

Study of the Effect of the Stress-Strain Range from a Uniaxial Tensile Test on the Hyperelastic Modeling of a Polyurethane Sealing Disc

Salar Jouzani, Mohammad Hossein Soorgee* 

Pipeline Research and Technology center (PRTC), Faculty of Mechanical and Energy Engineering, Shahid Beheshti University, Tehran, Iran.

ABSTRACT: Pipeline systems are the primary means of transporting materials in many industries. Cleaning, inspecting, and overhauling these systems are crucial for maintaining their efficiency. Pipeline pigging is one of the most effective methods for cleaning and sealing pipelines. Therefore, studying the behavior of the sealing elements of pigs as they pass through steel pipes is essential to prevent blockages and ensure smooth operation. One of the key procedures in simulating the sealing discs, as the primary sealing elements of the pig, is predicting the hyperelastic behavior of these elastomers, which can endure large strains. However, the range of strain experienced in the present simulation is smaller than that observed in uniaxial tensile tests. Therefore, selecting the optimal range of data from the stress-strain curve is a significant challenge in accurately calculating the hyperelastic model coefficient. To ensure a more precise analysis, experimental tests were conducted to validate the numerical results. In this study, three sealing discs with different thicknesses were tested in four steel pipes with varying wall thicknesses. The numerical results indicate that using an inappropriate range of stress-strain data from uniaxial tensile tests can lead to a discrepancy of up to 25%, which is considerable.

Review History:

Received: Jun. 25, 2025
Revised: Sep. 15, 2025
Accepted: Sep. 25, 2025
Available Online: Oct. 01, 2025

Keywords:

Sealing Discs
Hyperelastic Models
Incompressible Materials
Pipeline Pigging

1- Introduction

Pipeline pigging is regarded as one of the safest and most effective methods for cleaning pipelines. Polyurethane sealing discs, which serve as the primary sealing elements, play a critical role in this process [1, 2]. Therefore, understanding their behavior and the load required to move them through pipelines is essential. Developing a numerical model capable of predicting the force needed to pull the sealing elements of pigs through the pipe is necessary.

The sealing elements are generally made of elastomers, most commonly polyurethane, which exhibit hyperelastic behavior. These materials can undergo large strains and demonstrate nonlinear stress-strain responses. Their behavior is typically described using strain energy functions, which facilitate the calculation of stress-strain relationships under large deformations [3]. To investigate the hyperelastic behavior of sealing elements, Soorgee [4] developed a numerical model for simulating the movement of spherical pigs through pipelines, where polyurethane was modeled as a hyperelastic material. Similarly, [5] examined the behavior of polyurethane sealing discs driven through steel pipelines using two common pigging methods, both experimentally and numerically. In that study, the numerical model incorporated a hybrid formulation, a hyperelastic material model, and a friction coefficient based on contact pressure.

The present paper extends this previous research by focusing on the influence of stress-strain data on the determination of an appropriate hyperelastic model.

2- Methodology

In this study, the pigging problem was first investigated experimentally, followed by the development of a numerical model to simulate the behavior of the sealing discs during the pigging process. The experimental results were then used to validate the numerical model.

In the experimental program, three sealing discs with different thicknesses and a hardness of 85 Shore-A were pulled through a setup consisting of four 6-inch steel pipes with varying wall thicknesses. As the inner diameter of the pipes decreases, the oversize ratio—one of the key design parameters of sealing discs—increases. Consequently, the discs experienced larger strains, which required greater pulling forces. The results also showed that increasing disc thickness led to higher bending stiffness, thereby further increasing the required pulling force.

Following the experimental study, a two-dimensional axisymmetric numerical model was developed under static loading conditions. Further details of the numerical model are provided in [5]. To represent the polyurethane material, selecting an appropriate hyperelastic model was essential.

*Corresponding author's email: mh_soorgee@sbu.ac.ir

Hyperelastic models are formulated based on strain energy functions expressed in terms of strain invariants and material coefficients. The coefficients were determined using uniaxial tensile test data. Although these elastomers are capable of undergoing large strains, the sealing discs in this study were subjected to a maximum strain of approximately 0.5. This paper investigates whether the chosen range of engineering strain from uniaxial tensile tests effectively captures the material behavior for hyperelastic modeling.

3- Results and Discussion

After conducting simulations with various hyperelastic models, as reported in [6], it was found that omitting the second invariant (I_2) when using uniaxial tensile test data to determine material coefficients may improve the accuracy of the model. Therefore, a reduced polynomial hyperelastic model was selected for the numerical simulations.

The reduced polynomial hyperelastic model can be defined with different orders. As illustrated in Figure 1, increasing the order of the hyperelastic model improved the prediction of uniaxial tensile test data. the Neo-Hookean and Yeoh models correspond to the first- and third-order forms of the reduced polynomial model, respectively. However, the results also showed that using orders higher than six led to overfitting. Accordingly, the sixth order reduced polynomial hyperelastic model was chosen in this study.

After selecting the appropriate hyperelastic model, it is crucial to determine the optimal range of uniaxial tensile test data for identifying the material coefficients. Figure 2 presents the uniaxial tensile test data together with five sixth order reduced polynomial hyperelastic models, each calculated using three different ranges of stress–strain data. As shown in the figure, using the range of 0–1 for the stress–strain data resulted in the most accurate prediction of the hyperelastic model within the strain range of 0–0.5, which corresponds to the deformation experienced by the sealing disc in the defined pigging problem.

Based on the selected hyperelastic model, simulations were performed using the different sets of calculated coefficients. The required force to pull each sealing disc through the pipeline was then extracted from the numerical model. The results demonstrated that employing an inappropriate range of uniaxial tensile data for coefficient determination can lead to deviations of up to 25% in the predicted force, which is significant for the defined problem.

4- Conclusion

In this project, the behavior of a sealing disc passing through a steel pipe was investigated both experimentally and numerically. One of the main challenges in this simulation is defining an appropriate hyperelastic material model to represent the behavior of the polyurethane sealing disc. To determine the coefficients of the hyperelastic model, uniaxial tensile test data are required. Since elastomers such as polyurethane exhibit large strains (up to 11 in the uniaxial tensile test for the material used), selecting the appropriate range of stress–strain data to describe the hyperelastic model

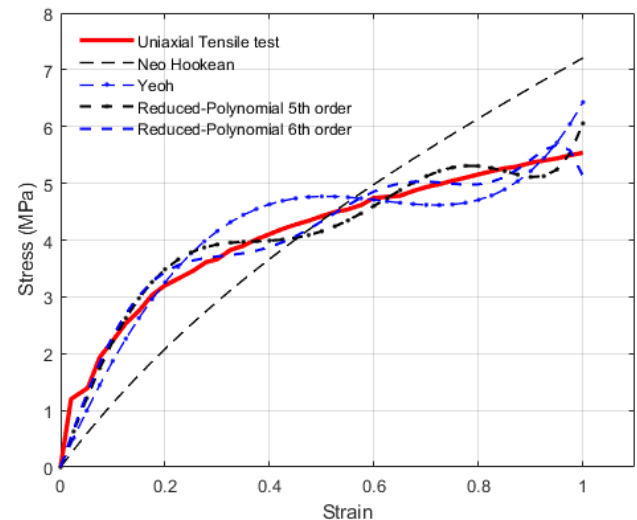


Fig. 1. Comparison of the uniaxial tensile test data with reduced polynomial hyperelastic models of different orders.

in finite element software is essential. In this study, a sixth-order reduced polynomial hyperelastic model was selected, as it provided a lower relative error in evaluating the stress–strain data compared to other reduced polynomial orders using the same uniaxial test data. Because the maximum strain in this problem is approximately 0.5, the relative error was evaluated within this strain range. To assess the model performance, five different stress–strain ranges were employed to compute the coefficients of the hyperelastic model, covering 0–1 to 0–3 with increments of 0.5.

The results showed that using the strain range of 0–1 from the uniaxial tensile test resulted in a relative error of approximately 5% between the hyperelastic model and the experimental data. In contrast, extending the range to 0–3 led to a relative error of about 55% when evaluated within the strain range of 0–0.5. Furthermore, numerical simulations demonstrated that when the coefficients of the sixth order reduced polynomial hyperelastic model were determined using the 0–3 strain range instead of 0–1, the discrepancy in the results increased to as much as 25%, which is significant. These findings indicate that, in simulations involving hyperelastic materials, selecting an appropriate strain range of experimental stress–strain data is essential for accurately determining the coefficients of the chosen hyperelastic model. An initial estimation of the strain levels expected in the application can guide the selection of the required stress–strain range from the uniaxial tensile test. Employing a suitable hyperelastic model together with an appropriate data range from mechanical tests such as the uniaxial tensile test enables a more accurate prediction of material behavior. Conversely, including unnecessary stress–strain data beyond the relevant strain levels can lead to substantial discrepancies in the numerical results.

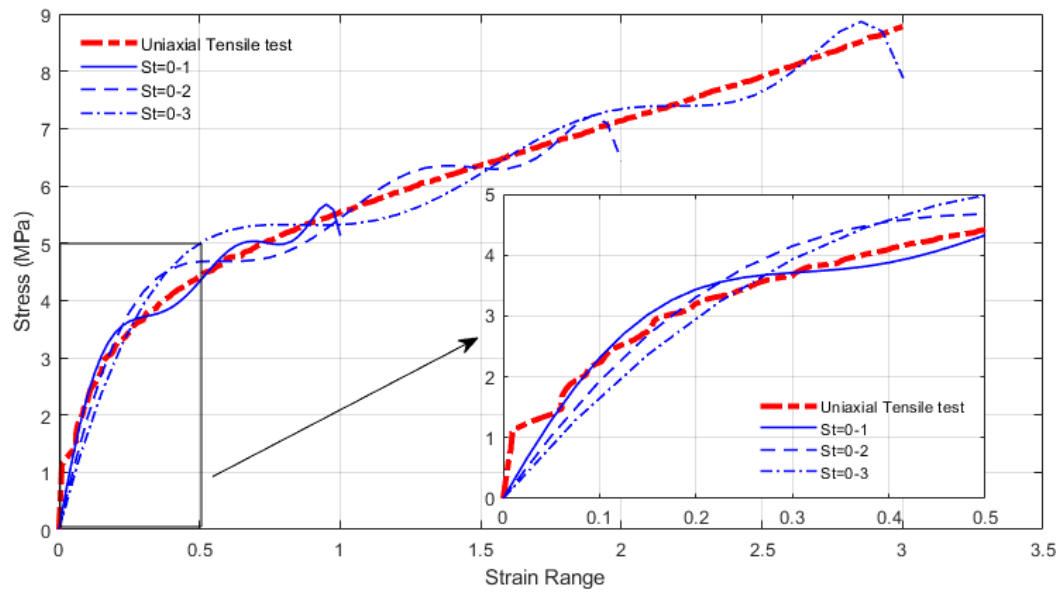


Fig. 2. Prediction of the 6th-order reduced polynomial hyperelastic model using different strain ranges of the uniaxial tensile test data, compared with the experimental result.

References

- [1] J. Cordell, H. Vanzant, Pipeline pigging handbook, (2003).
- [2] J.F. Hilyard, The oil & gas industry: A nontechnical guide, (2012).
- [3] J. Bonet, A.J. Gil, R.D. Wood, Nonlinear solid mechanics for finite element analysis: dynamics, Cambridge University Press, 2021.
- [4] M. Soorgee, A numerical study on differential pressure needed for ball pig motion in pipelines based on nonlinear hyperelastic material model, Journal of Natural Gas Science and Engineering, 59 (2018) 466–472.
- [5] S. Jouzani, M.H. Soorgee, Experimental and numerical investigation on hyperelastic sealing disc contact behavior in pipeline, a comparison between fluid-driven and pull-through approaches, Journal of Pipeline Science and Engineering, 5(2) (2025) 100232.
- [6] D. Systèmes, ABAQUS Documentation, in: Version 6.6 Documentation, 2025b, <https://classes.engineering.wustl.edu/2009/spring/mase5513/abaqus/docs/v6.6/books/stm/default.htm?startat=ch04s06ath123.html#stm-mat-hyperelastic-eq4>



مطالعه اثر محدوده داده آزمون کشش تک-محوره بر مدل هایپیرالاستیک جهت مدل سازی دیسک آببند پلی یورتانی

سالار جوزانی، محمدحسین سورگی* 

مرکز پژوهش و فناوری خط لوله (PRTC)، دانشکده مهندسی مکانیک و انرژی، دانشگاه شهید بهشتی، تهران.

