

Bending and Deflection Analysis of Functionally Graded Porous Circular Plates with Radial Porosity Variation Based on the First-Order Shear Deformation Theory

Peyman Akbari¹, Mohammad Javad Khoshgoftar^{1*}

¹ Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering, Arak University, Arak, 38156-88349, Iran

ABSTRACT

Porous materials are increasingly used in mechanical, aerospace, civil, biomedical, and advanced engineering applications due to their low density, acceptable strength, high energy absorption, and tunable mechanical properties. One key challenge in designing such materials is the accurate analysis of bending and deflection behavior of porous thin structures, such as circular plates, which is essential for avoiding structural failures. This study presents the elastic bending and static deflection analysis of functionally graded porous circular plates with radially varying porosity distribution, subjected to uniform compressive loading under both simply supported and clamped boundary conditions. The governing equations are derived based on axisymmetric assumptions using the first-order shear deformation theory and solved via both analytical (series solution) and numerical (finite element) methods. The results show excellent agreement between the two approaches (mean error 0.04%) and with existing literature data (mean error 0.05%), confirming the accuracy of the model. Parametric studies reveal that simply supported plates exhibit approximately 2.5 times higher stress and 4 times larger deflection compared to clamped ones. Furthermore, increasing the porosity coefficient by 10% leads to an average increase of about 40% (for simply supported) and 36% (for clamped) in radial stress and central deflection. These findings offer valuable insights for designing lightweight, strong, and efficient structural components in sensitive and performance-driven environments.

KEYWORDS

Porous circular plate, radial porosity distribution, bending analysis, shear deformation theory, analytical solution

* Corresponding Author: Email: mj.khoshgoftar@gmail.com, m-khoshgoftar@araku.ac.ir

1. Introduction

Porous materials are solids containing voids filled with gas or liquid, forming a two-phase structure. Their porosity typically ranges from 20% to 90%, optimized for low weight, flexibility, and microcrack resistance. They are classified by pore geometry, manufacturing method, and application. Many natural (wood), biological (bone), and synthetic (ceramics) materials are porous. Advances in technology have expanded their use in various engineering fields, including mechanical, petroleum, and civil engineering, especially in structural elements like beams, plates, and shells [1].

Khoshgoftar et al. [2] obtained deflection and stress results for functionally graded cylinders with variable thickness under non-uniform pressure using first-order shear deformation theory (FSDT) and perturbation methods, highlighting the influence of shear deformation. Khoshgoftar [3] extended the analysis with a second-order shear deformation theory (SSDT) for axisymmetric functionally graded thick shells with variable thickness, providing comprehensive governing equations and numerical comparisons with classical and first-order theories. Khoshgoftar and Hajiveisheh [4] investigated the buckling and bending behavior of functionally graded porous plates using shear deformation theory, focusing on the effects of porosity distribution on mechanical responses. Khoshgoftar and Akbari [5] analyzed mechanical buckling of porous circular plates with radially graded porosity using FSDT, employing an analytical semi-exact Fourier–Bessel series method validated by finite element results.

Previous studies have not comprehensively addressed the bending and deflection of radially porous circular plates. This research provides the first detailed analysis of such plates with radially varying porosity under uniform vertical pressure, considering simply supported and clamped boundary conditions. Using axisymmetric assumptions and first-order shear deformation theory, the governing equations are solved analytically (energy method) and numerically (finite element method). Results show excellent agreement, with mean and maximum errors below 0.1%. Clamped plates exhibit stresses 60–65% lower and deflections 70–76% lower than simply supported ones. Due to their manufacturability, light weight, and strength, these plates are widely used in aerospace, turbine disks, medical implants, energy absorbers, heat exchangers, filters, and lightweight automotive parts.

2. Analytical Modeling

In this study, a circular plate made of radially functionally graded porous material with thickness h and radius R is considered in a cylindrical coordinate system (r, θ, z) , subjected to a uniformly distributed vertical pressure (Figure 1). The mechanical properties of the plate vary along the radial direction. The Young's modulus is assumed to be a radial-dependent function, and the porous material used for the circular plate is characterized by continuously varying mechanical properties (Figure 2). These properties, such as the elastic modulus, are considered as functions of the porosity coefficient and the elastic modulus of the base material. Assuming that the axis perpendicular to the midplane is the z -axis, the elastic modulus $E = E(r)$, shear modulus $G = G(r)$, and density $\rho = \rho(r)$ are defined as follows (Figure 3):

$$\begin{aligned} E(r) &= E_0 \left(e^{\epsilon_0 \frac{r}{R}} \right) \\ G(r) &= G_0 \left(e^{\epsilon_0 \frac{r}{R}} \right) \\ \rho(r) &= \rho_0 \left(e^{\epsilon_0 \frac{r}{R}} \right) \end{aligned} \quad (1)$$

According to the first-order shear deformation theory (FSDT), the general displacement field at any cross-section is assumed as follows:

$$\begin{cases} u(r, \theta, z) = u_0(r, \theta) + z\phi_r(r, \theta) \\ v(r, \theta, z) = v_0(r, \theta) + z\phi_\theta(r, \theta) \\ w(r, \theta, z) = w_0(r, \theta) \end{cases} \quad (2)$$

In these equations, u_0 , v_0 , and w_0 represent the displacements on the mid-plane, while ϕ_r and ϕ_θ are the rotations about the r and θ axes, respectively. Considering the axisymmetric nature of the problem, Equation (2) can be simplified as follows:

$$\begin{cases} u(r, z) = z\phi(r) \\ v(r, z) = 0 \\ w(r, z) = w_0(r) \end{cases} \quad (3)$$

The governing equations of the problem are derived using the energy method as follows.

$$\begin{aligned} \delta\phi: \quad & -\frac{\partial(rM_r)}{\partial r} + M_\theta + rQ_r = 0 \\ \delta w_0: \quad & -\frac{\partial(rQ_r)}{\partial r} - rP = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

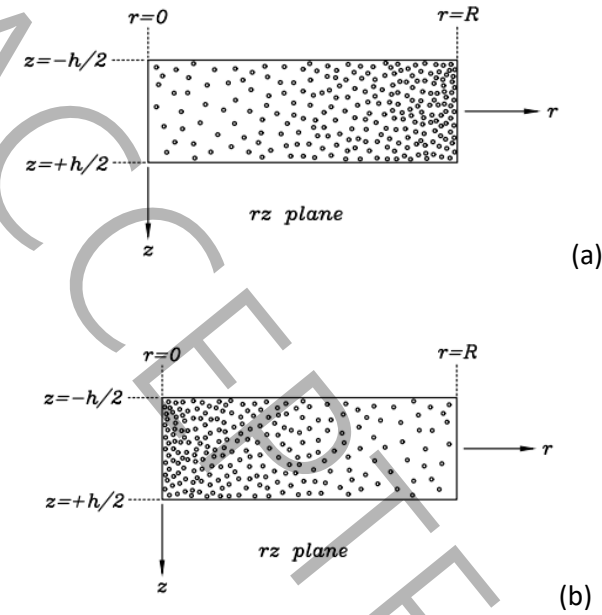


Figure 1. Cross-sectional view of the radially porous circular plate in the rz plane for different values of the porosity coefficient: (a) for negative values of porosity coefficient ($e_0 < 0$); (b) for positive values of porosity coefficient ($e_0 > 0$).

3. Results

In this study, the applied pressure P is considered to be 1 MPa, and the reference Young's modulus E_0 corresponds to that of 42CrMo4 alloy steel, with $E_0 = 210$ GPa and a yield strength of 800 MPa. The results obtained are valid for any material possessing this elastic modulus. Tables 1 present the numerical results of the maximum dimensionless transverse stress and deflection of a homogeneous circular plate subjected to uniform vertical compressive loading, based on the First-Order Shear Deformation Theory (FSDT). These results are provided for plates with simply supported conditions, and are obtained using both analytical and finite element methods. As can be seen, increasing the thickness-to-radius ratio leads to a reduction in the maximum transverse stress and deflection, indicating improved structural stiffness.

Figure 2 illustrates the variation of the dimensionless radial stress along the radius of a functionally graded porous circular plate with a simply supported edge, for various porosity coefficients. It is observed that increasing the porosity coefficient reduces the structural strength of the plate, leading to higher stress values.

Table 1. Numerical results of the maximum transverse stress and deflection of a homogeneous circular plate under uniform vertical compressive loading, based on the First-Order Shear Deformation Theory (FSDT), for a simply supported edge condition: comparison between analytical and finite element methods.

h/R	Max Bending Stress		Max Deflection	
	FEM	Present	FEM	Present
0.02	1.47273	1.47321	4.1410	4.14257
0.04	0.36818	0.36833	0.51840	0.51855
0.06	0.16367	0.16369	0.15396	0.15400
0.08	0.09204	0.09207	0.06514	0.06518
0.1	0.05891	0.05892	0.03349	0.03351

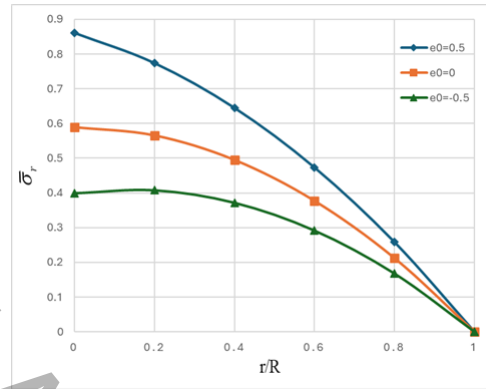


Figure 2. Variation of dimensionless stress along the radial direction at $z=h/2$ for a radially porous circular plate with simply supported edge under different porosity coefficients for $h/R=0.1$.

4. Conclusions

This paper investigates the bending and deflection of radially porous circular plates under uniform vertical pressure, using first-order shear deformation theory for simply supported and clamped boundary conditions. Material properties vary gradually along the radius based on the porosity coefficient, making the plate's outer edge either the strongest or weakest region. Increasing the porosity coefficient reduces stiffness, raising radial stress and deflection. As the thickness-to-radius ratio grows, bending stress and deflection decrease, and the influence of porosity lessens. Analytical (series solution) and numerical (finite element) results agree closely, with average errors below 0.05% and maximum errors near 0.1%, confirming model accuracy. Stresses and deflections in simply supported plates are roughly 2.5 and 4 times those in clamped plates, respectively. Each 10% increase in porosity coefficient raises radial stress and deflection by about 40% (simply supported) and 36%

(clamped). Positive porosity coefficients (stronger edges) yield higher stresses and deflections, while negative coefficients (weaker edges) reduce them. Thus, negative porosity coefficients are recommended to reduce weight while improving bending resistance and stiffness.

5. References

- [1] A.G. Slater, A.I. Cooper, Function-led design of new porous materials, *Science*, 348(6238) (2015) aaa8075.
- [2] M.J. Khoshgoftar, M.J. Mirzaali, G.H. Rahimi, Thermoelastic analysis of non-uniform pressurized functionally graded cylinder with variable thickness using first order shear deformation theory (FSDT) and perturbation method, *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, 28(6) (2015) 1149-1156.
- [3] M.J. Khoshgoftar, Second order shear deformation theory for functionally graded axisymmetric thick shell with variable thickness under non-uniform pressure, *Thin-Walled Structures*, 144 (2019) 106286.
- [4] M.J. Khoshgoftar, M. Hajiveisheh, Buckling and bending analysis of functional porous plate using shear deformation theory, *Iranian Journal of Manufacturing Engineering*, 9(8) (2022) 34-43.
- [5] M.J. Khoshgoftar, P. Akari, Mechanical Buckling Analysis of Porous Circular Plates with Radially Graded Porosity Using First-Order Shear Deformation Theory, *Mechanics Research Communications*, 148 (2025) 104483.

تحلیل خمش و خیز ورق‌های مدور مدرج تابعی متخلخل با تغییرات شعاعی تخلخل بر اساس تئوری مرتبه اول برشی

پیمان اکبری، محمد جواد خوش گفتار*

گروه مهندسی مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه اراک، اراک، ایران
*mj.khoshgoftar@gmail.com

چکیده

مواد متخلخل به دلیل ویژگی‌هایی مانند وزن کم، استحکام مناسب، جذب انرژی بالا و قابلیت تنظیم خواص مکانیکی، کاربردهای گسترده‌ای در حوزه‌های مهندسی مکانیک، هوافضا، عمران، زیست‌پزشکی و صنایع نظامی و پیشرفته پیدا کرده‌اند. یکی از چالش‌های مهم در طراحی این مواد، تحلیل دقیق خمش و خیز سازه‌های نازک متخلخل مانند ورق‌ها است که می‌تواند نقش کلیدی در پیشگیری از آسیب‌های ساختاری ایفا کند. در این تحقیق، رفتار خمش الاستیک و خیز استاتیکی ورق‌های دایره‌ای مدرج تابعی متخلخل با توزیع شعاعی تخلخل، تحت بارگذاری عرضی یکنواخت و در شرایط مرزی ساده و گیردار بررسی شده است. معادلات حاکم با فرض تقارن محوری و بر مبنای تئوری مرتبه اول برشی استخراج و با دو روش تحلیلی (روش سری‌ها) و عددی (روش المان محدود) حل شده‌اند. صحت نتایج با مقایسه بین دو روش (خطای میانگین ۰.۰۴٪) و نیز داده‌های منابع (۰.۰۵٪) تأیید شده است. بررسی پارامترهای هندسی و مکانیکی نشان می‌دهد که در حالت تکیه‌گاه ساده، مقدار تنش و خیز به ترتیب حدود ۲.۵ و ۴ برابر بیشتر از حالت گیردار است. همچنین افزایش ۱۰٪ در ضریب تخلخل، منجر به افزایش متوسط حدود ۴۰٪ (ساده) و ۳۶٪ (گیردار) در تنش و خیز در مرکز ورق می‌شود. این نتایج می‌توانند در طراحی سازه‌های سبک، مقاوم و بهینه مؤثر باشند.

کلمات کلیدی

ورق دایره‌ای متخلخل، توزیع شعاعی تخلخل، تحلیل خمش، تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی، حل تحلیلی

مواد متخلخل مواد جامدی هستند که در ساختار خود دارای حفره‌هایی می‌باشند. در حقیقت این مواد دارای ساختار دو فازی هستند که فاز اصلی (بدنه) جامد و فاز دیگر (حفره‌ها) مایع یا گاز می‌باشد. همچنین درصد تخلخل این مواد در محدوده‌ای بین ۲۰ تا ۹۰ بسته به کاربرد آن‌ها می‌باشد. خواص این دسته از مواد در مقایسه با وزن آن‌ها بهینه شده است و دارای وزن کم، انعطاف پذیری مناسب و مقاومت در برابر ترک‌های موئی می‌باشند. مواد متخلخل را می‌توان بر اساس شاخص‌های مختلف نظیر هندسه و اندازه حفره، روش ساخت و کاربرد تقسیم بندی کرد. بسیاری از مواد طبیعی (مانند چوب)، بافت‌های زیستی (مانند استخوان) و مواد ساخته دست بشر (مانند سرامیک‌ها) نیز دارای ساختاری متخلخل می‌باشند. امروزه با توسعه تکنولوژی، ساختارهای متخلخل در زمینه‌های بسیار زیادی از علوم مهندسی مانند مهندسی مکانیک، مهندسی نفت و مهندسی عمران کاربرد داشته و در سازه‌هایی مانند تیرها، ورق‌ها و پوسته‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرند [۱].

