4}\phi_i^e \tag{۱۹}$$

$$\begin{aligned}\phi_1&=\frac{(L_e-x)^2(L_e+2x)}{L_e^3},\quad \phi_2=-\frac{x(L_e-x)^2}{L_e^2}\\ \phi_3&=\frac{x^2(3L_e-2x)}{L_e^3},\quad \phi_4=\frac{x^2(L_e-x)}{L_e^2}\end{aligned} \tag{۲۰}$$

مدل اجزا محدود معادله حاکم با جایگزینی میان‌یابی اجزا محدود معادله (۱۹) برای u، و ϕ_j^e برای تابع وزن v در شکل ضعیف معادله (۲۰) حاصل می گردد. از آنجا که چهار متغیر گرهی موجود است. برای بدست آوردن چهار معادله جبری، چهار انتخاب مختلف برای v، $v_1=\phi_1^e$ و ... و $v_4=\phi_4^e$ مورد استفاده قرار می گیرد. معادله جبری مدل اجزاء محدود عبارت است از :

$$\sum_{j=1}^{4}\left[\int_{x_e}^{x_{e+1}}EI\,\frac{d^2\phi_i^e}{dx^2}\frac{d^2\phi_j^e}{dx^2}-P_{cr}\left(\eta\pm\frac{\mu}{2}\right)\frac{d\phi_i^e}{dx}\frac{d\phi_j^e}{dx}+\left(-\frac{\rho A\Omega^2}{4}\mp\frac{C\Omega}{2}\right)\phi_i^e\phi_j^e\,dx\right]-Q_i^e=0 \tag{۲۱}$$

$$\sum_{j=1}^{4}\left(K_{ij}^e u_j^e-Q_j^e\right)=0 \tag{۲۲}$$

$$\begin{aligned}K_{ij}^{e(S)}&=\int_{x_e}^{x_{e+1}}EI\,\frac{d^2\phi_i^e}{dx^2}\frac{d^2\phi_j^e}{dx^2}dx\\ K_{ij}^{e(G)}&=-\int_{x_e}^{x_{e+1}}P_{cr}\left(\eta\pm\frac{\mu}{2}\right)\frac{d\phi_i^e}{dx}\frac{d\phi_j^e}{dx}dx\\ M_{ij}^e&=-\int_{x_e}^{x_{e+1}}\frac{\rho A\Omega^2}{4}\phi_i^e\phi_j^e\,dx\\ C_{ij}^e&=\mp\int_{x_e}^{x_{e+1}}\frac{C\Omega}{2}\phi_i^e\phi_j^e\,dx\end{aligned} \tag{۲۳}$$

$$\left[K_S-P_{cr}\left(\eta\pm\frac{\mu}{2}\right)K_G-\frac{\Omega^2}{4}M\mp\frac{\Omega}{2}C\right]X-Q=0 \tag{۲۴}$$

در رابطهٔ (۲۳) $K_{ij}^{e(S)}$ و $K_{ij}^{e(G)}$ و C_{ij}^e و M_{ij}^e و Q_i و X_{ij} به ترتیب معرف ماتریس سختی مصالح، ماتریس سختی هندسی، ماتریس میرایی، ماتریس جرم، بردار نیروی جزء ستون و ماتریس بردار ویژه می باشد. رابطه ی (۲۴) رابطه مورد نظر برای محاسبه مقدار ضریب بار دینامیکی بی بعد است. رابطه مذکور از نوع مقدار ویژه است. برای حل لازم است از روش های ریشه یابی عددی استفاده شود.

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{K}_{ij}\ \mathrm{U}_i = \mathrm{Q}_i\\
&K_{11}U_1 + K_{12}\theta_1 + \cdots + K_{1n}\theta_n = 0\\
&K_{21}U_1 + K_{22}\theta_2 + \cdots + K_{2n}\theta_n = -k_{\theta A}\theta_2\\
&.\\
&.\\
&.\\
&K_{(n-1)1}U_1 + K_{(n-1)2}\theta_1 + \cdots + K_{(n-1)(n-1)}\theta_n = -\frac{M\,\Omega^2}{4}U_{n-1}
\end{aligned}
\qquad (۲۵)
$$

ماتریس K معرف ماتریس کل است. ماتریس فوق از تجمیع تمامی ماتریس‌های سختی مصالح، سختی هندسی، میرایی ذاتی و اینرسی در طول ستون محاسبه می‌شود. در این معادله، تغییر مکان U و دوران θ دو متغیر مجهول هستند. مشخص گردید که اثر متغیرهای جرم متمرکز M و سخت‌های دورانی $k_{\theta A}$ و $k_{\theta B}$ به صورت شرایط مرزی در معادله و در بردار نیروی جزء ستون Q اعمال می شود. با توجه به خواص روش اجزا محدود، مقدار جرم متمرکز و فنرهای دورانی، به ترتیب با ماتریس جرم ستون M_{ij} و ماتریس سختی مصالح K_{ij} تجمیع می شود.

برای محاسبه فرکانس طبیعی مجموعه کافی است اثر ماتریس سختی میرایی و ماتریس سختی هندسی لحاظ نشود. هم چنین برای محاسبه بار بحرانی استاتیکی کافی است اثر ماتریس جرم و میرایی لحاظ نگردد و بردار ویژه مجموعه محاسبه شود.

محاسبه فرکانس طبیعی مجموعه:

$$\left|K_S - \omega^2 M\right| = 0 \qquad (۲۶)$$

محاسبه بار بحرانی استاتیکی مجموعه:

$$\left|K_S - P_{cr}K_G\right| = 0, \quad \mu = 0 \qquad (۲۷)$$

برای ساده‌سازی روابط از بی‌بُعد سازی متغیرها استفاده می‌شود.

$$\varpi = \omega\sqrt{\frac{\rho A L^4}{EI}}, \bar{k}_{\theta A} = \frac{\sum \frac{6E_b I_b}{L_b}}{\frac{EI}{L}}, \bar{k}_{\theta B} = \frac{\sum \frac{6E_b I_b}{L_b}}{\frac{EI}{L}}, \bar{P}_{cr} = \frac{P_{cr}L^2}{EI} \qquad (۲۸)$$

متغیر طول مؤثر یکی از متغیرهای است که در مقاله‌های حاضر بررسی می‌شود. بدین منظور سعی می‌شود با استفاده از روابط ریاضی، متغیر طول مؤثر متناظر با کمانش دینامیکی K_d بر حسب ضریب بار دینامیکی بی بعد μ و ظرفیت بار بحرانی P_{cr} و مدول الاستیسیته E و گشتاور دوم سطح I بازنویسی شود.(متغیر K همان طول موثر اولر است. با توجه به وابستگی متغیر طول موثر در حالت دینامیکی به متغیر فرکانس تحریک Ω ، برای تمایز متغیر طول موثر دینامیکی با متغیر طول موثر استاتیکی، متغیر طول موثر متناظر با کمانش دینامیکی به صورت K_d معرفی می شود.)

$$K_d(\Omega) = \sqrt{\frac{\pi^2 EI}{\mu P_{cr} L^2}} \qquad (۲۹)$$

همان‌طور که ذکر گردید از فرضیات بولوتین [۱۴] برای حل معادله استفاده شده است. در این روش برای بررسی پایداری دینامیکی فرض می گردد که بار محوری دینامیکی کسینوسی به فرم معادله‌ی (۱۰) بر سازه وارد می شود. در این حالت خاص، محقق معادله‌ی (۹) را به عنوان تابع زمانی برای پیش‌بینی رفتار و پایداری دینامیکی سازه در این شرایط خاص بارگذاری در نظر گرفته است. با این حال

می توان بر مبنای روش سری فوریه، توابع مختلف (تابع ضربه یا تابع خطی و ...) را در نهایت بر مبنای توابع مثلثاتی بازنویسی کرد. پس می توان گفت که با سری فوریه پایداری دینامیکی توابع مختلف را بررسی کرد.

مطابق با مبحث دهم مقررات ملی ساختمان [۲۸] ضریب لاغری ستون، پارامتری برای محاسبه ظرفیت بار بحرانی ستون های لاغر تحت کمانش خمشی است. این پارامتر وابسته به ضریب طول موثر k ، طول L و شعاع ژیراسیون r عضو است.

$$\lambda = \frac{kL}{r} \tag{۳۰}$$

مطابق با رابطهٔ (۲۹) مشخص گردید که طول موثر در حالت دینامیکی وابسته به فرکانس تحریک است. با توجه به رابطه ی (۳۰) و تلفیق آن با رابطه (۲۹) مشخص می‌شود که با وجود رابطه‌ی مستقیمی بین ضریب لاغری و طول موثر، ضریب لاغری نیز در حالت دینامیکی به فرکانس تحریک وابسته است.