تاریخچه داوری:

دریافت: ۱۴۰۴/۰۴/۰۴

بازنگری: ۱۴۰۴/۰۶/۲۴

پذیرش: ۱۴۰۴/۰۷/۰۳

ارائه آنلاین: ۱۴۰۴/۰۷/۰۹

کلمات کلیدی:

دیسک های آببند

مدل های هایپیرالاستیک

مواد تراکم ناپذیر

توپک رانی خط لوله

خلاصه: استفاده از خطوط لوله یکی از اصلی ترین روش های انتقال مواد در صنایع مختلف است. در این میان، تمیزکاری و بازرسی دوره ای لوله ها نقش مهمی در افزایش بهره برداری و بازدهی سیستم ایفا می کند. توپک رانی یکی از مؤثرترین روش ها برای تمیزکاری، بازرسی و همچنین ایجاد آببندی درون لوله ها است. بررسی رفتار المان های توپک حین عبور از لوله های فلزی، برای جلوگیری از گیر افتادن و انسداد آن ها، ضروری به نظر می رسد. یکی از مراحل کلیدی در مدل سازی و تحلیل عددی دیسک های آببند پلی یورتانی، که مهم ترین جزء آببندی در توپک ها محسوب می شوند، تخمین رفتار هایپیرالاستیک این مواد است؛ چراکه این الاستومرها قادر به تحمل کرنش های بزرگ هستند. با این حال، محدوده کرنش واقعی دیسک ها در کاربرد عملی، کوچک تر از مقادیر داده شده در آزمون های کشش است. در نتیجه، انتخاب دقیق بازه داده های تنش-کرنش برای محاسبه ضرایب مدل های هایپیرالاستیک، یکی از چالش های مهم در تعریف این مواد در شبیه سازی عددی محسوب می شود. به منظور بررسی دقیق تر، آزمون تجربی توپک رانی تک دیسک برای سه دیسک با ضخامت های مختلف در چهار لوله فلزی با ضخامت دیواره متفاوت انجام شد. نتایج این آزمون برای صحت سنجی تحلیل عددی مورد استفاده قرار گرفت. بررسی ها نشان دادند که استفاده نامناسب از داده های تنش-کرنش می تواند منجر به تغییر نتایج تا ۲۵ درصد در بازه مورد مطالعه گردد.

۱- مقدمه

عموماً سیستم خط لوله نقش اصلی در صنایع مهمی از کشورها به مانند نفت و گاز را ایفا می کند و به عنوان ارزان ترین و مهم ترین راه حمل و نقل محصولات استفاده می شود. لذا تمیزکاری و نگهداری منظم از خطوط لوله منجر به افزایش بهره برداری و بازدهی بهتر از این خطوط در راستای انتقال محصول از مبدأ به مقصد می گردد. یکی از ارزان ترین و بهترین راه های تمیزکاری خطوط لوله استفاده از روش توپک رانی خطوط لوله^۱ می باشد. این روش به طور گسترده جهت تمیزکاری، راه اندازی و به منظور بازرسی مورد استفاده قرار می گیرد [۱، ۲]. توپک های تمیزکاری و آببند به طور کلی به چهار دسته تقسیم بندی می شوند که توپک های بدنه فلزی^۲ یکی از پرکاربردترین نوع جهت تمیزکاری و آببند لوله است. این نوع توپک متشکل از المان های آببند نظیر دیسک و مخروط آببند است [۱، ۳]. رفتار این توپک ها در خط لوله همواره با پیچیدگی هایی همراه بوده که نیازمند

مطالعه دقیق تری از رفتار آن ها در خط لوله می باشد.

بیشتر توپک های تمیزکننده، توسط اختلاف فشار سیال موجود در دو طرف توپک، به سمت جریان پایین دست (با فشار کمتر) حرکت می کنند. بنابراین محاسبه نیرو، به عبارت دقیق تر فشار لازم جهت رانش المان های آببند جهت تأمین نیروی لازم جلوبرنده توپک ها، بسیار حائز اهمیت می باشد. عموماً المان های آببند توپک ها از ماده ای به نام پلی یورتان ساخته شده که سختی این مواد معمولاً در محدوده سختی ۶۰ الی ۸۵ شُر-آ قرار می گیرد. این نوع از الاستومرها اغلب رفتار الاستیک با کرنش های بسیار بالا از خود نشان می دهند که تحت عنوان رفتار هایپیرالاستیک نیز معرفی می گردند [۳]. جهت بررسی رفتار هایپیرالاستیک مواد پلی یورتان توپک ها در لوله فلزی، سورگی در [۴] در یک مطالعه عددی به شبیه سازی حرکت یک توپک کروی پلی یورتانی در داخل لوله فلزی پرداخته است. همچنین نائینی نیز در [۵] به صورت تجربی و عددی به مطالعه حرکت توپک کروی در لوله فلزی و فشار لازم جهت رانش آن پرداختند. در این پژوهش نشان داده شد که

1. Pipeline Pigging

2. Mandrel Pigs

3. Shore-A

* نویسنده عهده دار مکاتبات: mh_soorgee@sbu.ac.ir

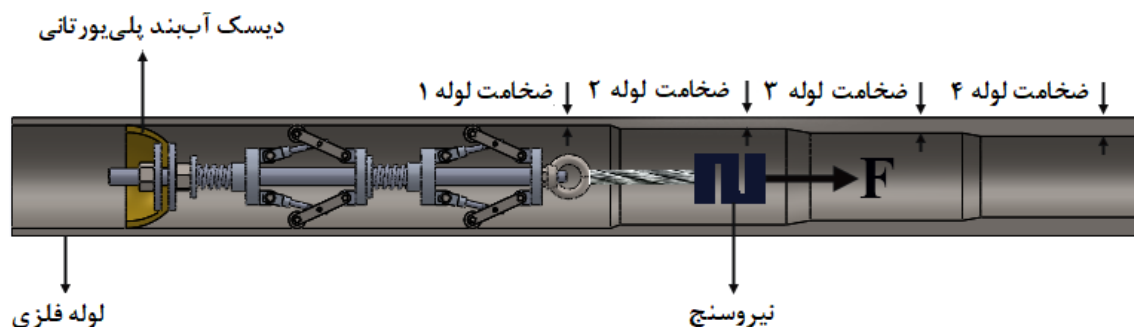


در بالادست دیسک از حالت کشش دیسک توسط سیستم کشنده و بدون حضور سیال بیشتر است. این پدیده در اثر تغییر شکل دیسک آببند در اثر فشار سیال رخ می‌دهد. تحقیق حاضر ادامه پروژه مذکور می‌باشد. در مقاله حاضر، نحوه محاسبه ضرایب مدل هایپرالاستیک معرفی و بحث شده است. در مرحله دیگر این مقاله، به‌عنوان نوآوری پژوهش، اثر بازه داده آزمون تنش-کرنش بر محاسبه ضرایب مدل هایپرالاستیک ارائه شده است. به‌عبارت دیگر، چندین مدل هایپرالاستیک با استفاده از بازه مختلف آزمون کشش استخراج می‌گردد. مقایسه مدل‌های محاسبه‌شده هایپرالاستیک با داده آزمون کشش تک-محوره به روش تجربی منتهی به تشخیص بازه مناسب آزمون کشش تک-محوره جهت محاسبه ضرایب مدل بهینه هایپرالاستیک و شناساندن رفتار ماده در نرم‌افزار عددی می‌شود. در نهایت، تأثیر استفاده از بازه نامناسب منحنی تنش-کرنش که منجر به محاسبه مدل هایپرالاستیک متفاوت شده، بر نتایج نیروی کشش دیسک آببند مورد ارزیابی قرار می‌گیرد. در طول انجام این پژوهش، از برخی فرضیات استفاده شده است. از آنجایی که توپک با سرعت پایین شروع به حرکت می‌کند و در طول مسیر همواره سرعت آن ثابت است، از این رو می‌توان مطالعه استاتیکی برای مسئله حاضر در نظر گرفت و از دینامیک حرکت آن صرف‌نظر نمود. همچنین از آنجایی که در این مطالعه از دیسک‌های آببند اندازه پایین استفاده شده، وزن آن تأثیر چندانی بر نیروی اصطکاک میان المان آببند و لوله فلزی ندارد. به‌همین دلیل از نیروی وزن در محاسبات و مطالعه عددی و تجربی صرف‌نظر شده است. گفتنی است هندسه لوله فلزی و همچنین ضخامت دیسک‌های آببند پلی‌یورتانی در تمام مسیر یکسان در نظر گرفته شده و خواص برای تمامی نقاط دیسک‌های آببند نیز یکسان فرض شده است. آزمایش‌های کشش تک‌محوره دیسک‌های آببند مطابق با استاندارد ASTM D412 انجام شد. بر اساس این استاندارد، نمونه‌های پلی‌یورتان پیش از آزمون حداقل به مدت سه ساعت در دمای اتاق (۲۳ درجه سانتی‌گراد) و تحت شرایط ثابت دما و رطوبت نگهداری شدند. آزمون‌های کشش برای پنج نمونه دمبل‌شکل توسط مرکز پژوهش متالورژی رازی انجام شد. در نهایت از مقدار میانگین داده آزمون‌های کشش تک‌محوره تنش-کرنش برای مطالعه استفاده گردید. همچنین تمامی آزمون‌های توپک‌رانی نیز در دمای اتاق انجام شده است. به‌عنوان یکی از فرضیات این پژوهش می‌توان به صرف‌نظر نمودن از رطوبت محیط در حین آزمون توپک‌رانی اشاره نمود.

ضریب اصطکاک ماده پلی‌یورتان استفاده‌شده در توپک کروی به‌صورت تابعی از فشار تماسی خواهد بود. علاوه بر مطالعات پیشین، در پژوهش‌های حاضر، عمدتاً به بررسی موضوع نیروی مورد نیاز جهت رانش و حرکت المان آببند در لوله فلزی به‌صورت عددی یا تجربی پرداخته شده که مدل‌سازی المان آببند به‌صورت غیرخطی و تأثیر متغیر بزرگی اندازه^۱ بر نیروی لازم به‌جهت حرکت المان داخل لوله بررسی گردیده است. نتایج نشان می‌دهند که افزایش متغیرهایی نظیر بزرگی اندازه، ضخامت و سختی المان، منجر به افزایش نیروی مورد نیاز جهت راندن المان می‌گردد [۶-۸]. همچنین در راستای انجام مطالعات بر روی دیسک‌های آببند پلی‌یورتانی و رفتار آن‌ها، در [۹-۱۱] نیز موضوع رفتار دیسک‌های آببند و نیروی وارد بر دیواره لوله توسط آن‌ها را جهت شناسایی رفتار ماده هایپرالاستیک در حین مواجهه با لوله فلزی تحت بررسی قرار گرفته است.

عمدتاً مواد سازنده دیسک‌های آببند از نوعی الاستومر، مشخصاً پلی‌یورتان بوده که دارای رفتار هایپرالاستیک هستند. از دیگر ویژگی‌های این مواد خاصیت تراکم‌ناپذیری بوده که نیازمند مطالعه می‌باشد. این مواد می‌توانند تغییرات کرنشی الاستیک بزرگ را تحمل کنند و در عین حال رفتار تنش-کرنش غیرخطی دارند. رفتار این مواد به‌وسیله تابع انرژی کرنشی تعریف می‌شوند که شرایط محاسبه رابطه تنش-کرنش را برای کرنش‌های بزرگ مهیا می‌سازد [۱۲]. مطابق با موارد گفته شده، این مواد تقریباً تراکم‌ناپذیر هستند، لذا بررسی ضریب پواسون در حل مسائل می‌تواند یکی از پارامترهای حائز اهمیت باشد که در [۱۳، ۱۴] جهت مسائل مختلف به این موضوع پرداخته شده است. استفاده از رفتار هایپرالاستیک نیز در کاربردهای پزشکی جهت مدل‌سازی‌های موارد مختلف به‌مانند ماهیچه قلبی، بافت‌های نرم، دیواره شریان نیز به‌کار گرفته می‌شود [۱۵-۱۷].