ونگ و لی [۲] نتایج خیز و تنش ورق میندیلین متقارن محوری را مطابق با حل کیرشف بدست آورده است که تاثیر تغییر شکل برشی در تئوری میندیلین ورق‌ها در آن دیده شده و نتایج آن با نظریه کیرشف همخوانی دارد. ردی و ونگ [۳] مرور کلی از تئوری کلاسیک، تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی و مرتبه سوم برای خیز، کمانش و ارتعاشات ورق آورده شده است. ردی و ونگ [۴] خمش ورق دایره ای متقارن محوری را با استفاده از تئوری کلاسیک و تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی ورق‌ها بدست آورده است. ردی و همکاران [۵] خیز ورق متقارن محوری دایره ای مدرج تابعی را با استفاده از تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی میندیلین مورد مطالعه قرار دادند و نتایجی را به صورت عددی در جداول قرار داده است. ما و ونگ [۶] با استفاده از تئوری مرتبه سوم تغییر شکل برشی، خمش و کمانش ورق دایره متقارن محوری همگن و FGM^1 را مورد مطالعه قرار داده است و با تئوری کلاسیک و مرتبه اول تغییر شکل برشی مقایسه کرده و به این نتیجه رسیده است که تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی برای نشان دادن تغییر شکل برشی در خمش و کمانش ورق دایره ای کافیت و نیازی به استفاده از تئوری‌های مرتبه بالاتر و پیچیده تر برای این گونه مسائل نیست. صحرایی و سعیدی [۷] با استفاده از تئوری مرتبه چهارم تغییر شکل برشی، خمش ورق دایره متقارن محوری همگن و FGM را مورد مطالعه قرار داده است و با سایر تئوری‌ها مقایسه کرده است و به این نتیجه رسیده است که برای بدست آوردن تنش‌های برشی در راستای ضخامت استفاده از تئوری مرتبه چهارم جواب‌های دقیق تری می‌دهد. سعیدی و همکاران [۸] خیز و کمانش ورق متقارن محوری دایره ای مدرج تابعی را با استفاده از تئوری مرتبه سوم برشی بدون محدودیت مورد مطالعه قرار دادند و نتایج را با تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی ردی [۵] و مرتبه سوم ما و ونگ [۶] مورد مقایسه قرار دادند که نتایج حاصل شده به نتایج ما و ونگ نزدیک تر بوده است. لی و همکاران [۹] با استفاده از حل الاستیسیته خمش ورق دایره ای FGM متقارن محوری را بدست آورده است. فام ون وین و همکاران [۱۰] خمش استاتیکی و رفتار کمانش ورق مدرج تابعی دو جهته (BFG^2) متخلخل را مورد بررسی قرار دادند. با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول بهبود یافته با فرض تنش‌های برشی توزیع سهموی برای توصیف جابجایی، کرنش و میدان‌های تنش صفحات ایجاد شده است. از روش FEM و اصل همیلتون برای حل معادلات استفاده شده است مقایسه‌های زیادی با نتایج موجود انجام شده که دقت کار نشان داده شود. خورشیدوند و دمرچلو [۱۱] راه‌حل‌های عددی برای تحلیل‌های خمشی استاتیک و کمانش مکانیکی صفحات متخلخل مدرج (FGP) ارائه کرده اند. مجموعه معادلات حاکم با استفاده از حداقل انرژی پتانسیل به دست آمده و با استفاده از روش مربعات دیفرانسیل (DQM^3) حل شده است. همگرایی و دقت حل تایید شده و اثرات پارامتر تخلخل، الگوی توزیع تخلخل، ضخامت و نسبت ابعاد صفحه و شرایط مرزی بر انحراف، شدت و توزیع تنش و بار بحرانی کمانش بررسی شده است. با مثال‌های عددی نشان داده شده که افزایش در پارامتر تخلخل منجر به کاهش بار بحرانی کمانش و افزایش انحراف استاتیکی صفحه می‌شود. نتایج عددی نشان می‌دهد که تأثیر پارامتر تخلخل بر توزیع و شدت مولفه‌های تنش به

¹ Functionally Graded Material
² Bidirectionally Functionally Graded
³ Differential Quadrature Method

شدت به الگوی توزیع تخلخل وابسته است. سیلدا دوری و احمد رشاد دوری [۱۲] خمش متقارن محوری ورق متخلخل مدرج تابعی ورق دایره ای مورد بررسی قرار گرفته است خواص مواد در راستای ضخامت تغییر می کند و تاثیر تخلخل بر روی آن بررسی شده است. علیمحمدی و قاسمی [۱۳] کمانش و پسکمانش ورق متخلخل در راستای ضخامت را مورد بررسی قرار داده اند در روش حل معادلات از روش DQM استفاده شده است. میرزایی و همکاران [۱۴] خمش، کمانش و ارتعاشات آزاد ورق مستطیلی، دایروی و بیضوی را برای ورق مدرج تابعی چند جهته متخلخل با شرایط مرزی های مختلف مورد مطالعه قرار داده اند. لانگ و تنگ [۱۵] بررسی تحلیلی غیر خطی پایداری مواد متخلخل تابعی را برای در پوش کروی و دایروی تحت فشار خارجی یکنواخت و دمای بالا بر اساس تئوری کلاسیک مورد مطالعه قرار داده اند. بندربا و برابا [۱۶] خمش مکانیکی- حرارتی ورق کامپوزیتی مدرج تابعی متخلخل را با استفاده از تئوری تغییر شکل بهبود یافته مورد بررسی قرار گرفته است و خیز، تنش محوری و تنش برشی عرضی مورد مطالعه قرار گرفته است. محمود و همکاران [۱۷] خمش مکانیکی- حرارتی ورق متخلخل مدرج ساندوچی که کاربرد نظامی و غیر نظامی دارد مورد مطالعه قرار داده است، معادلات تعادل بر اساس اصل کار مجازی استخراج شده و با فرایند ناویر حل شده است و تاثیر پارامتر تخلخل بر روی آن مورد مطالعه قرار گرفته است. کمالی و همکاران [۱۸] ارتعاشات آزاد میکرو ورق دایروی متخلخل شباه شده کوپل با ورق پیزوالکتریک تحت نیروی یکنواخت صفحه ای مورد مطالعه قرار گرفته است، معادلات حرکت بر اساس تئوری مرتبه اول برشی و شرایط مرزی بر حسب اصل همیلتون استخراج شده و به روش انتقال دیفرانسیلی حل شده است و تاثیر پارامتر تخلخل بر روی ارتعاشات مورد مطالعه قرار گرفته است. اکبری و همکاران [۱۹] تحلیل کمانش مکانیکی و حرارتی ورق دایره ای مدرج تابعی دو جهتی با تغییرات خواص مواد در راستای شعاعی و ضخامت تحت بارگذاری شعاعی یکنواخت صفحه ای و حرارتی با شرایط مرزی ساده و گیردار را مورد مطالعه قرار داده و تاثیر خواص مواد در دو راستای متغییر و همچنین تغییرات هندسی ورق را بررسی کرده است که در مقایسه با نتایج قبلی در حالت همگن و مدرج یک جهتی همخوانی خوبی مشاهده شده است. کامران فرد و همکاران [۲۰] یک حل تحلیلی برای کمانش ورقهای قطاعی حلقوی متخلخل ارائه داده اند. ابتدا معادلات تعادل و شرایط مرزی ورق، طبق فرضیات تئوری برشی مرتبه اول ورق و با استفاده از اصل حداقل انرژی پتانسیل به دست آمده اند. پس از حل معادلات، با در نظر گرفتن شرایط مرزی تکیه گاه ساده در لبه های شعاعی و شرایط مرزی دلخواه در لبه های محیطی بار بحرانی کمانش محاسبه شده است. آنها تاثیر پارامترهای مختلف هندسی نظیر زاویه قطاع، ضخامت و شعاع داخلی ورق، همچنین تاثیر میزان تخلخل ورق بر بار بحرانی کمانش آن به ازای شرایط مرزی دلخواه روی لبه های محیطی را مورد بررسی قرار دادند. نتایج حاصل شده نشان میدهد که اثر افزایش میزان تخلخل موجود در ورق، در کاهش بار بحرانی کمانش، به مراتب کمتر از اثر پارامترهای هندسی و شرایط مرزی است. مهبد و عسگری [۲۱] خواص مکانیکی مواد زیستی متخلخل درجه بندی شده برای جایگزینی استخوان با استفاده از راه حل تحلیلی و عددی را بررسی کرده اند. آنها تاثیر تغییرات ویژگیهای هندسی المان بر خواص مکانیکی سازه را مورد مطالعه قرار دادند. این تغییرات تاثیر قابل توجهی بر خواص مکانیکی سازه داشته و با تعریف درست ویژگی های هندسی می توان کارایی و توزیع مناسب خواص مواد را برای کاربردهای مورد نظر به دست آورد. گپتا و کمار [22] رفتار کمانش ورق دایره ای متخلخل مدرج تابعی (PFGM^۱) مورد مطالعه قرار داده است، از اصل کار مجازی برای بررسی رفتار کمانش تحت بار فشاری تک محوری و دو محوری استفاده شده و برای صحت سنجی از روش اجزای محدود بهره گرفته شده است و تاثیر تخلخل بر روی نیروی بحرانی کمانش مورد مطالعه قرار گرفته است. گوکلی و همکاران [۲۳] یک رویکرد تحلیلی جدید برای کمانش حرارتی- مکانیکی غیرخطی ورق دایره ای متخلخل قابل تغییر شکل برشی مرتبه بالا و کلاهای کروی با ورقهای مسطح مواد مدرج تابعی (FGM) که بر روی پایه الاستیک پاسترناک قرار دارند در این مقاله ارائه شده است. ونگ ناین و همکاران [۲۴] با استفاده از روش تحلیل هم هندسی (IGA^۲) ، آنالیز کمانش حرارتی غیرخطی میکروصفحه های حلقوی و دایره ای متخلخل تقویت شده توسط پلاکت های گرافن (GPLs) تحت افزایش دمای یکنواخت با در نظر گرفتن وابستگی دمایی خواص مواد و اثرات اندازه انجام می شود. کمار و همکاران [۲۵] تاثیر بستر الاستیک و تخلخل را بر روی پاسخ کمانش تغییرات خطی مواد مدرج تابعی را مورد مطالعه قرار داده است. مگنوکا و همکاران [۲۶] یک ورق دایره ای با تکیه گاه ساده با

خواص مکانیکی متقارن متفاوت در جهت ضخامت را مورد مطالعه قرار داده است. در موارد شدید این تنوع، صفحه به یک ساختار تک لایه یا سه لایه تبدیل می شود. هدف اصلی این مطالعه ایجاد یک توصیف ریاضی از هر دو ساختار تک لایه و سه لایه با استفاده از یک فرمول است. مدل ریاضی همچنین شامل تمام حالات میانی صفحه در مسائل خمش متقارن محوری و کمانش با در نظر گرفتن اثر برشی است. برای این منظور، دو تابع بدون بعد که ارتباط نزدیکی با تغییر پذیری خواص مکانیکی دارند، معرفی شده و فرضیه غیرخطی تغییر شکل خط مستقیم نرمال به سطح خنثی صفحه فرض شد. بر اساس اصل انرژی پتانسیل دو معادله دیفرانسیل تعادل به دست آمده است. سیستم معادلات به صورت تحلیلی حل می شود. انحرافات و شدت بارهای بحرانی برای ورق نمونه بدست آمده است. سوپن و انوپ [۲۷] تاثیر تخلخل بر ارتعاشات آزاد و کمانش ورق مدرج ساندویچ شده چند جهتی را مورد مطالعه قرار داده است. در این مطالعه فرض شده خواص مواد در راستای طولی و عرضی متغیر است. با توجه به مطالعات انجام شده، مطالعه ای بر روی ورق دایره ای متخلخل شعاعی صورت نگرفته و هدف از این مقاله تحلیل کمانش مکانیکی ورق دایره ای متخلخل با تغییرات تخلخل در راستای شعاع که تحت بار گسترده در راستای شعاع بصورت صفحه ای قرار گرفته است می باشد و در دو شرایط مرزی ساده و گیردار مورد مطالعه قرار گرفته می شود و معادلات حرکت بر اساس تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی بسط داده شده و پس از بدست آوردن معادلات پایداری ورق دایره ای از روش انرژی و با در نظر گرفتن شرایط تقارن محوری مسئله، معادلات تعادل حل خواهد شد و نیروی بحرانی کمانش استخراج می گردد و با مقایسه نتایج حاصل با سایر نتایج موجود و همچنین روش المان محدود صحت این روش نشان داده می شود. تاثیر پارامترهای هندسی، تغییرات تخلخل در راستای شعاعی و شرایط مرزی بر روی نیروی بحرانی کمانش مورد مطالعه قرار خواهد گرفت. خاتون آبادی و همکاران [۲۸] تحلیل ضربه با سرعت پایین را برای ورق دایره ای متخلخل مدرج تابعی بر اساس تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی را برای اولین بار مورد مطالعه قرار داده است برای بدست آوردن معادلات از اصل همپلتون استفاده شده است و تاثیرات تخلخل در این مطالعه مورد بررسی قرار گرفته است. سرینینو و همکاران [۲۹] خمش متقارن محوری ورق دایره ای مدرج تابعی متخلخل بر روی بستر الاستیک وینکلر و پسترناک به صورت تحلیلی حل شده و با روش FEM مقایسه شده است جین و ازم [۳۰] خیز و خمش ورق مستطیلی مدرج تابعی متخلخل قرار گرفته بر روی بستر الاستیک تحت بار سینوسی با استفاده از تئوری کلاسیک ورق ها مورد مطالعه قرار داده است معادلات با روش ریتز حل شده و تاثیر تخلخل و سایر متغیرها بر روی خیز و خمش تحلیل شده است. دت و لن [۳۱] ورق مدرج تابعی متخلخل دایره ای با تخلخل غیر یکنواخت را تحت بارگذاری یکنواخت حرارتی با استفاده از تئوری مرتبه بالای برشی مورد مطالعه قرار داده است. محمد بلربی و همکاران [۳۲] تحلیل خمش و ارتعاشات ورق متخلخل مدرج تابعی ساندویچ شده را با توزیع تخلخل مختلف با استفاده از تئوری لایه ای گسترده مورد مطالعه قرار داده است. معادلات حاکم با استفاده از اصل همپلتون استخراج شده و با روش FEM حل شده است. مگنوک و همکاران [۳۳] آنالیز خمشی ورق متخلخل دایره ای انجام داده اند. مدل تحلیلی چنین خیز ورق برای شرایط مرزی دیفرانسیل به صورت تحلیلی و عددی (FEM) تعیین و مقایسه شده اند. سفرپور و همکاران [۳۴] بررسی پارامتری خمش سه بعدی و فرکانس ورق مدور و حلقوی متخلخل FG-GPLRC در شرایط مرزی مختلف انجام داده اند، معادلات بر اساس تئوری الاستیسته حاصل شده و به روش DQM حل شده است. در سالهای اخیر، تحلیل های تنش در سازه ها و المان های مکانیکی با در نظر گرفتن شرایط بارگذاری پیچیده تر و واقعی تر، مورد توجه محققان قرار گرفته است. به ویژه در حوزه رفتارهای غیرخطی، بررسی پاسخ خمش، نیروی محوری، و بارگذاری ضربه ای در ساختارهای سبک و جذب کننده انرژی نظیر لوله های مشبک توسعه یافته و تیرهای مقطع T شکل، نقش مهمی در بهبود عملکرد مکانیکی سیستم ها ایفا کرده اند. به عنوان نمونه، تاثیر ممان اینرسی و سلول های تکی و دوتایی در رفتار شکست لوله های مشبک تحت بارگذاری ضربه ای مورد بررسی تئوری و عددی قرار گرفته است [۳۵]، همچنین اندرکنش خمش-محور در تیرهای فلزی نیز به روش های تحلیلی و عددی مدل سازی شده است [۳۶]. بررسی اثر ابعاد مقطع و لایه بندی در پاسخ ضربه ای لوله های مشبک [۳۷]، نفوذ گلوله های آلومینیومی به صفحات نازک آلومینیومی تحت سرعت بسیار بالا [۳۸]، و بررسی آزمایشگاهی جذب انرژی در لوله های فلزی مشبک تحت بارگذاری محوری [۳۹] از دیگر مطالعات شاخص در این زمینه هستند که می توانند الهام بخش توسعه مدل های پیشرفته تری برای تحلیل سازه های مدرج تابعی تحت شرایط بارگذاری متنوع باشند.