رابطهٔ ضریب لاغری در حالت دینامیکی به‌صورت زیر است:

$$\lambda_d(\Omega) = \frac{\sqrt{\dfrac{\pi^2 EI}{\mu P_{cr} L^2}}\, L}{r} \tag{۳۱}$$

۳-بحث روی نتایج

رابطهٔ (۲۴) رابطه موردنظر برای محاسبه مقدار ضریب بار دینامیکی بی‌بعد است. اثبات گردید که مقادیر سختی مصالح، میرایی ذاتی، جرم متمرکز و سختی دورانی تکیه‌گاه‌های ارتجاعی بر مقدار متغیر فوق اثرگذار است. رابطهٔ فوق یک معادله با مقادیر ویژه است. برای حل این معادله لازم مقدار ضریب بار دینامیکی بی‌بعد به‌ازای مقادیر مختلف فرکانس تحریک ریشه‌یابی شود. بدین منظور از روش ریشه یابی مولر برای حل استفاده می‌شود. برای دقت در ریشه‌یابی تأثیر مقادیر فرکانس تحریک بر معادله متشکله با گام ۰/۰۱ بررسی می شود.

همان‌طور که اشاره گردید از روش اجزا محدود برای محاسبه تابع شکل معادله استفاده شده است. جهت همگرایی پاسخ‌ها، معادله با تابع هرمیتی با سری توانی مرتبه سوم به‌ازای ۵۰ جزء بررسی می‌شود. مشخصات مکانیکی ستون به‌صورت جدول زیر در نظر گرفته می‌شود. در ادامه با لحاظ مشخصات مکانیکی مذکور برای ستون، تأثیر متغیرهای جرم متمرکز، میرایی ذاتی، سختی دورانی تکیه‌گاه‌های ارتجاعی بر متغیر ضریب بار دینامیکی بی‌بعد بررسی می‌شود.

جدول (۲): مشخصات ستون

Table 2. Column Specifications

طول ستون	$L = 10m$	مدول الاستیسیته فولاد	$E_s = 210Gpa$
سطح مقطع ستون (INP220)	$A = 3.95*10^{-3} m^2$	جرم مخصوص فولاد(St37)	$\rho_s = 7845 \frac{kg}{m^3}$
ممان اینرسی ستون (INP220)	$I = 30.6*10^{-6} m^4$	جرم واحد طول ستون	$m = 30.99 \frac{kg}{m}$
ضریب بار استاتیکی بی بعد	$\eta = 0.5$		

۳-۱-بررسی و صحت سنجی نتایج

نخست برای صحت سنجی نتایج حاصل از این تحقیق، به مقایسه نتایج مدل پیشنهادی با مدل‌های ارائه شده توسط محققین پرداخته می‌شود. مقادیر فرکانس طبیعی و ظرفیت بار بحرانی ستون به‌عنوان دو متغیر پایه و تأثیرگذار در مقالهٔ حاضر بوده و به‌عنوان فصل مشترک نتایج مقالهٔ حاضر و تحقیقات پیشین تلقی می‌شوند. بدین منظور باید مقادیر این دو متغیر برای مقالهٔ حاضر و نتایج پژوهش‌های قبلی در موارد مطالعاتی مشترک مطابقت کنند.

ژولیان و لارنس [۲]رابطهٔ زیر را برای محاسبه طول مؤثر ستون‌ها در قاب‌های خمشی مهارنشده ارائه کرده‌اند. با استفاده از این فرمول مقدار طول مؤثر و ظرفیت بار بحرانی ستون محاسبه می‌شود. از نتیجه این پژوهش برای صحت سنجی مقاله حاضر استفاده می‌شود.

$$\left(\left(\frac{\pi}{K}\right)^2\frac{G_AG_B}{36}-1\right)\tan\left(\frac{\pi}{K}\right)-\frac{G_A+G_B}{6}\left(\frac{\pi}{K}\right)=0$$
$$G_A=\frac{6}{\bar{k}_{\theta A}},\quad G_B=\frac{6}{\bar{k}_{\theta B}} \qquad (۳۲)$$

در رابطهٔ فوق G_A و G_B و K به ترتیب بیانگر نسبت سختی ستون به تیر در اتصالات نیمه سخت در نقاط ابتدایی و انتهایی، طول موثرستون است. رابطه فوق با استفاده از روش های ریشه یابی ساده قابل حل است.

سلطانی و همکاران [۱۲]به بررسی پایداری ستون‌های غیر منشوری با استفاده از ترکیب روش سری‌های توانی و بسط مک لورن پرداختند. در بخشی از این تحقیق، ظرفیت بار بحرانی بی‌بُعد عضو برای شرایط مرزی ایده‌آل (مفصلی --مفصلی، گیردار - مفصلی، گیردار - گیردار، گیردار - آزاد) بدون اثر عضو غیر منشوری محاسبه شده است. پرادان و پادیکار [۱۵] به بررسی کمانش و ارتعاشات نانولولهٔ غیرهمگن با اثر متغیر غیرمحلی پرداختند. در این بخشی تحقیق، فرکانس طبیعی بی‌بعد و ظرفیت بار بحرانی بی‌بعد عضو تحت شرایط مرزی ایده‌آل بدون اثر متغیر غیرمحلی بررسی شده است. قنادپور و همکاران [۱۶] به بررسی کمانش و ارتعاشات تیر اولر - برنولی با اثر متغیر غیرمحلی به روش ریتز پرداختند. در بخشی از این تحقیق، ظرفیت بار بحرانی بی‌بعد و فرکانس طبیعی بی‌بعد عضو در شرایط مرزی ایده‌آل بدون اثر متغیر غیرمحلی بررسی شده است. فرکانس طبیعی و ظرفیت بار بحرانی دو متغیر تأثیرگذار و پایه در تمامی پژوهش‌های مذکور و مقالهٔ حاضر هستند. بدین منظور برای صحت سنجی و مقایسه نتایج مقالهٔ حاضر با تحقیقات مذکور، تأثیر سختی دورانی تکیه‌گاه‌های نیمه‌سخت، میرایی ذاتی در طول عضو و جرم متمرکز بر مقادیر فرکانس طبیعی بی‌بعد و ظرفیت بار بحرانی بی‌بعد لحاظ نمی‌شود و معادله در حالت های خاص بررسی می‌شود. در مقالهٔ حاضر معادله متشکله به‌ازای (۵،۲۰،۵۰) جزء (N) حل می‌شود. در جدول زیر مقادیر (فرکانس طبیعی بی‌بعد و بار بحرانی بی‌بعد) به‌ازای (۵،۲۰،۵۰) جزء (N) جهت صحت سنجی مقالهٔ حاضر آورده می‌شود.

جدول (۳): مقادیر فرکانس طبیعی بی‌بعد برای ستونی با شرایط مرزی مختلف

Table 3. Dimensionless Natural Frequency Values for a Column with Various Boundary Conditions

شرایط مرزی	پرادان و پادیکار [۱۵]	قنادپور و همکاران [۱۶]	نتایج جدید		
	ϖ		ϖ		
			N=5	N=20	N=50
مفصلی - مفصلی	۹/۸۶۹۶	۹/۸۶۹۷	۹/۸۷۷۶	۹/۸۶۹۶	۹/۸۶۹۶
گیردار - مفصلی	۱۵/۴۱۸۲	۱۵/۴۱۸۲	۱۵/۴۴۸۵	۱۵/۴۱۸۲	۱۵/۴۱۸۲
گیردار - گیردار	۲۲/۳۷۳۳	۲۲/۳۷۳۳	۲۲/۴۶۴۸	۲۲/۳۷۳۳	۲۲/۳۷۳۳
گیردار - آزاد	۳/۵۱۶۰	۳/۵۱۶۰	۳/۵۱۶۴	۳/۵۱۶۰	۳/۵۱۶۰
$G_B=G_A=1$	-	-	۴/۰۵۲۸	۴/۰۵۲۲	۴/۰۵۲۲

شرایط مرزی	پرادان و پادیکار [۱۵]	قنادپور و همکاران [۱۶]	نتایج جدید		
	ϖ		ϖ		
			N=5	N=20	N=50
$G_B = G_A = 2$	-	-	۳/۳۴۴۴	۳/۳۴۴۰	۳/۳۴۴۰
٪ خطا	-	-	٪ ۰/۲	۰	۰

جدول (۴): مقادیر بار بحرانی بی‌بعد برای ستونی با شرایط مرزی مختلف

Table 4. Dimensionless Critical Load Values for a Column with Various Boundary Conditions

شرایط مرزی	ژولیان و لارنس [۲]	سلطانی و همکاران [۱۲]	قنادپور و همکاران [۱۶]	نتایج جدید		
		$\bar{P}_{cr}$		$\bar{P}_{cr}$		
				N=5	N=20	N=50
مفصلی - مفصلی	۹/۸۶۹۶	۹/۸۶۹۶	۹/۸۶۹۶	۹/۸۸۵۲	۹/۸۶۹۶	۹/۸۶۹۶
گیردار - مفصلی	۲۰/۱۹۰۷	۲۰/۱۹۰۷	۲۰/۱۹۰۷	۲۰/۳۱۴۶	۲۰/۱۹۰۷	۲۰/۱۹۰۷
گیردار - گیردار	۳۹/۷۴۸۴	۳۰/۷۴۸۴	۳۹/۷۴۸۴	۲۰/۳۴۳۲	۳۹/۷۴۸۴	۳۹/۷۴۸۴
گیردار - آزاد	۲/۶۴۷۴	۲/۲۶۷۴	۲/۴۶۷۴	۲/۴۶۷۷	۲/۴۶۷۴	۲/۴۶۷۴
$G_B = G_A = 1$	۵/۶۸۷۸	-	-	۵/۶۸۹۴	۵/۶۸۷۸	۵/۶۸۷۸
$G_B = G_A = 2$	۳/۹۰۶۵	-	-	۳/۹۰۶۸	۳/۹۰۶۵	۳/۹۰۶۵
٪ خطا	-	-	-	٪ ۰/۶	۰	۰

