

Bending and Deflection Analysis of Functionally Graded Porous Circular Plates with Radial Porosity Variation Based on the First-Order Shear Deformation Theory

Peyman Akbari , Mohammad Javad Khoshgoftar * 

Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering, Arak University, Arak, Iran.

ABSTRACT: Porous materials are increasingly used in mechanical, aerospace, civil, biomedical, and advanced engineering applications due to their low density, acceptable strength, high energy absorption, and tunable mechanical properties. One key challenge in designing such materials is the accurate analysis of bending and deflection behavior of porous thin structures, such as circular plates, which is essential for avoiding structural failures. This study presents the elastic bending and static deflection analysis of functionally graded porous circular plates with radially varying porosity distribution, subjected to uniform compressive loading under both simply supported and clamped boundary conditions. The governing equations are derived based on axisymmetric assumptions using the first-order shear deformation theory and solved via both analytical (series solution) and numerical (finite element) methods. The results show excellent agreement between the two approaches (mean error 0.04%) and with existing literature data (mean error 0.05%), confirming the accuracy of the model. Parametric studies reveal that simply supported plates exhibit approximately 2.5 times higher stress and 4 times larger deflection compared to clamped ones. Furthermore, increasing the porosity coefficient by 10% leads to an average increase of about 40% (for simply supported) and 36% (for clamped) in radial stress and central deflection. These findings offer valuable insights for designing lightweight, strong, and efficient structural components in sensitive and performance-driven environments.

Review History:

Received: May, 21, 2025
Revised: Jul. 07, 2025
Accepted: Jul. 31, 2025
Available Online: Aug. 04, 2025

Keywords:

Porous Circular Plate
Radial Porosity Distribution
Bending Analysis
Shear Deformation Theory
Analytical Solution

1- Introduction

Porous materials are solids containing voids filled with gas or liquid, forming a two-phase structure. Their porosity typically ranges from 20% to 90%, optimized for low weight, flexibility, and microcrack resistance. They are classified by pore geometry, manufacturing method, and application. Many natural (wood), biological (bone), and synthetic (ceramics) materials are porous. Advances in technology have expanded their use in various engineering fields, including mechanical, petroleum, and civil engineering, especially in structural elements like beams, plates, and shells [1].

Khoshgoftar et al. [2] obtained deflection and stress results for functionally graded cylinders with variable thickness under non-uniform pressure using first-order shear deformation theory (FSDT) and perturbation methods, highlighting the influence of shear deformation. Khoshgoftar [3] extended the analysis with a second-order shear deformation theory (SSDT) for axisymmetric functionally graded thick shells with variable thickness, providing comprehensive governing equations and numerical comparisons with classical and first-order theories. Khoshgoftar and Hajiveisheh [4] investigated the buckling and bending behavior of functionally graded porous plates using shear deformation theory, focusing on

the effects of porosity distribution on mechanical responses. Khoshgoftar and Akbari [5] analyzed mechanical buckling of porous circular plates with radially graded porosity using FSDT, employing an analytical semi-exact Fourier–Bessel series method validated by finite element results.

Previous studies have not comprehensively addressed the bending and deflection of radially porous circular plates. This research provides the first detailed analysis of such plates with radially varying porosity under uniform vertical pressure, considering simply supported and clamped boundary conditions. Using axisymmetric assumptions and first-order shear deformation theory, the governing equations are solved analytically (energy method) and numerically (finite element method). Results show excellent agreement, with mean and maximum errors below 0.1%. Clamped plates exhibit stresses 60–65% lower and deflections 70–76% lower than simply supported ones. Due to their manufacturability, light weight, and strength, these plates are widely used in aerospace, turbine disks, medical implants, energy absorbers, heat exchangers, filters, and lightweight automotive parts.

2- Analytical Modeling

In this study, a circular plate made of radially functionally

*Corresponding author's email: m-khoshgoftar@araku.ac.ir

graded porous material with thickness h and radius R is considered in a cylindrical coordinate system (r, θ, z) , subjected to a uniformly distributed vertical pressure (Figure 1). The mechanical properties of the plate vary along the radial direction. The Young's modulus is assumed to be a radial-dependent function, and the porous material used for the circular plate is characterized by continuously varying mechanical properties (Figure 2). These properties, such as the elastic modulus, are considered as functions of the porosity coefficient and the elastic modulus of the base material. Assuming that the axis perpendicular to the midplane is the z -axis, the elastic modulus $E = E(r)$, shear modulus $G = G(r)$, and density $\rho = \rho(r)$ are defined as follows (Figure 3):

$$\begin{aligned} E(r) &= E_0 \left(e^{e_0 \frac{r}{R}} \right) \\ G(r) &= G_0 \left(e^{e_0 \frac{r}{R}} \right) \\ \rho(r) &= \rho_0 \left(e^{e_0 \frac{r}{R}} \right) \end{aligned} \quad (1)$$

According to the first-order shear deformation theory (FSDT), the general displacement field at any cross-section is assumed as follows:

$$\begin{cases} u(r, \theta, z) = u_0(r, \theta) + z\phi_r(r, \theta) \\ v(r, \theta, z) = v_0(r, \theta) + z\phi_\theta(r, \theta) \\ w(r, \theta, z) = w_0(r, \theta) \end{cases} \quad (2)$$

In these equations, u_0 , v_0 , and w_0 represent the displacements on the mid-plane, while ϕ_r and ϕ_θ are the rotations about the r and θ axes, respectively. Considering the axisymmetric nature of the problem, Equation (2) can be simplified as follows:

$$\begin{cases} u(r, z) = z\phi(r) \\ v(r, z) = 0 \\ w(r, z) = w_0(r) \end{cases} \quad (3)$$

The governing equations of the problem are derived using the energy method as follows.

$$\begin{aligned} \delta\phi: \quad & -\frac{\partial(rM_r)}{\partial r} + M_\theta + rQ_r = 0 \\ \delta w_0: \quad & -\frac{\partial(rQ_r)}{\partial r} - rP = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

3- Results

In this study, the applied pressure P is considered to be 1 MPa, and the reference Young's modulus E_0 corresponds to

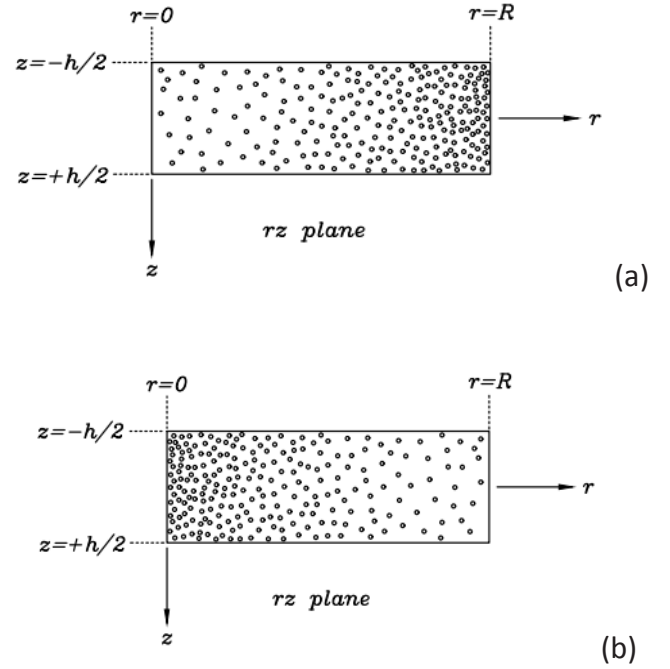


Fig. 1. Cross-sectional view of the radially porous circular plate in the rz plane for different values of the porosity coefficient:(a) for negative values of porosity coefficient ($e_0 < 0$);(b) for positive values of porosity coefficient ($e_0 > 0$).

that of 42CrMo4 alloy steel, with $E_0 = 210$ GPa and a yield strength of 800 MPa. The results obtained are valid for any material possessing this elastic modulus. Tables 1 present the numerical results of the maximum dimensionless transverse stress and deflection of a homogeneous circular plate subjected to uniform vertical compressive loading, based on the First-Order Shear Deformation Theory (FSDT). These results are provided for plates with simply supported conditions, and are obtained using both analytical and finite element methods. A good agreement between the two approaches is observed. As can be seen, increasing the thickness-to-radius ratio leads to a reduction in the maximum transverse stress and deflection, indicating improved structural stiffness.

Figure 2 illustrates the variation of the dimensionless radial stress along the radius of a functionally graded porous circular plate with a simply supported edge, for various porosity coefficients. It is observed that increasing the porosity coefficient reduces the structural strength of the plate, leading to higher stress values.

4- Conclusions

This paper investigates the bending and deflection of radially porous circular plates under uniform vertical pressure, using first-order shear deformation theory for simply supported and clamped boundary conditions.

Table 1. Numerical results of the maximum transverse stress and deflection of a homogeneous circular plate under uniform vertical compressive loading, based on the First-Order Shear Deformation Theory (FSDT), for a simply supported edge condition: comparison between analytical and finite element methods.

h/R	Max Bending Stress		Max Deflection	
	FEM	Present	FEM	Present
0.02	1.47273	1.47321	4.1410	4.14257
0.04	0.36818	0.36833	0.51840	0.51855
0.06	0.16367	0.16369	0.15396	0.15400
0.08	0.09204	0.09207	0.06514	0.06518
0.1	0.05891	0.05892	0.03349	0.03351

Material properties vary gradually along the radius based on the porosity coefficient, making the plate's outer edge either the strongest or weakest region. Increasing the porosity coefficient reduces stiffness, raising radial stress and deflection. As the thickness-to-radius ratio grows, bending stress and deflection decrease, and the influence of porosity lessens. Analytical (series solution) and numerical (finite element) results agree closely, with average errors below 0.05% and maximum errors near 0.1%, confirming model accuracy. Stresses and deflections in simply supported plates are roughly 2.5 and 4 times those in clamped plates, respectively. Each 10% increase in porosity coefficient raises radial stress and deflection by about 40% (simply supported) and 36% (clamped). Positive porosity coefficients (stronger edges) yield higher stresses and deflections, while negative coefficients (weaker edges) reduce them. Thus, negative porosity coefficients are recommended to reduce weight while improving bending resistance and stiffness.

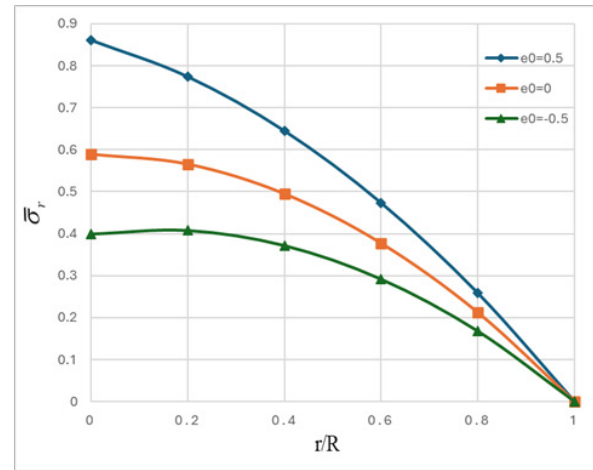


Fig. 2. Variation of dimensionless stress along the radial direction at $z=h/2$ for a radially porous circular plate with simply supported edge under different porosity coefficients for $h/R=0.1$.

References

- [1] A.G. Slater, A.I. Cooper, Function-led design of new porous materials, *Science*, 348(6238) (2015) aaa8075.
- [2] M.J. Khoshgoftar, M.J. Mirzaali, G.H. Rahimi, Thermoelastic analysis of non-uniform pressurized functionally graded cylinder with variable thickness using first order shear deformation theory (FSDT) and perturbation method, *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, 28(6) (2015) 1149-1156.
- [3] M.J. Khoshgoftar, Second order shear deformation theory for functionally graded axisymmetric thick shell with variable thickness under non-uniform pressure, *Thin-Walled Structures*, 144 (2019) 106286.
- [4] M.J. Khoshgoftar, M. Hajiveisheh, Buckling and bending analysis of functional porous plate using shear deformation theory, *Iranian Journal of Manufacturing Engineering*, 9(8) (2022) 34-43.
- [5] M.J. Khoshgoftar, P. Akari, Mechanical Buckling Analysis of Porous Circular Plates with Radially Graded Porosity Using First-Order Shear Deformation Theory, *Mechanics Research Communications*, 148 (2025) 104483.



تحلیل خمشی و خیز ورق‌های مدور مدرج تابعی متخلخل با تغییرات شعاعی تخلخل بر اساس تئوری مرتبه اول برشی

پیمان اکبری^۱، محمد جواد خوش‌گفتار^{۱*}

گروه مهندسی مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه اراک، اراک، ایران.

تاریخچه داوری:

دریافت: ۱۴۰۴/۰۲/۳۱

بازنگری: ۱۴۰۴/۰۴/۱۶

پذیرش: ۱۴۰۴/۰۵/۰۹

ارائه آنلاین: ۱۴۰۴/۰۵/۱۳

کلمات کلیدی:

ورق دایره‌ای متخلخل

توزیع شعاعی تخلخل

تحلیل خمشی

تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی

حل تحلیلی

خلاصه: مواد متخلخل به دلیل ویژگی‌هایی مانند وزن کم، استحکام مناسب، جذب انرژی بالا و قابلیت تنظیم خواص مکانیکی، کاربردهای گسترده‌ای در حوزه‌های مهندسی مکانیک، هوافضا، عمران، زیست‌پزشکی و صنایع نظامی و پیشرفته پیدا کرده‌اند. یکی از چالش‌های مهم در طراحی این مواد، تحلیل دقیق خمشی و خیز سازه‌های نازک متخلخل مانند ورق‌ها است که می‌تواند نقش کلیدی در پیشگیری از آسیب‌های ساختاری ایفا کند. در این تحقیق، رفتار خمشی الاستیک و خیز استاتیکی ورق‌های دایره‌ای مدرج تابعی متخلخل با توزیع شعاعی تخلخل، تحت بارگذاری عرضی یکنواخت و در شرایط مرزی ساده و گیردار بررسی شده است. معادلات حاکم با فرض تقارن محوری و بر مبنای تئوری مرتبه اول برشی استخراج و با دو روش تحلیلی (روش سری‌ها) و عددی (روش المان محدود) حل شده‌اند. صحت نتایج با مقایسه بین دو روش (خطای میانگین ۰/۰۴٪) و نیز داده‌های منابع (۰/۰۵٪) تأیید شده است. بررسی پارامترهای هندسی و مکانیکی نشان می‌دهد که در حالت تکیه‌گاه ساده، مقدار تنش و خیز به ترتیب حدود ۲/۵ و ۴ برابر بیشتر از حالت گیردار است. همچنین افزایش ۱۰٪ در ضریب تخلخل، منجر به افزایش متوسط حدود ۴۰٪ (ساده) و ۳۶٪ (گیردار) در تنش و خیز در مرکز ورق می‌شود. این نتایج می‌توانند در طراحی سازه‌های سبک، مقاوم و بهینه مؤثر باشند.

۱- مقدمه

مواد متخلخل مواد جامدی هستند که در ساختار خود دارای حفره‌هایی می‌باشند. در حقیقت این مواد دارای ساختار دو فازی هستند که فاز اصلی (بدنه) جامد و فاز دیگر (حفره‌ها) مایع یا گاز می‌باشد. همچنین درصد تخلخل این مواد در محدوده‌های بین ۲۰ تا ۹۰ بسته به کاربرد آنها می‌باشد. خواص این دسته از مواد در مقایسه با وزن آنها بهینه شده است و دارای وزن کم، انعطاف پذیری مناسب و مقاومت در برابر ترک‌های موئی می‌باشند. مواد متخلخل را می‌توان بر اساس شاخص‌های مختلف نظیر هندسه و اندازه حفره، روش ساخت و کاربرد تقسیم بندی کرد. بسیاری از مواد طبیعی (مانند چوب)، بافتهای زیستی (مانند استخوان) و مواد ساخته دست بشر (مانند سرامیک‌ها) نیز دارای ساختاری متخلخل می‌باشند. امروزه با توسعه تکنولوژی، ساختارهای متخلخل در زمینه‌های بسیار زیادی از علوم مهندسی مانند مهندسی مکانیک، مهندسی نفت و مهندسی عمران کاربرد داشته و در سازه‌هایی مانند تیرها، ورق‌ها و پوسته‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرند [۱].