با توجه به مطالعات پیشین، تاکنون تحقیقی جامع در زمینه تحلیل خمش و خیز ورق های دایره ای متخلخل با توزیع شعاعی تخلخل صورت نگرفته و این پژوهش برای نخستین بار به بررسی دقیق این مسئله می پردازد. در این مقاله، خمش الاستیک و خیز

استاتیکی ورق دایره‌ای مدرج تابعی متخلخل با توزیع تخلخل در راستای شعاع، تحت بارگذاری فشاری یکنواخت عمودی و در دو شرط مرزی ساده و گیردار تحلیل شده است. معادلات حاکم با فرض تقارن محوری و بر پایه تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی استخراج و با استفاده از روش انرژی به صورت تحلیلی (روش سری‌ها) و عددی (روش اجزای محدود) حل شده‌اند. مقایسه نتایج دو روش با میانگین خطای 0.04% و بیشینه خطای 0.07% ، همچنین تطابق آن‌ها با داده‌های مرجع (با خطای 0.05% و 0.1%)، صحت و دقت مدل را تأیید می‌کند. نتایج نشان می‌دهد که در حالت تکیه‌گاه گیردار، تنش‌ها به طور متوسط 60 تا 65 درصد و خیز حدود 70 تا 76 درصد کمتر از حالت تکیه‌گاه ساده است. این نوع ورق‌ها به دلیل قابلیت ساخت بالا، کاهش وزن و افزایش استحکام، در کاربردهایی مانند صنایع هوافضا، دیسک‌های توربین، تجهیزات پزشکی و ایمپلنت‌ها، سیستم‌های جذب انرژی، مبدل‌های حرارتی، فیلترها و قطعات سبک‌وزن خودرو کاربردهای گسترده و مؤثری دارند.

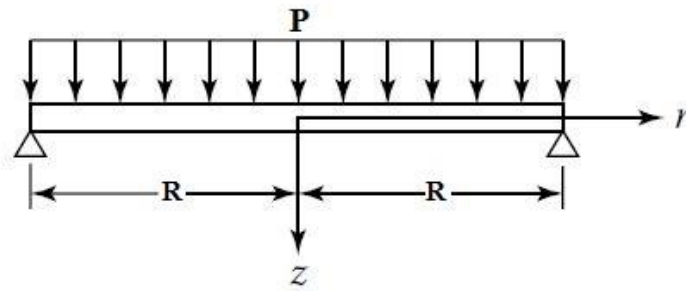
۲- مدل‌سازی ریاضی مسئله

در این مقاله ورق دایره‌ای از نوع مواد متخلخل متغیر در راستای شعاعی با ضخامت h و شعاع R در دستگاه مختصات استوانه‌ای (r, θ, z) که تحت توزیع یکنواخت فشار عمودی قرار دارد در نظر گرفته شده است (شکل ۱). خصوصیات مکانیکی در راستای شعاع ورق متفاوت می‌باشد. مقدار مدول یانگ در راستای شعاع متغیر بوده و ماده استفاده شده در ساخت ورق دایره‌ای متخلخل، دارای خواص مکانیکی پیوسته می‌باشد (شکل ۲). خواص این ماده مانند مدول الاستیسیته توابعی از ضریب تخلخل و مدول الاستیسته ماده پایه می‌باشد. با فرض اینکه محور عمود بر صفحه میانی محور z باشد، مدول الاستیسیته $E=E(r)$ ، مدول برشی $G=G(r)$ و چگالی $\rho=\rho(r)$ به فرم زیر تعریف شده است [۴۰] (شکل ۳).

$$\begin{aligned} E(r) &= E_0 \left(e^{e_0 \frac{r}{R}} \right) \\ G(r) &= G_0 \left(e^{e_m \frac{r}{R}} \right) \\ \rho(r) &= \rho_0 \left(e^{e_m \frac{r}{R}} \right) \end{aligned} \quad (1)$$

که e_0 ، e_m و G_j به صورت زیر تعریف می‌شود:

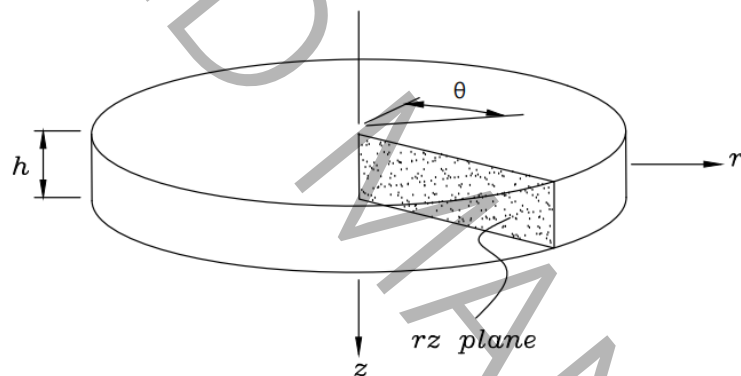
$$\begin{aligned} e_0 &= \ln \left(\frac{E_1}{E_0} \right) \\ e_m &= \ln \left(\frac{\rho_1}{\rho_0} \right) \\ G_j &= \frac{E_j}{2(1+\nu)} \quad , \quad j = 0, 1 \end{aligned} \quad (2)$$



شکل ۱ ورق دایره ای متخلخل در دستگاه مختصات استوانه ای تحت بار فشاری یکنواخت

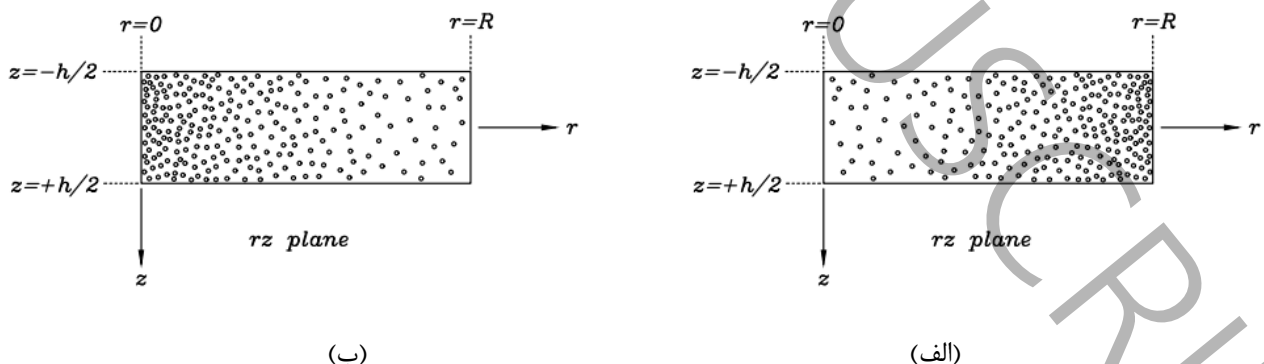
Fig. 1. A radially porous circular plate in cylindrical coordinates under uniform compressive loading.

در روابط ۱ و ۲، e عدد ثابت نپر، e_0 ضریب تخلخل ورق، e_m پارامتر بدون بعد چگالی، ν نسبت پواسون (ثابت برای کل ورق)، شعاع ورق، E_0 و E_1 مدول یانگ در $r = 0$ و $r = R$ ، G_0 و G_1 مدول برشی در $r = 0$ و $r = R$ و همچنین ρ_0 و ρ_1 چگالی در $r = 0$ و $r = R$ می باشند. رابطه بین ضریب تخلخل صفحه و پارامتر بدون بعد چگالی به صورت $e_m = 1 - \sqrt{1 - e_0}$ می باشد [۴۱].



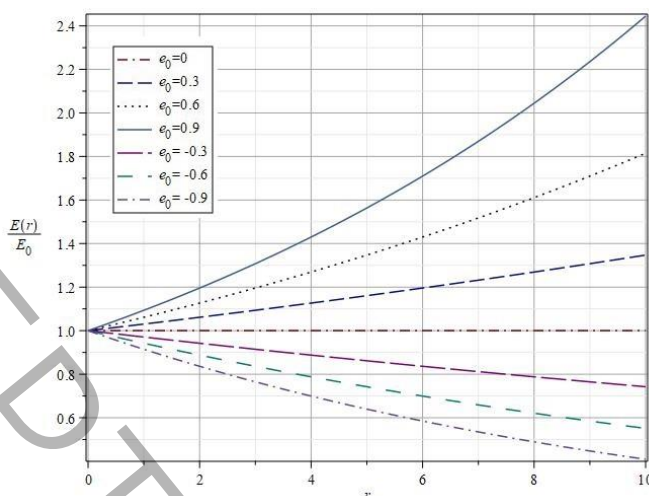
شکل ۲ نمای ورق دایره ای متخلخل شعاعی در دستگاه مختصات استوانه ای در صفحه rz

Fig. 2. View of a radially porous circular plate in cylindrical coordinates in the rz plane.



شکل ۳ نمای برش خورده ورق دایره ای متخلخل شعاعی در صفحه rz به ازای مقادیر متفاوتی از ضریب تخلخل
(الف) برای مقادیر منفی ضریب تخلخل ($e_0 < 0$) (ب) برای مقادیر مثبت ضریب تخلخل ($e_0 > 0$)

Fig. 3. Cross-sectional view of a radially porous circular plate in the rz plane for different values of the porosity coefficient: (a) for negative porosity coefficients ($e_0 < 0$), (b) for positive porosity coefficients ($e_0 > 0$).



شکل ۴ توزیع مدول الاستیسیته در راستای شعاعی ورق دایره ای متخلخل به ازای ضرایب مختلف تخلخل

Fig. 4. Radial distribution of Young's modulus in the porous circular plate for different porosity coefficients.

همان طور که در شکل ۴ مشاهده می شود، برای مقادیر منفی ضریب تخلخل و مطابق با شکل ۳(الف)، تخلخل در راستای شعاع افزایش یافته و در نتیجه چگالی کاهش یافته است که این امر منجر به کاهش مدول الاستیسیته شده است. در مقابل، برای مقادیر مثبت ضریب تخلخل، طبق شکل ۳(ب)، تخلخل به تدریج کاهش و چگالی افزایش می یابد که در نهایت موجب افزایش مدول الاستیسیته می گردد. همچنین، زمانی که ضریب تخلخل برابر صفر باشد، توزیع یکنواخت باقی می ماند و مدول الاستیسیته ثابت بوده و نمودار به صورت خط مستقیم ظاهر می شود.

مطابق با تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی میدان جابه جایی در حالت کلی در هر سطح مقطع به صورت زیر فرض می شود [۴۲].

$$\begin{cases} u(r, \theta, z) = u_0(r, \theta) + z\phi_r(r, \theta) \\ v(r, \theta, z) = v_0(r, \theta) + z\phi_\theta(r, \theta) \\ w(r, \theta, z) = w_0(r, \theta) \end{cases} \quad (3)$$

که در این معادلات u_0, v_0, w_0 جابجایی ها روی صفحه میانی و ϕ_r و ϕ_θ چرخش های عمودی حول محورهای r و θ هستند. رابطه ۳ با توجه به خاصیت تقارن محوری به فرم زیر تعریف شده است که $\phi = \phi_r$ در نظر گرفته شده است [3,4].

$$\begin{cases} u(r, z) = z\phi(r) \\ v(r, z) = 0 \\ w(r, z) = w_0(r) \end{cases} \quad (4)$$

روابط کرنش-تغییر مکان در مختصات استوانه ای و با فرض تقارن محوری در نظر گرفته شده که به صورت زیر می باشد:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r} \\
\varepsilon_\theta &= \frac{1}{r} \left(u + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \\
\varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} \\
\gamma_{r\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \\
\gamma_{rz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \\
\gamma_{\theta z} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta}
\end{aligned} \tag{5}$$

با توجه به روابط (4) کرنش ها به صورت زیر محاسبه می شوند:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} = z \frac{\partial \phi}{\partial r} \tag{6}$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{r} \left(u + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) = \frac{z\phi}{r} \tag{7}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{8}$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} = 0 \tag{9}$$

$$\gamma_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} = \phi + \frac{\partial w_0}{\partial r} \tag{10}$$

$$\gamma_{\theta z} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} = 0 \tag{11}$$

در روابط بالا، ε_r کرنش عمودی در راستای محور r ، ε_θ کرنش محیطی در راستای θ و γ_{rz} کرنش برشی می باشند. روابط محاسبه تنش ها نیز طبق قانون هوک به صورت زیر می باشد:

$$\sigma_r = \frac{E(r)}{1-\nu^2} (\varepsilon_r + \nu \varepsilon_\theta) \tag{12}$$

$$\sigma_\theta = \frac{E(r)}{1-\nu^2} (\varepsilon_\theta + \nu \varepsilon_r) \tag{12}$$

$$\tau_{rz} = G(r) \gamma_{rz}$$

بنابراین با توجه به روابط (1)، (5) و (12) می توان تنش ها را به صورت زیر محاسبه کرد:

$$\sigma_r = \frac{E(r)}{1-\nu^2} (\varepsilon_r + \nu \varepsilon_\theta) = \frac{E_0 \left(e^{e_0 \frac{r}{R}} \right)}{1-\nu^2} \left[z \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} + \nu \frac{\phi}{r} \right) \right] \tag{13}$$

$$\sigma_\theta = \frac{E(r)}{1-\nu^2} (\varepsilon_\theta + \nu \varepsilon_r) = \frac{E_0 \left(e^{e_0 \frac{r}{R}} \right)}{1-\nu^2} \left[z \left(\frac{\phi}{r} + \nu \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) \right] \tag{14}$$

$$\tau_{rz} = G(r) \gamma_{rz} = G_0 \left(e^{\frac{e_0 r}{R}} \right) \left(\phi + \frac{\partial w_0}{\partial r} \right) \quad (15)$$

۳- معادلات تعادل

برای ورقه‌ای که تحت اثر بار مکانیکی قرار گرفته باشد می‌توان رابطه انرژی پتانسیل کل ورق را به صورت زیر نوشت:

$$V = U_\varepsilon + \Omega \quad (16)$$

در رابطه (16)، V انرژی پتانسیل کل ورق^۱، U_ε انرژی کرنشی الاستیک^۲ و Ω انرژی پتانسیل ناشی از کار خاجی توزیع یکنواخت فشار عمودی^۳ می‌باشد. با توجه به اصل ثابت بودن کل انرژی پتانسیل داریم:

$$\delta(U_\varepsilon - \Omega) = 0 \quad (17)$$

که:

$$U_\varepsilon = \pi \int_0^R \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_r \varepsilon_r + \sigma_\theta \varepsilon_\theta + \tau_{rz} \gamma_{rz}) dz r dr \quad (18)$$

$$\Omega = 2\pi \int_0^R P w_0 r dr \quad (19)$$

در رابطه فوق، P بیانگر توزیع فشار عمودی است. با توجه به معادله (۱۷)، لازم است از روابط (۱۸) و (۱۹) واریاسیون گرفته شود. بنابراین خواهیم داشت:

$$\delta U_\varepsilon = \pi \int_0^R \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_r \delta \varepsilon_r + \sigma_\theta \delta \varepsilon_\theta + \tau_{rz} \delta \gamma_{rz}) dz r dr \quad (20)$$

$$\delta \Omega = 2\pi \int_0^R P \delta w_0 r dr \quad (21)$$

که واریاسیون کرنش‌ها برابر است با:

$$\delta \varepsilon_r = z \frac{\partial \delta \phi}{\partial r} \quad (22)$$

$$\delta \varepsilon_\theta = z \frac{\delta \phi}{r} \quad (23)$$

$$\delta \gamma_{rz} = \delta \phi + \frac{\partial \delta w_0}{\partial r} \quad (24)$$

در ادامه روابط (22)، (23) و (24) در رابطه (20) جایگذاری شده است:

$$\delta U_\varepsilon = \pi \int_0^R \int_{-h/2}^{h/2} \left[\sigma_r \left(z \frac{\partial \delta \phi}{\partial r} \right) + \sigma_\theta \left(\frac{z \delta \phi}{r} \right) + \tau_{rz} \left(\delta \phi + \frac{\partial \delta w_0}{\partial r} \right) \right] dz r dr \quad (25)$$

$$\delta U_\varepsilon = \pi \int_0^R \left(M_r \frac{\partial \delta \phi}{\partial r} + M_\theta \frac{\delta \phi}{r} + Q_r \delta \phi + Q_r \frac{\partial \delta w_0}{\partial r} \right) r dr \quad (26)$$

نیروها و ممان‌های منته‌به‌کار رفته در رابطه (۲۶)، با استفاده از رابطه کلی (۲۷) و مطابق با مرجع [۱۹]، به صورت رابطه (۲۸) بیان می‌شوند که k_s ضریب تصحیح برشی می‌باشد و مقدار آن $k_s = 5/6$ در نظر گرفته شده است [5].