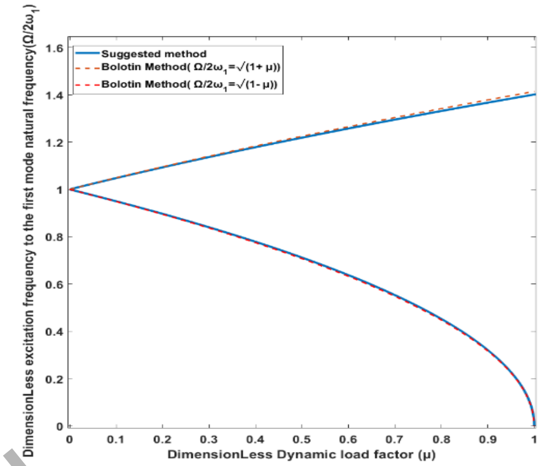
مطابق جداول فوق مشخص است که نتایج پژوهش حاضر شامل مقادیر فرکانس طبیعی بی‌بُعد و بار کمانش بحرانی بی‌بعد به‌ازای شرایط مرزی مختلف، تطابق بسیار خوبی با نتایج ارائه‌شده در مطالعات پیشین دارد. این مقایسه به‌گونه‌ای انجام شده که ابتدا تعداد اجزای محدود کم (N=5) انتخاب و سپس با افزایش آن به ۲۰ و ۵۰، روند همگرایی نتایج بررسی شده است. مشاهده می‌شود که حتی با تعداد جزء محدود نیز حداکثر خطا در حدود ۰,۵ درصد بوده و با افزایش تعداد اجزا، این خطا به صفر میل می‌کند.

در واقع، انتخاب تعداد اجزای ۵، ۲۰ و ۵۰ در این پژوهش به‌منظور انجام تحلیل همگرایی عددی صورت گرفته است تا پایداری و دقت حل اجزای محدود بررسی شود. این روند نشان می‌دهد که مدل عددی مورد استفاده دارای دقت کافی و پاسخ آن مستقل از اندازه مش انتخابی است، به‌طوری که پس از N=20 تغییر محسوسی در نتایج مشاهده نمی‌شود و پاسخ‌ها به مقادیر مرجع همگرا می‌شوند.

در ادامه شکل (۲) برای صحت سنجی، نتایج تحقیق حاضر با نتایج پژوهش بولوتین[۱۴] ضمیمه می‌شود. در مدل بولوتین پایداری دینامیکی یک ستون دو سر ساده تنها با اثر جرم در واحد طول به روش تحلیلی بررسی شده است. در حالی‌که در پژوهش حاضر، پایداری دینامیکی ستون با لحاظ اثر میرایی ذاتی، جرم متمرکز و تکیه‌گاه ارتجاعی بررسی می‌شود. برای صحت سنجی پژوهش حاضر با مدل بولوتین باید اثر میرایی ذاتی، جرم متمرکز و تکیه‌گاه ارتجاعی نادیده گرفته شود و تنها اثر جرم در طول ستون به ازای شرایط مرزی گیردار – مفصلی بررسی شود.

شکل ذیل نمودار تغییرات ضریب بار دینامیکی بی‌بُعد ستونی دو سرساده را برحسب نسبت فرکانسی (فرکانس تحریک به فرکانس طبیعی) بی‌بعد نمایش می‌دهد. محقق رابطهٔ ذیل برای محاسبه ضریب بار دینامیکی بی‌بعد برحسب نسبت فرکانسی ارائه کرده است.

$$\frac{\Omega}{2\omega_k} = \frac{\sqrt{1 \pm \mu}}{k} \quad (۳۳)$$



شکل ۲: نمودار تغییرات ضریب بار دینامیکی بی‌بعد بر حسب نسبت فرکانس تحریک به فرکانس طبیعی مود اول بی‌بعد

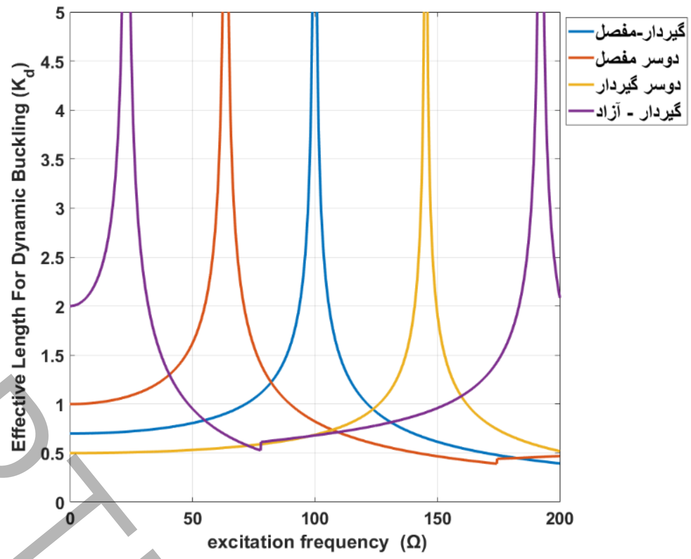
Figure 2. Dimensionless Dynamic Load Factor Variation versus the Ratio of Excitation Frequency to the Dimensionless First Mode Natural Frequency

در شکل فوق نمودار تغییرات ضریب بار دینامیکی بی‌بُعد برحسب نسبت فرکانسی بی‌بعد ستونی با شرایط مرزی گیردار – مفصلی تنها با اثر جرم واحد طول ترسیم می‌شود. باتوجه به نمودار مشخص می‌شود. اگر مقدار نسبت بی‌بعد فرکانس تحریک به فرکانس طبیعی مود اول برابر $\frac{\Omega}{2\omega_1}=1$ باشد. در این صورت ضریب پایداری دینامیکی برابر صفر است. این وضعیت که به وضعیت تشدید معروف است. در این حالت مجموعه دچار وضعیت ناپایداری دینامیکی می گردد. در صورتیکه مقدار نسبت فرکانسی بی بعد برای صفر لحاظ گردد. مقدار ضریب بار دینامیکی بی بعد برابر ۱ می گردد. نمودار فوق مبین این است که نتایج تحقیق حاضر با نتایج تحقیق پیشین هم خوانی دارد.

مطابق با مبحث دهم مقررات ملی ساختمان [۲۸] و نرم افزارهای تحلیل و طراحی های ساختمان های فولادی (Etabs و Sap 2000) بر مبنای این آیین نامه های معتبر کدنویسی شده اند. قابل ذکر است که در نرم افزار های مذکور از روش تحلیل الاستیک مرتبه دوم (روش های کاهش سختی با ضریب τ متغیر یا کاهش سختی با ضریب τ ثابت) برای بررسی پایداری سازه ها استفاده شده است. روش های فوق بر مبنای تحلیل الاستیک مرتبه ی دوم است و اثر $P-\Delta$ و $P-\delta$ ناشی از لنگر ثانویه بار محوری و کاهش سختی متناظر با آن در حالت استاتیکی بر سازه در نظر گرفته می شود. در این حالت ضریب طول موثر و ظرفیت بار بحرانی ستون تنها با فرض کاهش سختی ناشی از لنگر ثانویه در حالت استاتیکی محاسبه می شود. در واقع رفتار دینامیکی سازه در نرم افزار تعریف نشده است و تنها ماتریس های سختی مصالح و سختی هندسی در نرم افزار مدلسازی شده است و نرم افزار برای محاسبه ی ظرفیت بار کمانشی پارامترهای دینامیکی (جرم و میرایی) را لحاظ نمی کند. در حالیکه در مقاله ی حاضر، با تجمیع فرضیات روش بولوتین [۱۴] و روش ژولیان – لارنس [۲] پایداری دینامیکی ستون قابل ارزیابی است. به همین دلیل سعی شده که تنها با تکیه بر منابع معتبر موجود نتایج مقاله صحت سنجی شود. در شکل (۲) نتایج مقاله در حالتی خاص با پژوهش بولوتین مقایسه شده است. قابل ذکر است که ایشان از روش تحلیلی برای حل معادله استفاده کرده اند اما در مقاله ی حاضر، از روش اجزا محدود برای مدلسازی سختی پیچشی اتصالات نیمه سخت استفاده شده است. با توجه به ویژگی های خاص این روش به سهولت روش مرزی خاص و جرم متمرکز معادل شده است.

۳-۲-تأثیر سختی دورانی تکیه‌گاه ارتجاعی بر متغیرهای ضریب بار دینامیکی و طول مؤثر

در این بخش به تأثیر تکیه‌گاه‌های مختلف اعم (مفصلی - گیردار، گیردار - گیردار و دوسر مفصلی) مطابق جدول (۱) و تکیه‌گاه ارتجاعی با اتصالات نیمه‌سخت بر ضریب بار دینامیکی و طول مؤثر متناظر با کمانش دینامیکی مطبق معادله (۱۳) پرداخته می‌شود.