ونگ و لی [۲] نتایج خیز و تنش ورق میندیلین متقارن محوری را مطابق با حل کیرشف بدست آورده است که تاثیر تغییر شکل برشی در تئوری میندیلین ورق‌ها در آن دیده شده و نتایج آن با نظریه کیرشف همخوانی دارد. ردی و ونگ [۳] مرور کلی از تئوری کلاسیک، تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی و مرتبه سوم برای خیز، کماتش و ارتعاشات ورق آورده شده است. ردی و ونگ [۴] خمشی ورق دایره ای متقارن محوری را با استفاده از تئوری کلاسیک و تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی ورق‌ها بدست آورده است. ردی و همکاران [۵] خیز ورق متقارن محوری دایره ای مدرج تابعی را با استفاده از تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی میندیلین مورد مطالعه قرار دادند و نتایجی را به صورت عددی در جداول قرار داده است. ما و ونگ [۶] با استفاده از تئوری مرتبه سوم تغییر شکل برشی، خمشی و کماتش ورق دایره متقارن محوری همگن و FGM^۱ را مورد مطالعه قرار داده است و با تئوری کلاسیک و مرتبه اول تغییر شکل برشی مقایسه کرده و به این نتیجه رسیده است که تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی برای نشان دادن تغییر شکل



برشی در خمش و کمانش ورق دایره ای کافیسیت و نیازی به استفاده از تئوری های مرتبه بالاتر و پیچیده تر برای این گونه مسائل نیست. صحرایی و سعیدی [۷] با استفاده از تئوری مرتبه چهارم تغییر شکل برشی، خمش ورق دایره متقارن محوری همگن و FGM را مورد مطالعه قرار داده است و با سایر تئوری ها مقایسه کرده است و به این نتیجه رسیده است که برای بدست آوردن تنش های برشی در راستای ضخامت استفاده از تئوری مرتبه چهارم جواب های دقیق تری می دهد. سعیدی و همکاران [۸] خیز و کمانش ورق متقارن محوری دایره ای مدرج تابعی را با استفاده از تئوری مرتبه سوم برشی بدون محدودیت مورد مطالعه قرار دادند و نتایج را با تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی ردی [۵] و مرتبه سوم ما و ونگ [۶] مورد مقایسه قرار دادند که نتایج حاصل شده به نتایج ما و ونگ نزدیک تر بوده است. لی و همکاران [۹] با استفاده از حل الاستیسیته خمش ورق دایره ای FGM متقارن محوری را بدست آورده است. فام ون وین و همکاران [۱۰] خمش استاتیکی و رفتار کمانش ورق مدرج تابعی دو جهته (BFG) متخلخل را مورد بررسی قرار دادند. با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول بهبود یافته با فرض تنش های برشی توزیع سهموی برای توصیف جابجایی، کرنش و میدان های تنش صفحات ایجاد شده است. از روش FEM و اصل همیلتون برای حل معادلات استفاده شده است مقایسه های زیادی با نتایج موجود انجام شده که دقت کار نشان داده شود. خورشید وند و دمرچلو [۱۱] راه حل های عددی برای تحلیل های خمشی استاتیک و کمانش مکانیکی صفحات متخلخل مدرج (FGP) ارائه کرده اند. مجموعه معادلات حاکم با استفاده از حداقل انرژی پتانسیل به دست آمده و با استفاده از روش مربعات دیفرانسیل (2DQM) حل شده است. همگرایی و دقت حل تایید شده و اثرات پارامتر تخلخل، الگوی توزیع تخلخل، ضخامت و نسبت ابعاد صفحه و شرایط مرزی بر انحراف، شدت و توزیع تنش و بار بحرانی کمانش بررسی شده است. با مثال های عددی نشان داده شده که افزایش در پارامتر تخلخل منجر به کاهش بار بحرانی کمانش و افزایش انحراف استاتیکی صفحه می شود. نتایج عددی نشان می دهد که تأثیر پارامتر تخلخل بر توزیع و شدت مولفه های تنش به شدت به الگوی توزیع تخلخل وابسته است. سیلدا دوری و احمد رشاد دوری [۱۲] خمش متقارن محوری ورق متخلخل مدرج تابعی ورق دایره ای مورد بررسی قرار گرفته است خواص مواد در راستای ضخامت تغییر می کند و تأثیر تخلخل بر روی آن بررسی شده است. علیمحمدی و قاسمی [۱۳] کمانش و پسکمانش ورق متخلخل در راستای ضخامت را مورد

بررسی قرار داده اند در روش حل معادلات از روش DQM استفاده شده است. میرزایی و همکاران [۱۴] خمش، کمانش و ارتعاشات آزاد ورق مستطیلی، دایروی و بیضوی را برای ورق مدرج تابعی چند جهته متخلخل با شرایط مرزی های مختلف مورد مطالعه قرار داده اند. لانگ و تنگ [۱۵] بررسی تحلیلی غیر خطی پایداری مواد متخلخل تابعی را برای در پوش کروی و دایروی تحت فشار خارجی یکنواخت و دمای بالا بر اساس تئوری کلاسیک مورد مطالعه قرار داده اند. بندربا و برابا [۱۶] خمش مکانیکی-حرارتی ورق کامپوزیتی مدرج تابعی متخلخل را با استفاده از تئوری تغییر شکل بهبود یافته مورد بررسی قرار گرفته است و خیز، تنش محوری و تنش برشی عرضی مورد مطالعه قرار گرفته است. محمود و همکاران [۱۷] خمش مکانیکی-حرارتی ورق متخلخل مدرج ساندوچی که کاربرد نظامی و غیر نظامی دارد مورد مطالعه قرار داده است، معادلات تعادل بر اساس اصل کار مجازی استخراج شده و با فرایند ناویر حل شده است و تأثیر پارامتر تخلخل بر روی آن مورد مطالعه قرار گرفته است. کمالی و همکاران [۱۸] ارتعاشات آزاد میکرو ورق دایروی متخلخل شباه شده کوپل با ورق پیزوالکتریک تحت نیروی یکنواخت صفحه ای مورد مطالعه قرار گرفته است، معادلات حرکت بر اساس تئوری مرتبه اول برشی و شرایط مرزی بر حسب اصل همیلتون استخراج شده و به روش انتقال دیفرانسیلی حل شده است و تأثیر پارامتر تخلخل بر روی ارتعاشات مورد مطالعه قرار گرفته است. اکبری و همکاران [۱۹] تحلیل کمانش مکانیکی و حرارتی ورق دایره ای مدرج تابعی دو جهتی با تغییرات خواص مواد در راستای شعاعی و ضخامت تحت بارگذاری شعاعی یکنواخت صفحه ای و حرارتی با شرایط مرزی ساده و گیردار را مورد مطالعه قرار داده و تأثیر خواص مواد در دو راستای متغیر و همچنین تغییرات هندسی ورق را بررسی کرده است که در مقایسه با نتایج قبلی در حالت همگن و مدرج یک جهتی همخوانی خوبی مشاهده شده است. کامران فرد و همکاران [۲۰] یک حل تحلیلی برای کمانش ورقهای قطاعی حلقوی متخلخل ارائه داده اند. ابتدا معادلات تعادل و شرایط مرزی ورق، طبق فرضیات تئوری برشی مرتبه اول ورق و با استفاده از اصل حداقل انرژی پتانسیل به دست آمده اند. پس از حل معادلات، با در نظر گرفتن شرایط مرزی تکیه گاه ساده در لبه های شعاعی و شرایط مرزی دلخواه در لبه های محیطی بار بحرانی کمانش محاسبه شده است. آنها تأثیر پارامترهای مختلف هندسی نظیر زاویه قطاع، ضخامت و شعاع داخلی ورق، همچنین تأثیر میزان تخلخل ورق بر بار بحرانی کمانش آن به ازای شرایط مرزی دلخواه روی لبه های محیطی را

1. Bidirectionally Functionally Graded
2. Differential Quadrature Method

مورد بررسی قرار دادند. نتایج حاصل شده نشان میدهد که اثر افزایش میزان تخلخل موجود در ورق، در کاهش بار بحرانی کماتش، به مراتب کمتر از اثر پارامترهای هندسی و شرایط مرزی است. مهید و عسگری [۲۱] خواص مکانیکی مواد زیستی متخلخل درجه بندی شده برای جایگزینی استخوان با استفاده از راه حل تحلیلی و عددی را بررسی کرده اند. آنها تأثیر تغییرات ویژگیهای هندسی المان بر خواص مکانیکی سازه را مورد مطالعه قرار دادند. این تغییرات تأثیر قابل توجهی بر خواص مکانیکی سازه داشته و با تعریف درست ویژگی های هندسی می توان کارایی و توزیع مناسب خواص مواد را برای کاربردهای مورد نظر به دست آورد. گپتا و کمار [۲۲] رفتار کماتش ورق دایره ای متخلخل مدرج تابعی (PFGM) مورد مطالعه قرار داده است، از اصل کار مجازی برای بررسی رفتار کماتش تحت بار فشاری تک محوری و دو محوری استفاده شده و برای صحت سنجی از روش از روش اجزای محدود بهره گرفته شده است و تأثیر تخلخل بر روی نیروی بحرانی کماتش مورد مطالعه قرار گرفته است. گوکلی و همکاران [۲۳] یک رویکرد تحلیلی جدید برای کماتش حرارتی- مکانیکی غیرخطی ورق دایره ای متخلخل قابل تغییر شکل برشی مرتبه بالا و کلاهک های کروی با ورق های مسطح مواد مدرج تابعی (FGM) که بر روی پایه الاستیک پاسترناک قرار دارند در این مقاله ارائه شده است. ونگ ناین و همکاران [۲۴] با استفاده از روش تحلیل هم هندسی (IGA)، آنالیز کماتش حرارتی غیرخطی میکروصفحه های حلقوی و دایره ای متخلخل تقویت شده توسط پلاکته های گرافن (GPLs) تحت افزایش دمای یکنواخت با در نظر گرفتن وابستگی دمایی خواص مواد و اثرات اندازه انجام می شود. کمار و همکاران [۲۵] تأثیر بستر الاستیک و تخلخل را بر روی پاسخ کماتش تغییرات خطی مواد مدرج تابعی را مورد مطالعه قرار داده است. مگنوکا و همکاران [۲۶] یک ورق دایره ای با تکیه گاه ساده با خواص مکانیکی متقارن متفاوت در جهت ضخامت را مورد مطالعه قرار داده است. در موارد شدید این تنوع، صفحه به یک ساختار تک لایه یا سه لایه تبدیل می شود. هدف اصلی این مطالعه ایجاد یک توصیف ریاضی از هر دو ساختار تک لایه و سه لایه با استفاده از یک فرمول است. مدل ریاضی همچنین شامل تمام حالات میانی صفحه در مسائل خمش متقارن محوری و کماتش با در نظر گرفتن اثر برشی است. برای این منظور، دو تابع بدون بعد که ارتباط نزدیکی با تغییر پذیری خواص مکانیکی دارند، معرفی شده و فرضیه غیرخطی تغییر شکل خط مستقیم نرمال به سطح خنثی صفحه فرض شد. بر اساس اصل انرژی پتانسیل دو معادله دیفرانسیل تعادل

1. Porosity Functionally Graded Material
2. Isogeometric Analysis

به دست آمده است. سیستم معادلات به صورت تحلیلی حل می شود. انحرافات و شدت بارهای بحرانی برای ورق نمونه بدست آمده است. سوپن و انوپ [۲۷] تأثیر تخلخل بر ارتعاشات آزاد و کماتش ورق مدرج ساندویچ شده چند جهتی را مورد مطالعه قرار داده است. در این مطالعه فرض شده خواص مواد در راستای طولی و عرضی متغیر است. با توجه به مطالعات انجام شده، مطالعه ای بر روی ورق دایره ای متخلخل شعاعی صورت نگرفته و هدف از این مقاله تحلیل کماتش مکانیکی ورق دایره ای متخلخل با تغییرات تخلخل در راستای شعاع که تحت بار گسترده در راستای شعاع بصورت صفحه ای قرار گرفته است می باشد و در دو شرایط مرزی ساده و گیردار مورد مطالعه قرار گرفته می شود و معادلات حرکت بر اساس تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی بسط داده شده و پس از بدست آوردن معادلات پایداری ورق دایره ای از روش انرژی و با در نظر گرفتن شرایط تقارن محوری مسئله، معادلات تعادل حل خواهد شد و نیروی بحرانی کماتش استخراج می گردد و با مقایسه نتایج حاصل با سایر نتایج موجود و همچنین روش المان محدود صحت این روش نشان داده می شود. تأثیر پارامترهای هندسی، تغییرات تخلخل در راستای شعاعی و شرایط مرزی بر روی نیروی بحرانی کماتش مورد مطالعه قرار خواهد گرفت. خاتون آبادی و همکاران [۲۸] تحلیل ضربه با سرعت پایین را برای ورق دایره ای متخلخل مدرج تابعی بر اساس تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی را برای اولین بار مورد مطالعه قرار داده است برای بدست آوردن معادلات از اصل همپلتون استفاده شده است و تأثیرات تخلخل در این مطالعه مورد بررسی قرار گرفته است. سرینینو و همکاران [۲۹] خمش متقارن محوری ورق دایره ای مدرج تابعی متخلخل بر روی بستر الاستیک وینکلر و پاسترناک به صورت تحلیلی حل شده و با روش FEM مقایسه شده است جین و ازم [۳۰] خیز و خمش ورق مستطیلی مدرج تابعی متخلخل قرار گرفته بر روی بستر الاستیک تحت بار سینوسی با استفاده از تئوری کلاسیک ورق ها مورد مطالعه قرار داده است معادلات با روش ریتز حل شده و تأثیر تخلخل و سایر متغیرها بر روی خیز و خمش تحلیل شده است. دت و لن [۳۱] ورق مدرج تابعی متخلخل دایره ای با تخلخل غیر یکنواخت را تحت بارگذاری یکنواخت حرارتی با استفاده از تئوری مرتبه بالای برشی مورد مطالعه قرار داده است. محمد بلاری و همکاران [۳۲] تحلیل خمش و ارتعاشات ورق متخلخل مدرج تابعی ساندویچ شده را با توزیع تخلخل مختلف با استفاده از تئوری لایه ای گسترده مورد مطالعه قرار داده است. معادلات حاکم با استفاده از اصل همپلتون استخراج شده و با روش FEM حل شده است. مگنوکلی و همکاران [۳۳] آنالیز

که در حالت تکیه‌گاه گیردار، تنش‌ها به‌طور متوسط ۶۰ تا ۶۵ درصد و خیز حدود ۷۰ تا ۷۶ درصد کمتر از حالت تکیه‌گاه ساده است. این نوع ورق‌ها به‌دلیل قابلیت ساخت بالا، کاهش وزن و افزایش استحکام، در کاربردهایی مانند صنایع هوافضا، دیسک‌های توربین، تجهیزات پزشکی و ایمپلنت‌ها، سیستم‌های جذب انرژی، مبدل‌های حرارتی، فیلترها و قطعات سبک‌وزن خودرو کاربردهای گسترده و مؤثری دارند.