در نهایت، [۱۸] در یک پژوهش تجربی و عددی به بررسی آزمون توپک‌رانی تک‌دیسک آببند پلی‌یورتانی با روش کشیدن دیسک آببند در لوله فلزی و همچنین راندن دیسک آببند به‌وسیله فشار سیال پشت توپک پرداخته شده است. در این پژوهش، یک مدل عددی غیرخطی با استفاده از مدل هایپرالاستیک مناسب، ضریب اصطکاک تابع فشار تماسی، و استفاده از المان با فرمولاسیون حل هایبرید جهت شبیه‌سازی رفتار دیسک آببند در تماس با لوله فلزی در عملیات توپک‌رانی ارائه گردید. این مدل عددی با بهره‌گیری از نتایج مطالعات تجربی، صحت‌سنجی شده است. نتایج نشان می‌دهند که نیروی لازم جهت حرکت دیسک آببند در حضور فشار سیال



شکل ۱. شماتیک آزمون تجربی مورد مطالعه شامل دیسک پلی یورتانی و مجموعه ۴ لوله فلزی با ضخامتهای مختلف.

Fig. 1. Schematic of the experimental test comprising a polyurethane disc and four steel pipes with varying thicknesses.

نماید. در این پژوهش، به جهت مطالعه رفتار دیسک آببند، مسئله به صورت استاتیکی بررسی شده است. مطابق شکل ۱ که شماتیک مسئله حاضر را نشان می‌دهد، تک دیسک آببند پلی یورتانی با استفاده از سیستم چرخ جهت حفظ تعادل دیسک آببند در یک مجموعه لوله شامل ۴ لوله ۶-اینچ با ضخامت‌های دیواره مختلف توسط یک سیستم کشنده، حرکت می‌کند. ابعاد چهار لوله ۶ اینچ بر اساس استاندارد ASME B36.10 انتخاب شده است. ضخامت لوله‌های انتخاب شده، ضخامت‌های مرسوم در خطوط لوله ۶ اینچ صنعت نفت و گاز ایران است. استفاده از چهار لوله ۶ اینچ با قطر داخلی مختلف، منجر به تغییر در پارامتر بزرگی اندازه می‌گردد. این پارامتر در مبحث طراحی دیسک‌های آببند حائز اهمیت بوده و به صورت معادله (۲) تعریف می‌شود که در آن، $\varnothing IDp$ و $\varnothing ODD$ به ترتیب معرف قطر خارجی دیسک آببند (برابر با قطر خارجی لوله) و قطر داخلی لوله فلزی می‌باشند. لذا عملیات توپکرانی در چهار مقدار متفاوت بزرگی اندازه انجام می‌شود. در نهایت، نیروی لازم جهت کشش تک دیسک توسط یک نیروسنج در هر یک از حالات قرائت شده و به عنوان نتیجه نهایی استخراج می‌گردد. جدول ۱ و جدول ۲ به ترتیب مشخصات لوله فلزی به همراه پارامتر درصد بزرگی اندازه و مشخصات دیسک‌های آببند پلی یورتانی استفاده شده در پژوهش را نشان می‌دهد. گفتنی است که مشخصات دیسک‌های آببند پلی یورتانی استفاده شده به صورت میانگین تعداد ۱۲ داده برای ضخامت و همچنین سختی ارائه شده است. لذا در مسئله حاضر، تقارن لوله‌های فلزی استفاده شده و دیسک‌های آببند جزء فرضیات مسئله می‌باشد.

۲- تعریف مسئله

مسئله حاضر به بررسی عبور توپک از لوله فلزی می‌پردازد. در حالت ساده‌تر و با توجه به صرف نظر نمودن از وزن توپک، فشار وارده بر پشت توپک (P_1) می‌بایست بر فشار جلویی توپک (P_2) که متشکل از فشار سیال پایین دست است و همچنین فشار لازم جهت جدانمودن و یا عبور از جرم‌های سفت و نرم چسبیده به لوله (P_{wax}) غلبه نماید. در زمانی که توپک در مسیر لوله حرکت دارد، فشار مخالف دیگر (P_f) که معرف نیروی اصطکاک مابین المان‌های آببند و لوله است، بر توپک وارد می‌گردد. به جهت یکسان نمودن بخش‌های معادله (۱) جهت بررسی فشارهای موجود در مسئله، نیرو اصطکاک با تقسیم مقدار نیرو بر مساحت داخلی لوله به صورت فشار مورد بررسی قرار می‌گیرد. لذا در مسئله کلی توپکرانی رابطه فشار لازم پیش‌ران توپک به مانند معادله (۱) می‌باشد که اختلاف فشار بالادست و پایین دست منجر به حرکت توپک در طول لوله می‌گردد.

$$P_1 - P_2 = P_f + P_{wax} \quad (1)$$

در مسئله حاضر، به جهت بررسی رفتار دیسک آببند پلی یورتانی در حین گذر از لوله فلزی، بالادست و پایین دست توپک عاری از وجود سیال و همچنین جرم و موم^۱ می‌باشد. لذا با کشیدن توپک در طول لوله، نیروی کشنده (معادل اختلاف فشار بالادست و پایین دست توپک) صرفاً می‌بایست بر نیروی اصطکاک میان دیسک آببند و لوله فلزی در حین حرکت غلبه

1. Wax and Debris

جدول ۱. ضخامت لوله‌های ۶ اینچ (قطر خارجی برابر با ۱۶۸/۳ میلی‌متر) استفاده شده در بستر آزمون تجربی و درصد بزرگی اندازه.

Table 1. Thickness of 6-inch pipes (outer diameter 168.3 mm) used in the experimental test, along with the oversize ratio.

شماره لوله	ضخامت لوله (میلی‌متر)	درصد بزرگی اندازه (%)
۱	۴/۵	۵
۲	۷/۳	۹
۳	۱۰/۸	۱۵
۴	۱۴	۲۰

جدول ۲. مشخصات دیسک‌های آب‌بند پلی‌یورتانی استفاده‌شده در مسئله حاضر.

Table 2. Specifications of the polyurethane sealing discs used in the present study.

شماره دیسک	ضخامت دیسک (میلی‌متر)	سختی دیسک (Shore-A)
	ظاهر	اندازه‌گیری شده
۱	۸	۹۰/۶
۲	۱۰	۸۹
۳	۱۲	۸۸/۸

بهتر مدل هاپیرالاستیک در نرم‌افزار آباکوس برای ماده پلی‌یورتان مورد استفاده در تحقیق حاضر می‌باشد.

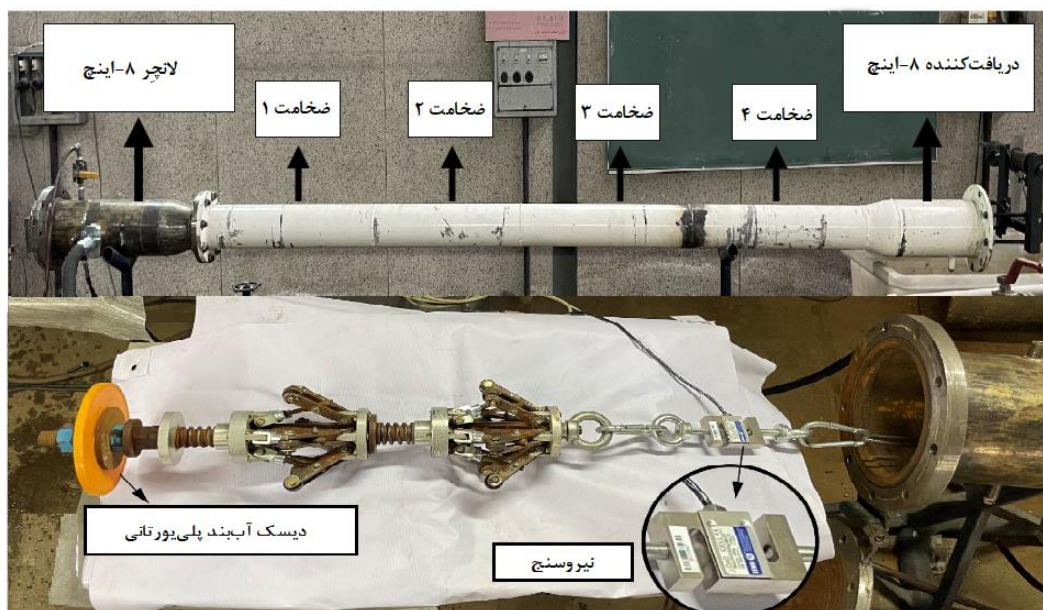
$$\%Os = \frac{\varnothing ODd - \varnothing IDp}{\varnothing IDp} \quad (2)$$

۳- مطالعه تجربی

۳-۱- آماده‌سازی آزمون‌های تجربی

جهت انجام آزمون تجربی مطابق با اهداف ذکرشده در قسمت تعریف مسئله، از یک مجموعه لوله شامل چهار لوله فلزی ۶ اینچ، با ضخامت‌های مختلف استفاده شده است. توپک استفاده‌شده در این مسئله شامل تک دیسک پلی‌یورتانی است که با سرعت تقریباً ثابت ۱۰ میلی‌متر بر ثانیه کشیده می‌شود. از آنجایی که این سرعت در مقایسه با آزمون توپکرانی که با سرعت بالایی انجام می‌گردد (در حدود ۲ متر بر ثانیه) ثابت و ناچیز است، در نتیجه مسئله قابل تعریف به‌صورت استاتیکی می‌باشد. گفتنی است که یک نیروسنج مابین سیم بکسل و مجموعه چرخ قرار گرفته تا نیروی لازم به‌جهت کشش توپک را اندازه‌گیری نماید. تمامی تجهیزات مورد استفاده در

به‌طور کلی، پلیمرهای استفاده‌شده در ساختارهای آب‌بند، دارای قابلیت تحمل کرنش‌های بسیار بزرگ هستند، لذا وارد نمودن محدوده کرنش به‌جهت تخصیص مدل مناسب هاپیرالاستیک برای شبیه‌سازی رفتار ماده یکی از مراحل مهم در شبیه‌سازی عددی می‌باشد. به‌عبارت دیگر، بررسی اثر محدوده کرنش در مطالعه عددی جهت تعریف یک مدل معتبر هاپیرالاستیک برای مسئله توپکرانی، امری ضروری به‌نظر می‌رسد. در این پژوهش به‌طور متمرکز، مدل هاپیرالاستیک چند جمله‌ای کاهش‌یافته انتخاب گردیده و تأثیر محدوده اطلاعات تنش-کرنش بر مدل هاپیرالاستیک مذکور و در انتها، نتایج نهایی مسئله حرکت دیسک آب‌بند در لوله فلزی مورد ارزیابی قرار گرفته است. هدف از بررسی این موضوع نیز مطابق مطالب گفته شده، مطالعه و تأثیرمحدوده داده تنش-کرنش تک‌محوره جهت پیش‌بینی هرچه



شکل ۲. بستر آزمون تجربی شامل مجموعه لانچر، دریافت‌کننده و چهار لوله فلزی با ضخامتهای دیواره مختلف و مجموعه چرخ و دیسک پلی‌یورتانی به همراه نیروسنج جهت حرکت دیسک داخل لوله و اندازه‌گیری نیروی لازم جهت کشش آن.