شکل ۳: نمودار تغییرات طول مؤثر متناظر با کمانش دینامیکی بر حسب فرکانس تحریک برای ستون (گیردار - آزاد، دو سر مفصلی، گیردار - مفصلی، گیردار - گیردار) بدون میرایی ذاتی

Figure 3. Effective Length Variation Corresponding to Dynamic Buckling versus Excitation Frequency for Columns (Clamped-Free, Pinned-Pinned, Clamped-Pinned, Clamped-Clamped) without Inherent Damping

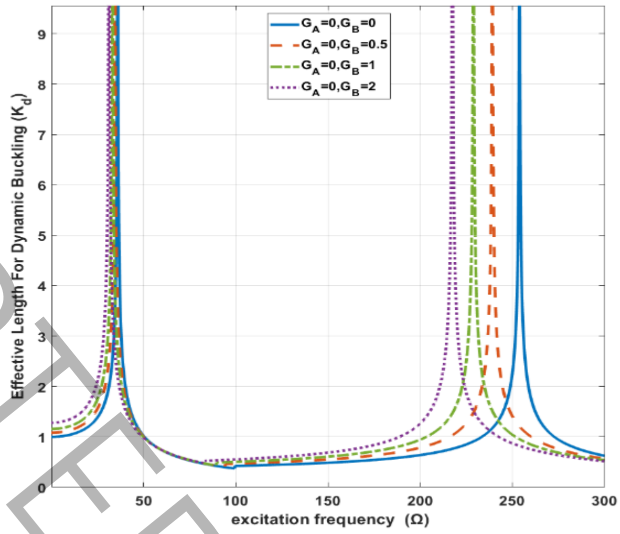
مطابق شکل فوق مشخص است که تغییرات طول مؤثر متناظر با کمانش دینامیکی بر حسب فرکانس تحریک به‌صورت تابع‌نمایی است. در نقطهٔ خاصی (نقطهٔ تکینی) مقدار طول مؤثر متناظر با کمانش دینامیکی برابر عدد بزرگی است. این نقطهٔ خاص در بحث پایداری، فرکانس تشدید نام دارد. در واقع ستون تحت باری با مقدار فرکانس تشدید ناپایدار می‌گردد. مبین است که نوع شرایط مرزی بر پایداری دینامیکی و مقادیر فرکانس تشدید عضو اثرگذار است. تغییرات طول مؤثر متناظر با کمانش دینامیکی بر حسب فرکانس تحریک شامل سه بخش می‌شود. اگر مقدار فرکانس تحریک بی‌بُعد صفر گردد. مقدار طول مؤثر متناظر با کمانش دینامیکی برابر طول موثر استاتیکی است. تغییرات طول مؤثر متناظر با کمانش دینامیکی از فرکانس تحریک بی‌بعد ($\bar{\Omega}=0$) تا فرکانس تشدید به صورت صعودی است و طول مؤثر متناظر با کمانش دینامیکی به ازای فرکانس تشدید مقدار بسیاربزرگی دارد. تغییرات طول مؤثر متناظر با کمانش دینامیکی از فرکانس تشدید به بعد به صورت نزولی است. در این محدود به ازای مقادیری از فرکانس تحریک، طول مؤثر متناظر با کمانش دینامیکی مقداری کمتر از طول موثر استاتیکی را داراست. از لحاظ تجربی هیچ وقت ظرفیت کمانشی دینامیکی از ظرفیت کمانشی استاتیکی بزرگتر نیست. در واقع ظرفیت بار کمانشی تابع مشخصات فیزیکی مقطع است و پارامتر فرکانس تحریک بعنوان عامل کاهنده بر ظرفیت بارکمانشی دینامیکی اثر گذار است. اگر در نواحی خاصی طول مؤثر متناظر با کمانش دینامیکی از طول موثر استاتیکی کمتر باشد. لازم است برای طراحی همان مقدار طول مؤثر استاتیکی مد نظر قرار گیرد. به‌ازای مقادیر ۲۳,۱-۶۳,۱۵-۹۹,۹-۱۴۵,۳۵ به ترتیب برای شرایط مرزی (گیردار - گیردار، گیردار - مفصل، دو سرفصل و گیردار - آزاد) مقدار طول مؤثر متناظر با کمانش دینامیکی برابر با بی‌نهایت است.

جدول ۵): مقادیر فرکانس تشدید و طول مؤثر برای ستون با شرایط مرزی مختلف

Table 5. Resonance Frequency and Effective Length Values for Columns with Various Boundary Conditions

شرایط مرزی / متغیرها	گیردار - آزاد	گیردار - گیردار	گیردار - مفصلی	مفصلی - مفصلی
Ω_r (تشدید فرکانس)	۲۳/۱	۱۴۵/۳۵	۹۹/۹	۶۳/۸
ω_1 (Hz) (فرکانس طبیعی مود اول)	۱۵/۸۶۹۴	۱۰۰/۹۸۰۸	۶۹/۵۸۹۴	۴۴/۵۴۶۰

متغیرها \ شرایط مرزی	گیردار - آزاد	گیردار - گیردار	گیردار - مفصلی	مفصلی - مفصلی
K	۲	۰,۵	۰,۷	۱



شکل ۴: نمودار تغییرات طول مؤثر متناظر با کمانش دینامیکی بر حسب فرکانس تحریک برای ستون با تکیه‌گاه ارتجاعی بدون میرایی ذاتی

Figure 4. Effective Length Variation Corresponding to Dynamic Buckling versus Excitation Frequency for a Column with Elastic Supports without Inherent Damping

شکل فوق تغییرات طول مؤثر متناظر با کمانش دینامیکی بر حسب فرکانس تحریک را نشان می‌دهد. مشخص است که با افزایش متغیر G_B به ازای G_Aثابت وضعیت ناپایداری در فرکانس های کمتری رخ می دهد. قابل ذکر است اثر متغیر G_B در فرکانس تشدید دوم نمایان تر ا ست. در واقع، با افزایش پارامتر G_B مقدار سختی سازه کاهش می یابد. از طرفی در حالت کلی، بین فرکانس طبیعی با سختی سازه رابطه‌ی مستقیم دارد پس با افزایش G_B مقدار فرکانس طبیعی سازه کاهش می یابد. با توجه به وجود رابطه‌ی مستقیم بین فرکانس تحریک و فرکانس طبیعی ستون $\Omega = 2\omega_1$، در نهایت کاهش سختی باعث کاهش فرکانس تحریک نیز می گردد و انتقال وضعیت ناپایداری سمت فرکانس های کوچکتر می گردد که مطابق با شکل فوق این موضوع مبین است.

جدول ۶: مقادیر به ترتیب فرکانس تشدید، فرکانس طبیعی بی‌بعد، بار بحرانی بی‌بعد و طول مؤثر برای ستون با شرایط مرزی مختلف

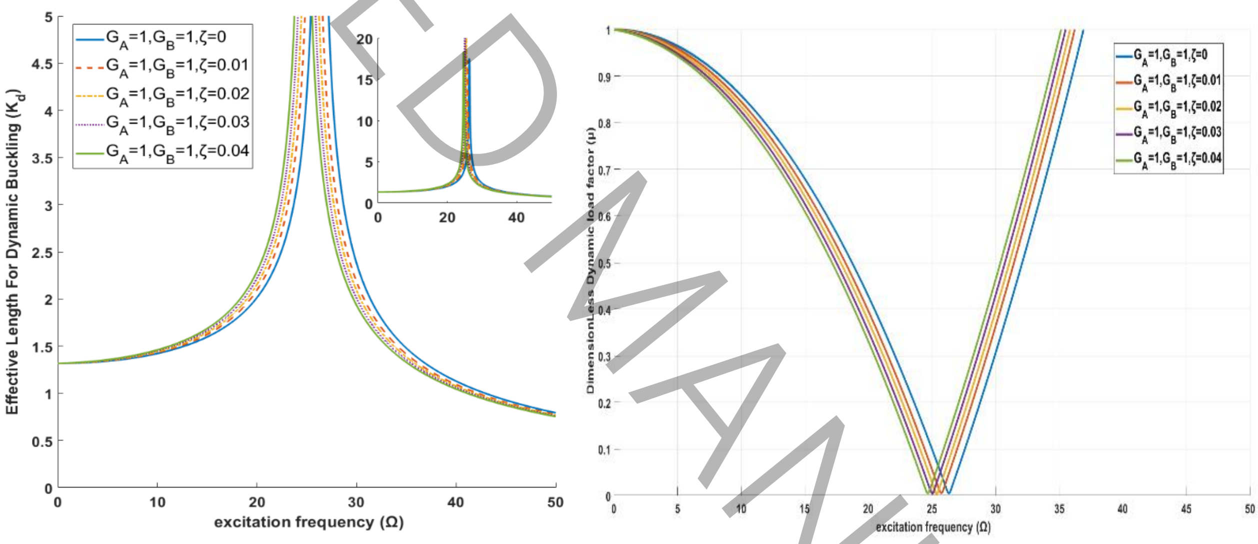
Table 6. Values of Resonance Frequency, Dimensionless Natural Frequency, Dimensionless Critical Load, and Effective Length for Columns with Various Boundary Conditions

متغیرها \ شرایط مرزی	$G_A = 0$. $G_B = 0$	$G_A = 0$. $G_B = 0.5$	$G_A = 0$. $G_B = 1$	$G_A = 0$. $G_B = 2$
Ω_r(Hz) (فرکانس تشدید)	۳۶/۱۵	۳۴/۵	۳۳/۱۵	۳۱/۲
ϖ (فرکانس طبیعی اول بی بعد)	۹/۸۶۹۶	۵/۲۹۹	۵/۰۷۸	۴/۷۶۹
$\overline{P_{cr}}$ (بار بحرانی بی بعد)	۹/۸۶۹۶	۸/۴۳۴	۷/۳۸۰	۶/۰۳۰
K (طول موثر استاتیکی)	۱	۱/۰۸۲	۱/۱۵۷	۱/۲۷۴

مطابق جدول فوق، با افزایش متغیر G_B مقدار بار بحرانی بی بعد و فرکانس طبیعی بی بعد کاهش می یابد و سازه به ازای فرکانس تحریک کمتر ناپایدار می شود. مبین است که مقدار طول موثر متناظر با کمانش دینامیکی به فرکانس تحریک وابسته است. مطابق شکل طول موثر متناظر با کمانش دینامیکی در محدوده ی خاصی، مقادیری کمتر از طول موثراستاتیکی را دارد. این مسئله از لحاظ تجربی قابل قبول نیست. چون همواره ظرفیت باربحرانی دینامیکی کمتر از ظرفیت باربحرانی استاتیکی است.