۲- مدل‌سازی ریاضی مسئله

در این مقاله ورق دایروی از نوع مواد متخلخل متغیر در راستای شعاعی با ضخامت h و شعاع R در دستگاه مختصات استوانه‌ای (r, θ, z) که تحت توزیع یکنواخت فشار عمودی قرار دارد در نظر گرفته شده است (شکل ۱). خصوصیات مکانیکی در راستای شعاع ورق متفاوت می‌باشد. مقدار مدول یانگ در راستای شعاع متغیر بوده و ماده استفاده شده در ساخت ورق دایروی متخلخل، دارای خواص مکانیکی پیوسته می‌باشد (شکل ۲). خواص این ماده مانند مدول الاستیسیته توابعی از ضریب تخلخل و مدول الاستیسته ماده پایه می‌باشد. با فرض اینکه محور عمود بر صفحه میانی محور Z باشد. مدول الاستیسیته $E=E(r)$ ، مدول برشی $G=G(r)$ و چگالی $\rho=\rho(r)$ به فرم زیر تعریف شده است [۳۰] (شکل ۳).

$$\begin{aligned} E(r) &= E_0 \left(e^{e_0 \frac{r}{R}} \right) \\ G(r) &= G_0 \left(e^{e_0 \frac{r}{R}} \right) \\ \rho(r) &= \rho_0 \left(e^{e_m \frac{r}{R}} \right) \end{aligned} \quad (1)$$

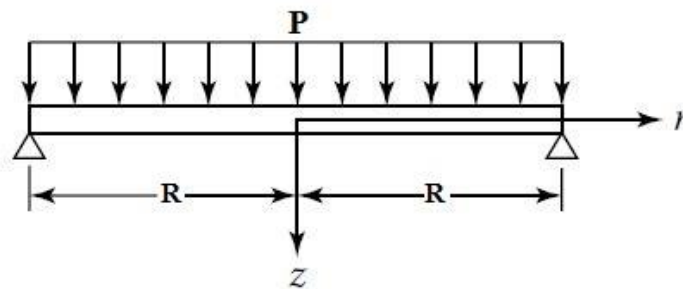
که e_0 ، e_m و G_j به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} e_0 &= \ln \left(\frac{E_1}{E_0} \right) \\ e_m &= \ln \left(\frac{\rho_1}{\rho_0} \right) \\ G_j &= \frac{E_j}{2(1+\nu)} \quad , \quad j=0,1 \end{aligned} \quad (2)$$

خمشی ورق متخلخل دایره‌ای انجام داده‌اند. مدل تحلیلی چنین خیز ورق برای شرایط مرزی دیفرانسیل به صورت تحلیلی و عددی (FEM) تعیین و مقایسه شده‌اند. سفرپور و همکاران [۳۴] بررسی پارامتری خمش سه بعدی و فرکانس ورق مدور و حلقوی متخلخل FG-GPLRC در شرایط مرزی مختلف انجام داده‌اند، معادلات بر اساس تئوری الاستیسته حاصل شده و به روش DQM حل شده است.

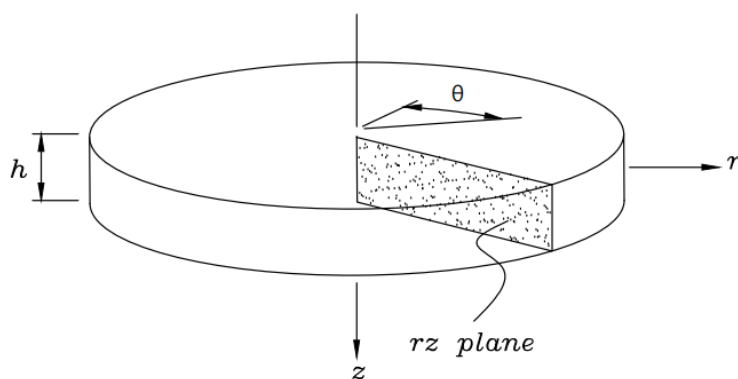
در سال‌های اخیر، تحلیل‌های تنش در سازه‌ها و المان‌های مکانیکی با در نظر گرفتن شرایط بارگذاری پیچیده‌تر و واقعی‌تر، مورد توجه محققان قرار گرفته است. به‌ویژه در حوزه رفتارهای غیرخطی، بررسی پاسخ خمش، نیروی محوری، و بارگذاری ضربه‌ای در ساختارهای سبک و جذب‌کننده انرژی نظیر لوله‌های مشبک توسعه‌یافته و تیرهای مقطع T شکل، نقش مهمی در بهبود عملکرد مکانیکی سیستم‌ها ایفا کرده‌اند. به عنوان نمونه، تأثیر ممان اینرسی و سلول‌های تکی و دوتایی در رفتار شکست لوله‌های مشبک تحت بارگذاری ضربه‌ای مورد بررسی تئوری و عددی قرار گرفته است [۳۵]، همچنین اندرکنش خمش-محور در تیرهای فلزی نیز به روش‌های تحلیلی و عددی مدل‌سازی شده است [۳۶]. بررسی اثر ابعاد مقطع و لایه‌بندی در پاسخ ضربه‌ای لوله‌های مشبک [۳۷]، نفوذ گلوله‌های آلومینیومی به صفحات نازک آلومینیومی تحت سرعت بسیار بالا [۳۸]، و بررسی آزمایشگاهی جذب انرژی در لوله‌های فلزی مشبک تحت بارگذاری محوری [۳۹] از دیگر مطالعات شاخص در این زمینه هستند که می‌توانند الهام‌بخش توسعه مدل‌های پیشرفته‌تری برای تحلیل سازه‌های مدرج تابعی تحت شرایط بارگذاری متنوع باشند.

با توجه به مطالعات پیشین، تاکنون تحقیقی جامع در زمینه تحلیل خمش و خیز ورق‌های دایره‌ای متخلخل با توزیع شعاعی تخلخل صورت نگرفته و این پژوهش برای نخستین بار به بررسی دقیق این مسئله می‌پردازد. در این مقاله، خمش الاستیک و خیز استاتیکی ورق دایره‌ای مدرج تابعی متخلخل با توزیع تخلخل در راستای شعاع، تحت بارگذاری فشاری یکنواخت عمودی و در دو شرط مرزی ساده و گیردار تحلیل شده است. معادلات حاکم با فرض تقارن محوری و بر پایه تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی استخراج و با استفاده از روش انرژی به‌صورت تحلیلی (روش سری‌ها) و عددی (روش اجزای محدود) حل شده‌اند. مقایسه نتایج دو روش با میانگین خطای ۰/۰۴٪ و بیشینه خطای ۰/۰۷٪، همچنین تطابق آن‌ها با داده‌های مرجع (با خطای ۰/۰۵٪ و ۰/۰۱٪)، صحت و دقت مدل را تأیید می‌کند. نتایج نشان می‌دهد



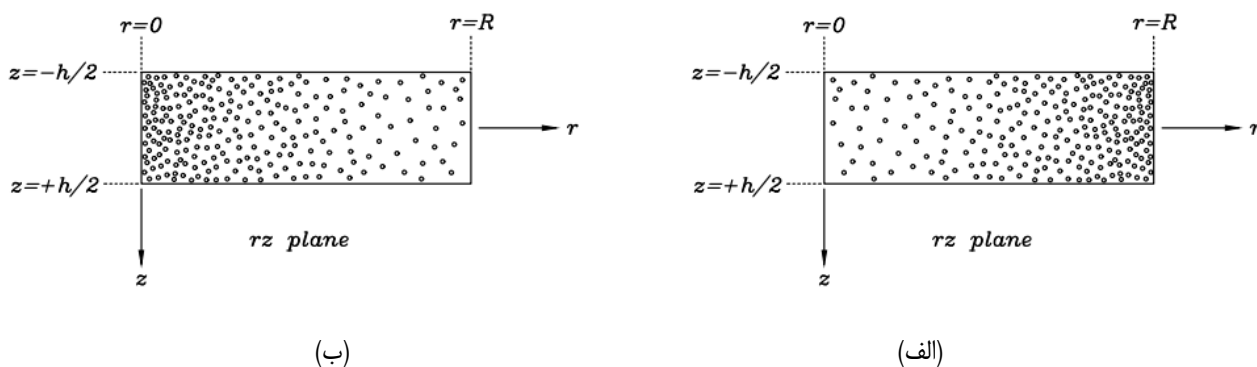
شکل ۱. ورق دایره ای متخلخل در دستگاه مختصات استوانه ای تحت بار فشاری یکنواخت

Fig. 1. A radially porous circular plate in cylindrical coordinates under uniform compressive loading.



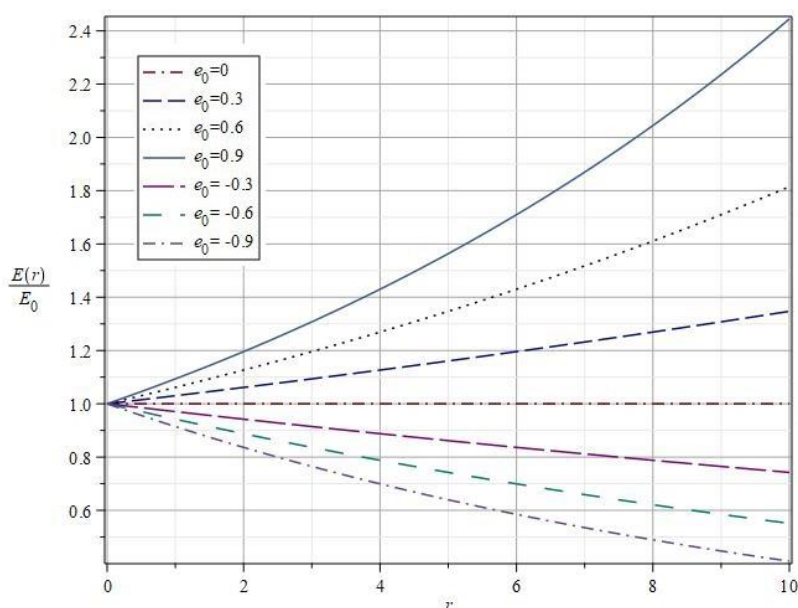
شکل ۲. نمای ورق دایره ای متخلخل شعاعی در دستگاه مختصات استوانه ای در صفحه rz

Fig. 2. View of a radially porous circular plate in cylindrical coordinates in the rz plane.



شکل ۳. نمای برش خورده ورق دایره ای متخلخل شعاعی در صفحه rz به ازای مقادیر متفاوتی از ضریب تخلخل. (الف) برای مقادیر منفی ضریب تخلخل ($e_0 < 0$) (ب) برای مقادیر مثبت ضریب تخلخل ($e_0 > 0$).

Fig. 3. Cross-sectional view of a radially porous circular plate in the rz plane for different values of the porosity coefficient: (a) for negative porosity coefficients ($e_0 < 0$), (b) for positive porosity coefficients ($e_0 > 0$).



شکل ۴. توزیع مدول الاستیسیته در راستای شعاعی ورق دایره ای متخلخل به ازای ضرایب مختلف تخلخل

Fig. 4. Radial distribution of Young's modulus in the porous circular plate for different porosity coefficients.

$$\begin{cases} u(r, \theta, z) = u_0(r, \theta) + z\phi_r(r, \theta) \\ v(r, \theta, z) = v_0(r, \theta) + z\phi_\theta(r, \theta) \\ w(r, \theta, z) = w_0(r, \theta) \end{cases} \quad (3)$$

که در این معادلات u_0, v_0, w_0 جابجایی ها روی صفحه میانی و ϕ_r و ϕ_θ چرخش های عمودی حول محورهای r و θ هستند.

رابطه ۳ باتوجه به خاصیت تقارن محوری به فرم زیر تعریف شده است که $\phi = \phi_r$ در نظر گرفته شده است [۳، ۴].

$$\begin{cases} u(r, z) = z\phi(r) \\ v(r, z) = 0 \\ w(r, z) = w_0(r) \end{cases} \quad (4)$$

روابط کرنش-تغییر مکان در مختصات استوانه‌ای و با فرض تقارن محوری در نظر گرفته شده که به صورت زیر می‌باشد:

در روابط ۱ و ۲، e عدد ثابت نپر، e_0 ضریب تخلخل ورق، e_m پارامتر بدون بعد چگالی، v نسبت پواسون (ثابت برای کل ورق)، R شعاع ورق، E_0 و E_1 مدول یانگ در $r=0$ و $r=R$ ، G_0 و G_1 مدول برشی در $r=0$ و $r=R$ و همچنین ρ_0 و ρ_1 چگالی در $r=0$ و $r=R$ می‌باشند. رابطه بین ضریب تخلخل صفحه و پارامتر بدون بعد چگالی به صورت $e_m = 1 - \sqrt{1 - e_0}$ می‌باشد [۴۱].

همان‌طور که در شکل ۴ مشاهده می‌شود، برای مقادیر منفی ضریب تخلخل و مطابق با شکل ۳(الف)، تخلخل در راستای شعاع افزایش یافته و در نتیجه چگالی کاهش یافته است که این امر منجر به کاهش مدول الاستیسیته شده است. در مقابل، برای مقادیر مثبت ضریب تخلخل، طبق شکل ۳(ب)، تخلخل به تدریج کاهش و چگالی افزایش می‌یابد که در نهایت موجب افزایش مدول الاستیسیته می‌گردد. همچنین، زمانی که ضریب تخلخل برابر صفر باشد، توزیع یکنواخت باقی می‌ماند و مدول الاستیسیته ثابت بوده و نمودار به صورت خط مستقیم ظاهر می‌شود.

مطابق با تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی میدان جابه‌جایی در حالت کلی در هر سطح مقطع به صورت زیر فرض می‌شود [۴۲].

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{E(r)}{1-\nu^2}(\varepsilon_r + \nu\varepsilon_\theta) \\ \sigma_\theta &= \frac{E(r)}{1-\nu^2}(\varepsilon_\theta + \nu\varepsilon_r) \\ \tau_{rz} &= G(r)\gamma_{rz}\end{aligned}\quad (12)$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r} \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{r}\left(u + \frac{\partial v}{\partial \theta}\right) \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{r\theta} &= \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \\ \gamma_{rz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \\ \gamma_{\theta z} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta}\end{aligned}\quad (5)$$

بنابراین با توجه به روابط (۱)، (۵) و (۱۲) می‌توان تنشها را به صورت زیر محاسبه کرد:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{E(r)}{1-\nu^2}(\varepsilon_r + \nu\varepsilon_\theta) = \\ &= \frac{E_0\left(e^{\varepsilon_0 \frac{r}{R}}\right)}{1-\nu^2}\left[z\left(\frac{\partial \phi}{\partial r} + \nu \frac{\phi}{r}\right)\right]\end{aligned}\quad (13)$$

با توجه به روابط (۴) کرنش ها به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\begin{aligned}\sigma_\theta &= \frac{E(r)}{1-\nu^2}(\varepsilon_\theta + \nu\varepsilon_r) = \\ &= \frac{E_0\left(e^{\varepsilon_0 \frac{r}{R}}\right)}{1-\nu^2}\left[z\left(\frac{\phi}{r} + \nu \frac{\partial \phi}{\partial r}\right)\right]\end{aligned}\quad (14)$$

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} = z \frac{\partial \phi}{\partial r} \quad (6)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{r}\left(u + \frac{\partial v}{\partial \theta}\right) = \frac{z\phi}{r} \quad (7)$$

$$\tau_{rz} = G(r)\gamma_{rz} = G_0\left(e^{\varepsilon_0 \frac{r}{R}}\right)\left(\phi + \frac{\partial w_0}{\partial r}\right) \quad (15)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (8)$$

۳- معادلات تعادل

برای ورقه‌ای که تحت اثر بار مکانیکی قرار گرفته باشد می‌توان رابطه انرژی پتانسیل کل ورق را به صورت زیر نوشت:

$$V = U_\varepsilon + \Omega \quad (16)$$

در رابطه (۱۶)، V انرژی پتانسیل کل ورق^۱، U_ε انرژی کرنشی الاستیک^۲ و Ω انرژی پتانسیل ناشی از کار خاجی توزیع یکنواخت فشار عمودی^۳ می‌باشد. با توجه به اصل ثابت بودن کل انرژی پتانسیل داریم:

$$\gamma_{r\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} = 0 \quad (9)$$

$$\gamma_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} = \phi + \frac{\partial w_0}{\partial r} \quad (10)$$

$$\gamma_{\theta z} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta} = 0 \quad (11)$$