¹ Total potential energy

² Elastic strain energy

³ Uniform distribution vertical pressure potential energy

$$\begin{cases} N_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij} dz \\ M_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij} z dz \\ Q_i = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{iz} dz \quad i, j = r, \theta \end{cases} \quad (27)$$

$$\begin{cases} N_r = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_r dz = \int_{-h/2}^{h/2} \left[\frac{E(r)}{1-\nu^2} (\varepsilon_r + \nu \varepsilon_\theta) \right] dz \\ N_\theta = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\theta dz = \int_{-h/2}^{h/2} \left[\frac{E(r)}{1-\nu^2} (\varepsilon_\theta + \nu \varepsilon_r) \right] dz \\ M_r = \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_r dz = \int_{-h/2}^{h/2} z \left[\frac{E(r)}{1-\nu^2} (\varepsilon_r + \nu \varepsilon_\theta) \right] dz \\ M_\theta = \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_\theta dz = \int_{-h/2}^{h/2} z \left[\frac{E(r)}{1-\nu^2} (\varepsilon_\theta + \nu \varepsilon_r) \right] dz \\ Q_r = k_s \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{rz} dz = \frac{5}{6} \int_{-h/2}^{h/2} [G(r) \gamma_{rz}] dz \end{cases} \quad (28)$$

با انتگرال گیری جزء به جزء از رابطه (26) و همچنین با استفاده از رابطه (17) معادلات حاکم به صورت زیر بدست آورده شده است:

$$\begin{aligned} \delta\phi: \quad & -\frac{\partial(rM_r)}{\partial r} + M_\theta + rQ_r = 0 \\ \delta w_0: \quad & -\frac{\partial(rQ_r)}{\partial r} - rP = 0 \end{aligned} \quad (29)$$

۴- روش حل

برای حل معادلات حاکم، از روش تحلیلی استفاده شده است. همچنین، به منظور اعتبارسنجی نتایج، حل عددی ورق با خواص مکانیکی همگن با استفاده از روش اجزای محدود در نرم افزار ABAQUS انجام شده و نتایج حاصل با روش تحلیلی مقایسه و صحت سنجی گردیده است. در ادامه، جزئیات مربوط به هر دو روش ارائه می شود. ورق متخلخل دایروی با دو تکیه گاه ساده و گیردار در لبه ها در نظر گرفته شده و تحت توزیع یکنواخت فشار عمودی قرار گرفته است. شرایط مرزی برای $r=0$ و $r=R$ به صورت زیر می باشند [۴۳] و [۴۴]:

- شرایط مرزی برای مدور با تکیه گاه ساده (ε مقداری متناهی و محدود می باشد):

$$\begin{aligned} w(r=R) &= 0, \quad w(r=0) = \varepsilon \quad 0 \leq \varepsilon < \infty \\ M_r(r=R) &= 0 \longrightarrow \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} + \nu \frac{\phi}{r} \right)_{(r=R)} = 0, \quad (\phi)_{r=0} = 0 \end{aligned} \quad (30)$$

- شرایط مرزی برای ورق مدور با تکیه گاه گیردار:

$$w(r=R)=0 \quad , \quad w(r=0)=\varepsilon \quad 0 \leq \varepsilon < \infty$$

$$(\phi)_{r=0}=0 \quad , \quad (\phi)_{(r=R)}=0 \quad (31)$$

با بسط روابط (28) بر حسب میدان جابجایی داریم:

$$N_r = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E_0 \left(e^{e_0 \frac{r}{R}} \right)}{1-\nu^2} \left[z \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} + \nu \frac{\phi}{r} \right) \right] dz = 0$$

$$N_\theta = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E_0 \left(e^{e_0 \frac{r}{R}} \right)}{1-\nu^2} \left[z \left(\frac{\phi}{r} + \nu \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) \right] dz = 0$$

$$M_r = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E_0 \left(e^{e_0 \frac{r}{R}} \right)}{1-\nu^2} \left[z^2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} + \nu \frac{\phi}{r} \right) \right] dz = \frac{h^3 E_0 \left(e^{e_0 \frac{r}{R}} \right)}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} + \nu \frac{\phi}{r} \right)$$

$$M_\theta = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E_0 \left(e^{e_0 \frac{r}{R}} \right)}{1-\nu^2} \left[z^2 \left(\frac{\phi}{r} + \nu \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) \right] dz = \frac{h^3 E_0 \left(e^{e_0 \frac{r}{R}} \right)}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{\phi}{r} + \nu \frac{\partial \phi}{\partial r} \right)$$

$$Q_r = k \int_{-h/2}^{h/2} G_0 \left(e^{e_0 \frac{r}{R}} \right) \left(\phi + \frac{\partial w_0}{\partial r} \right) dz = \frac{5}{6} h G_0 \left(e^{e_0 \frac{r}{R}} \right) \left(\phi + \frac{\partial w_0}{\partial r} \right) \quad (32)$$

با قرار دادن روابط (32) در معادلات (29) داریم:

$$-\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r h^3 E_0 \left(e^{e_0 \frac{r}{R}} \right)}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} + \nu \frac{\phi}{r} \right) \right) + \left(\frac{h^3 E_0 \left(e^{e_0 \frac{r}{R}} \right)}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{\phi}{r} + \nu \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) \right) +$$

$$\left(\frac{5}{6} r h G_0 \left(e^{e_0 \frac{r}{R}} \right) \left(\phi + \frac{\partial w_0}{\partial r} \right) \right) = 0 \quad (33)$$

$$-\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{5}{6} r h G_0 \left(e^{e_0 \frac{r}{R}} \right) \left(\phi + \frac{\partial w_0}{\partial r} \right) \right) - (rP) = 0$$

که در نهایت دستگاه معادلات حاکم بر حسب میدان جابجایی پس از ساده سازی برابر است با:

$$-\frac{h^3 E_0}{12(1-\nu^2)} \left[\left(e^{e_0 \frac{r}{R}} \right) \left(r \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \nu \frac{\partial \phi}{\partial r} - \nu \frac{\phi}{r} \right) + \left(1 + e_0 \frac{r}{R} \right) \left(e^{e_0 \frac{r}{R}} \right) \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} + \nu \frac{\phi}{r} \right) \right] +$$

$$\frac{5}{6} r h G_0 \left(e^{e_0 \frac{r}{R}} \right) \left(\phi + \frac{\partial w_0}{\partial r} \right) = 0 \quad (34)$$

$$-\frac{5}{6} h G_0 \left[\left(e^{e_0 \frac{r}{R}} \right) \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} + r \frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2} \right) + \left(1 + e_0 \frac{r}{R} \right) \left(e^{e_0 \frac{r}{R}} \right) \left(\phi + \frac{\partial w_0}{\partial r} \right) \right] - rP = 0$$

که اگر مقدار e_0 برابر صفر قرار داده شود معادلات حاکم بر حسب میدان جابجایی برای ورق مدور همگن حاصل می شود.

P به عنوان بار فشاری عمودی یکنواخت در نظر گرفته شده است. برای حل معادلات حاکم ابتدا از رابطه دوم معادلات (29) داریم:

$$rQ_r = -\frac{r^2 P}{2} + C \quad (35)$$

که مقدار ثابت C با توجه به شرایط مرزی (30) و (31) صفر می باشد [۴۲]. با جایگذاری (35) در معادله اول (29) خواهیم داشت:

$$-\frac{\partial(rM_r)}{\partial r} + M_\theta - \frac{r^2 P}{2} = 0 \quad (36)$$

با جایگذاری روابط (28) در معادله (36) داریم:

$$-\frac{h^3 E(r)}{12(1-\nu^2)} \left[\frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\nu}{r} \phi \right] - r \left\{ \left[\frac{h^3}{12(1-\nu^2)} \frac{\partial E(r)}{\partial r} \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\nu}{r} \phi \right) \right] + \frac{h^3 E(r)}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} - \frac{\nu}{r^2} \phi \right) \right\} + \frac{h^3 E(r)}{12(1-\nu^2)} \left[\frac{\phi}{r} + \nu \frac{\partial \phi}{\partial r} \right] - \frac{r^2 P}{2} = 0 \quad (37)$$

پس از مرتب سازی خواهیم داشت:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \left(\frac{1}{r} + \xi \right) \frac{\partial \phi}{\partial r} + \left(\frac{\nu}{r} \xi - \frac{1}{r^2} \right) \phi + \frac{6rP(1-\nu^2)}{h^3 E_0} = 0 \quad (38)$$

که:

$$\xi = \frac{E'(r)}{E(r)} = \frac{e_0}{R} \quad (39)$$

$E'(r)$ مشتق $E(r)$ نسبت به r میباشد. معادله (۳۸) یک معادله دیفرانسیل درجه دوم ناهمگن با ضرایب متغیر است که حل آن با استفاده از روش سری‌ها در نرم‌افزار Maple و دستور حل معادلات به روش سری انجام شده است (معادله ۴۰). با اعمال شرایط مرزی (معادلات ۳۰ و ۳۱)، ثابت‌های C_1 و C_2 استخراج شده‌اند. در نهایت، با بهره‌گیری از رابطه (۱۳)، تنش‌های خمشی و خیز ورق محاسبه گردیده‌اند.

$$\phi = C_1 A_1 + C_2 A_2 + A_3 \quad (40)$$

که:

$$A_1 = r \left(1 - \frac{1}{3} \frac{(\nu+1)e_0}{R} r + \frac{1}{24} \frac{(\nu+2)(\nu+1)e_0^2}{R^2} r^2 - \frac{1}{360} \frac{(\nu+3)(\nu+2)(\nu+1)e_0^3}{R^3} r^3 + O(r) \right)$$

$$A_2 = \frac{\ln(r)}{r} \left(\frac{e_0 \nu (\nu-1)r^2}{R^2} - \frac{1}{3} \frac{\nu(\nu-1)(\nu+1)e_0^3 r^3}{R^3} + O(r) \right) + \frac{1}{r} \left(-2 - 2 \frac{(\nu-1)e_0 r}{R} + \left(\frac{e_0^2 (2\nu-1)}{R^2} \right) r^2 + \left(-\frac{\nu(\nu-1)e_0^3}{3R^3} - \frac{(\nu-1)(\nu+1)e_0^3}{3R^3} - \frac{\nu(\nu+1)e_0^3}{3R^3} + \frac{4\nu(\nu-1)(\nu+1)e_0^3}{9R^3} \right) r^3 + O(r) \right)$$

$$A_3 = \frac{3}{4} \frac{P(\nu^2-1)r^3}{h^3 E} + O(r)$$

همانطور که گفته شد با اعمال شرایط مرزی مسئله و حل معادله حاصل شده با کمک نرم افزار میپل ثابت های C_1 و C_2 برابر است با:

- برای تکیه گاه ساده:

$$C_1 = \frac{270R^2 p(\nu+3)(\nu-1)}{(\nu^3 e_0^3 + 9\nu^2 e_0^3 - 15\nu^2 e_0^2 + 26\nu e_0^3 - 75\nu e_0^2 + 24e_0^3 + 120e_0 \nu - 90e_0^2 + 240e_0 - 360) Eh^3}$$

$$C_2 = 0$$

- برای تکیه گاه گیردار:

$$C_1 = \frac{270R^2 p(\nu^2-1)}{(\nu^3 e_0^3 + 6\nu^2 e_0^3 - 15\nu^2 e_0^2 + 11\nu e_0^3 - 45\nu e_0^2 + 6e_0^3 + 120e_0 \nu - 30e_0^2 + 120e_0 - 360) Eh^3}$$

$$C_2 = 0$$

۲-۴- حل معادلات در حالت مدول الاستیسته ثابت

در صورتی که تخلخل را صفر در نظر بگیریم تغییراتی برای مدول الاستیسته وجود ندارد و ثابت است $E = E_0 = E_1$ یعنی $\epsilon = 0$ بنا بر این رابطه (38) به فرم زیر در می آید:

$$\frac{h^3 E}{12(1-\nu^2)} \left(r \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{\partial \phi}{\partial r} - \frac{\phi}{r} \right) + \frac{r^2 P}{2} = 0 \quad (41)$$

که:

$$\phi(r) = \frac{c_3}{r} + rc_4 + \frac{3P(\nu^2-1)r^3}{4h^3 E} \quad (42)$$

با توجه به شرایط مرزی (30) $(\phi)_{r=0} = 0$ ، داریم: $\left(\frac{\partial \phi}{\partial r} + \nu \frac{\phi}{r} \right)_{(r=R)} = 0$

$$\phi(r) = \frac{3(-pr^3 + 3prR^2 - 2prR^2\nu + pr^3\nu^2 - prR^2\nu^2)}{4Eh^3} \quad (43)$$

از روابط (28) و (29) برای Q_r داریم:

$$rQ_r = rkhG \left(\phi + \frac{\partial w_0}{\partial r} \right) \quad (44)$$

با ادغام رابطه (35) و (44) داریم:

$$rkhG \left(\phi + \frac{\partial w_0}{\partial r} \right) + \frac{r^2 P}{2} = 0 \quad (45)$$

بنابر این جابجایی عمودی ورق از (43) و (45) برابر است با:

$$w_0(r) = \frac{1}{16EGh^3 k} (4Eh^2 pr^2 + 3Gkpr^4 - 4Eh^2 pR^2 - 18Gkpr^2 R^2 + 15GkpR^4 + 12Gkpr^2 R^2 \nu - 12GkpR^4 \nu - 3Gkpr^4 \nu^2 + 6Gkpr^2 R^2 \nu^2 - 3GkpR^4 \nu^2) \quad (46)$$

با توجه به اینکه مقدار حداکثر تنش عمودی در این حالت در مرکز ورق یا در $(r=0)$ اتفاق می افتد، حداکثر تنش عمودی با استفاده از (12) و (43) به صورت زیر بدست می آید:

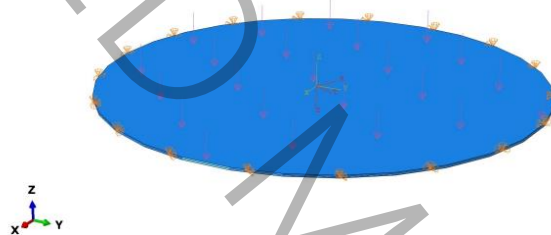
$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_r + \nu \varepsilon_\theta) = \frac{E}{1-\nu^2} \left[z \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} + \nu \frac{\phi}{r} \right) \right]$$

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2} \left[z \left(\frac{3}{4Eh^3} (-3pr^2 - pr^2\nu + 3pR^2 + pR^2\nu + 3pr^2\nu^2 - 3pR^2\nu^2 + pr^2\nu^3 - pR^2\nu^3) \right) \right]$$

$$(\sigma_r)_{\max} = (\sigma_\theta)_{\max} = \frac{E}{1-\nu^2} \left[z \left(\frac{3}{4Eh^3} (3pR^2 + pR^2\nu - 3pR^2\nu^2 - pR^2\nu^3) \right) \right] \quad (47)$$

۴-۳- روش المان محدود

برای صحت‌سنجی نتایج تحلیلی، تحلیل عددی با استفاده از نرم‌افزار ABAQUS برای ورق دایره‌ای همگن انجام شده است. در این تحلیل، مقادیر ماکزیمم تنش عمودی و ماکزیمم خیز استخراج و با نتایج به‌دست‌آمده از روش تحلیلی در حالت همگن مقایسه شده‌اند. مدل‌سازی در مختصات استوانه‌ای و تحت بارگذاری فشاری یکنواخت عمودی صورت گرفته و دو نوع شرط مرزی مورد بررسی قرار گرفته است. مدل هندسی آماده‌شده در شکل ۵ نمایش داده شده است. در حالت تکیه‌گاه ساده، نتایج مربوطه در جدول ۱ ارائه شده‌اند و نمونه‌ای از این نتایج برای نسبت ضخامت به شعاع $h/R = 0.06$ در شکل ۱۴ نمایش داده شده است. همچنین، در حالت تکیه‌گاه گیردار، نتایج در جدول ۲ آمده و نمونه‌ای از آن برای $h/R = 0.08$ در شکل ۱۵ نشان داده شده است.