۳-۳- تأثیر میرایی ذاتی بر متغیرهای ضریب بار دینامیکی و طول مؤثر

در این بخش تأثیر میرایی ذاتی بر ضریب بار دینامیکی بی‌بعد و طول مؤثر متناظر با کمانش دینامیکی پرداخته می‌شود. بدین منظور تغییرات ضریب بار دینامیکی بی‌بعد و طول مؤثر متناظر با کمانش دینامیکی یک ستون با تکیه‌گاه ارتجاعی $G_A=1$ و $G_B=1$ با لحاظ اثر میرایی ذاتی (ضریب میرایی ζ ۱٪ تا ۴٪) بررسی می شود. ضرایب میرایی α و β با استفاده از فرکانس طبیعی اول و دوم ω_1 و ω_2 محاسبه می شود. در نهایت با لحاظ اثر ماتریس میرایی در معادله، به ازای مقادیر مختلف فرکانس تحریک ضریب بار دینامیکی و طول موثر ریشه یابی می شود. برای نمایش بهتر نقاط تکینی معادله در این شکل، تغییرات طول موثر متناظر با کمانش دینامیکی به ازای مقادیر فرکانس تحریک در بازه (۲۰و۰) نیز ضمیمه می شود.



الف ب

شکل ۵: الف) تغییرات ضریب بار دینامیکی بی‌بعد برحسب فرکانس تحریک برای ستون با تکیه‌گاه ارتجاعی و میرایی ذاتی، ب) تغییرات طول مؤثر متناظر با کمانش دینامیکی بر حسب فرکانس تحریک برای ستون با تکیه‌گاه ارتجاعی و میرایی ذاتی

Figure 5: a) Variation of the Dimensionless Dynamic Load Factor versus Excitation Frequency for a Column with Elastic Supports and Inherent Damping,

b) Variation of the Effective Length Corresponding to Dynamic Buckling versus Excitation Frequency for a Column with Elastic Supports and Inherent Damping

جدول ۷: مقادیر به ترتیب ضرایب میرایی

α و β، فرکانس تشدید و تغییرات فرکانس تشدید نسبت به حالت بدون میرایی برای ستون با تکیه گاه ارتجاعی و میرایی ذاتی

Table 7. Values of Damping Coefficients α and β, Resonance Frequency, and Changes in Resonance Frequency Relative to the Undamped Case for a Column with Elastic Supports and Inherent Damping

$\zeta = 0.04$	$\zeta = 0.03$	$\zeta = 0.02$	$\zeta = 0.01$	$\zeta = 0$	ζ / متغیرها
۱/۲۴۴۲	۰/۹۳۳۱	۰/۶۲۲۱	۰/۳۱۱	۰	α

متغیرها \ ζ	$\zeta = 0$	$\zeta = 0.01$	$\zeta = 0.02$	$\zeta = 0.03$	$\zeta = 0.04$
β	۰	۰/۰۰۰۲	۰/۰۰۰۳	۰/۰۰۰۵	۰/۰۰۰۷
Ω_r(Hz) (فرکانس تشدید)	۲۶/۴	۲۵/۶۵	۲۵/۳۵	۲۵/۰۵	۲۴/۶
$\Delta\Omega_r$	-	٪ ۲/۸۴	٪ ۳/۹۸	٪ ۵/۱۴	٪ ۷

$$\omega_1 = 18.289 \text{ Hz}, \omega_2 = 101.92 \text{ Hz}, k_{\theta A} = k_{\theta B} = 3.787\times10^6 \text{ N/m}, K = 1.317, G_A = G_B = 1$$

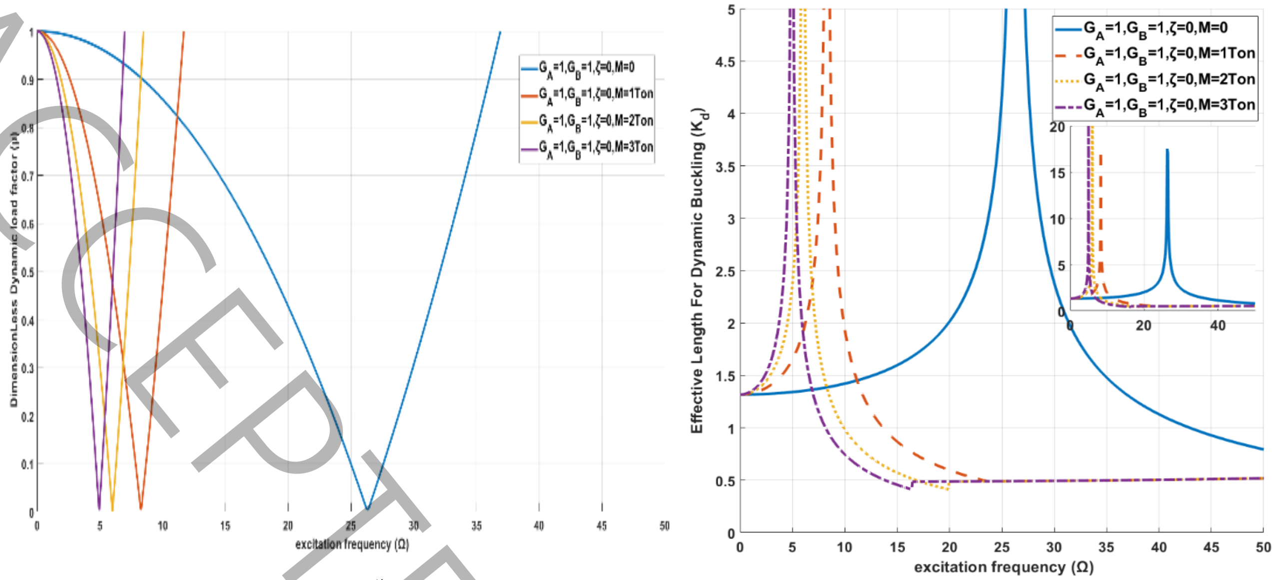
مطابق شکل و جدول فوق مشخص است که لحاظ اثر میرایی ذاتی در محاسبات بر مقادیر فرکانس تشدید، طول مؤثر متناظر با کمانش دینامیکی مؤثر و ضریب بار دینامیکی بی‌بُعد است. افزایش ضریب میرایی ζ بر مقدار فرکانس تشدید اثرگذار است و باعث انتقال فرکانس‌های تشدید به مقادیر کمتر می‌شود. لحاظ میرایی ذاتی تا ۷٪ در تغییرات فرکانس تشدید اثرگذار است. مطابق شکل (A)، رفتار نمودار فوق قابل‌تعمیم به نمودار قدرمطلقی است. نمودار در بازه ۰ تا فرکانس تشدید دارای یک شیب منفی است و در بازه ی فرکانس تشدید تا فرکانسی مشخص دارای شیب مثبت است. همانطور که در مقدمه ذکر گردید، بولوتین [۶] نخستین بار به بررسی پایداری سیستم های دینامیکی پرداخت. در بخشی از تحقیق ایشان، رابطه ی زیر برای محاسبه فرکانس تحریک سیستم دینامیکی با لحاظ میرایی پیشنهاد شده است. در این رابطه Ω, Ω_e ,ζ بیانگر فرکانس تحریک با لحاظ میرایی، فرکانس تحریک بدون میرایی و درصد میرایی سازه است.

$$\Omega_e = \Omega\sqrt{1-\frac{\zeta^2}{\Omega^2}} \qquad (۳۴)$$

مطابق با رابطهٔ فوق مشخص است که با افزایش میرایی مقدار فرکانس تحریک کاهش می‌یابد. در واقع مطابق فرمول انتظار می‌رود که با افزایش میرایی ناپایداری دینامیکی در محدوده‌ی کوچکتری از فرکانس تحریک رخ دهد که صحت نتایج مقاله‌ی حاضر (شکل۵) قابل تایید است. قابل ذکر است که ایشان تاثیر میرایی را در یک سیستم دینامیکی ساده بررسی کردند، در حالیکه در مقاله ی حاضر پایداری دینامیکی ستون‌ها در قاب‌های ساختمانی با اتصالات نیمه سخت به روش اجزا محدود بررسی می‌شود.