در روابط بالا، ε_r کرنش عمودی در راستای محور r ، ε_θ کرنش محیطی در راستای θ و γ_{rz} کرنش برشی می‌باشند. روابط محاسبه تنشها

نیز طبق قانون هوک به صورت زیر می‌باشد:

1. Total potential energy
2. Elastic strain energy
3. Uniform distribution vertical pressure potential energy

$$\delta U_\varepsilon = \pi \int_0^R \left(M_r \frac{\partial \delta \phi}{\partial r} + M_\theta \frac{\delta \phi}{r} + Q_r \delta \phi + Q_r \frac{\partial \delta w_0}{\partial r} \right) r dr \quad (26)$$

نیروها و ممان‌های منتجه به کار رفته در رابطه (۲۶)، با استفاده از رابطه کلی (۲۷) و مطابق با مرجع [۱۹]، به صورت رابطه (۲۸) بیان می‌شوند که k_s ضریب تصحیح برشی می باشد و مقدار آن $k_s=5/6$ در نظر گرفته شده است [۵].

$$\begin{cases} N_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij} dz \\ M_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij} z dz \\ Q_i = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{iz} dz \quad i, j = r, \theta \end{cases} \quad (27)$$

$$\begin{cases} N_r = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_r dz = \int_{-h/2}^{h/2} \left[\frac{E(r)}{1-\nu^2} (\varepsilon_r + \nu \varepsilon_\theta) \right] dz \\ N_\theta = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\theta dz = \int_{-h/2}^{h/2} \left[\frac{E(r)}{1-\nu^2} (\varepsilon_\theta + \nu \varepsilon_r) \right] dz \\ M_r = \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_r dz = \int_{-h/2}^{h/2} z \left[\frac{E(r)}{1-\nu^2} (\varepsilon_r + \nu \varepsilon_\theta) \right] dz \\ M_\theta = \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_\theta dz = \int_{-h/2}^{h/2} z \left[\frac{E(r)}{1-\nu^2} (\varepsilon_\theta + \nu \varepsilon_r) \right] dz \\ Q_r = k_s \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{rz} dz = \frac{5}{6} \int_{-h/2}^{h/2} [G(r) \gamma_{rz}] dz \end{cases} \quad (28)$$

با انتگرالگیری جزء به جزء از رابطه (۲۶) و همچنین با استفاده از رابطه (۱۷) معادلات حاکم به صورت زیر بدست آورده شده است:

$$\begin{aligned} \delta \phi: \quad & -\frac{\partial(rM_r)}{\partial r} + M_\theta + rQ_r = 0 \\ \delta w_0: \quad & -\frac{\partial(rQ_r)}{\partial r} - rP = 0 \end{aligned} \quad (29)$$

$$\delta(U_\varepsilon - \Omega) = 0 \quad (17)$$

که:

$$U_\varepsilon = \pi \int_0^R \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_r \varepsilon_r + \sigma_\theta \varepsilon_\theta + \tau_{rz} \gamma_{rz}) dz r dr \quad (18)$$

$$\Omega = 2\pi \int_0^R P w_0 r dr \quad (19)$$

در رابطه فوق، P بیانگر توزیع فشار عمودی است. با توجه به معادله (۱۷)، لازم است از روابط (۱۸) و (۱۹) واریاسیون گرفته شود. بنابراین خواهیم داشت:

$$\delta U_\varepsilon = \pi \int_0^R \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_r \delta \varepsilon_r + \sigma_\theta \delta \varepsilon_\theta + \tau_{rz} \delta \gamma_{rz}) dz r dr \quad (20)$$

$$\delta \Omega = 2\pi \int_0^R P \delta w_0 r dr \quad (21)$$

که واریاسیون کرنش ها برابر است با:

$$\delta \varepsilon_r = z \frac{\partial \delta \phi}{\partial r} \quad (22)$$

$$\delta \varepsilon_\theta = z \frac{\delta \phi}{r} \quad (23)$$

$$\delta \gamma_{rz} = \delta \phi + \frac{\partial \delta w_0}{\partial r} \quad (24)$$

در ادامه روابط (۲۲)، (۲۳) و (۲۴) در رابطه (۲۰) جایگذاری شده است:

$$\delta U_\varepsilon = \pi \int_0^R \int_{-h/2}^{h/2} \left[\sigma_r \left(z \frac{\partial \delta \phi}{\partial r} \right) + \sigma_\theta \left(\frac{z \delta \phi}{r} \right) + \tau_{rz} \left(\delta \phi + \frac{\partial \delta w_0}{\partial r} \right) \right] dz r dr \quad (25)$$

۴- روش حل

برای حل معادلات حاکم، از روش تحلیلی استفاده شده است. همچنین، به منظور اعتبارسنجی نتایج، حل عددی ورق با خواص مکانیکی همگن با استفاده از روش اجزای محدود در نرم افزار ABAQUS انجام شده و نتایج حاصل با روش تحلیلی مقایسه و صحت سنجی گردیده است. در ادامه، جزئیات مربوط به هر دو روش ارائه می شود.

ورق متخلخل دایروی با دو تکیه گاه ساده و گیردار در لبه ها در نظر گرفته شده و تحت توزیع یکنواخت فشار عمودی قرار گرفته است. شرایط مرزی برای $r = 0$ و $r = R$ به صورت زیر می باشد [۴۳] و [۴۴]:

- شرایط مرزی برای مدور با تکیه گاه ساده (ε مقداری متناهی و محدود می باشد):

$$\begin{aligned} w(r=R) &= 0, \\ w(r=0) &= \varepsilon \quad 0 \leq \varepsilon < \infty \\ M_r(r=R) &= 0 \longrightarrow \\ \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} + \nu \frac{\phi}{r} \right)_{(r=R)} &= 0, \quad (\phi)_{r=0} = 0 \end{aligned} \quad (30)$$

- شرایط مرزی برای ورق مدور با تکیه گاه گیردار:

$$\begin{aligned} w(r=R) &= 0, \\ w(r=0) &= \varepsilon \quad 0 \leq \varepsilon < \infty \\ (\phi)_{r=0} &= 0, \quad (\phi)_{(r=R)} = 0 \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} & \frac{h^3 E_0 \left(e^{e_0 \frac{r}{R}} \right)}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} + \nu \frac{\phi}{r} \right) \\ M_\theta &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E_0 \left(e^{e_0 \frac{r}{R}} \right)}{1-\nu^2} \left[z^2 \left(\frac{\phi}{r} + \nu \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) \right] dz = \\ & \frac{h^3 E_0 \left(e^{e_0 \frac{r}{R}} \right)}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{\phi}{r} + \nu \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) \\ Q_r &= k \int_{-h/2}^{h/2} G_0 \left(e^{e_0 \frac{r}{R}} \right) \left(\phi + \frac{\partial w_0}{\partial r} \right) dz = \\ & \frac{5}{6} h G_0 \left(e^{e_0 \frac{r}{R}} \right) \left(\phi + \frac{\partial w_0}{\partial r} \right) \end{aligned}$$

با قرار دادن روابط (۳۲) در معادلات (۲۹) داریم:

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r h^3 E_0 \left(e^{e_0 \frac{r}{R}} \right)}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} + \nu \frac{\phi}{r} \right) \right) \\ & + \left(\frac{h^3 E_0 \left(e^{e_0 \frac{r}{R}} \right)}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{\phi}{r} + \nu \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) \right) + \\ & \left(\frac{5}{6} r h G_0 \left(e^{e_0 \frac{r}{R}} \right) \left(\phi + \frac{\partial w_0}{\partial r} \right) \right) = 0 \\ & -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{5}{6} r h G_0 \left(e^{e_0 \frac{r}{R}} \right) \left(\phi + \frac{\partial w_0}{\partial r} \right) \right) - (rP) = 0 \end{aligned} \quad (33)$$

که در نهایت دستگاه معادلات حاکم بر حسب میدان جایجایی پس از

ساده سازی برابر است با:

با بسط روابط (۲۸) بر حسب میدان جایجایی داریم:

$$\begin{aligned} & -\frac{h^3 E_0}{12(1-\nu^2)} \left[\left(e^{e_0 \frac{r}{R}} \right) \left(r \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \nu \frac{\partial \phi}{\partial r} - \nu \frac{\phi}{r} \right) \right. \\ & \left. + \left(1 + e_0 \frac{r}{R} \right) \left(e^{e_0 \frac{r}{R}} \right) \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} + \nu \frac{\phi}{r} \right) \right] \\ & + \frac{5}{6} r h G_0 \left(e^{e_0 \frac{r}{R}} \right) \left(\phi + \frac{\partial w_0}{\partial r} \right) = 0 \\ & -\frac{5}{6} h G_0 \left[\left(e^{e_0 \frac{r}{R}} \right) \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} + r \frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2} \right) \right. \\ & \left. + \left(1 + e_0 \frac{r}{R} \right) \left(e^{e_0 \frac{r}{R}} \right) \left(\phi + \frac{\partial w_0}{\partial r} \right) \right] - rP = 0 \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} N_r &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E_0 \left(e^{e_0 \frac{r}{R}} \right)}{1-\nu^2} \left[z \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} + \nu \frac{\phi}{r} \right) \right] dz = 0 \\ N_\theta &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E_0 \left(e^{e_0 \frac{r}{R}} \right)}{1-\nu^2} \left[z \left(\frac{\phi}{r} + \nu \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) \right] dz = 0 \\ M_r &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E_0 \left(e^{e_0 \frac{r}{R}} \right)}{1-\nu^2} \left[z^2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} + \nu \frac{\phi}{r} \right) \right] dz = \end{aligned} \quad (35)$$

$E'(r)$ مشتق $E(r)$ نسبت به r می‌باشد. معادله (۳۸) یک معادله دیفرانسیل درجه دوم ناهمگن با ضرایب متغیر است که حل آن با استفاده از روش سری‌ها در نرم‌افزار Maple و دستور حل معادلات به روش سری انجام شده است (معادله ۴۰). با اعمال شرایط مرزی (معادلات ۳۰ و ۳۱)، ثابت‌های C_1 و C_2 استخراج شده‌اند. در نهایت، با بهره‌گیری از رابطه (۱۳)، تنش‌های خمشی و خیز ورق محاسبه گردیده‌اند.

$$\phi = C_1 A_1 + C_2 A_2 + A_3 \quad (40)$$

که:

$$\begin{aligned} A_1 &= r \left(1 - \frac{1}{3} \frac{(\nu+1)e_0}{R} r + \frac{1}{24} \frac{(\nu+2)(\nu+1)e_0^2}{R^2} r^2 - \frac{1}{360} \frac{(\nu+3)(\nu+2)(\nu+1)e_0^3}{R^3} r^3 + O(r) \right) \\ A_2 &= \frac{\ln(r)}{r} \left(\frac{e_0 \nu (\nu-1) r^2}{R^2} - \frac{1}{3} \frac{\nu(\nu-1)(\nu+1)e_0^3 r^3}{R^3} + O(r) \right) \\ &\quad + \frac{1}{r} \left(-2 - 2 \frac{(\nu-1)e_0 r}{R} + \left(\frac{e_0^2 (2\nu-1)}{R^2} \right) r^2 \right. \\ &\quad \left. + \left(-\frac{\nu(\nu-1)e_0^3}{3R^3} - \frac{(\nu-1)(\nu+1)e_0^3}{3R^3} - \frac{\nu(\nu+1)e_0^3}{3R^3} + \frac{4\nu(\nu-1)(\nu+1)e_0^3}{9R^3} \right) r^3 + O(r) \right) \\ A_3 &= \frac{3}{4} \frac{P(\nu^2-1)r^3}{h^3 E} + O(r) \end{aligned}$$

همانطور که گفته شد با اعمال شرایط مرزی مسئله و حل معادله حاصل شده با کمک نرم افزار میپل ثابت های C_1 و C_2 برابر است با:

- برای تکیه گاه ساده:

$$C_1 = \frac{270R^2 p(\nu+3)(\nu-1)}{\left(\nu^3 e_0^3 + 9\nu^2 e_0^3 - 15\nu^2 e_0^2 + 26\nu e_0^3 - 75\nu e_0^2 + 24e_0^3 + 120e_0 \nu - 90e_0^2 + 240e_0 - 360 \right) Eh^3}$$

$$C_2 = 0$$

- برای تکیه گاه گیردار:

$$C_1 = \frac{270R^2 p(\nu^2-1)}{\left(\nu^3 e_0^3 + 6\nu^2 e_0^3 - 15\nu^2 e_0^2 + 11\nu e_0^3 - 45\nu e_0^2 + 6e_0^3 + 120e_0 \nu - 30e_0^2 + 120e_0 - 360 \right) Eh^3}$$

$$C_2 = 0$$

که اگر مقدار e_0 برابر صفر قرار داده شود معادلات حاکم برحسب میدان جابجایی برای ورق مدور همگن حاصل می شود.

۴-۱- حل معادلات در حالت تغییرات تخلخل در راستای شعاعی

P به عنوان بار فشاری عمودی یکنواخت در نظر گرفته شده است. برای حل معادلات حاکم ابتدا از رابطه دوم معادلات (۲۹) داریم:

$$rQ_r = -\frac{r^2 P}{2} + C \quad (35)$$

که مقدار ثابت C با توجه به شرایط مرزی (۳۰) و (۳۱) صفر می باشد [۴۲]. با جایگذاری (۳۵) در معادله اول (۲۹) خواهیم داشت:

$$-\frac{\partial(rM_r)}{\partial r} + M_\theta - \frac{r^2 P}{2} = 0 \quad (36)$$

با جایگذاری روابط (۲۸) در معادله (۳۶) داریم:

$$\begin{aligned} & -\frac{h^3 E(r)}{12(1-\nu^2)} \left[\frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\nu}{r} \phi \right] \\ & -r \left\{ \left[\frac{h^3}{12(1-\nu^2)} \frac{\partial E(r)}{\partial r} \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\nu}{r} \phi \right) \right] \right. \\ & \left. + \frac{h^3 E(r)}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} - \frac{\nu}{r^2} \phi \right) \right\} \\ & + \frac{h^3 E(r)}{12(1-\nu^2)} \left[\frac{\phi}{r} + \nu \frac{\partial \phi}{\partial r} \right] - \frac{r^2 P}{2} = 0 \end{aligned} \quad (37)$$

پس از مرتب سازی خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \left(\frac{1}{r} + \xi \right) \frac{\partial \phi}{\partial r} \\ & + \left(\frac{\nu}{r} \xi - \frac{1}{r^2} \right) \phi + \frac{6rP(1-\nu^2)}{h^3 E_0} = 0 \end{aligned} \quad (38)$$

که:

$$\xi = \frac{E'(r)}{E(r)} = \frac{e_0}{R} \quad (39)$$

۴-۲- حل معادلات در حالت مدول الاستیسته ثابت

در صورتی که تخلخل را صفر در نظر بگیریم تغییراتی برای مدول الاستیسته وجود ندارد و ثابت است $E = E_0 = E_1$ یعنی $\epsilon = 0$ بنابر این رابطه (۳۸) به فرم زیر در می آید:

$$\frac{h^3 E}{12(1-\nu^2)} \left(r \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{\partial \phi}{\partial r} - \frac{\phi}{r} \right) + \frac{r^2 P}{2} = 0 \quad (41)$$

که:

$$\phi(r) = \frac{c_3}{r} + rc_4 + \frac{3P(\nu^2 - 1)r^3}{4h^3 E} \quad (42)$$

با توجه به شرایط مرزی (۳۰) $(\phi)_{r=0} = 0$ ، $\left(\frac{\partial \phi}{\partial r} + \nu \frac{\phi}{r} \right)_{(r=R)} = 0$ داریم:

$$\phi(r) = \frac{3(-pr^3 + 3prR^2 - 2prR^2\nu + pr^3\nu^2 - prR^2\nu^2)}{4Eh^3} \quad (43)$$

