

کمانش غیرموضعی نانورق‌های اورتوتروپ با ترک مرکزی

وحید عبدالوهاب، پرهام معمارزاده*

گروه مهندسی عمران، واحد نجف آباد، دانشگاه آزاد اسلامی، نجف آباد، ایران.

* p-memar@iaun.ac.ir

چکیده:

در این تحقیق، به بررسی جامع کمانش غیرموضعی نانورق‌های اورتوتروپ با ترک مرکزی تحت بارهای تک و دو-محوری پرداخته شده است. با توجه به پیشرفت‌های روزافزون در فناوری نانو و کاربردهای گسترده نانورق‌ها در صنایع مختلف مانند الکترونیک، پزشکی و سازه‌های مهندسی، تحلیل دقیق رفتار مکانیکی این نانو ساختارها امری ضروری است. آسیب‌هایی نظیر ترک که در فرآیند تولید نانورق‌ها به وجود می‌آید، می‌تواند تأثیرات منفی قابل توجهی بر عملکرد این مواد داشته باشد. در این راستا، نظریه‌های غیرکلاسیک غیرموضعی به عنوان رویکردی نوین برای تجزیه و تحلیل رفتار نانورق‌ها به کار گرفته شده است. این تحقیق شامل توسعه معادلات حاکم بر اساس نظریه تغییر شکل برشی مرتبه اول و استفاده از روش المان محدود برای تحلیل نانورق‌های ترک‌دار است. متغیرهای کلیدی مورد مطالعه در این تحقیق عبارتند از: نسبت طول ترک به عرض ورق، عامل مقیاس کوچک که به تأثیرات نانو ساختارها بر رفتار کمانشی اشاره دارد، ضخامت نانورق و شرایط تکیه گاهی مختلف. نتایج به دست آمده نشان می‌دهد که اثر مقیاس کوچک به طور قابل توجهی ظرفیت کمانشی بحرانی نانورق‌ها را کاهش می‌دهد. به ویژه، برای نانورق‌های با نسبت ابعادی 0.6 ، اثر غیرموضعی می‌تواند تا $1/18$ برابر حالت بدون ترک افزایش یابد. علاوه بر این، با افزایش ابعاد جانبی نانورق‌ها، تأثیر عامل غیرموضعی به تدریج کاهش می‌یابد. این پژوهش با ارائه نتایج تحلیل‌های جامع، پایه‌ای مستحکم برای طراحی و بهینه‌سازی نانورق‌های اورتوتروپ تحت بارگذاری‌های مختلف فراهم می‌آورد و به روشن شدن رفتار کمانشی این نانو ساختارها کمک می‌کند. به علاوه، این نتایج می‌توانند به توسعه روش‌های جدید تولید و کاربردهای بهینه نانورق‌ها در صنایع منجر شوند.

کلمات کلیدی: نانورق‌های اورتوتروپ، ترک مرکزی، کمانش فشاری، نظریه غیرموضعی، روش اجزاء محدود توسعه یافته.

۱-مقدمه

با توجه به نیاز بشر به مصالح و سازه‌هایی با خواص برتر و پیشرفت علم و فناوری، فناوری نانو^۱ [۱] در حال رشد و توسعه بوده، که این فناوری شامل ساختارها و تجهیزاتی در مقیاس نانو^۲ می‌باشد. یکی از زیرشاخه‌های مهم در

^۱ nanotechnology

^۲ nanoscale

نانوساختارها^۱، نانورق‌ها با کاربردهای متعدد در صنایع جدید هستند. که می‌توان به کاربرد آن در تولید باتری‌ها [۲]، حسگرهای شیمیایی و بیولوژیکی^۲ [۳]، سلول‌های خورشیدی [۴] و دستگاه‌های میدان تشعشعی [۵] اشاره نمود. این کاربردهای متنوع، مطالعه رفتار مکانیکی نانوساختارها برای طراحی و بهبود قابلیت اطمینان آن‌ها را بیش از هر زمان دیگری برجسته می‌کند.