۳-۴- تأثیر جرم متمرکز بر متغیرهای ضریب بار دینامیکی و طول مؤثر

در این بخش تأثیر جرم متمرکز بر ضریب بار دینامیکی بی‌بُعد و طول مؤثر متناظر با کمانش دینامیکی پرداخته می‌شود. بدین منظور تغییرات ضریب بار دینامیکی بی‌بعد و طول مؤثر متناظر با کمانش دینامیکی یک ستون با تکیه‌گاه ارتجاعی $G_A = 1$ و $G_B = 1$ با لحاظ اثر جرم متمرکز(جرم طبقه) با مقادیر (3Ton،2Ton، 1Ton) بررسی می شود. عمده اینرسی که بر ستونهای قابهای مهارنشده وارد می گردد، ناشی از جرم طبقه است. جرم طبقه عمدتا از مجموع بارهای مرده (بار سقف) و درصدی از بار زنده ناشی می‌شود. با توجه به اینکه مجموع بارهای وارد بر طبقه به ازای بارهای مرده مختلف (وزن سقف، وزن دیوار و ...) مقادیرمتفاوتی دارد. با اعمال اثر جرم های مختلف (3Ton،2Ton،1Ton) در معادله متشکله، پایداری دینامیکی مجموعه مورد نظر بررسی می‌شود.



الف ب

شکل ۶: الف) تغییرات ضریب بار دینامیکی بی‌بعد بر حسب فرکانس تحریک برای ستون با تکیه‌گاه ارتجاعی و جرم متمرکز (بدون میرایی)، ب) تغییرات طول مؤثر متناظر با کمانش دینامیکی بر حسب فرکانس تحریک برای ستون با تکیه‌گاه ارتجاعی و جرم متمرکز (بدون میرایی)

Figure 6: a) Variation of the Dimensionless Dynamic Load Factor versus Excitation Frequency for a Column with Elastic Supports and Concentrated Mass (Without Damping),

b) Variation of the Effective Length Corresponding to Dynamic Buckling versus Excitation Frequency for a Column with Elastic Supports and Concentrated Mass (Without Damping)

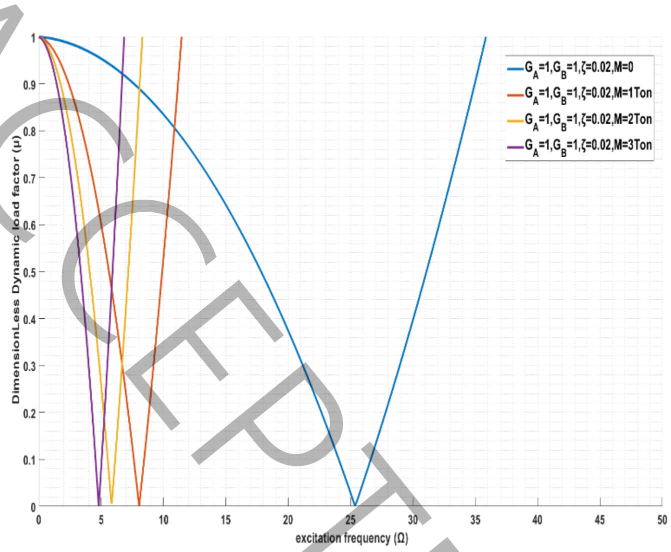
جدول ۸: مقادیر به ترتیب فرکانس طبیعی اول، فرکانس طبیعی دوم و فرکانس تشدید برای ستون بابا تکیه‌گاه ارتجاعی و جرم متمرکز (بدون میرایی)

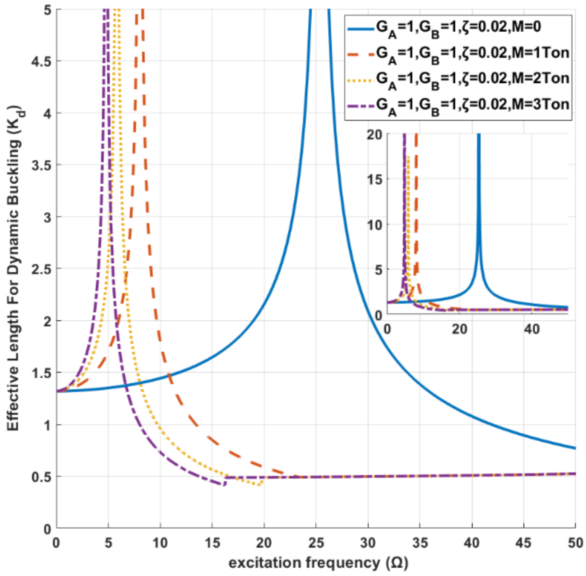
Table 8. Values of the First Natural Frequency, Second Natural Frequency, and Resonance Frequency for a Column with Elastic Supports and Concentrated Mass (Without Damping)

M / متغیرها	M = 0	M = 1Ton	M = 2Ton	M = 3Ton
ω_1 (Hz) (فرکانس طبیعی مود اول)	۱۸/۲۸۹	۵/۸۴۳۴	۴/۲۳۷۸	۳/۴۹۰۴
ω_2 (Hz) (فرکانس طبیعی مود دوم)	۱۰۱/۹۲	۷۳/۰۱۵۶	۷۲/۰۴۴۵	۷۱/۷۰۸۲
Ω_r (Hz) (فرکانس تشدید)	۲۶/۲۵	۸/۲۵	۶	۴/۹۵
$\Delta\Omega_r$	-	٪ ۶۸/۶۶	٪ ۷۷/۱۴	٪ ۸۱/۱۱

$$\zeta=0,\alpha=0,\beta=0,k_{\theta A}=k_{\theta B}=3.787\times10^{6}\ \text{N/m},K=1.317,G_A=G_B=1$$

مطابق نمودار و جدول فوق مشخص است که لحاظ اثر جرم متمرکز (جرم طبقه) در محاسبات تأثیر قابل‌توجهی در فرکانس طبیعی اول و دوم، فرکانس تشدید دارد. اثر جرم متمرکز در محاسبات باعث انتقال فرکانس تشدید به فرکانس‌های کمتر می‌شود. لحاظ اثر جرم طبقه به‌صورت جرم متمرکز در شرایط مرزی و اعمال آن در معادله متشکله می‌تواند تا ۸۱٪ بر مقدار فرکانس تشدید اثرگذار باشد. در ادامه به بررسی اثر هم زمان میرایی و جرم متمرکز بر ضریب بار دینامیکی بی‌بعد و طول موثر متناظر با کمانش دینامیکی پرداخته می شود. شرایط مسئله مطابق حالت قبلی است. با این تفاوت که میرایی ۲٪ در معادله لحاظ می‌شود. (پارامتر $\Delta\Omega_r$ بیانگر نسبت تاثیر مقدار جرم متمرکز بر تغییرات فرکانس تشدید در مدل بدون لحاظ میرایی است.)





شکل ۷: A) تغییرات ضریب بار دینامیکی بی‌بُعد برحسب فرکانس تحریک برای ستون با تکیه‌گاه ارتجاعی و جرم متمرکز و میرایی ذاتی، B) تغییرات طول مؤثر متناظر با کمانش دینامیکی بر حسب فرکانس تحریک برای ستون با تکیه‌گاه ارتجاعی و جرم متمرکز و میرایی ذاتی.

Figure 7. A) Variation of the Dimensionless Dynamic Load Factor versus Excitation Frequency for a Column with Elastic Supports, Concentrated Mass, and Inherent Damping,

B) Variation of the Effective Length Corresponding to Dynamic Buckling versus Excitation Frequency for a Column with Elastic Supports, Concentrated Mass, and Inherent Damping

جدول ۹: مقادیر به ترتیب فرکانس طبیعی اول، فرکانس طبیعی دوم و فرکانس تشدید برای ستون با تکیه‌گاه ارتجاعی و جرم متمرکز (با میرایی)

Table 9. Values of the First Natural Frequency, Second Natural Frequency, and Resonance Frequency for a Column with Elastic Supports and Concentrated Mass (With Damping)

M = 3Ton	M = 2Ton	M = 1Ton	M = 0	M / متغیرها
۳/۴۹۰۴	۴/۲۳۷۸	۵/۸۴۳۴	۱۸/۲۸۹	ω_1(Hz) (فرکانس طبیعی مود اول)
۷۱/۷۰۸۲	۷۲/۰۴۴۵	۷۳/۰۱۵۶	۱۰۱/۹۲	ω_2(Hz) (فرکانس طبیعی مود دوم)
۴/۸	۵/۸۵	۸/۰۵	۲۵/۳۵	Ω_r(Hz) (فرکانس تشدید)
٪ ۸۱	٪ ۷۶/۹۲	٪ ۶۸/۲	-	$\Delta\Omega_r$

$$\zeta = 0.02, \alpha = 0.6221, \beta = 0.00033, k_{\theta A} = k_{\theta B} = 3.787\times10^6 \text{ N/m}, K = 1.317$$

مطابق نمودار و جدول فوق مشخص است که لحاظ اثر توأمان جرم متمرکز (جرم طبقه) و میرایی ذاتی در محاسبات تأثیر قابل‌توجهی در مقادیر فرکانس طبیعی اول و دوم، فرکانس تشدید دارد. اثر توأمان جرم متمرکز و میرایی دخلی در محاسبات باعث انتقال فرکانس تشدید به فرکانس‌های کمتر می‌شود. لحاظ اثر توأمان جرم متمرکز (جرم طبقه) و میرایی ذاتی ستون در معادله متشکله می‌تواند تا ٪۸۱ بر مقدار فرکانس تشدید اثرگذار باشد. (پارامتر $\Delta\Omega_r$ بیانگر نسبت تاثیر مقدار جرم متمرکز بر تغییرات فرکانس تشدید در مدل با لحاظ میرایی است.)