از روابط (۲۸) و (۲۹) برای Q_r داریم:

$$rQ_r = rkhG \left(\phi + \frac{\partial w_0}{\partial r} \right) \quad (44)$$

با ادغام رابطه (۳۵) و (۴۴) داریم:

$$rkhG \left(\phi + \frac{\partial w_0}{\partial r} \right) + \frac{r^2 P}{2} = 0 \quad (45)$$

بنابر این جابجایی عمودی ورق از (۴۳) و (۴۵) برابر است با:

$$w_0(r) = \frac{1}{16EGh^3k} (4Eh^2pr^2 + 3Gkpr^4 - 4Eh^2pR^2 - 18Gkpr^2R^2 + 15Gkpr^4 - 12Gkpr^2R^2\nu - 12Gkpr^4\nu - 3Gkpr^4\nu^2 + 6Gkpr^2R^2\nu^2 - 3Gkpr^4\nu^2) \quad (46)$$

با توجه به اینکه مقدار حداکثر تنش عمودی در این حالت در مرکز ورق یا در $(r=0)$ اتفاق می افتد، حداکثر تنش عمودی با استفاده از (۱۲) و (۴۳) به صورت زیر بدست می آید:

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_r + \nu \epsilon_\theta) = \frac{E}{1-\nu^2} \left[z \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} + \nu \frac{\phi}{r} \right) \right]$$

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2} \left[z \left(\frac{3}{4Eh^3} \left(\begin{aligned} &-3pr^2 - pr^2\nu + 3pR^2 + \\ &pR^2\nu + 3pr^2\nu^2 - 3pR^2\nu^2 \\ &+ pr^2\nu^3 - pR^2\nu^3 \end{aligned} \right) \right) \right] \quad (47)$$

$$(\sigma_r)_{\max} = (\sigma_\theta)_{\max} = \frac{E}{1-\nu^2} \left[z \left(\frac{3}{4Eh^3} \left(\begin{aligned} &3pR^2 + pR^2\nu \\ &-3pR^2\nu^2 - pR^2\nu^3 \end{aligned} \right) \right) \right]$$

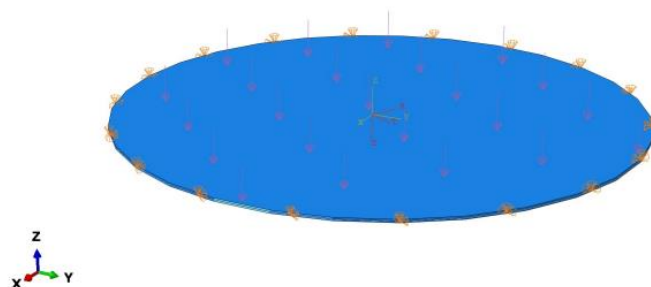
۴-۳- روش المان محدود

برای صحت سنجی نتایج تحلیلی، تحلیل عددی با استفاده از نرم افزار ABAQUS برای ورق دایره ای همگن انجام شده است. در این تحلیل، مقادیر ماکزیمم تنش عمودی و ماکزیمم خیز استخراج و با نتایج به دست آمده از روش تحلیلی در حالت همگن مقایسه شده اند. مدل سازی در مختصات استوانه ای و تحت بارگذاری فشاری یکنواخت عمودی صورت گرفته و دو نوع شرط مرزی مورد بررسی قرار گرفته است. مدل هندسی آماده شده در شکل ۵ نمایش داده شده است. در حالت تکیه گاه ساده، نتایج مربوطه در جدول ۱ ارائه شده اند و نمونه ای از این نتایج برای نسبت ضخامت به شعاع $h/R = 0.06$ در شکل ۱۴ نمایش داده شده است. همچنین، در حالت تکیه گاه گیردار، نتایج در جدول ۲ آمده و نمونه ای از آن برای $h/R = 0.08$ در شکل ۱۵ نشان داده شده است.

۵- نتایج

در این مطالعه مقدار P برابر ۱ Mpa و مقدار E_0 برابر مدول الاستیسته فولاد 42CrMo4 معادل ۲۱۰ Gpa با تنش تسلیم ۸۰۰ MPa در نظر گرفته شده است که نتایج بدست آمده برای هر ماده با این مدول الاستیسته صادق می باشد.

جدول ۱ و ۲ نتایج عددی ماکزیمم تنش عمودی بی بعد و خیز ورق دایره ای همگن تحت بارگذاری فشاری عمودی یکنواخت براساس تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی صفحات بترتیب برای ورق با لبه تکیه گاه ساده



شکل ۵. ورق همگن با تکیه گاه ساده و بارگذاری فشاری عمودی یکنواخت در مختصات استوانه ای در نرم افزار اباکوس.

Fig. 5. Homogeneous circular plate with simply supported edge under uniform vertical pressure in cylindrical coordinates modeled in Abaqus.

جدول ۱. نتایج عددی ماکزیمم تنش عمودی و خیز ورق دایروی همگن تحت بارگذاری فشاری عمودی یکنواخت بر اساس تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی صفحات برای ورق با لبه تکیه گاه ساده به روش تحلیلی در مقایسه با روش اجزاء محدود.

Table 1. Numerical results of maximum vertical stress and deflection of a homogeneous circular plate under uniform vertical pressure loading based on the first-order shear deformation theory for plates with simply supported edges: comparison between analytical and finite element methods.

h/R	Max Bending Stress ($\sigma_r = \sigma_\theta$)		Max Deflection (W)	
	FEM ^۱	ANALITICAL	FEM	ANALITICAL
۰/۰۱	۵/۸۹۰۹۵۲	۵/۸۹۲۸۵۷	۳۳/۱۲۲	۳۳/۱۲۸۸۹
۰/۰۲	۱/۴۷۳۷۳۸	۱/۴۷۳۲۱۴	۴/۱۴۱۰	۴/۱۴۲۵۷۳
۰/۰۳	۰/۶۵۴۵۵۲	۰/۶۵۴۷۶۲	۱/۲۲۷۸۵	۱/۲۲۸۱۵۰
۰/۰۴	۰/۳۶۸۱۸۵	۰/۳۶۸۳۳۳	۰/۵۱۸۴۰۶	۰/۵۱۸۵۵۲
۰/۰۵	۰/۲۳۵۶۳۸	۰/۲۳۵۷۱۴	۰/۲۶۵۶۹۲	۰/۲۶۵۷۷۹
۰/۰۶	۰/۱۶۳۶۷۷	۰/۱۶۳۶۹۰	۰/۱۵۳۹۶۸	۰/۱۵۴۰۰۵
۰/۰۷	۰/۱۲۰۲۲۳	۰/۱۲۰۲۶۲	۰/۰۹۷۰۸۶	۰/۰۹۷۱۳۰
۰/۰۸	۰/۰۹۲۰۴۶	۰/۰۹۲۰۷۶	۰/۰۶۵۱۴۹	۰/۰۶۵۱۸۴
۰/۰۸	۰/۰۷۲۷۲۸	۰/۰۷۲۷۵۱	۰/۰۴۵۸۴۳	۰/۰۴۵۸۷۱
۰/۱	۰/۰۵۸۹۱	۰/۰۵۸۹۳۹	۰/۰۳۳۴۹	۰/۰۳۳۵۱۴

^۱ روش المان محدود

تکیه گاه گیردار نسبت به تکیه گاه ساده مقدار کمتری به خود اختصاص داده است. در حالت گیردار، چون لبه نمی تواند بچرخد، تنش ها (به ویژه مماس های خمشی) بهتر در کل ورق توزیع می شوند. این باعث می شود که خیز ورق کاهش پیدا کند، چون انرژی خمشی بیشتری در لبه ها ذخیره می شود. در حالت ساده، لبه آزادانه خم می شود، و این باعث تمرکز بیشتر خیز در مرکز

و گیردار به روش تحلیلی در مقایسه با روش اجزاء محدود را نشان می دهد. با مقایسه نتایج، هم خوانی خوبی در هر دو روش با یکدیگر مشاهده شده است. همانطور که مشاهده می شود در هر دو حالت با افزایش نسبت ضخامت به شعاع مقدار ماکزیمم تنش عمودی و خیز ورق کاهش یافته و ورق استحکام بالاتری پیدا کرده است. همچنین تنش های عمودی و خیز ورق در حالت

جدول ۲. نتایج عددی ماکزیمم تنش عمودی و خیز ورق دایروی همگن تحت بار گذاری فشاری عمودی یکنواخت بر اساس تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی صفحات برای ورق با لبه تکیه گاه گیردار به روش تحلیلی در مقایسه با روش اجزاء محدود.

Table 2. Numerical results of maximum vertical stress and deflection of a homogeneous circular plate under uniform vertical pressure loading based on the first-order shear deformation theory for plates with clamped edges: comparison between analytical and finite element methods.

Max Bending Stress ($\sigma_r=\sigma_\theta$)			Max Deflection (W)	
h/R	FEM	ANALITICACAL	FEM	ANALITICACAL
۰/۰۱	۲/۳۲۰۴۳۳	۲/۳۲۱۴۲۹	۸/۱۲۶۸	۸/۱۲۸۹
۰/۰۲	۰/۵۸۰۱۱	۰/۵۸۰۳۵۷	۱/۰۱۷۲	۱/۰۱۷۵
۰/۰۳	۰/۲۵۷۸۲۶	۰/۲۵۷۹۳۷	۰/۳۰۲	۰/۳۰۲۲
۰/۰۴	۰/۱۴۵۰۲۷	۰/۱۴۵۰۹۰	۰/۱۲۷۸	۰/۱۲۷۹
۰/۰۵	۰/۰۹۲۸۱۷	۰/۰۹۲۸۵۷	۰/۰۶۵۷۲	۰/۰۶۵۸
۰/۰۶	۰/۰۶۴۴۵۷	۰/۰۶۴۴۸۴	۰/۰۳۸۲۲	۰/۰۳۸۳
۰/۰۷	۰/۰۴۷۳۵۶	۰/۰۴۷۳۸۰	۰/۰۲۴۲۱	۰/۰۲۴۲
۰/۰۸	۰/۰۳۶۲۶۸	۰/۰۳۶۲۷۲	۰/۰۱۶۳۳	۰/۰۱۶۴
۰/۰۸	۰/۰۲۸۶۴۷	۰/۰۲۸۶۶۰	۰/۰۱۱۵۵	۰/۰۱۱۶
۰/۱	۰/۰۲۳۲۰۴	۰/۰۲۳۲۱۴	۰/۰۰۸۴۹	۰/۰۰۸۵۱

براساس تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی با تکیه گاه ساده و گیردار به روش تحلیلی را با سایر نتایج موجود [۸]، [۵] مورد مقایسه قرار داده است، برای همخوانی نتایج از $\nu=0.288$ و $E_r=0.396$ بکار رفته در [۵] استفاده شده است. همخوانی خوبی با سایر نتایج مشاهده شده است و همچنین مشاهده می‌شود.

در شکل های ۶-۱۳ مقادیر تنش به صورت بی بعد ترسیم شده و به منظور بی بعد کردن تنش های عمودی از رابطه زیر استفاده شده است.

$$\bar{\sigma}_r = \frac{10\sigma_r}{E_0} \quad (۴۸)$$

برای بررسی رفتار تنش های خمشی در ورق دایروی متخلخل شعاعی دو حالت با ضریب تخلخل و بدون ضریب تخلخل برای ورق با تکیه گاه ساده و گیردار با مقادیر $h/R=1/10$ ، $\nu=0.3$ ، $P=1MPa$ و $-1 < e_0 < 1$ در نظر گرفته شده است.

ورق می‌شود. در حالت تکیه گاه گیردار نسبت به تکیه گاه ساده تنش ها به طور متوسط ۶۰-۶۵ درصد و خیز بطور متوسط ۷۰ تا ۷۶ درصد کاهش می یابد.

جدول ۳ نتایج عددی ماکزیمم خیز ورق دایروی همگن تحت بارگذاری فشاری عمودی یکنواخت براساس تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی با تکیه گاه گیردار به روش تحلیلی را با سایر نتایج موجود [۸]، [۵] و [۶] مورد مقایسه قرار داده است، برای همخوانی نتایج از داده های ماده FGM با ترکیب آلومینیوم-زیرکونیا با $\nu=0.3$ و $E_r=0.464$ استفاده شده است. که نسبت مدول یانگ فلز به سرامیک می باشد [۸] و مقادیر خیز با رابطه $\bar{W} = 64DW / PR^4$ که D صلبیت خمشی ورق و برابر با $D = Eh^3 / 12(1-\nu^2)$ می باشد، بی بعد شده است. همخوانی خوبی با سایر نتایج مشاهده شده است و همچنین مشاهده شده نتایج به تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی ردی نزدیک تر می باشد.

جدول ۴ نتایج عددی ماکزیمم خیز $\bar{W}$ بی بعد شده مطابق با جدول قبل برای ورق دایروی همگن تحت بارگذاری فشاری عمودی یکنواخت

جدول ۳. مقایسه خیز بی بعد $\bar{W}$ ورق ضخیم دایروی همگن برای ورق با لبه تکیه گاه گیردار به روش تحلیلی در مقایسه با سایر نتایج موجود برای $\nu = 0.3$ و $E_r = 0.464$

Table 3. Comparison of dimensionless deflection of a thick homogeneous circular plate with clamped edges using the analytical method versus other available results for $\nu = 0.3$ and $E_r = 0.464$.

Ref.	h/R					
	۰	۰/۱	۰/۲	۰/۲۵	۰/۳	۰/۳۳
FSDT [5]	۲/۱۵۷۴	۲/۲۵۵۸	۲/۵۵۱۶	۲/۷۷۳۵	۳/۰۴۴۷	۳/۲۳۱۰
TSDT[6]	۲/۱۵۷۴	۲/۲۵۴۶	۲/۵۴۲۳	۲/۷۵۵۴	۳/۰۱۳۴	۳/۱۸۹۳
TSDT[8]	۲/۱۵۷۴	۲/۲۵۵۳	۲/۵۴۷۸	۲/۷۶۶۰	۳/۰۳۱۷	۳/۲۱۳۸
Present (FSDT)	۲/۱۵۷۴	۲/۲۵۵۴	۲/۵۵۰۴	۲/۷۷۱۷	۳/۰۴۲۱	۳/۲۲۷۹

جدول ۴. مقایسه خیز بی بعد $\bar{W}$ ورق ضخیم دایروی همگن برای ورق با لبه تکیه گاه ساده و گیردار به روش تحلیلی در مقایسه با سایر نتایج موجود برای $\nu = 0.288$ و $E_r = 0.396$

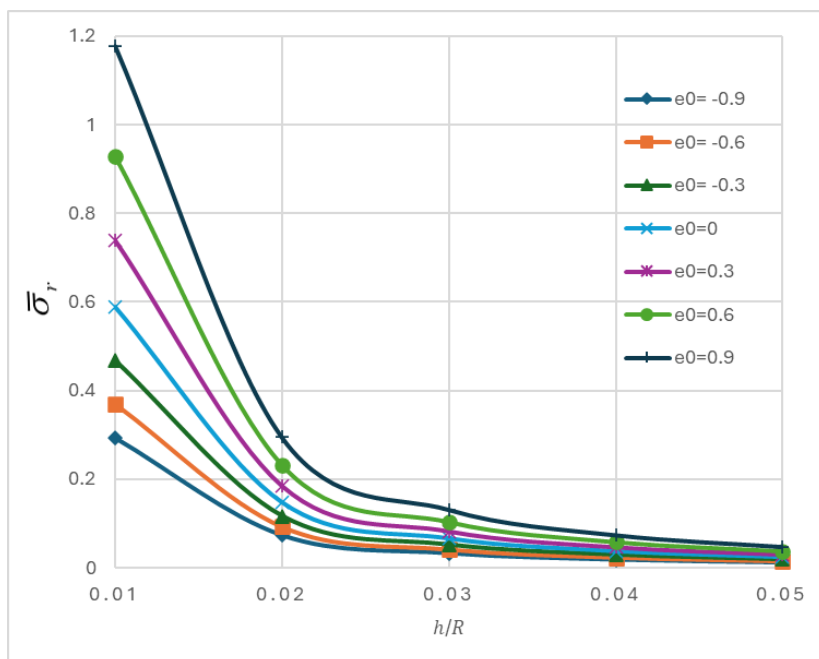
Table 4. Comparison of dimensionless deflection of a thick homogeneous circular plate with simply supported and clamped edges using the analytical method versus other available results for $\nu = 0.288$ and $E_r = 0.396$.