در مطالعات پیشین گزارش شده بر روی نانورق‌ها، کمانش نانورق گرافن با استفاده از روش مربع دیفرانسیل توسط فرج پور و همکاران [۶] مورد بررسی قرار گرفت. فرج پور و همکاران [۷]، رفتار پس‌کمانش صفحات گرافن چندلایه را با استفاده از نظریه غیرموضعی مورد ارزیابی قرار دادند. آکسنسر و آی دوق دو^۳ [۸]، ارتعاش و کمانش نانوصفحات را به روش لوی و مدل غیرموضعی بررسی کردند. علاوه بر این، در پژوهشی ملک زاده و همکاران [۹، ۱۰]، اثر مقیاس کوچک را بر کمانش حرارتی و ارتعاش نانوصفحات ارتوتروپیک را با نظریه الاستیک غیرموضعی گزارش کردند. معمارزاده و عبدالوهاب [۱۱] در گزارشی، تأثیر نقص ترک را بر ناپایداری نانورق‌های گرافن ترک‌دار براساس عامل مقیاس کوچک را مورد بررسی قرار دادند.

کمانش و پس‌کمانش پانل‌های برشی ترک خورده توسط علی‌نیا و همکاران [۱۲، ۱۳] مورد بررسی قرار گرفت. بریگنتی و کارپینتری^۴ [۱۴]، رفتار کمانش و شکست صفحات نازک ترک خورده زیر بارگذاری برشی را نشان دادند. روش ریتز تک‌دامنه‌ای برای تحلیل کمانش برشی و پس‌کمانش صفحات ترک خورده با ضخامت متوسط توسط میلازو و همکاران^۵ [۱۵] مورد مطالعه قرار گرفت. بریجنتی^۶ [۱۶، ۱۷]، گزارشی را در مورد کمانش صفحات ترک خورده زیر بارهای محوری کششی و فشاری ارائه داد. در تحقیق دیگری، با استفاده از روش اجزاء محدود، کمانش ورق‌ها با ترک مرکزی را زیر بارهای کششی و فشاری را بررسی کرد. با استفاده از روش حل عددی المان محدود، خدمتی و همکاران [۱۸]، کمانش صفحات الاستیک با ترک‌های مرکزی و لبه‌ای را ارزیابی کردند. محمدی و همکاران [۱۹] در پژوهشی رفتار کمانشی صفحات مرکب با ترک‌های مرکزی زیر بارهای فشاری، کششی و برشی را از روش المان محدود توسعه‌یافته مطالعه کردند. صابری و همکاران [۲۰]، کمانش فشاری یک صفحه با ترک خارج از مرکز را با استفاده از المان محدود توسعه‌یافته بررسی کردند. در پژوهش دیگری، معمارزاده و همکاران [۲۱]، از روش حل عددی المان محدود توسعه‌یافته برای بررسی کمانش کششی یک صفحه با ترک خارج از مرکز، استفاده کردند.

¹ nanostructures

² chemical and biological sensors

³ Aksencer and Aydogdu

⁴ Brighenti and Carpinteri

⁵ Milazzo et al.

⁶ Brighenti

در گزارش‌هایی، نتایج آزمایشگاهی و مطالعات عددی با استفاده از روش حل عددی المان محدود توسعه یافته، برای کمانش فشاری ورق با ترک خارج از مرکز، توسط طاهری و معمارزاده [۲۲، ۲۳] ارائه گردید. کاداری و همکاران^۱ [۲۴]، با استفاده از نظریه صفحه هذلولی جدید، اثر مقیاس کوچک را با فرض نظریه الاستیک غیرموضعی جهت بررسی کمانش نانورق اورتوتروپ مستقر بر بستر پاسترناک را مورد بررسی قرار دادند. رجبی و همکاران [۲۵] در گزارشی، با استفاده از نظریه الاستیک غیرموضعی اصلاح شده کامل، معادلات انرژی کرنشی و تغییر شکل نانورق‌های مستطیلی با یک ترک مرکزی، زیر بارگذاری یکنواخت عرضی را بازنویسی کردند و تغییر شکل نانورق‌ها با ترک مرکزی، برای مقادیر مختلف عامل مقیاس کوچک تعیین گردید. علاوه بر این، تعدادی از محققین کمانش ورق‌های ترک‌دار را بررسی کردند، به‌طور مثال، تحلیل کمانش ورق ترک‌دار با خواص ناهمسان در ضخامت را با استفاده از نظریه ورق کلاسیک با روش المان محدود [۲۶، ۲۷]، با روش المان محدود توسعه یافته [۲۸، ۲۹] مورد بررسی قرار دادند. تن‌زاده و عموشاهی [۳۰]، از روش نوار محدود با مرتبه بالاتر برای ارزیابی آنالیز کمانش نانورق‌های ارتوتروپیک استفاده کردند.