۳-۵- تحلیل حساسیت پارامترهای مدل بر پاسخ دینامیکی ستون

یکی از گام‌های اساسی در ارزیابی پایداری دینامیکی اعضای سازه‌ای، تحلیل حساسیت نسبت به پارامترهای ورودی مدل است. این تحلیل به ما کمک می‌کند که مشخص شود کدام متغیرها بیشترین اثر را بر پاسخ نهایی سیستم دارند و کدام‌ها تأثیر کمتری دارند. به‌ویژه که در مقاله‌ی حاضر پارامترهای هدف مسئله (میرایی، جرم متمرکز و سختی مرزی) بر پایداری دینامیکی اثر گذار است. آگاهی از حساسیت پاسخ به هرکدام از این عوامل نقش مهمی در طراحی ایمن و بهینه سازه ایفا می‌کند.

در این بخش، از **شاخص حساسیت نرمال‌شده** به‌عنوان ابزاری کمی و بدون بعد برای مقایسه تأثیر پارامترهای مختلف استفاده شده است. این شاخص به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$S=\frac{\frac{\Delta R}{R}}{\frac{\Delta P}{P}} \qquad (۳۵)$$

در رابطه ی فوق پارامتر های جدید به شرح ذیل است:

- S شاخص حساسیت نرمال‌شده است؛
- R متغیر پاسخ مدل (فرکانس تشدید ستون به‌عنوان شاخص ناپایداری دینامیکی)؛
- P پارامتر ورودی مورد بررسی (میرایی ذاتی، جرم طبقه یا سختی دورانی تکیه‌گاه)؛
- ΔR تغییر مقدار پاسخ و ΔP تغییر مقدار پارامتر است.

حساسیت پاسخ به میرایی ذاتی ζ

میرایی ذاتی از طریق ترکیب خطی ماتریس‌های جرم و سختی به روش رایلی در مدل لحاظ شده است. به‌منظور بررسی اثر آن، تغییرات فرکانس تشدید به ازای افزایش مقدار میرایی از صفر تا ۴٪ استخراج شده است. نتایج با توجه به جدول (۷) آورده شده است:

- فرکانس تشدید بدون میرایی : $\Omega_{r1}=26.4\ \text{Hz}$
- فرکانس تشدید با میرایی ۴٪ : $\Omega_{r2}=24.6\ \text{Hz}$
- تغییر پاسخ : $\frac{\Delta\Omega_r}{\Omega_r}=\frac{24.6-26.4}{26.4}=\frac{-1.8}{26.4}=-0.068$
- تغییر پارامتر: $\frac{\Delta\zeta}{\zeta}=\frac{0.04-0}{0.04}=\frac{0.04}{0.04}=1$

در نتیجه:

$$S_{\zeta}=\frac{-0.068}{1}=-0.068 \qquad (۳۶)$$

این مقدار نشان می‌دهد که افزایش میرایی ذاتی باعث کاهش فرکانس تشدید ستون می‌شود.

حساسیت پاسخ به جرم متمرکز طبقه M

جرم متمرکز، نماینده جرم طبقه‌ای است که به‌صورت یک جرم نقطه‌ای در انتهای ستون اعمال می‌شود. اثر آن از طریق جدول (۸) مقاله تحلیل شده است:

- فرکانس تشدید بدون جرم : $\Omega_{r1} = 26.4\ \text{Hz}$
- فرکانس تشدید با جرم ۳ تن : $\Omega_{r2} = 4.95\ \text{Hz}$
- تغییر پاسخ: $\dfrac{\Delta\Omega_r}{\Omega_r} = \dfrac{4.95 - 26.4}{26.4} = \dfrac{-21.45}{26.4} = -0.812$
- تغییر پارامتر : $\dfrac{\Delta M}{M} = \dfrac{3-0}{3} = \dfrac{3}{3} = 1$

در نتیجه:

$$S_M = \frac{-0.812}{1} = -0.812 \tag{۳۷}$$

مقدار بسیار بزرگ این شاخص نشان‌دهنده حساسیت شدید پایداری دینامیکی به جرم متمرکز است. این نتیجه اهمیت مدل‌سازی دقیق جرم طبقات را در طراحی لرزه‌ای ستون‌ها دوچندان می‌کند.

حساسیت پاسخ به سختی مرزی تکیه‌گاه‌ها G_a, G_b

پارامترهای G_a, G_b نمایانگر سختی چرخشی فنرهای نیمه‌سخت در دو سر ستون هستند. برای بررسی تأثیر این متغیرها، مقادیر زیر از شکل (۴) و تحلیل عددی استخراج شده است:

- مقدار اولیه سختی مرزی : $G_1 = 0.5$
- مقدار جدید : $G_2 = 1$
- فرکانس تشدید در حالت اولیه : $\Omega_{r1} = 25.5\ \text{Hz}$
- فرکانس تشدید در حالت افزایش سختی : $\Omega_{r2} = 28.6\ \text{Hz}$
- تغییر پاسخ $\dfrac{\Delta\Omega_r}{\Omega_r} = \dfrac{28.6 - 25.25}{25.25} = \dfrac{3.35}{25.25} = +0.133$
- تغییر پارامتر : $\dfrac{\Delta G}{G} = \dfrac{1.0 - 0.5}{0.5} = \dfrac{0.5}{0.5} = 1$

$$S_G = +0.133 \tag{۳۸}$$

افزایش سختی مرزی اتصالات موجب افزایش فرکانس تشدید و تقویت پایداری دینامیکی ستون می‌گردد. این موضوع در طراحی اتصالات تیر به ستون، به‌ویژه در قاب‌های خمشی نیمه‌سخت، اهمیت ویژه‌ای دارد.

جدول ۱۰: شاخص‌های حساسیت

Table 10. Sensitivity Indices

پارامتر ورودی	تغییر نسبی $\frac{\Delta P}{P}$	تغییر پاسخ $\frac{\Delta f}{f}$	شاخص حساسیت نرمال‌شده S
میرایی ذاتی ζ	۱	-۰,۰۶۸	-۰,۰۶۸
جرم متمرکز طبقه M	۱	-۰,۸۱۲	-۰,۸۱۲
سختی مرزی G_a, G_b	۱	۰,۱۳۳	۰,۱۳۳

بر اساس نتایج جدول فوق، مشخص است که پاسخ پایداری دینامیکی ستون بیشترین حساسیت را نسبت به جرم متمرکز طبقه دارد. سپس، پارامتر سختی مرزی اتصالات در رتبه دوم اهمیت قرار دارد و در نهایت میرایی ذاتی تأثیر نسبتاً کمتری بر رفتار دینامیکی سیستم دارد. این اطلاعات برای مهندسان طراح بسیار ارزشمند است، زیرا می‌توانند اولویت‌بندی دقیقی در مطالعات بهسازی لرزه‌ای و طراحی مقاوم در برابر زلزله داشته باشند. همچنین این تحلیل می‌تواند در تنظیم حدود طراحی پارامترهای نامعین یا در شرایط عدم قطعیت مورد استفاده قرار گیرد.

۴-نتیجه‌گیری

در این مقاله کمانش دینامیکی، فرکانس طبیعی و طول مؤثر متناظر با کمانش دینامیکی ستونی مهارنشده با تکیه‌گاه ارتجاعی، میرایی ذاتی و جرم متمرکز (ناشی از جرم طبقه) تحت اثر بارمحوری هارمونیک بررسی شد. در گام اول، شکل ضعیف معادله دیفرانسیل حاکم نوشته شد. از توابع میان‌یابی به‌عنوان تابع شکل معادله استفاده گردد و بر این مبنا ماتریس‌های سختی مصالح، سختی هندسی و ماتریس جرم استخراج گردید. پس از استخراج ماتریس‌های سختی مقادیر ویژه معادله بررسی شد. از تکنیک ریشه‌یابی مولر برای محاسبه مقادیر ویژه با کدنویسی در نرم‌افزار متلب استفاده گردید

خلاصه نتایج پژوهش به شرح ذیل است:

- مقدار ضریب میرایی ذاتی تأثیر قابل‌توجهی بر تغییرات طول مؤثر متناظر با کمانش دینامیکی بر حسب فرکانس تحریک دارد. با افزایش این مقدار نمودار تغییرات به سمت چپ محور فرکانس تحریک منتقل می‌شود.
- مقدار فوق G_a, G_b که به ترتیب بیانگر نسبت سختی ستون به تیر در اتصالات نیمه سخت در نقاط ابتدایی و انتهایی است، تأثیر قابل‌توجهی بر تغییرات طول مؤثر متناظر با کمانش دینامیکی بر حسب فرکانس تحریک دارد. با افزایش این مقدار نمودار تغییرات به سمت چپ محور فرکانس تحریک منتقل می‌شود. لحاظ اثر میرایی ذاتی در معادلات تا ۷٪ بر مقدار فرکانس تشدید در مقایسه با مدل بدون میرایی تاثیرگذار است.
- مقدار جرم متمرکز (ناشی از جرم طبقه) تأثیر قابل‌توجهی بر تغییرات طول مؤثر متناظر با کمانش دینامیکی بر حسب فرکانس تحریک دارد. با افزایش این مقدار نمودار تغییرات به سمت چپ محور فرکانس تحریک منتقل می‌شود. لحاظ اثر جرم متمرکز در معادله متشکله تا ۸۱٪ بر مقدار فرکانس تشدید موثر است.