Ref.	h/R				
	۰	۰/۰۵	۰/۱	۰/۱۵	۰/۲
S.S.	FSDT [5]	۱۰/۳۶۸	۱۰/۳۹۶	۱۰/۴۸۱	۱۰/۶۲۳
	TSDT[8]	۱۰/۳۶۵	۱۰/۳۹۴	۱۰/۴۷۹	۱۰/۶۲۱
	Present (FSDT)	۱۰/۳۶۸	۱۰/۳۹۶	۱۰/۴۸۲۹	۱۰/۶۲۷۸
C.S.	FSDT [5]	۲/۵۲۵	۲/۵۵۴	۲/۶۳۹	۲/۷۸۱
	TSDT[8]	۲/۵۲۵۲	۲/۵۵۳۵	۲/۶۳۸۲	۲/۷۷۸۸
	Present (FSDT)	۲/۵۲۵	۲/۵۵۷۲	۲/۶۴۲۹	۲/۷۸۵۹

(۱) و (۱۳)، افزایش ضریب تخریل منجر به افزایش مدول الاستیسیته در راستای شعاعی شده و در نتیجه با افزایش سختی، تنش شعاعی که به طور مستقیم با مدول الاستیسیته مرتبط است، افزایش می یابد.

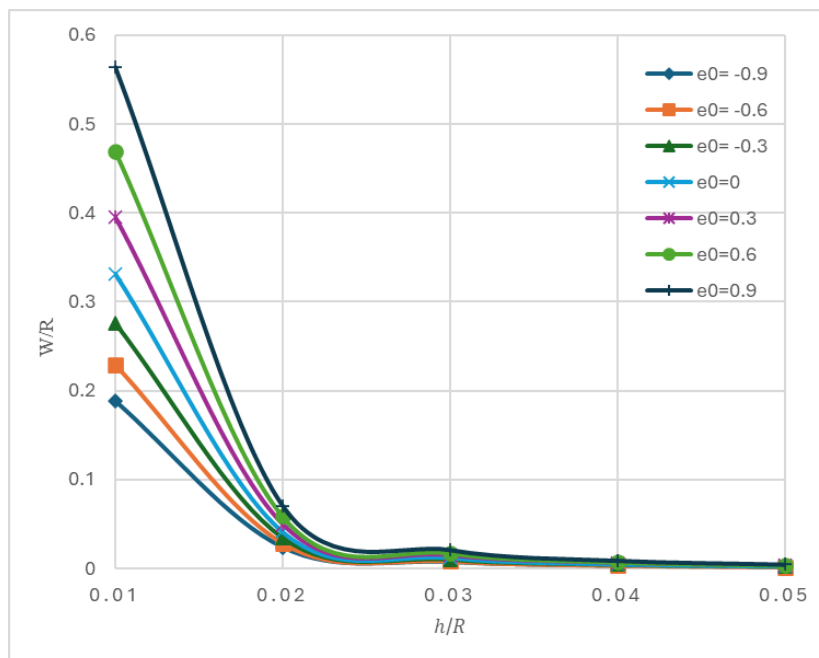
در شکل ۷، تغییرات خیز بی بعد (با فرض شعاع $R=100$) نسبت به تغییرات نسبت ضخامت به شعاع (h/R) در مرکز ورق دایره ای متخلخل شعاعی و در موقعیت $z=h/2$ ، برای حالت تکیه گاه ساده و ضرایب مختلف تخریل بررسی شده است. نتایج نشان می دهد که با افزایش نسبت h/R ، ممان اینرسی ورق افزایش یافته و در نتیجه استحکام خمشی بیشتر می شود، که این امر منجر به کاهش خیز در برابر بارگذاری می گردد. این روند برای تمام ضرایب تخریل، از جمله ورق همگن نیز مشاهده می شود و هرچه مقدار

در شکل ۸، تغییرات تنش شعاعی بی بعد (مطابق با رابطه ۴۸) در مرکز ورق دایره ای متخلخل شعاعی و در موقعیت $z=h/2$ ، نسبت به تغییرات نسبت ضخامت به شعاع (h/R)، برای حالت لبه با تکیه گاه ساده و ضرایب مختلف تخریل بررسی شده است. نتایج نشان می دهند که با افزایش نسبت h/R ، ممان اینرسی افزایش یافته و در نتیجه استحکام خمشی ورق بیشتر می شود؛ به همین دلیل تنش شعاعی کاهش می یابد. این روند برای تمام مقادیر ضریب تخریل، از جمله حالت ورق همگن نیز مشاهده می شود. همچنین، هرچه مقدار h/R کوچک تر باشد، تأثیر ضریب تخریل بر تنش شعاعی محسوس تر است. از سوی دیگر، با افزایش مقدار ضریب تخریل، مقدار تنش شعاعی افزایش می یابد. علت این رفتار آن است که طبق روابط



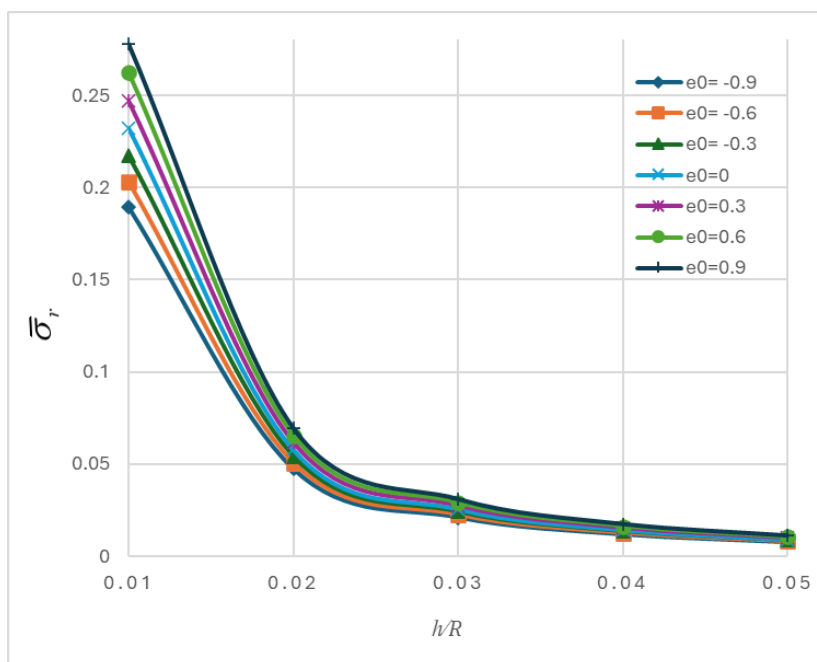
شکل ۶. نمودار تغییرات تنش بی بعد در مرکز ورق دایروی متخلخل شعاعی و نسبت به تغییرات ضخامت به شعاع ورق برای حالت ورق با لبه تکیه گاه ساده با ضرایب تخلخل مختلف.

Fig. 6. Variation of nondimensional stress at the center of a radially porous circular plate at $z=h/2$ versus thickness-to-radius ratio for simply supported boundary condition with different porosity coefficients.



شکل ۷. نمودار تغییرات خیز بی بعد نسبت به تغییرات ضخامت به شعاع ورق در مرکز ورق دایروی متخلخل شعاعی و $z = h/2$ برای حالت ورق با لبه تکیه گاه ساده با ضرایب تخلخل مختلف.

Fig. 7. Variation of nondimensional deflection versus thickness-to-radius ratio at the center of a radially porous circular plate at $z = h/2$ for the simply supported boundary condition with different porosity coefficients.



شکل ۸. نمودار تغییرات تنش بی بعد نسبت به تغییرات ضخامت به شعاع ورق در مرکز ورق دایروی متخلخل شعاعی و $z = h/2$ برای حالت ورق با لبه تکیه گاه گیردار با ضرایب تخلخل مختلف.

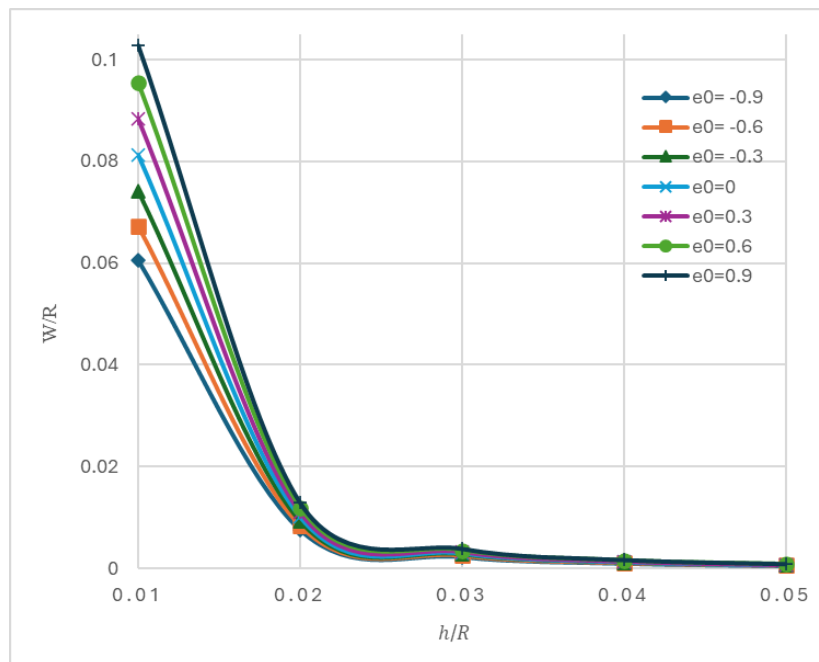
Fig. 8. Variation of nondimensional stress versus thickness-to-radius ratio at the center of a radially porous circular plate at $z = h/2$ for the clamped boundary condition with different porosity coefficients.

بود. از سوی دیگر، با افزایش ضریب تخلخل، تنش شعاعی نیز افزایش می‌یابد؛ چرا که مطابق با روابط (۱) و (۱۳)، افزایش ضریب تخلخل موجب افزایش مدول الاستیسیته و سختی ماده شده و از آنجا که تنش با مدول الاستیسیته رابطه مستقیم دارد، افزایش در سختی منجر به افزایش تنش شعاعی می‌گردد. این رفتار مشابه آنچه در شکل ۶ برای حالت تکیه‌گاه ساده مشاهده شد، قابل مشاهده است؛ با این تفاوت که در این حالت، مقادیر تنش شعاعی در کل کمتر هستند.

شکل ۹ تغییرات خیز بی بعد شده با $R=100$ و نسبت به تغییرات ضخامت به شعاع ورق در مرکز ورق دایروی متخلخل شعاعی در $z=h/2$ برای حالت ورق با لبه تکیه گیردار با ضرایب تخلخل مختلف بررسی شده است. مشاهده می‌شود هرچه نسبت ضخامت به شعاع افزایش یابد ممان اینرسی افزایش و بر استحکام خمشی ورق افزوده شده میزان خیز ورق بارگذاری شده کاهش می‌یابد و این امر برای تمام ضرایب تخلخل مختلف و همچنین ورق همگن برقرار می‌باشد که هرچه مقدار h/R کوچکتر باشد تأثیر این ضریب بر آن بیشتر است. مشاهده شده است که هر چه مقدار

h/R کوچکتر باشد، تأثیر ضریب تخلخل بر میزان خیز بیشتر خواهد بود. همچنین مشاهده می‌شود که با افزایش ضریب تخلخل، مقدار خیز ورق افزایش می‌یابد. دلیل این رفتار آن است که طبق رابطه (۱۳)، افزایش ضریب تخلخل منجر به افزایش مدول الاستیسیته و در نتیجه افزایش سختی ماده می‌شود. با توجه به قانون هوک، رابطه بین تنش و کرنش متناسب با مدول الاستیسیته است؛ بنابراین، با افزایش تنش ناشی از افزایش سختی، کرنش و در نتیجه خیز نیز افزایش خواهد یافت.

در شکل ۸، تغییرات تنش شعاعی بی‌بعد در مرکز ورق دایره‌ای متخلخل شعاعی و در موقعیت $z=h/2$ نسبت به نسبت ضخامت به شعاع (h/R)، برای حالت لبه با تکیه‌گاه گیردار و ضرایب مختلف تخلخل مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج نشان می‌دهد که با افزایش نسبت h/R ، ممان اینرسی و در پی آن استحکام خمشی ورق افزایش یافته و مطابق با رابطه تنش خمشی، مقدار تنش شعاعی کاهش می‌یابد. این روند برای تمامی مقادیر ضریب تخلخل و همچنین برای حالت ورق همگن نیز برقرار است. همچنین، هرچه مقدار h/R کوچکتر باشد، تأثیر ضریب تخلخل بر مقدار تنش بیشتر خواهد



شکل ۹. نمودار تغییرات خیز بی بعد نسبت به تغییرات ضخامت به شعاع ورق در مرکز ورق دایروی متخلخل شعاعی و $z = h/2$ برای حالت ورق با لبه تکیه گاه گیردار با ضرایب تخلخل مختلف.

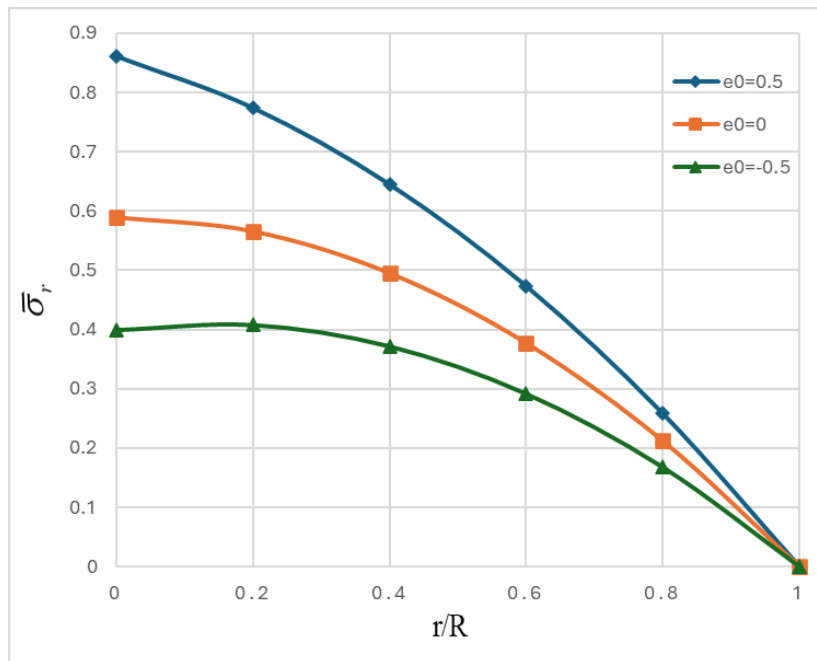
Fig. 9. Variation of nondimensional deflection versus thickness-to-radius ratio at the center of a radially porous circular plate at $z = h/2$ for the clamped boundary condition with different porosity coefficients.