شکل ۵ ورق همگن با تکیه‌گاه ساده و بارگذاری فشاری عمودی یکنواخت در مختصات استوانه‌ای در نرم‌افزار اباکوس

Fig. 5. Homogeneous circular plate with simply supported edge under uniform vertical pressure in cylindrical coordinates modeled in Abaqus.

۵- نتایج

در این مطالعه مقدار P برابر 1Mpa و مقدار E_0 برابر مدول الاستیسته فولاد 42CrMo4 معادل 210 GPa با تنش تسلیم 800 MPa در نظر گرفته شده است که نتایج به‌دست آمده برای هر ماده با این مدول الاستیسته صادق می‌باشد.

جدول ۱ و ۲ نتایج عددی ماکزیمم تنش عمودی بی‌بعد و خیز ورق دایره‌ای همگن تحت بارگذاری فشاری عمودی یکنواخت براساس تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی صفحات بترتیب برای ورق با لبه تکیه‌گاه ساده و گیردار به روش تحلیلی در مقایسه با روش اجزاء محدود را نشان می‌دهد. با مقایسه نتایج، همخوانی خوبی در هر دو روش با یکدیگر مشاهده شده است. همانطور که مشاهده می‌شود در هر دو حالت با افزایش نسبت ضخامت به شعاع مقدار ماکزیمم تنش عمودی و خیز ورق کاهش یافته و ورق استحکام بالاتری پیدا کرده است. همچنین تنش‌های عمودی و خیز ورق در حالت تکیه‌گاه گیردار نسبت به تکیه‌گاه ساده مقدار کمتری به خود اختصاص داده است. در حالت گیردار، چون لبه نمی‌تواند بچرخد، تنش‌ها (به‌ویژه ممان‌های خمشی) بهتر در کل ورق توزیع می‌شوند. این باعث می‌شود که خیز ورق کاهش پیدا کند، چون انرژی خمشی بیشتری در لبه‌ها ذخیره می‌شود. در حالت ساده، لبه آزادانه خم می‌شود، و این باعث تمرکز بیشتر خیز در مرکز ورق می‌شود. در حالت تکیه‌گاه گیردار نسبت به تکیه‌گاه ساده تنش‌ها به طور متوسط $60-65\%$ درصد و خیز بطور متوسط 70 تا 76% درصد کاهش می‌یابد.

جدول ۳ نتایج عددی ماکزیمم خیز ورق دایره‌ای همگن تحت بارگذاری فشاری عمودی یکنواخت براساس تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی با تکیه‌گاه گیردار به روش تحلیلی را با سایر نتایج موجود [۸]، [۵] و [۶] مورد مقایسه قرار داده است، برای همخوانی

نتایج از داده های ماده FGM با ترکیب آلومینیوم-زیرکونیا با $v=0.3$ و $E_r=0.464$ استفاده شده است. که E_r نسبت مدول یانگ فلز به سرامیک می باشد [۸] و مقادیر خیز با رابطه $\bar{W} = 64DW/PR^4$ که D صلبیت خمشی ورق و برابر با $D = Eh^3/12(1-v^2)$ می باشد، بی بعد شده است. همخوانی خوبی با سایر نتایج مشاهده شده است و همچنین مشاهده شده نتایج به تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی ردی نزدیک تر می باشد.

جدول ۴ نتایج عددی ماکزیمم خیز $\bar{W}$ بی بعد شده مطابق با جدول قبل برای ورق دایروی همگن تحت بارگذاری فشاری عمودی یکنواخت براساس تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی با تکیه گاه ساده و گیردار به روش تحلیلی را با سایر نتایج موجود [۸]، [۵] مورد مقایسه قرار داده است، برای همخوانی نتایج از $v=0.288$ و $E_r=0.396$ بکار رفته در [۵] استفاده شده است. همخوانی خوبی با سایر نتایج مشاهده شده است و همچنین مشاهده میشود.

در شکل های 6-13 مقادیر تنش به صورت بی بعد ترسیم شده و به منظور بی بعد کردن تنش های عمودی از رابطه زیر استفاده شده است.

$$\bar{\sigma}_r = \frac{10\sigma_r}{E_0} \quad (48)$$

برای بررسی رفتار تنش های خمشی در ورق دایروی متخلخل شعاعی دو حالت با ضریب تخلخل و بدون ضریب تخلخل برای ورق با تکیه گاه ساده و گیردار با مقادیر $P=1MPa$ ، $v=0.3$ ، $h/R=1/10$ و $-1 < e_0 < 1$ در نظر گرفته شده است. در شکل ۶، تغییرات تنش شعاعی بی بعد (مطابق با رابطه ۴۸) در مرکز ورق دایره ای متخلخل شعاعی و در موقعیت $z=h/2$ ، نسبت به تغییرات نسبت ضخامت به شعاع (h/R)، برای حالت لبه با تکیه گاه ساده و ضرایب مختلف تخلخل بررسی شده است. نتایج نشان می دهند که با افزایش نسبت h/R ، ممان اینرسی افزایش یافته و در نتیجه استحکام خمشی ورق بیشتر می شود؛ به همین دلیل تنش شعاعی کاهش می یابد. این روند برای تمام مقادیر ضریب تخلخل، از جمله حالت ورق همگن نیز مشاهده می شود. همچنین، هرچه مقدار h/R کوچک تر باشد، تأثیر ضریب تخلخل بر تنش شعاعی محسوس تر است. از سوی دیگر، با افزایش مقدار ضریب تخلخل، مقدار تنش شعاعی افزایش می یابد. علت این رفتار آن است که طبق روابط (۱) و (۱۳)، افزایش ضریب تخلخل منجر به افزایش مدول الاستیسیته در راستای شعاعی شده و در نتیجه با افزایش سختی، تنش شعاعی که به طور مستقیم با مدول الاستیسیته مرتبط است، افزایش می یابد.

در شکل ۷، تغییرات خیز بی بعد (با فرض شعاع $R=100$) نسبت به تغییرات نسبت ضخامت به شعاع (h/R) در مرکز ورق دایره ای متخلخل شعاعی و در موقعیت $z=h/2$ ، برای حالت تکیه گاه ساده و ضرایب مختلف تخلخل بررسی شده است. نتایج نشان می دهد که با افزایش نسبت h/R ، ممان اینرسی ورق افزایش یافته و در نتیجه استحکام خمشی بیشتر می شود، که این امر منجر به کاهش خیز در برابر بارگذاری می گردد. این روند برای تمام ضرایب تخلخل، از جمله ورق همگن نیز مشاهده می شود و هرچه مقدار h/R کوچک تر باشد، تأثیر ضریب تخلخل بر میزان خیز بیشتر خواهد بود. همچنین مشاهده می شود که با افزایش ضریب تخلخل، مقدار خیز ورق افزایش می یابد. دلیل این رفتار آن است که طبق رابطه (۱۳)، افزایش ضریب تخلخل منجر به افزایش مدول الاستیسیته و در نتیجه افزایش سختی ماده می شود. با توجه به قانون هوک، رابطه بین تنش و کرنش متناسب با مدول الاستیسیته است؛ بنابراین، با افزایش تنش ناشی از افزایش سختی، کرنش و در نتیجه خیز نیز افزایش خواهد یافت.

در شکل ۸، تغییرات تنش شعاعی بی بعد در مرکز ورق دایره ای متخلخل شعاعی و در موقعیت $z=h/2$ ، نسبت به نسبت ضخامت به شعاع (h/R)، برای حالت لبه با تکیه گاه گیردار و ضرایب مختلف تخلخل مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج نشان می دهد که با افزایش نسبت h/R ، ممان اینرسی و در پی آن استحکام خمشی ورق افزایش یافته و مطابق با رابطه تنش خمشی، مقدار تنش شعاعی کاهش می یابد. این روند برای تمامی مقادیر ضریب تخلخل و همچنین برای حالت ورق همگن نیز برقرار است. همچنین، هرچه مقدار h/R کوچک تر باشد، تأثیر ضریب تخلخل بر مقدار تنش بیشتر خواهد بود. از سوی دیگر، با افزایش ضریب تخلخل، تنش شعاعی نیز افزایش می یابد؛ چرا که مطابق با روابط (۱) و (۱۳)، افزایش ضریب تخلخل موجب افزایش مدول الاستیسیته و سختی ماده شده و از آنجا که تنش با مدول الاستیسیته رابطه مستقیم دارد، افزایش در سختی منجر به افزایش تنش شعاعی می گردد. این رفتار مشابه آنچه

در شکل ۶ برای حالت تکیه‌گاه ساده مشاهده شد، قابل مشاهده است؛ با این تفاوت که در این حالت، مقادیر تنش شعاعی در کل کمتر هستند.

شکل ۹ تغییرات خیز بی بعد شده با $R=100$ و نسبت به تغییرات ضخامت به شعاع ورق در مرکز ورق دایروی متخلخل شعاعی در $z=h/2$ برای حالت ورق با لبه تکیه‌گیردار با ضرایب تخلخل مختلف بررسی شده است. مشاهده می‌شود هرچه نسبت ضخامت به شعاع افزایش یابد ممان اینرسی افزایش و بر استحکام خمشی ورق افزوده شده میزان خیز ورق بارگذاری شده کاهش می‌یابد و این امر برای تمام ضرایب تخلخل مختلف و همچنین ورق همگن برقرار می‌باشد که هرچه مقدار h/R کوچکتر باشد تاثیر این ضریب بر آن بیشتر است. مشاهده شده است که هر چه مقدار ضریب تخلخل بیشتر باشد مقدار خیز ورق بیشتر است و علت آن است که همانطور که گفته شد هرچه مقدار ضریب تخلخل افزایش یابد مدول الاستیسته افزایش می‌یابد و سختی افزایش می‌یابد و مقدار تنش که با مدول الاستیسته رابطه مستقیم دارد افزایش می‌یابد (رابطه ۱۳) و طبق قانون هوک، نسبت تنش به کرنش برابر مقدار ثابت مدول الاستیسته است که با افزایش تنش مقدار کرنش و خیز نیز افزایش می‌یابد. که رفتاری مشابه شکل ۷ در حالت ورق با تکیه‌گاه ساده دارد با این تفاوت که مقادیر خیز ورق در آن‌ها کوچکتر است.

شکل ۱۰ نمودار تغییرات تنش بی بعد با رابطه در راستای شعاع ورق دایروی متخلخل شعاعی برای حالت ورق با لبه تکیه‌گاه ساده با ضرایب تخلخل مختلف می‌باشد. مشاهده شده است هرچه مقدار ضریب تخلخل افزایش یابد از استحکام ورق کاسته شده و مقادیر تنش در آن افزایش می‌یابد و علت آن است که با توجه به رابطه ۱ و ۱۳ هرچه مقدار ضریب تخلخل افزایش یابد مدول الاستیسته افزایش می‌یابد سختی افزایش می‌یابد و مقدار تنش که با مدول الاستیسته رابطه مستقیم دارد افزایش می‌یابد. و هرچه از مرکز ورق به سمت لبه ورق رفتار تنش را بررسی کنیم کاهش تنش مشاهده می‌شود و ماکزیمم مقدار تنش در مرکز ورق اتفاق می‌افتد که این رفتار به این علت است که در مرکز ورق بیشترین مقدار ممان خمشی وجود دارد که منجر به بیشترین تنش می‌گردد.

شکل ۱۱ نمودار تغییرات خیز بی بعد با $R=0.01$ در راستای شعاع ورق دایروی متخلخل شعاعی برای حالت ورق با لبه تکیه‌گاه ساده با ضرایب تخلخل مختلف می‌باشد. مشاهده شده است هرچه مقدار ضریب تخلخل افزایش یابد از استحکام ورق کاسته شده و مقادیر خیز در آن افزایش می‌یابد و هرچه از مرکز ورق به سمت لبه ورق رفتار خیز را بررسی کنیم کاهش جابجایی مشاهده می‌شود و ماکزیمم مقدار خیز همواره در مرکز ورق اتفاق می‌افتد. علت آن است که همانطور که گفته شد هرچه مقدار ضریب تخلخل افزایش یابد مدول الاستیسته افزایش می‌یابد و سختی افزایش می‌یابد و مقدار تنش که با مدول الاستیسته رابطه مستقیم دارد افزایش می‌یابد (رابطه ۱۳) و طبق قانون هوک، نسبت تنش به کرنش برابر مقدار ثابت مدول الاستیسته است که با افزایش تنش مقدار کرنش و خیز نیز افزایش می‌یابد.

شکل ۱۲ نمودار تغییرات تنش بی بعد در راستای شعاع ورق دایروی متخلخل شعاعی برای حالت ورق با لبه تکیه‌گاه گیردار با ضرایب تخلخل مختلف می‌باشد. مشاهده شده است هرچه مقدار ضریب تخلخل افزایش یابد از استحکام ورق کاسته شده و مقادیر تنش در آن افزایش می‌یابد و علت آن است که با توجه به رابطه ۱ و ۱۳ هرچه مقدار ضریب تخلخل افزایش یابد مدول الاستیسته افزایش می‌یابد سختی افزایش می‌یابد و مقدار تنش که با مدول الاستیسته رابطه مستقیم دارد افزایش می‌یابد. و هرچه از مرکز ورق به سمت لبه ورق رفتار تنش را بررسی کنیم کاهش تنش مشاهده می‌شود و ماکزیمم مقدار تنش در مرکز ورق اتفاق می‌افتد که این رفتار به این علت است که در مرکز ورق بیشترین مقدار ممان خمشی وجود دارد که منجر به بیشترین تنش می‌گردد. که رفتاری مشابه شکل ۱۰ در حالت ورق با تکیه‌گاه ساده دارد با این تفاوت که مقادیر تنش عمودی در آن‌ها کوچکتر است.