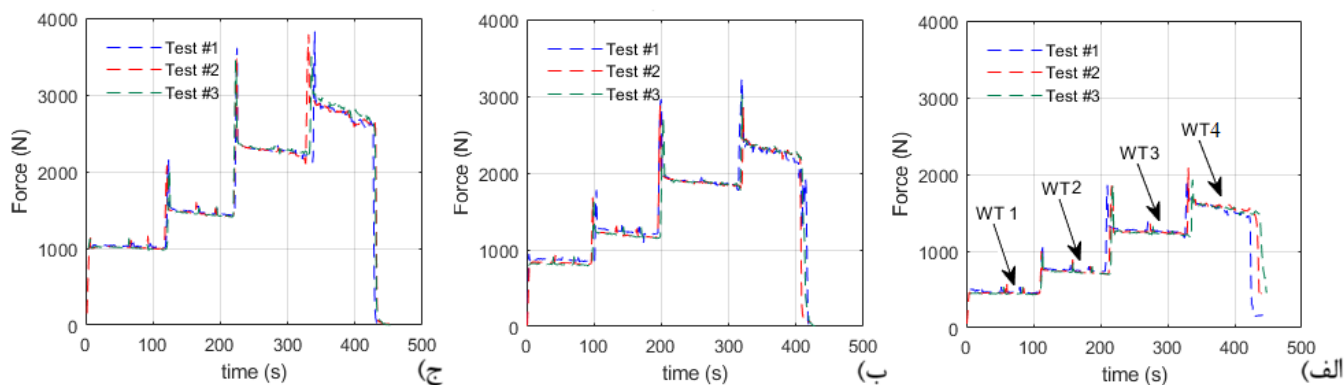
Fig. 2. Experimental test setup including the launcher, receiver, and four steel pipes with varying wall thicknesses, along with the wheel system and load cell used to pull the sealing disc and measure the required force.

با فرض استاتیکی تحقیق حاضر، طول لوله فلزی فاقد اهمیت بوده و نیرو در تمام طول آزمون توپکرانی در هر لوله ثابت است. نتایج فشار، رفتار پلکانی را نشان می‌دهند که مبنای نیروی بیشتر مورد نیاز جهت کشیدن دیسک آب‌بند در لوله با ضخامت بالاتر یا به عبارت دیگر مقدار بزرگی اندازه بیشتر می‌باشد. افزایش پارامتر بزرگی اندازه بدین معناست که دیسک آب‌بند می‌بایست کرنش بیشتری را تحمل کرده تا از لوله عبور نماید. لذا تنش‌های بیشتری در دیسک پلی‌یورتانی ایجاد می‌شود. بنابراین، با افزایش متغیر بزرگی اندازه، نیروی بیشتری جهت کشش دیسک لازم است. علاوه بر این، ضخامت دیسک آب‌بند نیز از دیگر متغیرهای طراحی دیسک‌های آب‌بند جهت استفاده در عملیات توپکرانی می‌باشد. با افزایش ضخامت دیسک آب‌بند، سختی خمشی افزایش می‌یابد. در نتیجه آن، تنش‌های بیشتری بر دیسک اعمال شده و در نهایت، نیروی بیشتری برای کشش آن لازم است. نتایج نهایی نیروی لازم جهت کشیدن دیسک آب‌بند به صورت میانگین سه تکرار هر آزمون در هر لوله به شرح زیر در جدول ۳ بیان شده است. از نتایج مطالعه تجربی در صحت‌سنجی مدل عددی و ارزیابی نتایج استفاده می‌گردد.

مطالعه تجربی در شکل ۲ قابل مشاهده است. همچنین، نیروی لازم جهت کشیدن مجموعه چرخ مورد استفاده به جهت حفظ تعادل تک دیسک، مقدار ۱۰ نیوتن اندازه‌گیری شده که این مقدار کمتر از سه درصد کمترین عدد ثبت‌شده در آزمون کشش بوده که کاملاً قابل صرف‌نظر است و می‌توان نیروی اندازه‌گیری‌شده را مختص دیسک آب‌بند فرض نمود. لازم به ذکر است که دقت نیروسنج استفاده‌شده در آزمون تجربی ۱ نیوتن و فرکانس داده‌برداری نیروسنج ۲ هرتز می‌باشد.

۳-۲- نتایج مطالعه تجربی

در مطالعه تجربی، هر آزمون سه مرتبه تکرار و نیروی لازم جهت کشیدن دیسک آب‌بند پلی‌یورتانی توسط نیروسنج ضبط گردید. نتایج آزمون‌ها برای دیسک با ضخامت‌های ۸، ۱۰ و ۱۲ میلی‌متر در شکل ۳ قابل ملاحظه می‌باشد. مطابق شکل، نتایج هر سه تکرار آزمون منطبق بر هم بوده که نشان از تکرارپذیری و دقت بالای آزمون تجربی دارد. مطابق



شکل ۳. نمودار نیروی لازم جهت کشش دیسک پلی یورتانی با ضخامت ظاهری الف) ۸ میلی متر، ب) ۱۰ میلی متر و ج) ۱۲ میلی متر در بستر آزمون تجربی.

Fig. 3. Required force for pulling the polyurethane sealing disc with nominal thicknesses of a) 8 mm, b) 10 mm, and c) 12 mm through the experimental setup.

جدول ۳. نتایج نهایی مطالعه تجربی برای سه دیسک آب بند پلی یورتانی شامل ۳ ضخامت مختلف در چهار لوله فلزی ۶ اینچ با ضخامت دیواره متفاوت.

Table 3. Results of the required force for pulling three polyurethane sealing discs of different thicknesses through four 6-inch steel pipes with varying wall thicknesses.

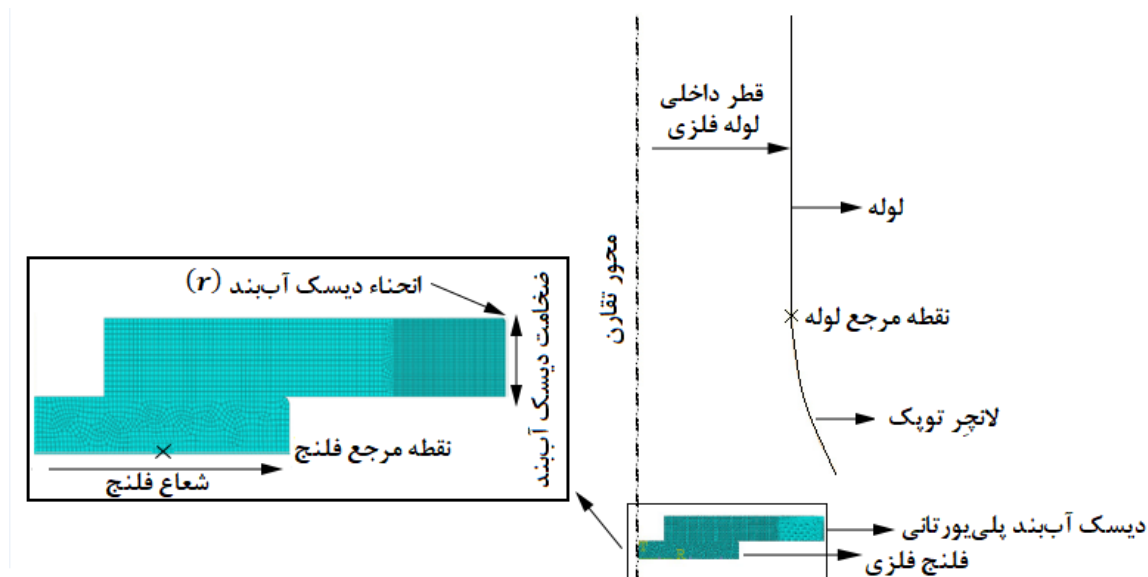
شماره لوله	لوله اول	لوله دوم	لوله سوم	لوله چهارم
ضخامت دیسک	نیرو (نیوتن)	نیرو (نیوتن)	نیرو (نیوتن)	نیرو (نیوتن)
دیسک اول - ۸ میلی متر	۴۵۵/۶	۷۴۴	۱۲۶۰/۳	۱۶۰۲/۳
دیسک دوم - ۱۰ میلی متر	۸۴۴	۱۲۵۱	۱۸۹۷	۲۳۲۶
دیسک سوم - ۱۲ میلی متر	۱۰۲۳	۱۴۷۸	۲۲۹۳	۲۸۳۳

۴- مطالعه عددی

۴-۱- آماده سازی مدل عددی حاضر

فلزی مسئله شامل فلنج پشت دیسک و لوله فلزی به صورت صلب در مسئله مدل شده اند. مطابق با فیزیک مسئله، با مدل نمودن دیسک آب بند پلی یورتانی و فلنج پشت آن به صورت یک جزء، همچنین استفاده از فرض حل استاتیکی مسئله، تمامی نیروی عکس العمل دریافتی فلنج معادل نیروی اصطکاک میان دیسک پلی یورتانی و لوله فلزی می باشد. لذا با محاسبه نیروی عکس العمل وارد بر مجموعه دیسک، می توان برآیند نیروی لازم جهت غلبه بر نیروی اصطکاک دیسک برای جلو رفتن آن را محاسبه نمود. پس از مدل سازی ابعاد دیسک آب بند و اجزاء فلزی، برای وارد نمودن خواص ماده پلی یورتانی دیسک آب بند در نرم افزار، تعریف یک مدل هایپر الاستیک لازم می باشد که نیازمند استفاده از داده تنش- کرنش آزمون

مراحل پیش پردازش مطالعه عددی مسئله حاضر با مدل نمودن دیسک پلی یورتانی در یک لوله آغاز می گردد. به دلیل وجود تقارن در هندسه دیسک و لوله به همراه فلنج پشت دیسک که در شکل ۴ نمایش داده شده است، مسئله شبیه سازی به صورت ۲ بعدی تقارن-محوری مدل می شود. بنابر آنچه در قبل بحث شد، به جهت فرض مطالعه استاتیکی، از حل استاتیکی غیرخطی در نرم افزار آباکوس استفاده گردید. لازم به ذکر است که از آنجایی که مدول الاستیسیته آهن (تقریباً ۲۰۰ گیگاپاسکال) در مقایسه با مدول الاستیسیته دیسک آب بند پلی یورتانی (در حدود ۸ مگاپاسکال) بسیار بیشتر است، اجزاء



شکل ۴. مدل شبکه‌بندی شده مسئله در نرم‌افزار آباکوس.

Fig. 4. Meshed model of the problem in Abaqus.

کشش است. پس از انتخاب مدل هایپر الاستیک و مرتبه آن، ضرایب مربوط به مدل هایپر الاستیک محاسبه می‌گردد. با تعریف خواص هایپر الاستیک ماده، نرم‌افزار قادر به حل مسئله و محاسبه تنش‌های موجود در مسئله جهت بدست آوردن نیروهای مجهول می‌باشد. از آنجایی که این مواد پلیمری قابلیت کرنش‌های بسیار بزرگ را دارا هستند، کرنش در آزمون کشش ماده استفاده شده در این پژوهش تا مقدار ۱۱ نیز ملاحظه گردید. این درحالی است که کرنش دیسک آببند در مسئله حاضر در محدوده ۰ تا ۰/۵ بوده و صرف ملاحظه دقت مدل هایپر الاستیک در تخمین تنش-کرنش در محدوده کرنش دیسک آببند مورد استفاده در مسئله (با توجه به جابجایی دیسک و حل اولیه شبیه‌سازی) اهمیت دارد. لذا مسئله حاضر، بررسی محدوده اطلاعات وارده تنش-کرنش جهت تخمین ضرایب هایپر الاستیک می‌باشد.