مشاهده می شود و ماکزیمم مقدار تنش در مرکز ورق اتفاق می افتد که این رفتار به این علت است که در مرکز ورق بیشترین مقدار ممان خمشی وجود دارد که منجر به بیشترین تنش می گردد.

شکل ۱۱ نمودار تغییرات خیز بی بعد با $R=0.01$ در راستای شعاع ورق دایروی متخلخل شعاعی برای حالت ورق با لبه تکیه گاه ساده با ضرایب تخلخل مختلف می باشد. مشاهده شده است هرچه مقدار ضریب تخلخل افزایش یابد از استحکام ورق کاسته شده و مقادیر خیز در آن افزایش می یابد و هرچه از مرکز ورق به سمت لبه ورق رفتار خیز را بررسی کنیم کاهش جابجایی مشاهده می شود و ماکزیمم مقدار خیز همواره در مرکز ورق اتفاق می افتد. علت آن است که همانطور که گفته شد هرچه مقدار ضریب تخلخل افزایش یابد مدول الاستیسته افزایش می یابد و سختی افزایش می یابد و مقدار تنش که با مدول الاستیسته رابطه مستقیم دارد افزایش می یابد (رابطه ۱۳) و طبق قانون هوک، نسبت تنش به کرنش برابر مقدار ثابت مدول الاستیسته است که با افزایش تنش مقدار کرنش و خیز نیز افزایش می یابد. شکل ۱۲ نمودار تغییرات تنش بی بعد در راستای شعاع ورق دایروی متخلخل شعاعی برای حالت ورق با لبه تکیه گاه گیردار با ضرایب تخلخل

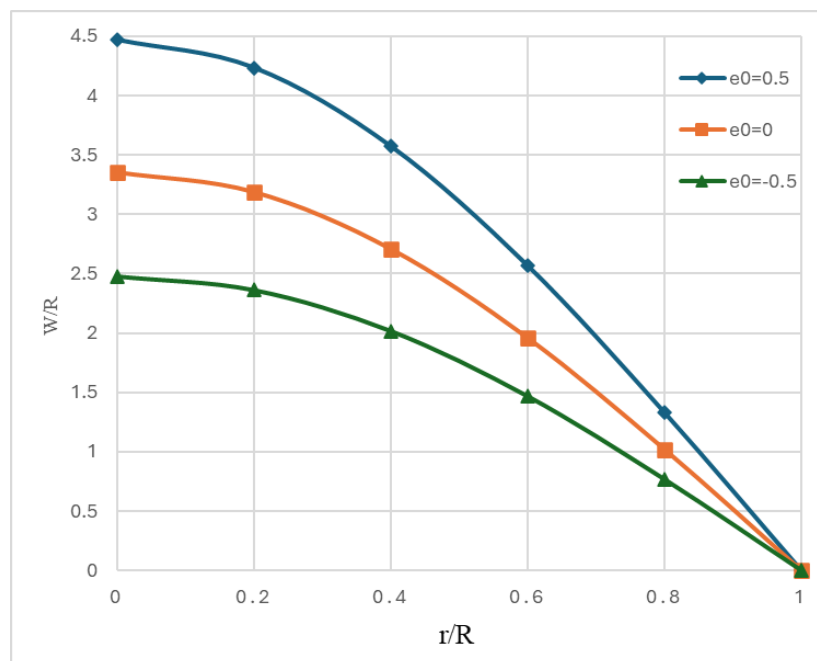
ضریب تخلخل بیشتر باشد مقدار خیز ورق بیشتر است و علت آن است که همانطور که گفته شد هرچه مقدار ضریب تخلخل افزایش یابد مدول الاستیسته افزایش می یابد و سختی افزایش می یابد و مقدار تنش که با مدول الاستیسته رابطه مستقیم دارد افزایش می یابد (رابطه ۱۳) و طبق قانون هوک، نسبت تنش به کرنش برابر مقدار ثابت مدول الاستیسته است که با افزایش تنش مقدار کرنش و خیز نیز افزایش می یابد. که رفتاری مشابه شکل ۷ در حالت ورق با تکیه گاه ساده دارد با این تفاوت که مقادیر خیز ورق در آن ها کوچکتر است.

شکل ۱۰ نمودار تغییرات تنش بی بعد با رابطه در راستای شعاع ورق دایروی متخلخل شعاعی برای حالت ورق با لبه تکیه گاه ساده با ضرایب تخلخل مختلف می باشد. مشاهده شده است هرچه مقدار ضریب تخلخل افزایش یابد از استحکام ورق کاسته شده و مقادیر تنش در آن افزایش می یابد و علت آن است که با توجه به رابطه ۱ و ۱۳ هرچه مقدار ضریب تخلخل افزایش یابد مدول الاستیسته افزایش می یابد سختی افزایش می یابد و مقدار تنش که با مدول الاستیسته رابطه مستقیم دارد افزایش می یابد. و هرچه از مرکز ورق به سمت لبه ورق رفتار تنش را بررسی کنیم کاهش تنش



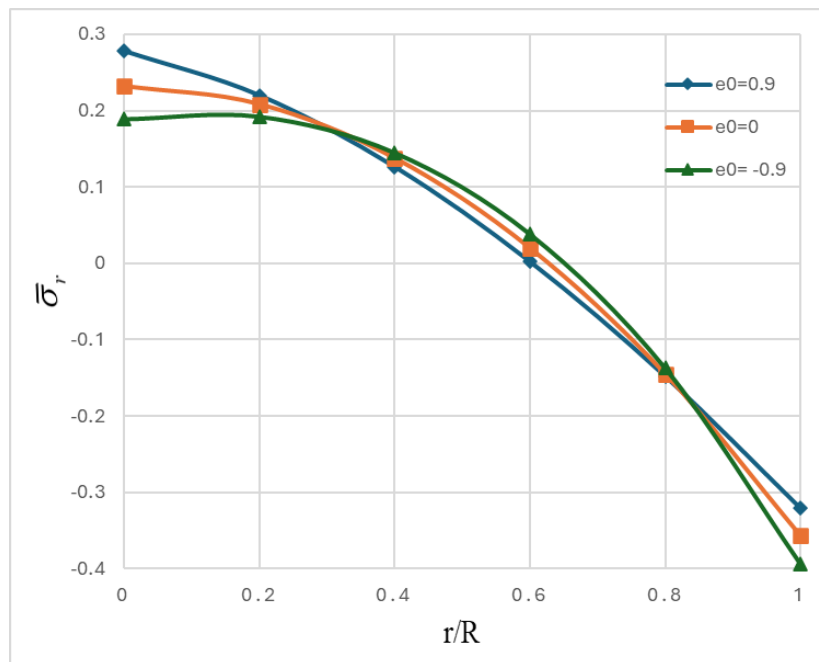
شکل ۱۰. نمودار تغییرات تنش بی بعد در راستای شعاع ورق دایروی متخلخل شعاعی و $z = h/2$ برای حالت ورق با لبه تکیه گاه ساده با ضرایب تخلخل مختلف برای نسبت $h/R = 0.1$.

Fig. 10. Variation of nondimensional stress along the radius of a radially porous circular plate at $z = h/2$ for the simply supported boundary condition with different porosity coefficients, at thickness-to-radius ratio $h/R = 0.1$.



شکل ۱۱. نمودار تغییرات خیز بی بعد در راستای شعاع ورق دایروی متخلخل شعاعی و $z = h/2$ برای حالت ورق با لبه تکیه گاه ساده با ضرایب تخلخل مختلف برای نسبت $h/R = 0.1$.

Fig. 11. Variation of nondimensional deflection along the radius of a radially porous circular plate at $z = h/2$ for the simply supported boundary condition with different porosity coefficients, at thickness-to-radius ratio $h/R = 0.1$.



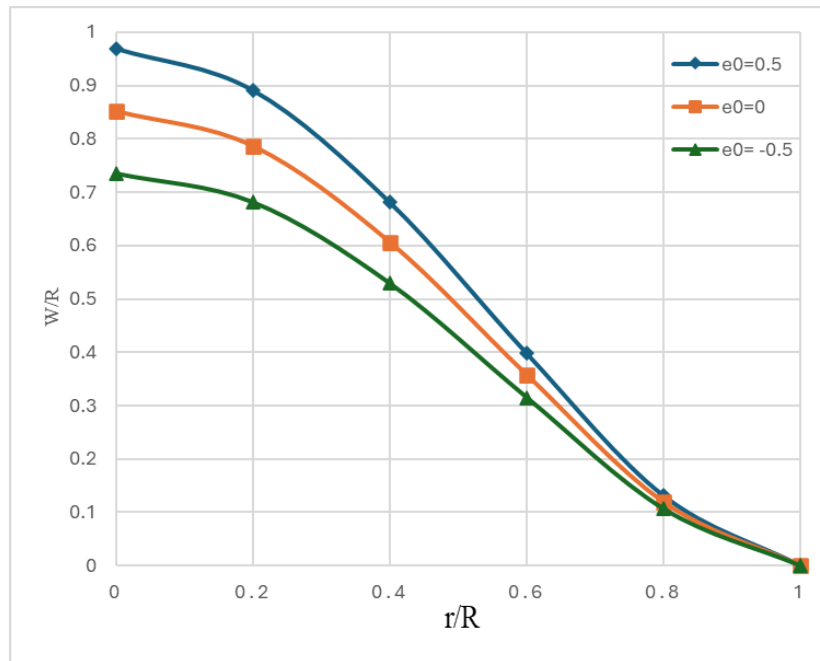
شکل ۱۲. نمودار تغییرات تنش بی بعد در راستای شعاع ورق دایروی متخلخل شعاعی و $z = h/2$ برای حالت ورق با لبه تکیه گاه ساده با ضرایب تخلخل مختلف برای نسبت $h/R = 0.1$.

Fig. 12. Variation of nondimensional stress along the radius of a radially porous circular plate at $z = h/2$ for the clamped boundary condition with different porosity coefficients, at thickness-to-radius ratio $h/R = 0.1$.

جابجایی مشاهده می شود و ماکزیمم مقدار خیز همواره در مرکز ورق اتفاق می افتد. علت آن است که همانطور که گفته شد هرچه مقدار ضریب تخلخل افزایش یابد مدول الاستیسته افزایش می یابد و سختی افزایش می یابد و مقدار تنش که با مدول الاستیسته رابطه مستقیم دارد افزایش می یابد (رابطه ۱۳) و طبق قانون هوک، نسبت تنش به کرنش برابر مقدار ثابت مدول الاستیسته است که با افزایش تنش مقدار کرنش و خیز نیز افزایش می یابد. که رفتاری مشابه شکل ۱۱ در حالت ورق با تکیه گاه ساده دارد با این تفاوت که مقادیر تنش عمودی در آن ها کوچکتر است.

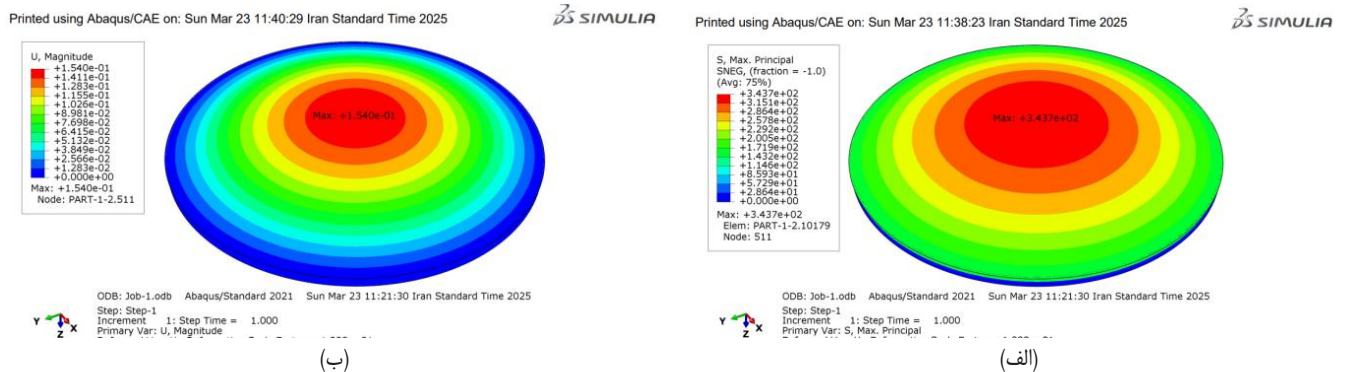
در این مطالعه، برای تحلیل تنش و خمش ورق دایره‌ای، از فولاد آلیاژی 42CrMo4 به‌عنوان ماده‌ی پایه استفاده شده است. این ماده دارای مدول الاستیسته $E=210$ GPa و تنش تسلیم حدود 800 MPa می‌باشد. نتایج حاصل از تحلیل اجزای محدود در شکل‌های ۱۴ و ۱۵ ارائه شده‌اند، که در آن‌ها مقادیر تنش بر حسب مگاپاسکال و خیز بر حسب میلی‌متر گزارش شده است.

مختلف می باشد. مشاهده شده است هرچه مقدار ضریب تخلخل افزایش یابد از استحکام ورق کاسته شده و مقادیر تنش در آن افزایش می یابد و علت آن است که با توجه به رابطه ۱ و ۱۳ هرچه مقدار ضریب تخلخل افزایش یابد مدول الاستیسته افزایش می یابد سختی افزایش می یابد و مقدار تنش که با مدول الاستیسته رابطه مستقیم دارد افزایش می یابد. و هرچه از مرکز ورق به سمت لبه ورق رفتار تنش را بررسی کنیم کاهش تنش مشاهده می شود و ماکزیمم مقدار تنش در مرکز ورق اتفاق می افتد که این رفتار به این علت است که در مرکز ورق بیشترین مقدار ممان خمشی وجود دارد که منجر به بیشترین تنش میگردد. که رفتاری مشابه شکل ۱۰ در حالت ورق با تکیه گاه ساده دارد با این تفاوت که مقادیر تنش عمودی در آن ها کوچکتر است. شکل ۱۳ نمودار تغییرات خیز بی بعد با $R=0.01$ در راستای شعاع ورق دایروی متخلخل شعاعی برای حالت ورق با لبه تکیه گاه گیردار با ضرایب تخلخل مختلف می باشد. مشاهده شده است هرچه مقدار ضریب تخلخل افزایش یابد از استحکام ورق کاسته شده و مقادیر خیز در آن افزایش می یابد و هرچه از مرکز ورق به سمت لبه ورق رفتار خیز را بررسی کنیم کاهش



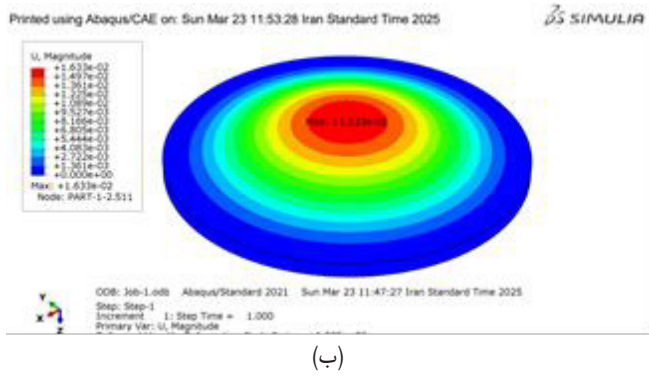
شکل ۱۳. نمودار تغییرات خیز بی بعد در راستای شعاع ورق دایروی متخلخل شعاعی و $z = h/2$ برای حالت ورق با لبه تکیه گاه ساده با ضرایب تخلخل مختلف برای نسبت $h/R = 0.1$.

Fig. 13. Variation of nondimensional deflection along the radius of a radially porous circular plate at $z = h/2$ for the clamped boundary condition with different porosity coefficients, at thickness-to-radius ratio $h/R = 0.1$.