شکل ۱۳ نمودار تغییرات خیز بی بعد با $R=0.01$ در راستای شعاع ورق دایروی متخلخل شعاعی برای حالت ورق با لبه تکیه‌گاه گیردار با ضرایب تخلخل مختلف می‌باشد. مشاهده شده است هرچه مقدار ضریب تخلخل افزایش یابد از استحکام ورق کاسته شده و مقادیر خیز در آن افزایش می‌یابد و هرچه از مرکز ورق به سمت لبه ورق رفتار خیز را بررسی کنیم کاهش جابجایی مشاهده می‌شود و ماکزیمم مقدار خیز همواره در مرکز ورق اتفاق می‌افتد. علت آن است که همانطور که گفته شد هرچه مقدار ضریب تخلخل افزایش یابد مدول الاستیسته افزایش می‌یابد و سختی افزایش می‌یابد و مقدار تنش که با مدول الاستیسته رابطه مستقیم دارد افزایش می‌یابد (رابطه ۱۳) و طبق قانون هوک، نسبت تنش به کرنش برابر مقدار ثابت مدول الاستیسته است که با افزایش تنش مقدار کرنش و

خیز نیز افزایش می یابد. که رفتاری مشابه شکل ۱۱ در حالت ورق با تکیه گاه ساده دارد با این تفاوت که مقادیر تنش عمودی در آن ها کوچکتر است.

جدول ۱ نتایج عددی ماکزیمم تنش عمودی و خیز ورق دایروی همگن تحت بار گذاری فشاری عمودی یکنواخت بر اساس تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی صفحات برای ورق با لبه تکیه گاه ساده به روش تحلیلی در مقایسه با روش اجزاء محدود

Table 1. Numerical results of maximum vertical stress and deflection of a homogeneous circular plate under uniform vertical pressure loading based on the first-order shear deformation theory for plates with simply supported edges: comparison between analytical and finite element methods.

h/R	Max Bending Stress ($\sigma_r=\sigma_\theta$)		Max Deflection (W)	
	FEM ¹	ANALITIACAL	FEM	ANALITIACAL
۰/۰۱	۵/۸۹۰۹۵۲	۵/۸۹۲۸۵۷	۳۳/۱۲۲	۳۳/۱۲۸۸۹
۰/۰۲	۱/۴۷۲۷۳۸	۱/۴۷۳۲۱۴	۴/۱۴۱۰	۴/۱۴۲۵۷۳
۰/۰۳	۰/۶۵۴۵۵۲	۰/۶۵۴۷۶۲	۱/۲۲۷۸۵	۱/۲۲۸۱۵۰
۰/۰۴	۰/۳۶۸۱۸۵	۰/۳۶۸۳۳۳	۰/۵۱۸۴۰۶	۰/۵۱۸۵۵۲
۰/۰۵	۰/۲۳۵۶۳۸	۰/۲۳۵۷۱۴	۰/۲۶۵۶۹۲	۰/۲۶۵۷۷۹
۰/۰۶	۰/۱۶۳۶۷۷	۰/۱۶۳۶۹۰	۰/۱۵۳۹۶۸	۰/۱۵۴۰۰۵
۰/۰۷	۰/۱۲۰۲۲۳	۰/۱۲۰۲۶۲	۰/۰۹۷۰۸۶	۰/۰۹۷۱۳۰
۰/۰۸	۰/۰۹۲۰۴۶	۰/۰۹۲۰۷۶	۰/۰۶۵۱۴۹	۰/۰۶۵۱۸۴
۰/۰۸	۰/۰۷۲۷۲۸	۰/۰۷۲۷۵۱	۰/۰۴۵۸۴۳	۰/۰۴۵۸۷۱
۰/۱	۰/۰۵۸۹۱	۰/۰۵۸۹۲۹	۰/۰۳۳۴۹	۰/۰۳۳۵۱۴

جدول ۲ نتایج عددی ماکزیمم تنش عمودی و خیز ورق دایروی همگن تحت بار گذاری فشاری عمودی یکنواخت بر اساس تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی صفحات برای ورق با لبه تکیه گاه گیردار به روش تحلیلی در مقایسه با روش اجزاء محدود

Table 2. Numerical results of maximum vertical stress and deflection of a homogeneous circular plate under uniform vertical pressure loading based on the first-order shear deformation theory for plates with clamped edges: comparison between analytical and finite element methods.

h/R	Max Bending Stress ($\sigma_r=\sigma_\theta$)		Max Deflection (W)	
	FEM	ANALITIACAL	FEM	ANALITIACAL
۰/۰۱	۲/۳۲۰۴۳۳	۲/۳۲۱۴۲۹	۸/۱۲۶۸	۸/۱۲۸۹
۰/۰۲	۰/۵۸۰۱۱	۰/۵۸۰۳۵۷	۱/۰۱۷۲	۱/۰۱۷۵
۰/۰۳	۰/۲۵۷۸۲۶	۰/۲۵۷۹۳۷	۰/۳۰۲	۰/۳۰۲۲
۰/۰۴	۰/۱۴۵۰۲۷	۰/۱۴۵۰۹۰	۰/۱۲۷۸	۰/۱۲۷۹
۰/۰۵	۰/۰۹۲۸۱۷	۰/۰۹۲۸۵۷	۰/۰۶۵۷۲	۰/۰۶۵۸
۰/۰۶	۰/۰۶۴۴۵۷	۰/۰۶۴۴۸۴	۰/۰۳۸۲۲	۰/۰۳۸۳
۰/۰۷	۰/۰۴۷۳۵۶	۰/۰۴۷۳۸۰	۰/۰۲۴۲۱	۰/۰۲۴۲
۰/۰۸	۰/۰۳۶۲۶۸	۰/۰۳۶۲۷۲	۰/۰۱۶۳۳	۰/۰۱۶۴
۰/۰۸	۰/۰۲۸۶۴۷	۰/۰۲۸۶۶۰	۰/۰۱۱۵۵	۰/۰۱۱۶
۰/۱	۰/۰۲۳۲۰۴	۰/۰۲۳۲۱۴	۰/۰۰۸۴۹	۰/۰۰۸۵۱

^۱ روش المان محدود

جدول ۳ مقایسه خیز بی بعد $\bar{W}$ ورق ضخیم دایروی همگن برای ورق با لبه تکیه گاه گیردار به روش تحلیلی در مقایسه با سایر نتایج موجود برای $\nu=0.3$ و $E_r=0.464$

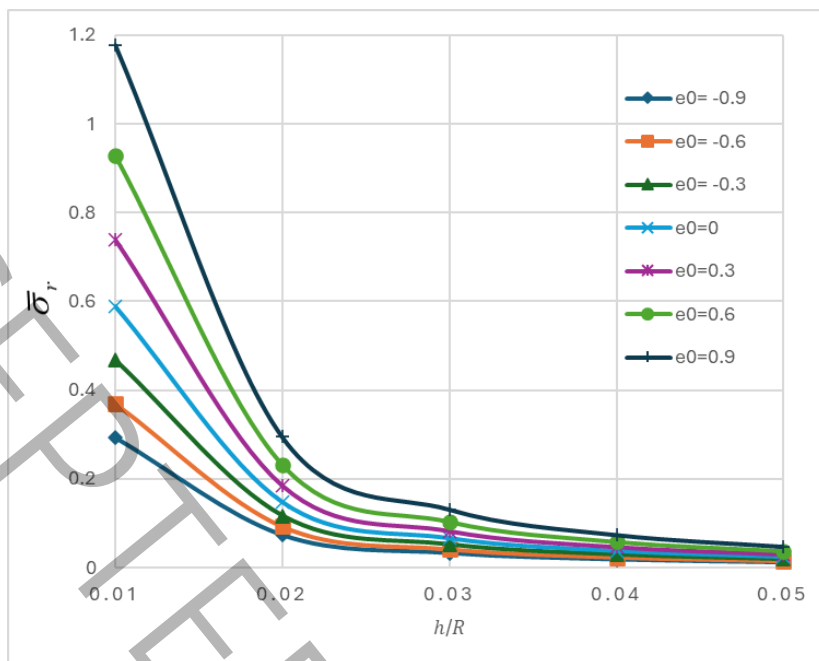
Table 3. Comparison of dimensionless deflection of a thick homogeneous circular plate with clamped edges using the analytical method versus other available results for $\nu = 0.3$ and $E_r = 0.464$.

Ref.	h/R					
	۰	۰/۱	۰/۲	۰/۲۵	۰/۳	۰/۳۳
FSDT [5]	۲/۱۵۷۴	۲/۲۵۵۸	۲/۵۵۱۶	۲/۷۷۳۵	۳/۰۴۴۷	۳/۲۳۱۰
TSDT[6]	۲/۱۵۷۴	۲/۲۵۴۶	۲/۵۴۲۳	۲/۷۵۵۴	۳/۰۱۳۴	۳/۱۸۹۳
TSDT[8]	۲/۱۵۷۴	۲/۲۵۵۳	۲/۵۴۷۸	۲/۷۶۶۰	۳/۰۳۱۷	۳/۲۱۳۸
Present (FSDT)	۲/۱۵۷۴	۲/۲۵۵۴	۲/۵۵۰۴	۲/۷۷۱۷	۳/۰۴۲۱	۳/۲۲۷۹

جدول ۴ مقایسه خیز بی بعد $\bar{W}$ ورق ضخیم دایروی همگن برای ورق با لبه تکیه گاه ساده و گیردار به روش تحلیلی در مقایسه با سایر نتایج موجود برای $\nu=0.288$ و $E_r=0.396$

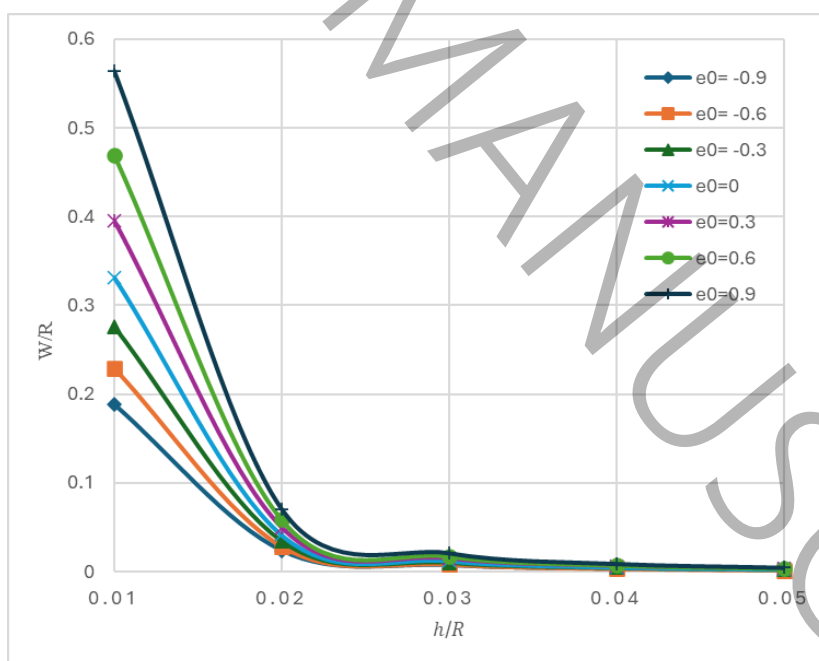
Table 4. Comparison of dimensionless deflection of a thick homogeneous circular plate with simply supported and clamped edges using the analytical method versus other available results for $\nu = 0.288$ and $E_r = 0.396$.

	Ref.	h/R				
		۰	۰/۰۵	۰/۱	۰/۱۵	۰/۲
S.S.	FSDT [5]	۱۰/۳۶۸	۱۰/۳۹۶	۱۰/۴۸۱	۱۰/۶۲۳	۱۰/۸۲۲
	TSDT[8]	۱۰/۳۶۵	۱۰/۳۹۴	۱۰/۴۷۹	۱۰/۶۲۱	۱۰/۸۲۰
	Present (FSDT)	۱۰/۳۶۸	۱۰/۳۹۶	۱۰/۴۸۲۹	۱۰/۶۲۷۸	۱۰/۸۳۰۶
C.S.	FSDT [5]	۲/۵۲۵	۲/۵۵۴	۲/۶۳۹	۲/۷۸۱	۲/۹۷۹
	TSDT[8]	۲/۵۲۵۲	۲/۵۵۳۵	۲/۶۳۸۲	۲/۷۷۸۸	۲/۹۷۴۸
	Present (FSDT)	۲/۵۲۵	۲/۵۵۷۲	۲/۶۴۲۹	۲/۷۸۵۹	۲/۹۸۶۱



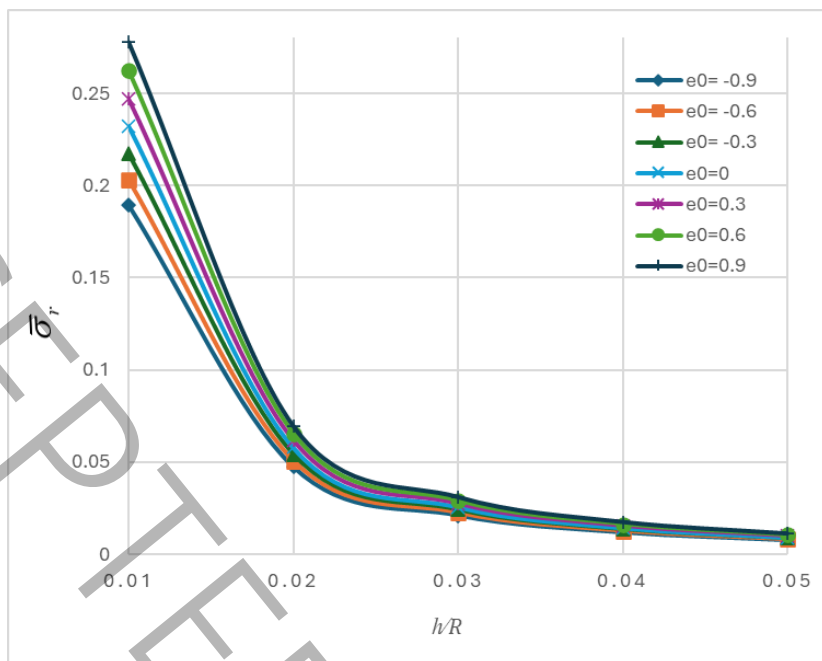
شکل ۶ نمودار تغییرات تنش بی بعد در مرکز ورق دایروی متخلخل شعاعی و نسبت به تغییرات ضخامت به شعاع ورق برای حالت ورق با لبه تکیه گاه ساده با ضرایب تخلخل مختلف

Fig. 6. Variation of nondimensional stress at the center of a radially porous circular plate at $z=h/2$ versus thickness-to-radius ratio for simply supported boundary condition with different porosity coefficients.