در تعریف نوع تماس مابین دیسک آببند پلی‌یورتانی و لوله فلزی در این مسئله نیز از نوع تماس سطح به سطح^۱ و به صورت تماس مماسی^۲ و با استفاده از فرمولاسیون جریمه^۳ استفاده شده است. همچنین نکته حائز اهمیت در حل این مسئله، استفاده از ضریب اصطکاک تابع فشار تماسی

در تعریف نوع تماس مابین دیسک آببند پلی‌یورتانی و لوله فلزی در این مسئله نیز از نوع تماس سطح به سطح^۱ و به صورت تماس مماسی^۲ و با استفاده از فرمولاسیون جریمه^۳ استفاده شده است. همچنین نکته حائز اهمیت در حل این مسئله، استفاده از ضریب اصطکاک تابع فشار تماسی

1. Surface to surface contact
2. Tangential behavior
3. Penalty formulation

۴-۲- محاسبه ضرایب مدل هایپر الاستیک
از آنجایی که اغلب مواد هایپر الاستیک تقریباً تراکم‌ناپذیر و یا نزدیک به آن هستند، استفاده از فرمولاسیون "هایپرید" در حل تراکم‌ناپذیری ضروری به نظر می‌رسد که نحوه محاسبه تنش توسط فرمولاسیون هایپرید در [۱۸] به‌طور

4. Meshed model

این مدل به صورت معادله (۵) تعریف شده که مبین انرژی پتانسیل کرنشی برحسب تابعی از ناورداهای کرنش، نسبت حجمی و ضرایب مربوط به ترم‌های این معادله می‌باشد [۱۹]. در این معادله، C_{ij} ضرایب مدل هایپروالاستیک در بخش انحرافی، و D_i ضریب مدل هایپروالاستیک در بخش حجمی مدل هایپروالاستیک استفاده شده می‌باشند. این ضرایب با استفاده از برازش منحنی تنش-کرنش آزمون کشش تک-محوره توسط مدل هایپروالاستیک برای انرژی کرنشی، ناورداهای کرنش، و نسبت حجمی که در معادله (۵) به ترتیب با I_1 ، I_2 و J نمایش داده شده‌اند، محاسبه می‌شوند. در این بخش هدف اصلی استفاده از تست‌های مکانیکی کشش یا فشار تک‌محوره، جهت استخراج ضرایب مدل مورد نظر هایپروالاستیک است.

$$U = U_{dev}(\bar{I}_1, \bar{I}_2) + U_{vol}(J) \quad (۴)$$

$$U = \sum_{i+j=1}^N C_{ij} (\bar{I}_1 - 3)^i (\bar{I}_2 - 3)^j + \sum_{i=1}^N \frac{1}{D_i} (J - 1)^{2i} \quad (۵)$$

از آنجایی که استفاده از تست تک‌محوره تنش-کرنش اطلاعات مربوط به کرنش را در یک راستا در دسترس قرار می‌دهد، با حذف قسمت‌های مرتبط با ناوردا دوم یک مدل جدید هایپروالاستیک بدست می‌آید که به صورت معادله (۶) نمایش داده می‌شود. این مدل می‌تواند در برخی از موارد تخمین بهتری از تغییر شکل در مقایسه با مدل چند جمله‌ای به جهت حذف ناوردای دوم (I_2) داشته باشد [۲۰]. مدل حاضر، مدل چند جمله‌ای کاهش یافته است که در شبیه‌سازی‌های این مسئله نشان از دقت بسیار بالای این مدل در پیش‌بینی رفتار دیسک پلی‌یورتانی در لوله دارد.

$$U = \sum_{i=1}^N C_i (\bar{I}_1 - 3)^i + \sum_{i=1}^N \frac{1}{D_i} (J - 1)^{2i} \quad (۶)$$

در ادامه مبحث، بدست آوردن ضرایب مدل چند جمله‌ای کاهش یافته (C_i) با استفاده از داده تست کشش یا فشار تک‌محوره مورد بررسی قرار می‌گیرد. با استفاده از منحنی تنش-کرنش، انرژی پتانسیل کرنشی به صورت مساحت زیر سطح منحنی قابل محاسبه است. جهت محاسبه تانسور گرادیان جابجایی، می‌بایست در گام قبل کشیدگی در جهات اصلی را بدست آورد. معادلات (۷-۹) مقادیر کشیدگی در هر کرنش داده آزمون تست کشش را

مفصل بررسی شده است. در بررسی این قسمت، نحوه محاسبه ضرایب مدل هایپروالاستیک برای ماده تماماً تراکم‌ناپذیر^۱ و تقریباً تراکم‌ناپذیر^۲ از منحنی تنش-کرنش آزمون کشش و یا فشار تک محوره ارائه می‌گردد. همان‌طور که بحث شد، هدف این مطالعه بررسی بازه کرنش در تخمین ضرایب مدل هایپروالاستیک، مشخصاً مدل چند جمله‌ای کاهش یافته^۳ می‌باشد. بدین منظور فرمولاسیون محاسبه ضرایب مدل هایپروالاستیک با استفاده از داده تنش-کرنش برای مواد تراکم‌ناپذیر به شرح زیر می‌باشد. در حالت کلی، تراکم‌پذیری نسبی ماده را با استفاده از نسبت مدول بالک اولیه K_0 بر مدول برشی اولیه آن μ_0 می‌توان ارزیابی نمود. این نسبت بر حسب ضریب پواسون به کمک معادله (۳) بیان می‌گردد که از این رابطه در ادامه برای بدست آوردن ضرایب بخش تغییرات حجمی استفاده می‌شود [۱۹]. لازم به ذکر است که مقدار ضریب پواسون برای مواد تقریباً تراکم‌ناپذیر بسیار نزدیک به ۰/۵ می‌باشد و یا به عبارت دیگر، مدول بالک ماده تراکم‌ناپذیر به مقدار بی‌نهایت میل می‌کند.

$$\nu = \frac{\frac{3K_0}{\mu_0} - 2}{\frac{6K_0}{\mu_0} + 2} \quad (۳)$$

مدل‌های هایپروالاستیک به شکل ترم‌های انرژی کرنشی عمدتاً به شکل $U(\epsilon)$ بیان می‌شوند که این پارامتر به صورت انرژی کرنشی ذخیره شده در یک واحد از حجم اولیه ماده بر تابعی از کرنش در آن نقطه از ماده بیان می‌شود. انرژی کرنشی مقدار انرژی ذخیره شده در یک جسم بر اثر بارگذاری است که در واقع بیانگر کار انجام شده توسط نیروهای خارجی برای ایجاد کرنش در ماده می‌باشد. بنابراین مدل‌های مختلف هایپروالاستیک، به شکل انرژی کرنشی برحسب تابعی از ناورداهای کرنش^۴ و نسبت حجمی تعریف می‌گردند. به عبارت دیگر، انرژی کرنشی مواد تراکم‌ناپذیر شامل دوبخش انحرافی و حجمی (معادله (۴)) می‌باشد [۱۹]. در معادله (۴)، U_{vol} و U_{dev} به ترتیب معرف بخش انرژی انحرافی و حجمی هستند. یکی از رایج‌ترین فرم مدل‌های هایپروالاستیک مدل چند جمله‌ای است که به صورت کلی از ادغام ترم ناورداهای اول و دوم (I_1, I_2) تشکیل می‌شود. معادله

1. Fully-incompressible
2. Nearly-incompressible
3. Reduced polynomial
4. Strain invariants

پس از محاسبه تانسور کرنش-گرین چپ، ناوردهای کرنش به صورت زیر قابل محاسبه می‌باشند:

$$\bar{I}_1 = \text{trace}(\bar{B}) = I : \bar{B} \quad (۱۴)$$

$$\bar{I}_2 = \frac{1}{2}(\bar{I}_1^2 - \text{trace}(\bar{B} \cdot \bar{B})) = \frac{1}{2}(\bar{I}_1^2 - I : \bar{B} \cdot \bar{B}) \quad (۱۵)$$

حال با استفاده از ناوردهای کرنش و انرژی کرنشی، محاسبه ضرایب مدل هایپرلاستیک از طریق برازش منحنی با متغیرهای انرژی پتانسیل کرنشی بر حسب ناوردهای کرنش (معادله (۶))، قابل انجام می‌باشد. از آنجایی که مقدار نسبت تغییر حجم (J) برابر با مقدار دقیق ۱ محاسبه شده، لذا ترم دوم رابطه انرژی کرنشی یا ترم حجمی انرژی کرنشی برابر با ۰ می‌باشد. حالت مذکور در حالت ایده‌آل تراکم‌ناپذیر ماده مورد مطالعه بوده و صرفاً جنبه محاسباتی آن مطرح است. برای مدل‌سازی بهتر ماده حاضر، استفاده از فرض تقریباً تراکم‌ناپذیر در شبیه‌سازی عددی مورد قبول تر است. در این حالت، مقدار تغییر حجم بسیار نزدیک به ۱ و مقدار ضریب پواسون عددی بسیار نزدیک به ۰/۵ (در این مسئله مطابق با فرضیات ارائه شده ۰/۴۹۹۵/۱۹۱) می‌باشد که در این حالت، ترم حجمی انرژی پتانسیل کرنشی حذف نمی‌شود. ضرایب ترم حجمی معادله که در معادله (۶) با D_i بیان شده‌اند، بدون توجه به مرتبه مدل هایپرلاستیک به مقدار مدول بالک اولیه و مدل برشی اولیه در مرتبه اول مدل هایپرلاستیک ($N=1$) وابسته هستند و از معادله (۱۶) محاسبه می‌گردند. در نهایت، استفاده از معادله (۳)، (۶۱-الف) و (۱۷-ب)، منجر به محاسبه ضریب D_1 که به ترم حجمی انرژی کرنشی مربوط است، می‌شود. در معادله (۱۶-الف)، μ_0 معرف مدول برشی، و در معادله (۱۷-ب)، K_0 همان مدول حجمی می‌باشد. این دو پارامتر به ترتیب در محاسبه کرنش ترم‌های انحرافی و حجمی انرژی کرنشی، استفاده می‌شوند.

$$\mu_0 = 2(C_{10} + C_{01}) \quad (\text{الف}) \quad (۱۶)$$

$$K_0 = \frac{2}{D_1} \quad (\text{ب}) \quad (۱۷)$$

برای ماده با فرض تراکم‌ناپذیری محاسبه می‌نماید که در این معادلات λ_i کشیدگی در جهات اصلی، ϵ_1 کرنش در جهت کشیدگی نمونه تست کشش می‌باشد. از آنجایی که ضرب کشیدگی در تمامی جهات برابر با نسبت تغییر حجم (J) می‌باشد (معادله (۷))، لذا برای ماده با فرض تراکم‌ناپذیری در تست کشش تک‌محور، کشیدگی در جهات ۲ و ۳ به صورت تابعی از کشیدگی در جهت راستای کشش نمونه محاسبه می‌گردد (معادله (۹)) که در این صورت مقدار J برابر با ۱ است.

$$J = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \quad (۷)$$

$$\lambda_1 = 1 + \epsilon_1 \quad (۸)$$

$$\lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \quad (۹)$$

جهت تشکیل ماتریس گرادیان تغییر شکل ماده F بر حسب موقعیت ثانویه یک نقطه از یک ماده که با x و مختصات اولیه آن نقطه که با X نمایش داده می‌شود، ماتریس گرادیان تغییر شکل را به‌مانند معادله (۱۰) می‌توان محاسبه نمود. دترمینان ماتریس گرادیان تغییر شکل نیز برابر با J (نسبت تغییر حجمی ماده) می‌باشد که برای ساده‌سازی، می‌توان با ضرب گرادیان تغییر شکل در J ، گرادیان تغییر شکل با تغییر حجمی حذف‌شده را تعریف نمود. با استفاده از تانسور مذکور، می‌توان تانسور کرنش کوشی-گرین چپ را مطابق با معادله (۱۳) بدست آورد.

$$F = \frac{\partial x}{\partial X} \quad (۱۰)$$

$$J = \det(F) \quad (۱۱)$$

$$\bar{F} = J^{-\frac{1}{3}} F \quad (۱۲)$$

$$\bar{B} = \bar{F} \cdot \bar{F}^T \quad (۱۳)$$

جدول ۴. ضرایب تعیین برازش منحنی داده کشش تک‌محوره در مرتبه‌های ۱ الی ۸ مدل چند جمله‌ای کاهش‌یافته.

Table 4. Coefficients of determination of the uniaxial tensile test data for the reduced polynomial hyperelastic model of orders 1 to 8.