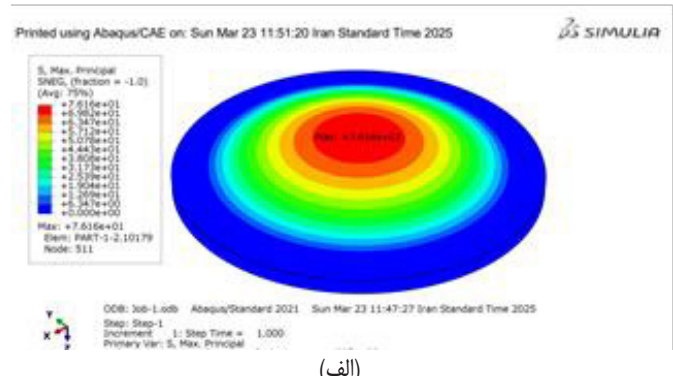


شکل ۱۴. خمش ورق دایره ای همگن با تکیه گاه ساده و بارگذاری عمودی یکنواخت در راستای z در مختصات استوانه ای برای $h/R = 0.06$. (الف) تنش عمودی ورق (ب) جابجایی عمودی (خیز)

Fig. 14. Bending of a homogeneous circular plate with simply supported edges under uniform vertical load along the z -direction in cylindrical coordinates for $h/R = 0.06$. (a) Vertical stress of the plate (b) Vertical displacement (deflection).



(ب)



(الف)

شکل ۱۵. خمش ورق دایره ای همگن با تکیه گاه گیردار و بارگذاری عمودی یکنواخت در راستای z در مختصات استوانه ای برای $h/R = 0.08$.
الف) تنش عمودی ورق (ب) جابجایی عمودی (خیز).

Fig. 15. Bending of a homogeneous circular plate with clamped edges under uniform vertical loading along the z -direction in cylindrical coordinates for $h/R=0.08$. (a) Vertical stress of the plate (b) Vertical displacement (deflection).

حالت گیردار می‌گردد. همچنین، برای مقادیر مثبت ضریب تخلخل که لبه خارجی ورق نسبت به مرکز مستحکم‌تر است، مقدار تنش شعاعی و خیز بیشتر است، در حالی که مقادیر منفی ضریب تخلخل سبب استحکام کمتر لبه خارجی نسبت به مرکز و کاهش تنش و خیز می‌شوند. بنابراین، استفاده از ضرایب منفی تخلخل به عنوان راهکاری مؤثر برای کاهش وزن و افزایش مقاومت ورق‌های دایره‌ای در برابر خمش و خیز توصیه می‌شود.

۷- فهرست علائم

علائم انگلیسی

صلبیت خمشی ورق	D
مدول الاستیسیته، Gpa	E
مدول بی بعد الاستیسیته نسبی	E_r
ضریب بی بعد تخلخل	e_0
پارامتر بدون بعد چگالی	e_m
مدول برشی، Gpa	G
ضخامت ورق، mm	h
ضریب تصحیح برشی	k_s
منتجه های ممان های خمشی، N.mm	M_{ij}
منتجه های نیروی عمودی، N	N_{ij}

۶- نتیجه گیری

در این مقاله، خمش و خیز ورق‌های دایره‌ای متخلخل با توزیع شعاعی تخلخل و تحت بارگذاری فشاری یکنواخت عمودی، بر اساس تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی، در دو حالت تکیه‌گاه ساده و گیردار مورد بررسی قرار گرفته است. خواص مواد در راستای شعاع به صورت تدریجی و متناسب با ضریب تخلخل تغییر می‌کند، به گونه‌ای که لبه خارجی ورق می‌تواند مستحکم‌ترین یا ضعیف‌ترین ناحیه آن باشد. افزایش ضریب تخلخل موجب کاهش استحکام ورق و به تبع آن افزایش تنش شعاعی و خیز می‌شود. همچنین، با افزایش نسبت ضخامت به شعاع، تنش خمشی و خیز ورق کاهش یافته و اثر ضریب تخلخل بر آن‌ها کاهش می‌یابد. مقایسه نتایج دو روش تحلیلی (روش سری‌ها) و عددی (روش المان محدود) نشان‌دهنده دقت بالای مدل با خطای میانگین کمتر از ۰.۰۵ درصد و ماکزیمم خطای حدود ۰.۱ درصد است که صحت نتایج را تأیید می‌کند. تأثیر پارامترهای هندسی، نوع توزیع تخلخل و شرایط مرزی نیز نشان می‌دهد که در حالت تکیه‌گاه ساده، تنش‌ها حدود ۲.۵ برابر و خیز حدود ۴ برابر بیشتر از حالت گیردار است. نتایج حاکی از آن است که افزایش ضریب تخلخل موجب افزایش مدول الاستیسیته در راستای شعاعی، و افزایش تنش و خیز می‌شود؛ به طوری که هر ۱۰ درصد افزایش در ضریب تخلخل باعث افزایش تقریبی ۴۰ درصدی تنش شعاعی و خیز در حالت تکیه‌گاه ساده و ۳۶ درصدی در

plates, AIAA journal, 35(12) (1997) 1862-1868.

- [5] J. Reddy, C. Wang, S. Kitipornchai, Axisymmetric bending of functionally graded circular and annular plates, *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 18(2) (1999) 185-199.
- [6] L. Ma, T. Wang, Relationships between axisymmetric bending and buckling solutions of FGM circular plates based on third-order plate theory and classical plate theory, *International Journal of Solids and Structures*, 41(1) (2004) 85-101.
- [7] S. Sahraee, A. Saidi, Axisymmetric bending analysis of thick functionally graded circular plates using fourth-order shear deformation theory, *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 28(5) (2009) 974-984.
- [8] A. Saidi, A. Rasouli, S. Sahraee, Axisymmetric bending and buckling analysis of thick functionally graded circular plates using unconstrained third-order shear deformation plate theory, *Composite Structures*, 89(1) (2009) 110-119.
- [9] X. Li, H. Ding, W. Chen, Elasticity solutions for a transversely isotropic functionally graded circular plate subject to an axisymmetric transverse load $q(r)$, *International Journal of Solids and Structures*, 45(1) (2008) 191-210.
- [10] P. Van Vinh, N. Van Chinh, A. Tounsi, Static bending and buckling analysis of bi-directional functionally graded porous plates using an improved first-order shear deformation theory and FEM, *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 96 (2022) 104743.
- [11] A.R. Khorshidvand, A.R. Damercheloo, Bending, axial buckling and shear buckling analyses of FG-porous plates based on a refined plate theory, *Australian Journal of Mechanical Engineering*, 21(2) (2023) 705-724.
- [12] S.G.M. Doori, A.R. Noori, A. Etemadi, Static response of functionally graded porous circular plates via finite element method, *Arabian Journal for Science and Engineering*, 49(10) (2024) 14167-14181.
- [13] M. Alimohammadi, M. Ghomshei, Post-Buckling Analysis of Porous Circular Plate with Small Initial Deflection Using First-Order Shear Deformation Theory,

نیروی فشاری عمودی یکنواخت، Mpa	P
منتجه های نیروی برشی، N	Q _i
شعاع هر نقطه از ورق، mm	r
شعاع خارجی ورق، mm	R
انرژی کرنشی، J	U _ε
جابجایی در راستای شعاع	u
انرژی پتانسیل کل، J	V
جابجایی در راستای محیطی	v
جابجایی در راستای ضخامت	w
خیز بی بعد شده	$\bar{W}$
علائم یونانی	
چگالی kg/m ³	ρ
کرنش برشی	γ _{ij}
کرنش عمودی	ε _{ii}
تغییرات	δ
تنش، Mpa	σ _{ij}
تنش بی بعد شده شعاعی	$\bar{\sigma}_r$
انرژی پتانسیل ناشی از کار خارجی، J	Ω
زاویه هر نقطه از ورق	θ
چرخش های عمودی	φ
ضریب پواسون	ν

منابع

- [1] A.G. Slater, A.I. Cooper, Function-led design of new porous materials, *Science*, 348(6238) (2015) aaa8075.
- [2] C. Wang, K. Lee, Deflection and stress-resultants of axisymmetric Mindlin plates in terms of corresponding Kirchhoff solutions, *International journal of mechanical sciences*, 38(11) (1996) 1179-1185.
- [3] J. Reddy, C.M. Wang, An overview of the relationships between solutions of the classical and shear deformation plate theories, *Composites Science and Technology*, 60(12-13) (2000) 2327-2335.
- [4] J. Reddy, C. Wang, Relationships between classical and shear deformation theories of axisymmetric circular

- [23] N.L. Le, T.N.T. Duong, T.D. Dang, M.D. Vu, T.T. Bui, T.P. Nguyen, H.N. Vu, A novel analytical approach for nonlinear thermo-mechanical buckling of higher-order shear deformable porous circular plates and spherical caps with FGM face sheets, *International Journal of Applied Mechanics*, 15(05) (2023) 2350035.
- [24] V.N. Van Do, T.H. Ong, C.-H. Lee, Nonlinear thermal buckling analysis of temperature-dependent porous annular and circular microplates reinforced by graphene platelets by using isogeometric analysis method, *Engineering Structures*, 305 (2024) 117738.
- [25] V. Kumar, S. Singh, V. Saran, S. Harsha, Effect of elastic foundation and porosity on buckling response of linearly varying functionally graded material plate, *Structures*, 55 (2023), 1186-1203.
- [26] E. Magnucka-Blandzi, K. Magnucki, W. Stawecki, Bending and buckling of a circular plate with symmetrically varying mechanical properties, *Applied Mathematical Modelling*, 89 (2021) 1198-1205.
- [27] S.K. Sah, A. Ghosh, Influence of porosity distribution on free vibration and buckling analysis of multi-directional functionally graded sandwich plates, *Composite Structures*, 279 (2022) 114795.
- [28] M. Khatounabadi, M. Jafari, K. Asemi, Low-velocity impact analysis of functionally graded porous circular plate reinforced with graphene platelets, *Waves in Random and Complex Media*, 35(4) (2022) 7838-7864.
- [29] M. Surianinov, Y. Krutii, O. Klymenko, V. Vakulenko, S. Rudakov, Axisymmetric Bending of Circular Plates on a Variable Elastic Base, *Construction Technologies and Architecture*, 9 (2023) 3-10.
- [30] R. Jain, M.S. Azam, Deflection and bending characteristics of embedded functionally graded porous plate with bi-directional thickness variation subjected to bi-sinusoidal loading, *Steel and Composite Structures*, 51(6) (2024) 601-617.
- [31] L. Hoang Ton That, Porous Functionally Graded Circular Plate with an Uneven Porosity Distribution in the Thermal Environment, *Applications of Modelling and Simulation*, 8 (2024) 70-77.
- Journal of Solid Mechanics, 16(2) (2024) 168-180.
- [14] S. Mirzaei, M. Hejazi, R. Ansari, Isogeometric analysis for bending, buckling and free vibration of multi-directional functionally graded porous plates with variable thickness, *The European Physical Journal Plus*, 137(6) (2022) 694.
- [15] V.T. Long, H.V. Tung, Postbuckling responses of porous FGM spherical caps and circular plates including edge constraints and nonlinear three-parameter elastic foundations, *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, 51(8) (2023) 4214-4236.
- [16] B. Boudierba, H.M. Berrabah, Bending response of porous advanced composite plates under thermomechanical loads, *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, 50(9) (2022) 3262-3282.
- [17] S. Mahmoud, E. Ghandourah, A. Algarni, M. Balubaid, A. Tounsi, F. Bourada, On thermo-mechanical bending response of porous functionally graded sandwich plates via a simple integral plate model, *Archives of Civil and Mechanical Engineering*, 22(4) (2022) 186.
- [18] F. Kamali, F. Shahabian, A. Aftabi-Sani, Free vibration analysis of saturated porous circular micro-plates integrated with piezoelectric layers; differential transform method, *Acta Mechanica*, 234(2) (2023) 649-669.
- [19] P. Akbari, A. Asanjarani, Semi-analytical mechanical and thermal buckling analyses of 2D-FGM circular plates based on the FSDT, *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 26(9) (2019) 753-764.
- [20] M. Kamranfard, A. Saidi, A. Naderi, Analytical Solution for Buckling of Annular Sectorial Porous Plates, *Aerospace Mechanics*, 15(1) (2019) 137-152.
- [21] M. Mahbod, M. Asgari, Mechanical properties of functionally graded porous biomaterials for application in prosthesis replacement using analytical and numerical solution, *Modares Mechanical Engineering*, 19(11) (2019) 2717-2727.
- [22] A.K. Gupta, A. Kumar, Buckling Behavior of a Functionally Graded Sandwich Plate, *Engineering, Technology & Applied Science Research*, 13(4) (2023) 11355-11359.

- study of expanded metal tube absorbers and effect of cross section size and multi-layer under low axial velocity impact loading, *Amirkabir Journal of Mechanical Engineering*, 49(4) (2018) 685-696.
- [38] H. Hatami, M. Hosseini, A.K. Yasuri, Perforation of thin aluminum targets under hypervelocity impact of aluminum spherical projectiles, *Materials Evaluation*, 77(3) (2019) 411-422.
- [39] M.D. Nouri, H. Hatami, A.G. Jahromi, Experimental and numerical investigation of expanded metal tube absorber under axial impact loading, *Structural Engineering and Mechanics*, 54(6) (2015) 1245-1266.
- [40] S. Hosseini-Hashemi, H. Akhavan, H.R.D. Taher, N. Daemi, A. Alibeigloo, Differential quadrature analysis of functionally graded circular and annular sector plates on elastic foundation, *Materials & Design*, 31(4) (2010) 1871-1880.
- [41] J. Choi, R. Lakes, Analysis of elastic modulus of conventional foams and of re-entrant foam materials with a negative Poisson's ratio, *International Journal of Mechanical Sciences*, 37(1) (1995) 51-59.
- [42] J.N. Reddy, *Theory and analysis of elastic plates and shells*, CRC press, 2006.
- [43] A.C. Ugural, *Stresses in beams, plates, and shells*, CRC press, 2009.
- [44] D.O. Brush, B.O. Almroth, J. Hutchinson, *Buckling of bars, plates, and shells*, (1975).
- [32] M.-O. Belarbi, A.A. Daikh, A. Garg, H. Hirane, M.S.A. Houari, Ö. Civalek, H. Chalak, Bending and free vibration analysis of porous functionally graded sandwich plate with various porosity distributions using an extended layerwise theory, *Archives of Civil and Mechanical Engineering*, 23(1) (2022) 15.
- [33] K. Magnucki, J. Mielniczuk, S. Milecki, Axisymmetric bending of a circular porous plate, *MATERIAL AND MECHANICAL ENGINEERING TECHNOLOGY* Учредители: Карагандинский технический университет им. Абылкаса Сагинова, 4(4) (2021) 16-20.
- [34] M. Safarpour, A. Rahimi, A. Alibeigloo, H. Bisheh, A. Forooghi, Parametric study of three-dimensional bending and frequency of FG-GPLRC porous circular and annular plates on different boundary conditions, *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, 49(5) (2021) 707-737.
- [35] H. Hatami, A. Fathollahi, Theoretical and numerical study and comparison of the inertia effects on the collapse behavior of expanded metal tube absorber with single and double cell under impact loading, *Amirkabir Journal of Mechanical Engineering*, 50(5) (2018) 999-1014.
- [36] H. Hatami, M. Hosseini, Elastic-plastic analysis of bending moment-axial force interaction in metallic beam of T-Section, *Journal of Applied and Computational Mechanics*, 5(1) (2019) 162-173.
- [37] A. Ghodsbin Jahromi, H. Hatami, Numerical behavior

چگونه به این مقاله ارجاع دهیم

P. Akbari, M. J. Khoshgoftar, *Bending and Deflection Analysis of Functionally Graded Porous Circular Plates with Radial Porosity Variation Based on the First-Order Shear Deformation Theory*, *Amirkabir J. Mech Eng.*, 57(3) (2025) 333-360.

DOI: [10.22060/mej.2025.24176.7848](https://doi.org/10.22060/mej.2025.24176.7848)