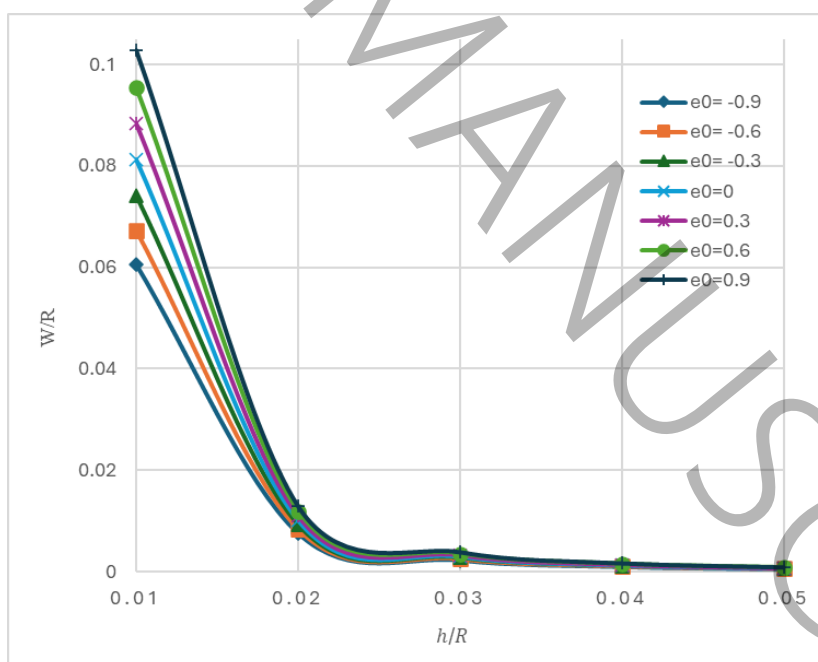
شکل ۷ نمودار تغییرات خیز بی بعد نسبت به تغییرات ضخامت به شعاع ورق در مرکز ورق دایروی متخلخل شعاعی و $z=h/2$ برای حالت ورق با لبه تکیه گاه ساده با ضرایب تخلخل مختلف

Fig. 7. Variation of nondimensional deflection versus thickness-to-radius ratio at the center of a radially porous circular plate at $z = h/2$ for the simply supported boundary condition with different porosity coefficients.



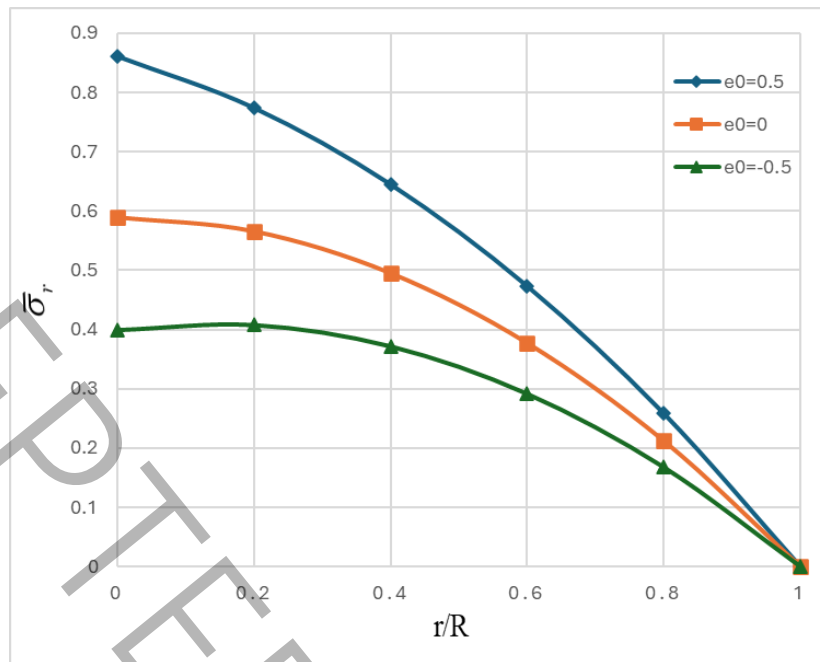
شکل ۸ نمودار تغییرات تنش بی بعد نسبت به تغییرات ضخامت به شعاع ورق در مرکز ورق دایروی متخلخل شعاعی و $z=h/2$ برای حالت ورق با لبه تکیه گاه گیردار با ضرایب تخلخل مختلف

Fig. 8. Variation of nondimensional stress versus thickness-to-radius ratio at the center of a radially porous circular plate at $z = h/2$ for the clamped boundary condition with different porosity coefficients.



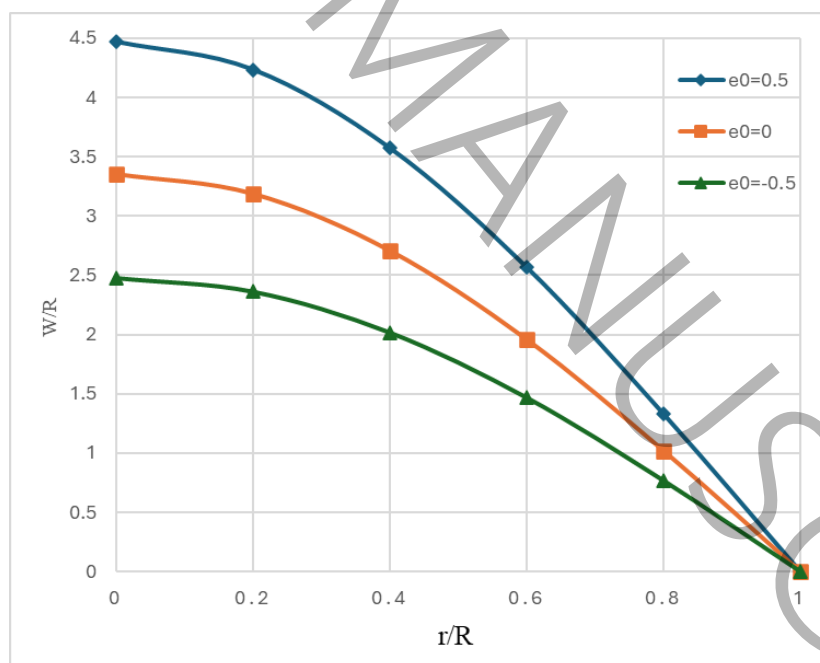
شکل ۹ نمودار تغییرات خیز بی بعد نسبت به تغییرات ضخامت به شعاع ورق در مرکز ورق دایروی متخلخل شعاعی و $z=h/2$ برای حالت ورق با لبه تکیه گاه گیردار با ضرایب تخلخل مختلف

Fig. 9. Variation of nondimensional deflection versus thickness-to-radius ratio at the center of a radially porous circular plate at $z = h/2$ for the clamped boundary condition with different porosity coefficients.



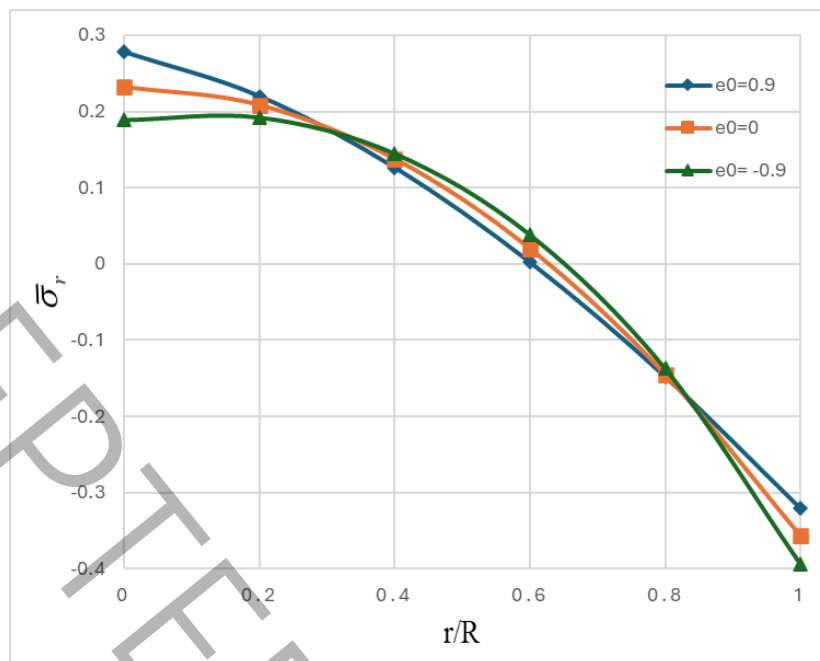
شکل ۱۰ نمودار تغییرات تنش بی بعد در راستای شعاع ورق دایروی متخلخل شعاعی و $z=h/2$ برای حالت ورق با لبه تکیه گاه ساده با ضرایب تخلخل مختلف برای نسبت $h/R=0.1$

Fig. 10. Variation of nondimensional stress along the radius of a radially porous circular plate at $z = h/2$ for the simply supported boundary condition with different porosity coefficients, at thickness-to-radius ratio $h/R=0.1$.



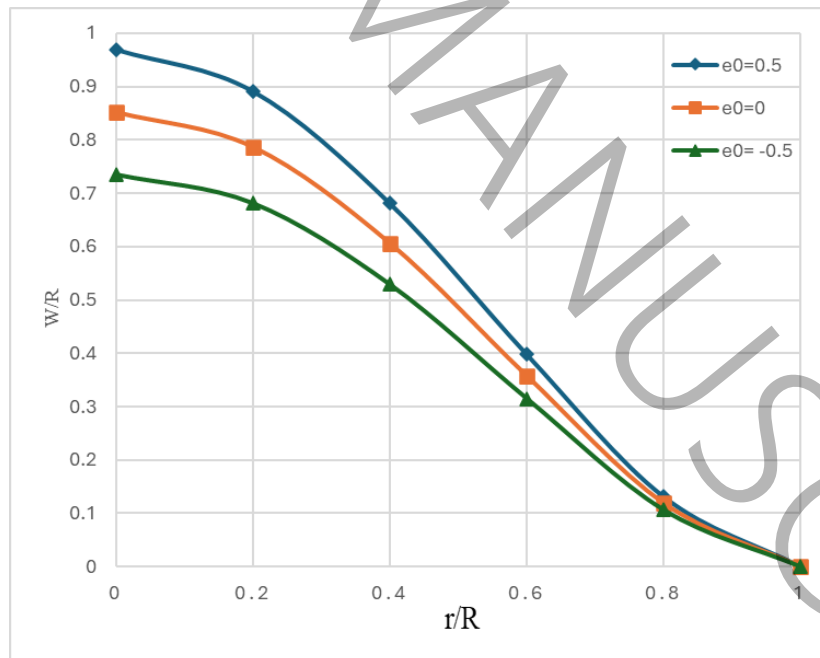
شکل ۱۱ نمودار تغییرات خیز بی بعد در راستای شعاع ورق دایروی متخلخل شعاعی و $z=h/2$ برای حالت ورق با لبه تکیه گاه ساده با ضرایب تخلخل مختلف برای نسبت $h/R=0.1$

Fig. 11. Variation of nondimensional deflection along the radius of a radially porous circular plate at $z = h/2$ for the simply supported boundary condition with different porosity coefficients, at thickness-to-radius ratio $h/R = 0.1$.



شکل ۱۲ نمودار تغییرات تنش بی بعد در راستای شعاع ورق دایروی متخلخل شعاعی و $z=h/2$ برای حالت ورق با لبه تکیه گاه گیردار با ضرایب تخلخل مختلف برای نسبت $h/R=0.1$

Fig. 12. Variation of nondimensional stress along the radius of a radially porous circular plate at $z = h/2$ for the clamped boundary condition with different porosity coefficients, at thickness-to-radius ratio $h/R = 0.1$.



شکل ۱۳ نمودار تغییرات خیز بی بعد در راستای شعاع ورق دایروی متخلخل شعاعی و $z=h/2$ برای حالت ورق با لبه تکیه گاه ساده با ضرایب تخلخل مختلف برای نسبت $h/R=0.1$

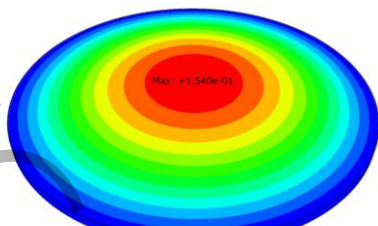
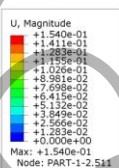
Fig. 13. Variation of nondimensional deflection along the radius of a radially porous circular plate at $z = h/2$ for the clamped boundary condition with different porosity coefficients, at thickness-to-radius ratio $h/R = 0.1$.

Printed using Abaqus/CAE on: Sun Mar 23 11:40:29 Iran Standard Time 2025

SIMULIA

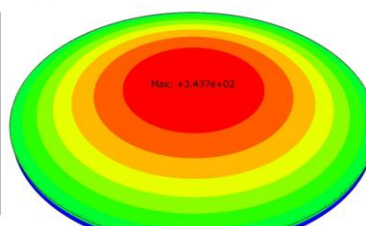
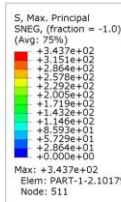
Printed using Abaqus/CAE on: Sun Mar 23 11:38:23 Iran Standard Time 2025

SIMULIA



ODB: Job-1.odb Abaqus/Standard 2021 Sun Mar 23 11:21:30 Iran Standard Time 2025
Step: Step-1
Increment: 1: Step Time = 1.000
Primary Var: U, Magnitude

(ب)



ODB: Job-1.odb Abaqus/Standard 2021 Sun Mar 23 11:21:30 Iran Standard Time 2025
Step: Step-1
Increment: 1: Step Time = 1.000
Primary Var: S, Max. Principal

(الف)

شکل ۱۴ خمش ورق دایره ای همگن با تکیه گاه ساده و بارگذاری عمودی یکنواخت در راستای z در مختصات استوانه ای برای $h/R=0.06$ (الف) تنش عمودی ورق (ب) جابجایی عمودی (خیز)

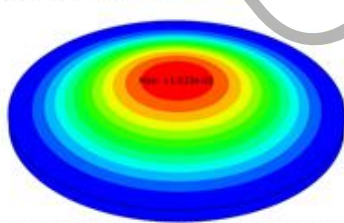
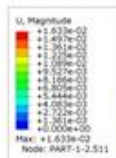
Fig. 14. Bending of a homogeneous circular plate with simply supported edges under uniform vertical loading along the z -direction in cylindrical coordinates for $h/R = 0.06$. (a) Vertical stress of the plate (b) Vertical displacement (deflection)

Printed using Abaqus/CAE on: Sun Mar 23 11:53:28 Iran Standard Time 2025

SIMULIA

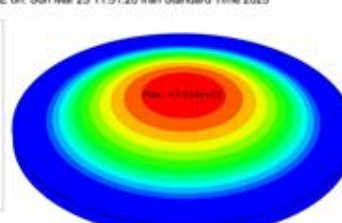
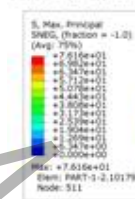
Printed using Abaqus/CAE on: Sun Mar 23 11:51:20 Iran Standard Time 2025

SIMULIA



ODB: Job-1.odb Abaqus/Standard 2021 Sun Mar 23 11:47:27 Iran Standard Time 2025
Step: Step-1
Increment: 1: Step Time = 1.000
Primary Var: U, Magnitude

(ب)



ODB: Job-1.odb Abaqus/Standard 2021 Sun Mar 23 11:47:27 Iran Standard Time 2025
Step: Step-1
Increment: 1: Step Time = 1.000
Primary Var: S, Max. Principal

(الف)

شکل ۱۵ خمش ورق دایره ای همگن با تکیه گاه گیردار و بارگذاری عمودی یکنواخت در راستای z در مختصات استوانه ای برای $h/R=0.08$ (الف) تنش عمودی ورق (ب) جابجایی عمودی (خیز)

Fig. 15. Bending of a homogeneous circular plate with clamped edges under uniform vertical loading along the z -direction in cylindrical coordinates for $h/R=0.08$. (a) Vertical stress of the plate (b) Vertical displacement (deflection)

در این مطالعه، برای تحلیل تنش و خمش ورق دایره‌ای، از فولاد آلیاژی 42CrMo4 به عنوان ماده‌ی پایه استفاده شده است. این ماده دارای مدول الاستیسیته $E=210$ GPa و تنش تسلیم حدود 800 MPa می‌باشد. نتایج حاصل از تحلیل اجزای محدود در شکل‌های ۱۴ و ۱۵ ارائه شده‌اند، که در آن‌ها مقادیر تنش بر حسب مگاپاسکال و خیز بر حسب میلی‌متر گزارش شده است.