۵- مراجع

[1]- Chen, W.-K., Stability design of steel frames, CRC Press, 2018.

[2]- Julian, O., Lawrence, L., Notes on J and L nomograms for determination of effective lengths, Unpublished report, 1959.
[3]- Cedolin, L., Stability of structures: elastic, inelastic, fracture and damage theories, World Scientific, 2010.
[4]- Wang, C.M., Wang, C.Y., Exact solutions for buckling of structural members, CRC Press, 2004.
[5]- Saffari, H., Rahgozar, R., Jahanshahi, R., "An efficient method for computation of effective length factor of columns in a steel gabled frame with tapered members", Journal of Constructional Steel Research, 64(4), 2008, pp. 400–406.
[6]- Rahai, A., Kazemi, S., "Buckling analysis of non-prismatic columns based on modified vibration modes", Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 13(8), 2008, pp. 1721–1735.
[7]- Valipour, H.R., Bradford, M.A., "A new shape function for tapered three-dimensional beams with flexible connections", Journal of Constructional Steel Research, 70, 2012, pp. 43–50.
[8]- Konstantakopoulos, T.G., Raftoyiannis, I.G., Michaltsos, G.T., "Stability of steel columns with non-uniform cross-sections", The Open Construction & Building Technology Journal, 6(1), 2012.
[9]- Trinh, L.C., Vo, T.P., Thai, H.-T., Nguyen, T.-K., "An analytical method for the vibration and buckling of functionally graded beams under mechanical and thermal loads", Composites Part B: Engineering, 100, 2016, pp. 152–163.
[10]- Babaei, B.F., Behjat, B., Analysis of Euler-Bernoulli Beam on Elastic Foundation Considering Nonlocal Effects in Nano Scale, 2017.
[11]- Safavi, A., Haghollahi, A., Sahebi, M.M., "Elastic Flexural Buckling Load for Tapered Columns in Gabled Frames for State of Free to Sway with Finite Differences and Virtual Work Methods", Journal of Structure & Steel, 2017.
[12]- Soltani, M., Sistani, A., Asgarian, B., "Stability Analysis of Non-prismatic Columns Using the Combination of Power Series Method and McLaurin Expansion", Journal of Structure & Steel, 12(24), 2018, pp. 29–40.
[13]- Soltani, M., Asgarian, B., "Determination of lateral-torsional buckling load of simply supported prismatic thin-walled beams with mono-symmetric cross-sections using the finite difference method", Amirkabir Journal of Civil Engineering, 50(1), 2018, pp. 23–26.
[14]- Bolotin, V., Dynamic stability of elastic systems, 1962.
[15]- Pradhan, S., Phadikar, J., "Bending, buckling and vibration analyses of nonhomogeneous nanotubes using GDQ and nonlocal elasticity theory", Structural Engineering and Mechanics, 33(2), 2009, pp. 193–213.
[16]- Ghannadpour, S., Mohammadi, B., Fazilati, J., "Bending, buckling and vibration problems of nonlocal Euler beams using Ritz method", Composite Structures, 96, 2013, pp. 584–589.
[17]- Ghiasian, S., Kiani, Y., Eslami, M., "Nonlinear thermal dynamic buckling of FGM beams", European Journal of Mechanics-A/Solids, 54, 2015, pp. 232–242.
[18]- Gao, K., Gao, W., Wu, D., Song, C., "Nonlinear dynamic stability analysis of Euler–Bernoulli beam–columns with damping effects under thermal environment", Nonlinear Dynamics, 90, 2017, pp. 2423–2444.
[19]- Jalaei, M., Arani, A.G., Tourang, H., "On the dynamic stability of viscoelastic graphene sheets", International Journal of Engineering Science, 132, 2018, pp. 16–29.
[20]- Zhang, G., Wu, Z., Li, Y., "Nonlinear dynamic analysis of fractional damped viscoelastic beams", International Journal of Structural Stability and Dynamics, 19(11), 2019, 1950129.
[21]- Lei, J.-S., Kim, B., Li, L.-Y., "Dynamic instability analysis of axially compressed castellated columns", International Journal of Steel Structures, 20, 2020, pp. 559–566.
[22]- Bambaeechee, M., Paseban, G., "Nonlinear stability analysis of non-prismatic simple steel frames with flexible supports and semi-rigid connection", Journal of Structural and Construction Engineering, 7(Special Issue 3), 2020, pp. 239–258.

[23]- Sharma, P., Singh, R., Hussain, M., "On modal analysis of axially functionally graded material beam under hygrothermal effect", Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science, 234(5), 2020, pp. 1085–1101.

[24]- Akbaş, Ş.D., "Forced Vibration Responses of Axially Functionally Graded Beams by using Ritz Method", Journal of Applied and Computational Mechanics, 7(1), 2021, pp. 109–115.

[25]- Arda, M., Aydogdu, M., "A Ritz formulation for vibration analysis of axially functionally graded Timoshenko-Ehrenfest beams", Journal of Computational Applied Mechanics, 53(1), 2022, pp. 102–115.

[26]- Savin, S., Stoian, V., Petcu, D., "Experimental and Numerical Study of the Stability Failure of Reinforced Concrete Frame with Slender Columns under Corner Column Removal Scenario", Buildings, 2023.

[27]- Kadhim, A.S., Al-Zaidee, M.S., "3D Finite Element Modelling of the Structural Behaviour of Tapered Reinforced Concrete Columns", Journal of Mechanics of Materials and Structures, 2023.

[28]- Özil, M., Erdol, R., Gurel, M.A., "Dynamic Stability Analysis of Diamond Frame Structures by Finite Element Method", Structural Engineering and Mechanics, 2023.

[29]- Nie, X., Ma, Z., Zhu, W., "Finite Element Analysis of the Deterioration of Axial Compression Behavior of Corroded Steel-Reinforced Concrete Columns", Reliability and Maintainability of Structures, 2024.

[30]- Fonseca, A., "Stability Analysis of Steel Columns with Uniform and Non-Uniform Hollow Square Sections under Axial Compression", Journal of Civil and Hydraulic Engineering, 2(2), 2024.

[31]- Code of Design of Buildings Against Earthquake (Standard 2800) – Fourth edition, (In Persian).

[32]- National Building Regulations, Loads on Buildings – The Sixth Topic, Ministry of Housing and Urban Development, 2018, (In Persian).

[33]- National Building Regulations, Design and Implementation of Steel Buildings – Chapter 10, Ministry of Housing and Urban Development, 2022, (In Persian).

[34]- Chopra, A.K., McKenna, F., "Modeling viscous damping in nonlinear response history analysis of buildings for earthquake excitation", Earthquake Engineering & Structural Dynamics, 45(2), 2016, pp. 193–211.

[35]- Carr, A., Puthanpurayil, A., Lavan, O., Dhakal, R., "Damping models for inelastic time history analysis: a proposed modelling approach", 16th World Conference in Earthquake Engineering, Santiago, 2017, pp. 1488.

[36]- Muller, D.E., "A method for solving algebraic equations using an automatic computer", Mathematical Tables and Other Aids to Computation, 10(56), 1956, pp. 208–215.

Analysis of Dynamic Stability of Frame Columns under The Effect of Concentrated Mass and Inherent Damping by Finite Element Method

ABSTRACT

Analysis of stability in columns as the main structural member has a special place in engineering research. In most of the past research, generally, researchers have studied the static buckling in columns (prismatic or non-prismatic) in (building frames or industrial beams). Static load capacity only expresses the static critical load capacity of members under gravity load. For the safe design of the structure, it is necessary to check the dynamic stability of the columns in the building frames under the vertical load of an earthquake. In this article, in a comprehensive model, the combined effect of inherent damping, floor mass and vertical earthquake load on the dynamic stability of columns in unrestrained moment frames is investigated. In fact, the proposed method is a combination of Julian-Lawrence static modeling and Bolotin dynamic modeling to consider the dynamic effects in the frame columns based on the finite element method. In the first step, the constitutive equation is extracted using Hamilton's method. In the next step, the response of the equation is checked using the finite element method with Hermitian three-degree interpolation functions for 50 components. The results show that the inherent damping, concentrated mass and rotational stiffness of semi-rigid joints have a significant effect on the resonance frequency, effective length and dimensionless dynamic load factor. With the increase in inherent damping, rotational stiffness and concentrated mass, the graph of effective length changes is shifted to the left side of the excitation frequency axis. Considering the effects of inherent damping and concentrated mass in the modeling, 7% and 81%, respectively, affect the resonance frequency changes. There is an acceptable agreement between the results of the present article and previous research.

Keywords: **Dynamic Buckling, Dynamic Stability, Effective Length, Critical Load Capacity, Analysis EigenValue**