در سال‌های اخیر، وانگ و همکاران [۳۱]، به بررسی اثر شار حرارتی خارجی بر رشد ترک در نانوصفحات آلومینیومی پرداختند. آرپناهی و همکاران [۳۲] در تحقیقی، رفتار کمانشی یک نانورق در پایین کانالی که سیال با جریان یک بعدی از روی آن عبور می‌کند، را مورد بررسی قرار دادند. صادقیان و همکاران [۳۳]، به بررسی غیرخطی کمانش حرارتی و مکانیکی نانورق حلقوی-دایره‌ای تک‌لایه و دولایه ارتوتروپیک مستقر بر بسترهای پاسترناک و وینکلر براساس نظریه گرادیان کرنش غیرموضعی پرداختند. آنالویی و همکاران [۳۴]، به آنالیز ترموالکترومکانیکی^۲ نانورق‌های پیزوالکتریک چهار ضلعی و مثلثی براساس نظریه غیرموضعی و نظریه صفحه کیرشهف پرداختند. دایخ^۳ و همکاران [۳۵]، با استفاده از مواد درجه‌بندی عملکردی پوشش داده شده، مدل‌سازی دقیق آن‌ها، یک مدل نانوصفحه جدید را پیشنهاد دادند تا رفتار کمانشی صفحات متخلخل درجه‌بندی عملکردی دولایه را مشخص کنند، که از نظر هندسی و هم از نظر فیزیکی وابسته به ریزساختار بودند.

از بررسی سوابق پیش‌گفت، مشاهده می‌گردد که تحقیقات زیادی بر روی ورق‌های ترک‌دار با در نظر گرفتن نظریه-های کلاسیک محیط پیوسته صورت پذیرفته است. همچنین مطالعات دیگری کمانش نانورق‌ها را بررسی نموده‌اند اما مطالعات محدودی کمانش غیرموضعی نانورق‌های ترک‌دار را مورد بررسی قرار داده‌اند. ضمناً مشاهده می‌گردد که نظریه‌های مختلفی برای مدل‌سازی در ابعاد نانو وجود دارد مانند نظریه تنش کوپل^۴، تنش کوپل اصلاح شده^۵، گرادیان

¹ Kadari et al.