۶- نتیجه گیری

در این مقاله، خمش و خیز ورق‌های دایره‌ای متخلخل با توزیع شعاعی تخلخل و تحت بارگذاری فشاری یکنواخت عمودی، بر اساس تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی، در دو حالت تکیه‌گاه ساده و گیردار مورد بررسی قرار گرفته است. خواص مواد در راستای شعاع به صورت تدریجی و متناسب با ضریب تخلخل تغییر می‌کند، به گونه‌ای که لبه خارجی ورق می‌تواند مستحکم‌ترین یا ضعیف‌ترین ناحیه آن باشد. افزایش ضریب تخلخل موجب کاهش استحکام ورق و به تبع آن افزایش تنش شعاعی و خیز می‌شود. همچنین، با

افزایش نسبت ضخامت به شعاع، تنش خمشی و خیز ورق کاهش یافته و اثر ضریب تخلخل بر آن‌ها کاهش می‌یابد. مقایسه نتایج دو روش تحلیلی (روش سری‌ها) و عددی (روش المان محدود) نشان‌دهنده دقت بالای مدل با خطای میانگین کمتر از ۰,۰۵ درصد و ماکزیمم خطای حدود ۰,۱ درصد است که صحت نتایج را تأیید می‌کند. تأثیر پارامترهای هندسی، نوع توزیع تخلخل و شرایط مرزی نیز نشان می‌دهد که در حالت تکیه‌گاه ساده، تنش‌ها حدود ۲,۵ برابر و خیز حدود ۴ برابر بیشتر از حالت گیردار است. نتایج حاکی از آن است که افزایش ضریب تخلخل موجب افزایش مدول الاستیسیته در راستای شعاعی، و افزایش تنش و خیز می‌شود؛ به‌طوری که هر ۱۰ درصد افزایش در ضریب تخلخل باعث افزایش تقریبی ۴۰ درصدی تنش شعاعی و خیز در حالت تکیه‌گاه ساده و ۳۶ درصدی در حالت گیردار می‌گردد. همچنین، برای مقادیر مثبت ضریب تخلخل که لبه خارجی ورق نسبت به مرکز مستحکم‌تر است، مقدار تنش شعاعی و خیز بیشتر است، در حالی که مقادیر منفی ضریب تخلخل سبب استحکام کمتر لبه خارجی نسبت به مرکز و کاهش تنش و خیز می‌شوند. بنابراین، استفاده از ضرایب منفی تخلخل به عنوان راهکاری مؤثر برای کاهش وزن و افزایش مقاومت ورق‌های دایره‌ای در برابر خمش و خیز توصیه می‌شود.

۷- فهرست علائم

علائم انگلیسی

D	صلبیت خمشی ورق
E	مدول الاستیسیته، Gpa
E_r	مدول بی بعد الاستیسیته نسبی
e_0	ضریب بی بعد تخلخل
e_m	پارامتر بدون بعد چگالی
G	مدول برشی، Gpa
h	ضخامت ورق، mm
k_s	ضریب تصحیح برشی
M_{ij}	منتجه‌های ممان‌های خمشی، N.mm
N_{ij}	منتجه‌های نیروی عمودی، N
P	نیروی فشاری عمودی یکنواخت، Mpa
Q_i	منتجه‌های نیروی برشی، N
r	شعاع هر نقطه از ورق، mm
R	شعاع خارجی ورق، mm
U_ε	انرژی کرنشی، J
u	جابجایی در راستای شعاع
V	انرژی پتانسیل کل، J
v	جابجایی در راستای محیطی
w	جابجایی در راستای ضخامت
$\bar{W}$	خیز بی بعد شده
علائم یونانی	
ρ	چگالی kg/m^3
γ_{ij}	کرنش برشی
ε_{ii}	کرنش عمودی

تغییرات	δ
تنش، Mpa	σ_{ij}
تنش بی بعد شده شعاعی	$\bar{\sigma}_r$
انرژی پتانسیل ناشی از کار خارجی، J	Ω
زاویه هر نقطه از ورق	θ
چرخش های عمودی	φ
ضریب پواسون	ν

مراجع

- [1] A.G. Slater, A.I. Cooper, Function-led design of new porous materials, *Science*, 348(6238) (2015) aaa8075.
- [2] C. Wang, K. Lee, Deflection and stress-resultants of axisymmetric Mindlin plates in terms of corresponding Kirchhoff solutions, *International journal of mechanical sciences*, 38(11) (1996) 1179-1185.
- [3] J. Reddy, C.M. Wang, An overview of the relationships between solutions of the classical and shear deformation plate theories, *Composites Science and Technology*, 60(12-13) (2000) 2327-2335.
- [4] J. Reddy, C. Wang, Relationships between classical and shear deformation theories of axisymmetric circular plates, *AIAA journal*, 35(12) (1997) 1862-1868.
- [5] J. Reddy, C. Wang, S. Kitipornchai, Axisymmetric bending of functionally graded circular and annular plates, *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 18(2) (1999) 185-199.
- [6] L. Ma, T. Wang, Relationships between axisymmetric bending and buckling solutions of FGM circular plates based on third-order plate theory and classical plate theory, *International Journal of Solids and Structures*, 41(1) (2004) 85-101.
- [7] S. Sahraee, A. Saidi, Axisymmetric bending analysis of thick functionally graded circular plates using fourth-order shear deformation theory, *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 28(5) (2009) 974-984.
- [8] A. Saidi, A. Rasouli, S. Sahraee, Axisymmetric bending and buckling analysis of thick functionally graded circular plates using unconstrained third-order shear deformation plate theory, *Composite Structures*, 89(1) (2009) 110-119.
- [9] X. Li, H. Ding, W. Chen, Elasticity solutions for a transversely isotropic functionally graded circular plate subject to an axisymmetric transverse load $q(r)$, *International Journal of Solids and Structures*, 45(1) (2008) 191-210.
- [10] P. Van Vinh, N. Van Chinh, A. Tounsi, Static bending and buckling analysis of bi-directional functionally graded porous plates using an improved first-order shear deformation theory and FEM, *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 96 (2022) 104743.
- [11] A.R. Khorshidvand, A.R. Damercheloo, Bending, axial buckling and shear buckling analyses of FG-porous plates based on a refined plate theory, *Australian Journal of Mechanical Engineering*, 21(2) (2023) 705-724.
- [12] S.G.M. Doori, A.R. Noori, A. Etemadi, Static response of functionally graded porous circular plates via finite element method, *Arabian Journal for Science and Engineering*, 49(10) (2024) 14167-14181.
- [13] M. Alimohammadi, M. Ghomshei, Post-Buckling Analysis of Porous Circular Plate with Small Initial Deflection Using First-Order Shear Deformation Theory, *Journal of Solid Mechanics*, 16(2) (2024) 168-180.
- [14] S. Mirzaei, M. Hejazi, R. Ansari, Isogeometric analysis for bending, buckling and free vibration of multi-directional functionally graded porous plates with variable thickness, *The European Physical Journal Plus*, 137(6) (2022) 694.
- [15] V.T. Long, H.V. Tung, Postbuckling responses of porous FGM spherical caps and circular plates including edge constraints and nonlinear three-parameter elastic foundations, *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, 51(8) (2023) 4214-4236.
- [16] B. Boudierba, H.M. Berrabah, Bending response of porous advanced composite plates under thermomechanical loads, *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, 50(9) (2022) 3262-3282.

- [17] S. Mahmoud, E. Ghandourah, A. Algarni, M. Balubaid, A. Tounsi, F. Bourada, On thermo-mechanical bending response of porous functionally graded sandwich plates via a simple integral plate model, *Archives of Civil and Mechanical Engineering*, 22(4) (2022) 186.
- [18] F. Kamali, F. Shahabian, A. Aftabi-Sani, Free vibration analysis of saturated porous circular microplates integrated with piezoelectric layers; differential transform method, *Acta Mechanica*, 234(2) (2023) 649-669.
- [19] P. Akbari, A. Asanjarani, Semi-analytical mechanical and thermal buckling analyses of 2D-FGM circular plates based on the FSDT, *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 26(9) (2019) 753-764.
- [20] M. Kamranfar, A. Saidi, A. Naderi, Analytical Solution for Buckling of Annular Sectorial Porous Plates, *Aerospace Mechanics*, 15(1) (2019) 137-152.
- [21] M. Mahbod, M. Asgari, Mechanical properties of functionally graded porous biomaterials for application in prosthesis replacement using analytical and numerical solution, *Modares Mechanical Engineering*, 19(11) (2019) 2717-2727.
- [22] A.K. Gupta, A. Kumar, Buckling Behavior of a Functionally Graded Sandwich Plate, *Engineering, Technology & Applied Science Research*, 13(4) (2023) 11355-11359.
- [23] N.L. Le, T.N.T. Duong, T.D. Dang, M.D. Vu, T.T. Bui, T.P. Nguyen, H.N. Vu, A novel analytical approach for nonlinear thermo-mechanical buckling of higher-order shear deformable porous circular plates and spherical caps with FGM face sheets, *International Journal of Applied Mechanics*, 15(05) (2023) 2350035.
- [24] V.N. Van Do, T.H. Ong, C.-H. Lee, Nonlinear thermal buckling analysis of temperature-dependent porous annular and circular microplates reinforced by graphene platelets by using isogeometric analysis method, *Engineering Structures*, 305 (2024) 117738.
- [25] V. Kumar, S. Singh, V. Saran, S. Harsha, Effect of elastic foundation and porosity on buckling response of linearly varying functionally graded material plate, *Structures*, 55 (2023), 1186-1203.
- [26] E. Magnucka-Blandzi, K. Magnucki, W. Stawecki, Bending and buckling of a circular plate with symmetrically varying mechanical properties, *Applied Mathematical Modelling*, 89 (2021) 1198-1205.
- [27] S.K. Sah, A. Ghosh, Influence of porosity distribution on free vibration and buckling analysis of multi-directional functionally graded sandwich plates, *Composite Structures*, 279 (2022) 114795.
- [28] M. Khatounabadi, M. Jafari, K. Asemi, Low-velocity impact analysis of functionally graded porous circular plate reinforced with graphene platelets, *Waves in Random and Complex Media*, 35(4) (2022) 7838-7864.
- [29] M. Surianinov, Y. Krutii, O. Klymenko, V. Vakulenko, S. Rudakov, Axisymmetric Bending of Circular Plates on a Variable Elastic Base, *Construction Technologies and Architecture*, 9 (2023) 3-10.
- [30] R. Jain, M.S. Azam, Deflection and bending characteristics of embedded functionally graded porous plate with bi-directional thickness variation subjected to bi-sinusoidal loading, *Steel and Composite Structures*, 51(6) (2024) 601-617.
- [31] L. Hoang Ton That, Porous Functionally Graded Circular Plate with an Uneven Porosity Distribution in the Thermal Environment, *Applications of Modelling and Simulation*, 8 (2024) 70-77.
- [32] M.-O. Belarbi, A.A. Daikh, A. Garg, H. Hirane, M.S.A. Houari, Ö. Civatek, H. Chalak, Bending and free vibration analysis of porous functionally graded sandwich plate with various porosity distributions using an extended layerwise theory, *Archives of Civil and Mechanical Engineering*, 23(1) (2022) 15.
- [33] K. Magnucki, J. Mielniczuk, S. Milecki, Axisymmetric bending of a circular porous plate, *MATERIAL AND MECHANICAL ENGINEERING TECHNOLOGY Учредители: Карагандинский технический университет им. Абылкаса Сагинова*, 4(4) (2021) 16-20.
- [34] M. Safarpour, A. Rahimi, A. Alibeigloo, H. Bisheh, A. Forooghi, Parametric study of three-dimensional bending and frequency of FG-GPLRC porous circular and annular plates on different boundary conditions, *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, 49(5) (2021) 707-737.
- [35] H. Hatami, A. Fathollahi, Theoretical and numerical study and comparison of the inertia effects on the collapse behavior of expanded metal tube absorber with single and double cell under impact loading, *Amirkabir Journal of Mechanical Engineering*, 50(5) (2018) 999-1014.
- [36] H. Hatami, M. Hosseini, Elastic-plastic analysis of bending moment–axial force interaction in metallic beam of T-Section, *Journal of Applied and Computational Mechanics*, 5(1) (2019) 162-173.

- [37] A. Ghodsbini Jahromi, H. Hatami, Numerical behavior study of expanded metal tube absorbers and effect of cross section size and multi-layer under low axial velocity impact loading, *Amirkabir Journal of Mechanical Engineering*, 49(4) (2018) 685-696.
- [38] H. Hatami, M. Hosseini, A.K. Yasuri, Perforation of thin aluminum targets under hypervelocity impact of aluminum spherical projectiles, *Materials Evaluation*, 77(3) (2019) 411-422.
- [39] M.D. Nouri, H. Hatami, A.G. Jahromi, Experimental and numerical investigation of expanded metal tube absorber under axial impact loading, *Structural Engineering and Mechanics*, 54(6) (2015) 1245-1266.
- [40] S. Hosseini-Hashemi, H. Akhavan, H.R.D. Taher, N. Daemi, A. Alibeigloo, Differential quadrature analysis of functionally graded circular and annular sector plates on elastic foundation, *Materials & Design*, 31(4) (2010) 1871-1880.
- [41] J. Choi, R. Lakes, Analysis of elastic modulus of conventional foams and of re-entrant foam materials with a negative Poisson's ratio, *International Journal of Mechanical Sciences*, 37(1) (1995) 51-59.
- [42] J.N. Reddy, *Theory and analysis of elastic plates and shells*, CRC press, 2006.
- [43] A.C. Ugural, *Stresses in beams, plates, and shells*, CRC press, 2009.
- [44] D.O. Brush, B.O. Almroth, J. Hutchinson, *Buckling of bars, plates, and shells*, (1975).

Bending and Deflection Analysis of Functionally Graded Porous Circular Plates with Radial Porosity Variation Based on the First-Order Shear Deformation Theory

Peyman Akbari^a, Mohammad Javad Khoshgoftar^{a1}

^a Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering, Arak University, Arak, 38156-88349, Iran

ABSTRACT

Porous materials are increasingly used in mechanical, aerospace, civil, biomedical, and advanced engineering applications due to their low density, acceptable strength, high energy absorption, and tunable mechanical properties. One key challenge in designing such materials is the accurate analysis of bending and deflection behavior of porous thin structures, such as circular plates, which is essential for avoiding structural failures. This study presents the elastic bending and static deflection analysis of functionally graded porous circular plates with radially varying porosity distribution, subjected to uniform compressive loading under both simply supported and clamped boundary conditions. The governing equations are derived based on axisymmetric assumptions using the first-order shear deformation theory and solved via both analytical (series solution) and numerical (finite element) methods. The results show excellent agreement between the two approaches (mean error 0.04%) and with existing literature data (mean error 0.05%), confirming the accuracy of the model. Parametric studies reveal that simply supported plates exhibit approximately 2.5 times higher stress and 4 times larger deflection compared to clamped ones. Furthermore, increasing the porosity coefficient by 10% leads to an average increase of about 40% (for simply supported) and 36% (for clamped) in radial stress and central deflection. These findings offer valuable insights for designing lightweight, strong, and efficient structural components in sensitive and performance-driven environments.

KEYWORDS

Porous circular plate, radial porosity distribution, bending analysis, first-order shear deformation theory, analytical solution

¹ Corresponding Author: Email: mj.khoshgoftar@gmail.com, m-khoshgoftar@araku.ac.ir