مرتبه مدل چند جمله‌ای کاهش یافته								
۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱	
۰/۹۷۴۹	۰/۹۷۳۶	۰/۹۶۷۲	۰/۹۵۷۷	۰/۹۳۶۴	۰/۸۷۷	۰/۷۵۲۶	۰/۱۴۵۷	R^2
۰/۹۷۴۳	۰/۹۷۳	۰/۹۶۷۳	۰/۹۵۷۲	۰/۹۳۵۸	۰/۸۷۶	۰/۷۵۲۹	۰/۱۴۳۷	R^2_{adj}

به‌منظور مطالعه دقت مرتبه مدل هایپرالاستیک چند جمله‌ای کاهش‌یافته، شکل ۵ نمودار تنش-کرنش آزمون کشش تک‌محوره را به‌همراه مدل‌های هایپرالاستیک چند جمله‌ای کاهش‌یافته برای مرتبه‌های ۱ تا ۶ نشان می‌دهد که مرتبه اول مدل چند جمله‌ای کاهش‌یافته به مدل نیو هوک^۱ و مرتبه سوم آن به مدل یوه^۲ مشهور است. مطابق انتظار، حضور ترم‌های بیشتر مدل هایپرالاستیک چند جمله‌ای کاهش‌یافته می‌تواند منجر به افزایش دقت پیش‌بینی مدل هایپرالاستیک از نمونه داده آزمون کشش شود. لذا جهت شناساندن رفتار ماده هایپرالاستیک در نرم‌افزار آباکوس، استفاده از مدل هایپرالاستیک با مرتبه بیشتر می‌تواند دقت برازش منحنی را بالا ببرد. جهت انتخاب بهینه‌ترین مرتبه مدل چند جمله‌ای کاهش‌یافته، در جدول ۴ ضرایب تعیین^۳ مرتبه‌های مختلف این مدل نشان داده شده است. این ضرایب به‌طور معمول در بررسی دقت معادله مورد استفاده در برازش منحنی استفاده می‌شوند که نحوه محاسبه آن در [۲۲] ارائه گردیده است. هرچه مقدار ضریب R^2 به عدد ۱ نزدیک‌تر باشد، نشان از خطای کمتر برازش منحنی دارد. همچنین ضریب R_{adj}^2 (ضریب تعیین تعدیل‌شده) نیز اثر ترم‌های اضافه‌شده به منحنی برازش‌شده را بیان می‌نماید. مطابق انتظار، با افزایش ضرایب مدل برازش منحنی، دقت مدل افزایش یافته است. ضرایب تعیین در جدول نشان می‌دهند که برازش منحنی تا مرتبه ۶ منجر به افزایش دقت مطلوبی در پیش‌بینی رفتار ماده می‌شود و ترم‌های اضافه‌تر معادله در مرتبه‌های بالاتر (مرتبه ۷ و ۸) منجر به حجم اضافی محاسبات و خطای بیش برازش^۴ می‌گردد. لذا با استناد بر ضرایب تعیین و مقدار قابل قبول R^2 ، همچنین خطای نسبی بسیار کم، انتخاب مرتبه ۶ مدل چند جمله‌ای

در مسئله تست کشش تک‌محوره، جهت بدست آوردن تنش از انرژی پتانسیل کرنشی در حالت تراکم‌ناپذیر برای مدل هایپرالاستیک چند جمله‌ای کاهش‌یافته جهت مقایسه تنش حاصله با داده تست کشش تجربی، معادله (۱۸) به‌شکل زیر نوشته می‌شود.

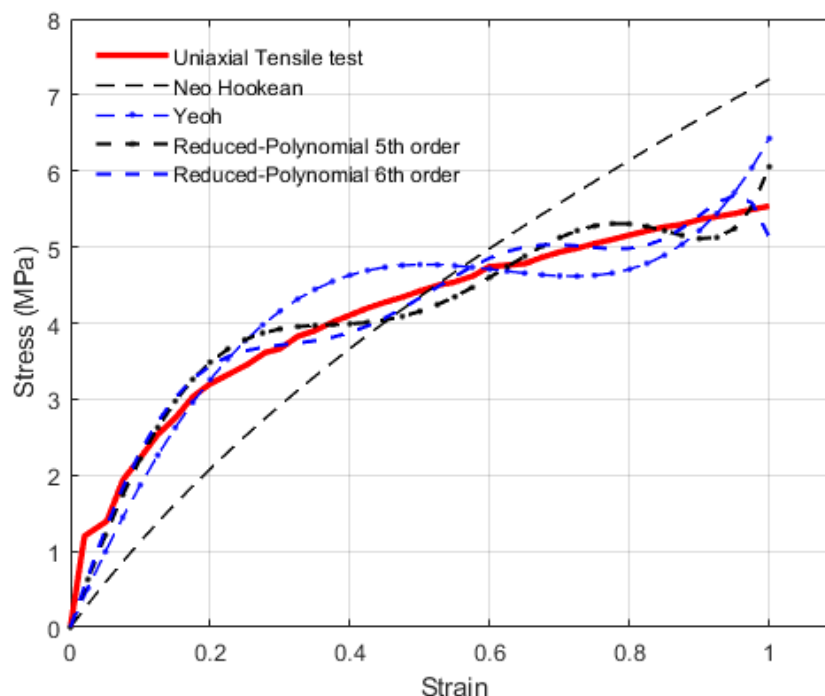
$$\delta U = T_U \delta \lambda_U, \quad \frac{\delta U}{\delta \lambda_U} = \frac{\partial U}{\partial I_1} \times \frac{\partial I_1}{\partial \lambda_U} \quad (18)$$

$$T_U = \frac{\delta U}{\delta \lambda_U} = 2(1 - \lambda_U^{-3}) \left(\lambda_U \frac{\partial U}{\partial I_1} \right) \quad (19)$$

در نهایت، جهت بررسی دقیق‌تر مدل هایپرالاستیک و پس از استخراج ضرایب مدل هایپرالاستیک چند جمله‌ای کاهش‌یافته مورد مطالعه و ساخت بردار تنش برپایه انرژی کرنشی حاصله از معادلات هایپرالاستیک، دو بردار تنش حاصله و بردار تنش داده آزمون کشش تک‌محوره، به‌کمک استفاده از معادله (۱۹) جهت بررسی خطای نسبی تنش مستخرج از روابط در مقایسه با تنش داده تجربی کشش تک‌محوره را می‌توان ارزیابی نمود. در این معادله مقدار e_i و p_i به‌ترتیب مربوط به مقادیر تنش در آزمون کشش تک‌محوره و تنش بدست آمده توسط مدل هایپرالاستیک منتخب در هر کرنش و n تعداد داده‌های نمودار تنش-کرنش جهت مقایسه و محاسبه پارامتر خطای نسبی می‌باشد [۲۱].

$$\%RE = \frac{100}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \left(\frac{|e_i - p_i|}{|e_i|} \right) \quad (20)$$

1. Neo hookean
2. Yeoh
3. Coefficients of determination
4. Overfitting



شکل ۵. مقایسه نمودار تست کشش تک‌محوره با مرتبه‌های مختلف مدل‌های هایپروالاستیک چند جمله‌ای کاهش‌یافته.

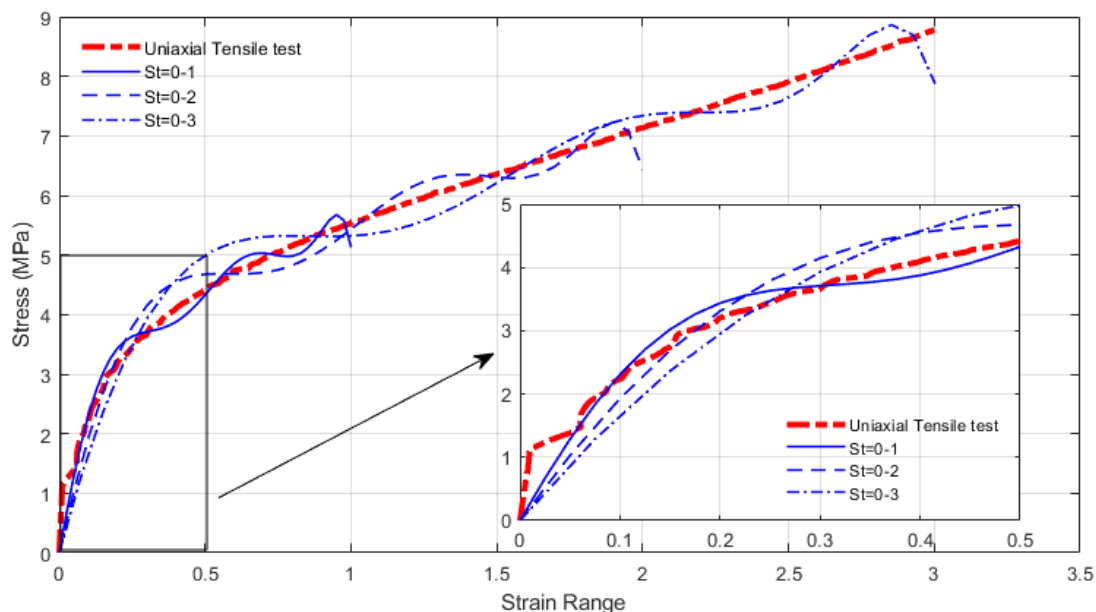
Fig. 5. Comparison of the uniaxial tensile test data with reduced polynomial hyperelastic models of different orders.

محدوده تنش-کرنش و ساخت مدل هایپروالاستیک برای بازه طولانی‌تر داده منحنی تنش-کرنش، دقت تخمین مدل هایپروالاستیک کاهش می‌یابد. شکل ۷ خطای نسبی مدل‌های مستخرج چند جمله‌ای کاهش‌یافته مرتبه ۶ برای بازه‌های متفاوت کرنش در محدوده $0.5-0$ را نشان می‌دهد. مطابق پیش‌بینی، افزایش بازه کرنش منجر به افزایش خطای مدل هایپروالاستیک در پیش‌بینی تنش در محدوده $0.5-0$ کرنش می‌شود.

پس از بررسی مدل‌ها و مشخصاً مرتبه مدل‌های چند جمله‌ای کاهش‌یافته، خطای نسبی نمودارها در قیاس با داده تست کشش تک‌محوره نشان می‌دهند که مرتبه بالاتر مدل چند جمله‌ای کاهش‌یافته منجر به دقت بهتری در تخمین نمودار تنش-کرنش می‌شود. پس از انتخاب مرتبه ۶ از مدل هایپروالاستیک چند جمله‌ای کاهش‌یافته، متغیر محدوده کرنش مورد بررسی قرار گرفت. همان‌طور که مشاهده گردید، با افزایش محدوده کرنش وارد بر معادلات جهت تخمین نمودار تنش-کرنش، خطای نسبی نمودار حاصله در مقایسه با داده تجربی آزمون کشش در بازه کرنش مورد استفاده در مسئله یعنی بازه کرنش 0.5 تا 0 ، افزایش می‌یابد. نتیجتاً، استفاده از محدوده کرنش $0.5-0$ دقیق‌ترین مدل به جهت تخمین رفتار ماده هایپروالاستیک بوده و

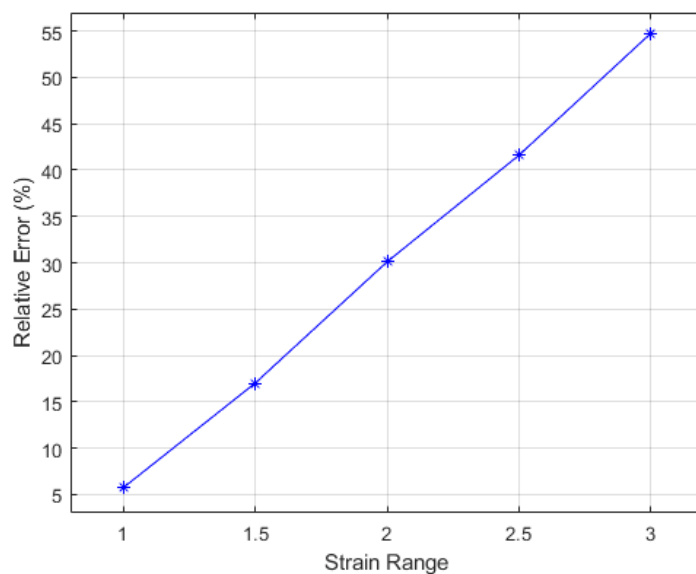
کاهش‌یافته، بهترین انتخاب جهت پیش‌بینی رفتار مکانیکی ماده پلی‌یورتانی با رفتار هایپروالاستیک می‌باشد. لذا از این مرحله، مدل مورد مطالعه مدل هایپروالاستیک چند جمله‌ای کاهش‌یافته مرتبه ۶ انتخاب شده است.

مطابق با شرایط نقل شده، با توجه به خاصیت ماده پلی‌یورتان استفاده‌شده در دیسک‌های آب‌بند مورد مطالعه، آزمون تنش-کرنش تا مقدار کرنش ۱۱ انجام شد. این درحالی‌است که شبیه‌سازی مسئله نشان می‌دهد که در مسئله عبور دیسک پلی‌یورتانی از داخل لوله فلزی، بیشینه کرنش اصلی تا مقدار حدوداً 0.5 می‌باشد. لذا مدل هایپروالاستیک نیازمند تخمین دقیق‌تری در این ناحیه از کرنش ماده جهت محاسبه تنش است. از طرفی جهت استفاده از مرتبه بالاتر از ۳، حداقل کرنش لازم جهت پیش‌بینی بهتر مدل، محدوده 0 تا ۱ کرنش در آزمون کشش و 0.5 تا ۰ کرنش در آزمون فشار می‌باشد [۱۹]. بنابراین، شکل ۶ منحنی تنش-کرنش آزمون کشش را تا محدوده کرنش ۳ نشان می‌دهد. مدل‌های هایپروالاستیک موجود در شکل مذکور، همگی از مرتبه ۶ برای محدوده متفاوت کرنش می‌باشند. مطابق شکل، دقت تخمین مدل در حل مسئله عددی حاضر می‌تواند به بررسی محدوده $0.5-0$ منحنی تنش-کرنش متمرکز باشد. در شکل ۶ ملاحظه می‌گردد که با افزایش



شکل ۶. پیش‌بینی مدل های پیرالاستیک چند جمله‌ای کاهش یافته مرتبه ۶ در بازه‌های مختلف کرنش از داده تست کشش تک‌محوره.

Fig. 6. Prediction of the 6th-order reduced polynomial hyperelastic model using different strain ranges of the uniaxial tensile test data, compared with the experimental result.



شکل ۷. خطای نسبی پیش‌بینی مدل چند جمله‌ای کاهش یافته مرتبه ۶ در بازه‌های مختلف داده تست کشش در برآورد منحنی کشش - فشار در محدوده کرنش مسئله حاضر.

Fig. 7. Relative error of the prediction of the 6th-order reduced polynomial hyperelastic model using different ranges of the stress-strain data, compared with the experimental tensile results within the strain range of the pigging problem.

جدول ۵. ضرایب مدل هایپرالاستیک چند جمله‌ای کاهش‌یافته مرتبه ۶ انتخاب‌شده در محدوده کرنش ۰-۱ جهت حل مسئله.

Table 5. Coefficients of the selected 6th-order reduced polynomial hyperelastic model using a strain range of 0-1 to simulate the problem

D_2 (GPa^{-1})	D_1 (GPa^{-1})	C_{60} (MPa)	C_{50} (MPa)	C_{40} (MPa)	C_{30} (MPa)	C_{20} (MPa)	C_{10} (MPa)	سختی ماده هایپرالاستیک (Shore-A)
۰	۰/۲۱۴۷	-۰/۴۲	۲/۸۷۳	-۷/۶۵	۱۰/۰۶۱	-۷/۰۶	۴/۵۹۷	۸۵

نشان می‌دهد. نیروی اندازه‌گیری شده برابر با نیروی اصطکاک مابین دیسک آب‌بند و لوله فلزی می‌باشد که مورد ارزیابی تجربی و عددی در این مسئله قرار گرفت.

شکل ۹ نتایج شبیه‌سازی را در حالت‌های مختلف مدل هایپرالاستیک با استفاده از محدوده مختلف داده تنش-کرنش نشان می‌دهد. در تمامی نتایج برای دیسک‌های استفاده‌شده در این تحقیق، حالت اول مربوط به مدل مناسب و حل مسئله می‌باشد و نتایج مستخرج از مابقی مدل‌های محاسبه‌شده با استفاده از محدوده‌های مختلف کرنش صرفاً جهت مقایسه نتایج می‌باشد. همچنین شکل ۱۰ نتایج نرمالیزه‌شده بر حسب مدل اول که دقیق‌ترین نتایج حاصله را به‌همراه دارد، برای ۴ ضخامت لوله مختلف نشان می‌دهد. نتایج این تصویر نشان می‌دهد که استفاده از محدوده بیش از اندازه تنش-کرنش در محاسبه مدل هایپرالاستیک می‌تواند تا حدود ۳۰ درصد خطا در نتایج به‌همراه داشته باشد. همچنین مطابق انتظار، به‌دلیل مقدار کمتر نیروها در لوله اول و مقدار بزرگ‌تر اعداد نیرو در لوله چهارم، خطا در لوله آخر میزان کمتری را نسبت به لوله اول نشان می‌دهد.

۵- نتیجه‌گیری

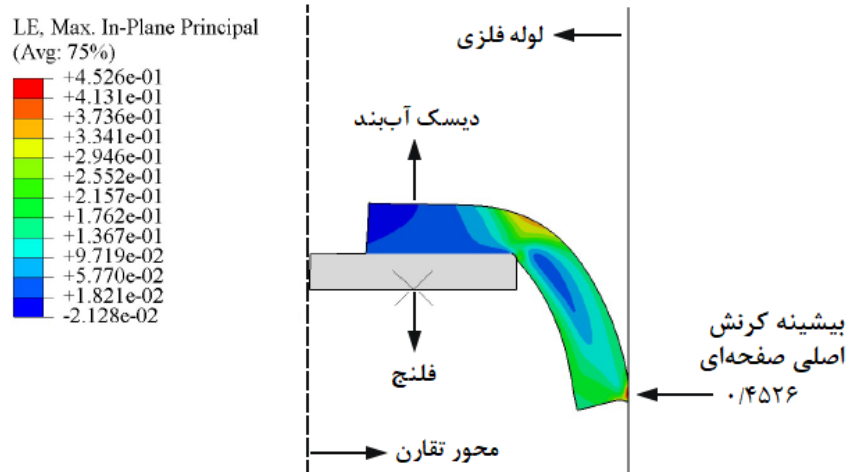
در این پژوهش، حرکت دیسک آب‌بند و رفتار آن در حین عبور از لوله فلزی به‌صورت تجربی و عددی مطالعه شده است. یکی از مهم‌ترین مراحل مدل‌سازی، تعریف ماده هایپرالاستیک مربوط به پلی‌یورتان استفاده‌شده در دیسک آب‌بند جهت شناساندن رفتار هایپرالاستیک آن در نرم‌افزار می‌باشد. از آنجایی که این مواد پلیمری در آزمون کشش تک‌محوره کرنش‌های بزرگی را از خود نشان می‌دهند، انتخاب صحیح محدوده داده تنش-کرنش جهت شناساندن خواص ماده هایپرالاستیک در نرم‌افزار بسیار ضروری به‌نظر

نیازی به وارد نمودن محدوده بیشتر داده تنش-کرنش برای بررسی مسئله حاضر نمی‌باشد. پس از انتخاب مدل هایپرالاستیک مذکور، در قسمت بعد به بررسی تفاوت نتایج مسئله شبیه‌سازی دیسک آب‌بند با استفاده از بازه‌های مختلف کرنش پرداخته خواهد شد.

۴-۳- نتایج شبیه‌سازی عددی

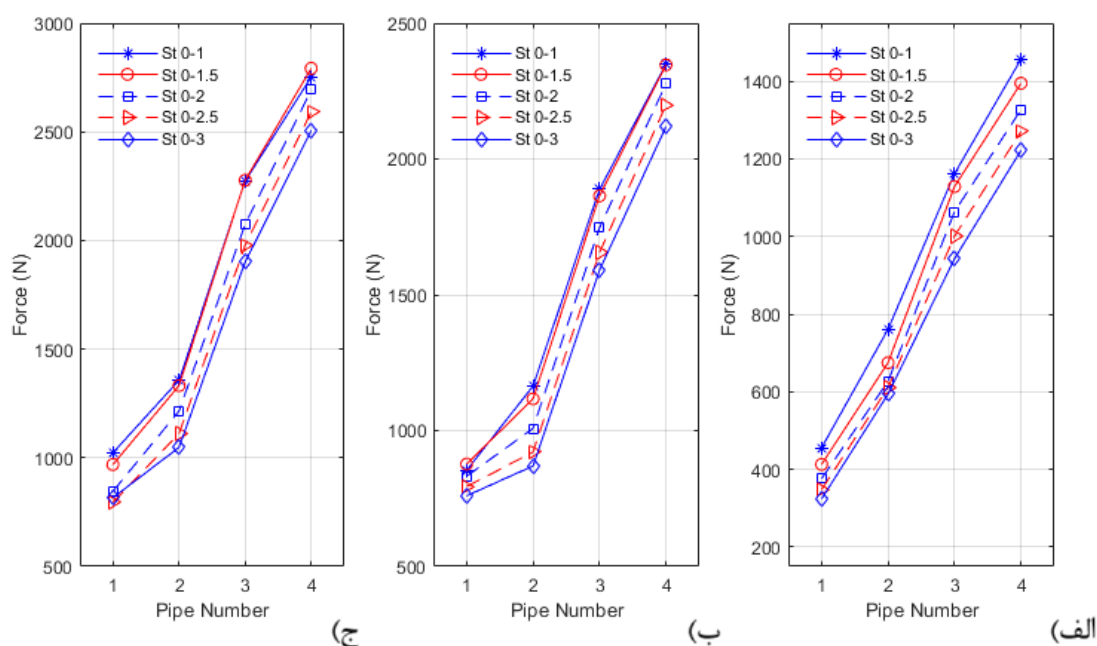
در این قسمت پس از انتخاب مدل هایپرالاستیک چند جمله‌ای کاهش‌یافته مرتبه ۶ و با استفاده از محدوده ۰-۱ کرنش از داده تنش-کرنش آزمون کشش تک‌محوره، شبیه‌سازی مسئله حاضر یعنی عبور دیسک آب‌بند پلی‌یورتانی از لوله فلزی مورد بررسی قرار می‌گیرد. جدول ۵ ضرایب مدل نهایی هایپرالاستیک انتخاب‌شده را نشان می‌دهد که با استفاده از روابط ذکرشده در قسمت قبل برای بازه کرنش ۰-۱ محاسبه گردیده‌اند. مطابق جدول ضریب D_1 مخالف صفر ذکر شده که به معنی فرض تقریباً تراکم‌ناپذیری ماده است. مقدار این ضریب در جدول یک عدد کوچک (در مرتبه 10^{-1}) گزارش شده است که باعث کنترل ترم حجمی معادله به سبب عدد بزرگ مدول بالک برای مواد تقریباً تراکم‌ناپذیر می‌شود. مطابق با نتایج ارائه‌شده به‌صورت مفصل از این مطالعه عددی در [۱۸]، دقت مدل بسیار بالا بوده و تمامی حالت‌های مورد آزمایش در مقایسه با آزمون تجربی با دقت قابل قبول و کمتر از ۱۰ درصد توسط مدل عددی محاسبه شده‌اند. لذا در این قسمت تمرکز بر تفاوت نتایج شبیه‌سازی توسط مدل‌های مختلف هایپرالاستیک که با استفاده از محدوده‌های متفاوت منحنی تنش-کرنش محاسبه شده‌اند، می‌باشد.

شکل ۸ مدل شبیه‌سازی مسئله در نرم‌افزار آباکوس و مشخصاً کرنش اصلی صفحه‌ای دیسک آب‌بند پلی‌یورتانی در مسئله را در گذر از لوله فلزی



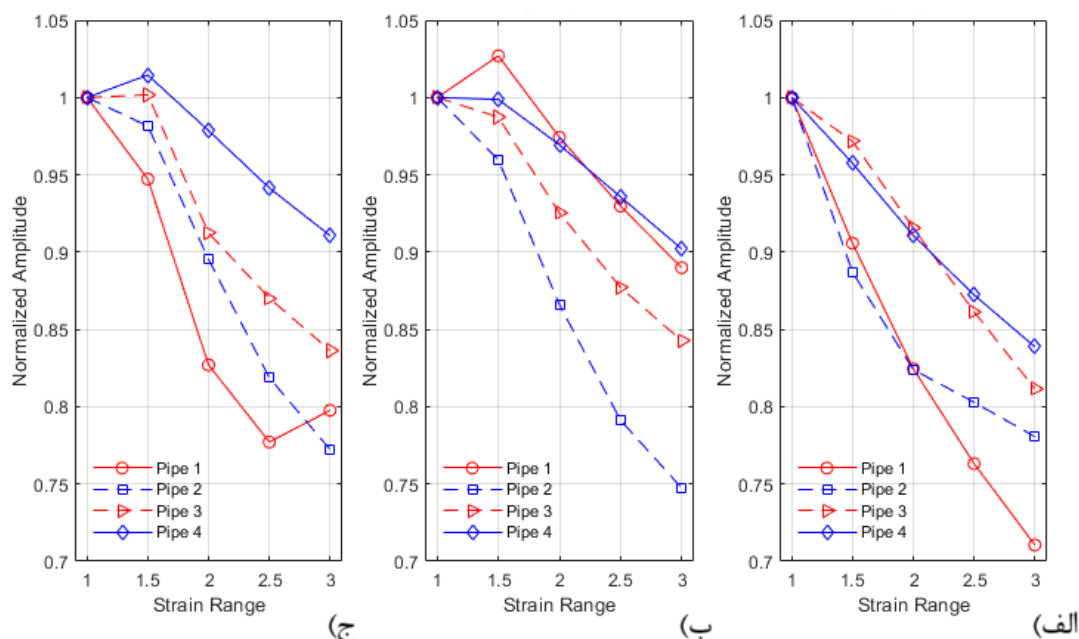
شکل ۸. کانتور بیشینه کرنش اصلی صفحه‌ای دیسک آببند پلی‌یورتانی در حین تماس با لوله فلزی.

Fig. 8. Contour of the maximum in-plane principal strain of the polyurethane sealing disc in contact with the steel pipe.



شکل ۹. نتایج عددی نیرو لازم جهت کشش دیسک پلی‌یورتانی با ضخامت الف) ۸ میلی‌متر، ب) ۱۰ میلی‌متر و پ) ۱۲ میلی‌متر در داخل لوله بر حسب مدل هایپر الاستیک چند جمله‌ای کاهش یافته مرتبه ۶ برای ۵ محدوده مختلف داده آزمون تنش-کرنش.

Fig. 9. Numerical results of the required force for pulling the polyurethane sealing discs with thicknesses of a) 8 mm, b) 10 mm, and c) 12 mm through the pipes using the 6th-order reduced polynomial hyperelastic model fitted with five different ranges of the stress-strain data.



شکل ۱۰. نتایج عددی نرمالیزه شده نیرو لازم جهت کشش دیسک پلی یورتانی با ضخامت الف) ۸ میلی متر، ب) ۱۰ میلی متر و پ) ۱۲ میلی متر بر حسب مدل هایپرالاستیک چند جمله ای کاهش یافته مرتبه ۶ با استفاده از ۵ محدوده مختلف داده آزمون تنش-کرنش برای ۴ لوله فلزی استفاده شده در بستر آزمون تجربی با ضخامت متغیر.

Fig. 10. Normalized numerical results of the required force for pulling the polyurethane sealing discs with thicknesses of a) 8 mm, b) 10 mm, and c) 12 mm through the pipes using the 6th-order reduced polynomial hyperelastic model fitted with five different ranges of the stress-strain data.

مسئله نشان می دهد که با تغییر محدوده تنش-کرنش تا محدوده ۳-۰. جهت ساخت مدل هایپرالاستیک چند جمله ای کاهش یافته مرتبه ۶، انحراف نتایج نسبت به مدل بهتر (مدل محاسبه شده با محدوده کرنش ۱-۰) تا حدود ۲۵ درصد می باشد. لذا می توان استنباط نمود که در شبیه سازی مسئله های هایپرالاستیک، انتخاب بازه ی مناسب از منحنی تنش-کرنش اهمیت بالایی دارد. بدین منظور، بررسی مقدار کرنش های موجود در ماده ی هایپرالاستیک می تواند به تعیین صحیح بازه ی تنش-کرنش حاصل از آزمون تک محوره کمک نماید. بنابراین، با تحلیل کرنش های مسئله و انتخاب داده های تنش-کرنش متناسب با آن، با توجه به مرتبه ی مدل هایپرالاستیک مورد استفاده، دقت پیش بینی رفتار ماده در محدوده ی کرنش های مسئله افزایش خواهد یافت. به عبارت دیگر، وارد نمودن بازه بیش از حد نیاز داده منحنی تنش-کرنش در آزمون تک محوره، می تواند منجر به انحراف زیاد نتایج شبیه سازی می گردد.

می رسد. در مدل عددی ارائه شده در این پژوهش جهت بررسی اثر محدوده داده آزمون تنش-کرنش بر ضرایب هایپرالاستیک، از مدل هایپرالاستیک چند جمله ای کاهش یافته مرتبه ۶ استفاده شده است که دلیل آن، خطای نسبی کمتر مدل حاضر در قیاس با سایر مرتبه ها و مدل های ارائه شده نسبت به داده آزمون کشش تک محور می باشد. از آنجایی که کرنش در مسئله حاضر تقریباً تا مقدار ۰/۵ محاسبه شده، لذا بررسی خطای نسبی مدل هایپرالاستیک استفاده شده در این محدوده سنجیده می شود. بدین منظور، حل مسئله حاضر با مدل های هایپرالاستیک محاسبه شده از داده آزمون تنش-کرنش با محدوده ۱-۰، الی ۳-۰ با گام ۰/۵ بررسی شد. نتایج نشان می دهند که استفاده از محدوده آزمون تنش-کرنش ۱-۰ خطای نسبی مدل هایپرالاستیک استفاده شده در پیش بینی داده آزمون کشش را در حدود ۵ درصد ارزیابی می کند و این در حالی است که برای محدوده کرنش ۳-۰ این خطا به مقدار نزدیک به ۵۵ درصد می رسد. همچنین نتایج حل عددی

- [11] X.-X. Zhu, C.-M. Fu, Y.-T. Wang, S.-M. Zhang, Experimental research on the contact force of the bi-directional pig in oil and gas pipeline, *Petroleum Science*, 20(1) (2023) 474–481.
- [12] J. Bonet, A.J. Gil, R.D. Wood, *Nonlinear solid mechanics for finite element analysis: dynamics*, Cambridge University Press, 2021.
- [13] M. Destrade, M.D. Gilchrist, J. Motherway, J.G. Murphy, Slight compressibility and sensitivity to changes in Poisson's ratio, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 90(4) (2012) 403–411.
- [14] I. Green, Poisson ratio effects and critical value in spherical and cylindrical Hertzian contacts, *Applied Mechanics and Engineering*, 10(3) (2005) 451.
- [15] A. Amirkhani, A.R. Fotuhi, Two-layer artery wall modeling with hyperelastic material assumption, *Modares Mechanical Engineering*, 18(3) (2018) 75–85.
- [16] A.R. Esmaili, M. Keshavarz, A. Mojra, Optimization of hyperelastic model parameters of soft tissue based on genetic algorithm utilizing experimental mechanical dataset, *Modares Mechanical Engineering*, 15(9) (2015) 134–140.
- [17] P. Namashiri, A. Allahverdizadeh, B. Dadashzadeh, Modeling and Simulation of Myocardial Hyperelastic and Viscoelastic Properties with Incorporation of Active Stress, *Modares Mechanical Engineering*, 23(9) (2023) 553–565.
- [18] S. Jouzani, M.H. Soorgee, Experimental and numerical investigation on hyperelastic sealing disc contact behavior in pipeline, a comparison between fluid-driven and pull-through approaches, *Journal of Pipeline Science and Engineering*, 5(2) (2025) 100232.
- [19] D. Systèmes, ABAQUS Documentation, in: Version 6.6 Documentation, 2025a, <https://classes.engineering.wustl.edu/2009/spring/mase5513/abaqus/docs/v6.6/books/usb/default.htm?startat=pt05ch17s05abm07.html#usb-mat-chyperelastic>.
- [1] J. Cordell, H. Vanzant, *Pipeline pigging handbook*, (2003).
- [2] J.F. Hilyard, *The oil & gas industry: A nontechnical guide*, (2012).
- [3] J.N. Tiratsoo, *Pipeline pigging technology*, Gulf Professional Publishing, 1992.
- [4] M. Soorgee, A numerical study on differential pressure needed for ball pig motion in pipelines based on nonlinear hyperelastic material model, *Journal of Natural Gas Science and Engineering*, 59 (2018) 466–472.
- [5] H.S. Naeini, M.H. Soorgee, Experimental investigation on sphere pig movement in multiple thickness pipe, *Journal of Natural Gas Science and Engineering*, 95 (2021) 104152.
- [6] Y. Cao, C. Liu, H. Tian, S. Zhang, Y. Sun, Prediction of the driving force for a cup pig based on the distribution of contact stress, *Journal of Natural Gas Science and Engineering*, 81 (2020) 103415.
- [7] X. Zhu, D. Wang, H. Yeung, S. Zhang, S. Liu, Comparison of linear and nonlinear simulations of bidirectional pig contact forces in gas pipelines, *Journal of Natural Gas Science and Engineering*, 27 (2015) 151–157.
- [8] X. Zhu, W. Wang, S. Zhang, S. Liu, Experimental research on the frictional resistance of fluid-driven pipeline robot with small size in gas pipeline, *Tribology letters*, 65 (2017) 1–10.
- [9] Y.-G. Cao, L. Zhang, C. Liu, X.-Y. Li, Y.-G. Wei, Y.-T. Sun, Prediction of the Driving Force for the Bidirectional Pig Based on the Cantilever-Kelvin Combination Model, *Journal of Pipeline Systems Engineering and Practice*, 12(2) (2021) 04021004.
- [10] H. Zhang, S. Zhang, S. Liu, Y. Wang, L. Lin, Measurement and analysis of friction and dynamic characteristics of PIG's sealing disc passing through girth weld in oil and gas pipeline, *Measurement*, 64 (2015) 112–122.

- [21] C.-J. Kat, P.S. Els, Validation metric based on relative error, *Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems*, 18(5) (2012) 487–520.
- [22] D.C. Montgomery, E.A. Peck, G.G. Vining, *Introduction to linear regression analysis*, John Wiley & Sons, 2021.
- [20] D. Systèmes, ABAQUS Documentation, in: Version 6.6 Documentation, 2025b, <https://classes.engineering.wustl.edu/2009/spring/mase5513/abaqus/docs/v6.6/books/stm/default.htm?startat=ch04s06ath123.html#stm-mat-hyperelastic-eq4>

چگونه به این مقاله ارجاع دهیم

S. Jouzani, M. H. Soorjee, *Study of the Effect of the Stress-Strain Range from a Uniaxial Tensile Test on the Hyperelastic Modeling of a Polyurethane Sealing Disc*, *Amirkabir J. Mech Eng.*, 57(5) (2025) 663-682.

DOI: [10.22060/mej.2025.24318.7858](https://doi.org/10.22060/mej.2025.24318.7858)