² Thermo-electro-mechanical

³ Daikh

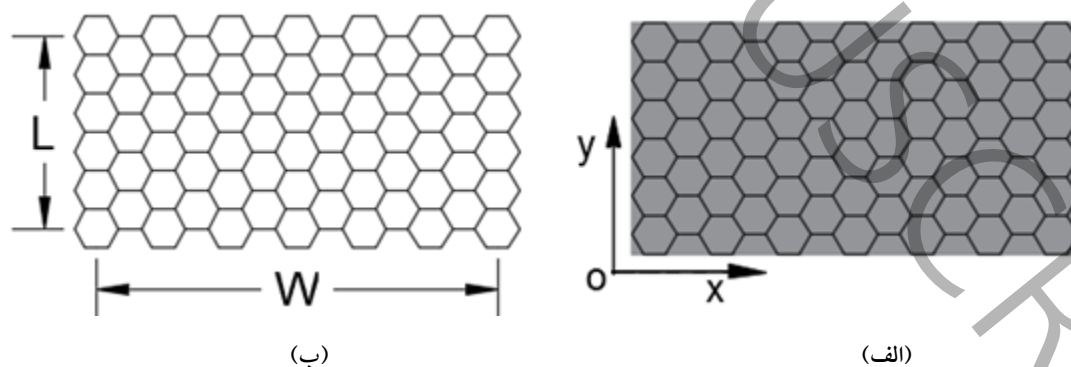
⁴ Couples stress theory

⁵ Modified couples stress theory

کرنشی و نظریه غیرموضعی؛ اما توجه بیشتری نسبت به نظریه غیرموضعی ارینگن شده است و مقالات بیشتری در این ارتباط مشاهده می‌گردد. نظریه غیرموضعی طیف وسیعی از برهم کنش بین اتمی را در نظر می‌گیرد. چن^۱ [۳۶] در مقاله‌ی بیان نموده که استفاده از نظریه غیرموضعی برای شبیه‌سازی پدیده‌هایی در ابعاد نانو مناسب و قابل پذیرش است. در این پژوهش، تحلیل کماتش فشاری غیرموضعی نانورق‌های اورتوتروپیک ترک‌دار با در نظر گرفتن معادلات حاکم براساس نظریه تغییرشکل برشی مرتبه اول و با استفاده از نظریه غیرموضعی ارینگن توسعه داده می‌شود. متغیرهای مورد مطالعه در نانورق‌های اورتوتروپ ترک‌دار عبارتند از: عامل مقیاس کوچک، نسبت طول ترک، راستای بارگذاری، نسبت ضخامت، ابعاد جانبی، نسبت‌های ابعادی و شرایط تکیه‌گاهی مختلف، که با استفاده از برنامه متلب و به‌روش اجزاء محدود توسعه‌یافته تحلیل گردید. از طرفی پدیده‌ی کماتش در سازه‌هایی در مقیاس میکرو و نانو بسیار محتمل بوده و سازه‌های پیش‌گفت در کاربردهای مختلف همواره در معرض بارهای محوری و نهایتاً پدیده‌ی کماتش قرار دارند به‌عنوان مثال با در اختیار داشتن رفتار میکرو/نانوسازه‌ها زیر بار محوری و مقایسه‌ی حالت سالم و معیوب (دارای نقص؛ مثل: شیار، ناچ، نابجایی یا عیوب کریستالی و...) این سازه‌ها با نتایج حاصل از آزمایش روی یک نمونه واقعی می‌توان تا حدود زیادی از وجود نقص در سازه و حتی‌الامکان قرارگیری آن آگاه شد. بنابراین، بررسی پدیده‌ی کماتش نانورق‌های ترک‌دار، می‌تواند از مطالعات مهم و مفید در زمینه‌ی طراحی میکرو/نانو ابزارها باشد.

۲- نظریه غیرموضعی^۲

نظریه‌های مکانیک کلاسیک به‌دلیل صرف‌نظر کردن از اثر اندرکنش بین اتم‌ها و در نظر گرفتن یک محیط پیوسته برای ماده، قادر به ارائه مدل مناسبی از نانو ساختارها نیستند. در شکل (۱-الف)، منظور نمودن محیط پیوسته برای ماده، براساس نظریه کلاسیک، و در شکل (۱-ب)، در نظر گرفتن اثر مجزای اتم‌ها طبق نظریه‌های غیرموضعی، نشان داده شده است [۶].



¹ Chen

² Nonlocal theory

شکل (۱) الف) ورق با در نظر گرفتن محیط پیوسته برای ماده، براساس نظریه کلاسیک، ب) ورق با در نظر گرفتن اثر مجزای اتم‌ها طبق نظریه‌های غیرموضعی،

Figure (1) a) Sheet considering a continuous medium for the material, according to classical theory, b) Sheet considering the separate effect of atoms according to non-local theories₂

در بین روش‌های مختلف مدل‌سازی در مقیاس نانو، نظریه غیرموضعی ارینگن^۱ [۳۷-۴۰]، با وارد کردن این اثرات در معادلات ترکیبی خود، به‌عنوان خواص مواد و پیش‌بینی عدم تکینگی در نوک ترک، قدرت بالایی در ارائه مدل دقیق و مناسبی از این نانوساختارها را دارد. نظریه ارینگن، یکی از معروف‌ترین نظریه‌های غیرموضعی در مقیاس نانو است، نظریه غیرموضعی، اولین بار توسط ارینگن در سال ۱۹۸۳، با اضافه کردن مقیاس طول به معادلات ساختاری، به‌عنوان یک مؤلفه ماده مطرح شد. این نظریه برای تحلیل مکانیکی نانوساختارها از دقت بسیار خوبی برخوردار است [۳۷].

تفاوت اصلی بین نظریه کلاسیک و نظریه‌های غیرموضعی، در تعریف تنش است. نظریه‌های کلاسیک مکانیک محیط-های پیوسته^۲، فرض می‌کند که تانسور تنش در نقطه‌ی مادی، تابعی از تانسور کرنش در همان نقطه‌ی مادی می‌باشد، در حالی که نظریه غیرموضعی ارینگن [۳۷-۴۰]، تانسور تنش در نقطه‌ی از محیط مادی، توسط یک معادله‌ی انتگرالی به تانسور کرنش در تمام محیط مادی وابسته می‌شود، معادله‌ی ساختاری^۳ نظریه الاستیسیته غیرموضعی ارینگن^۴ به‌صورت انتگرالی مطابق رابطه (۱) بیان می‌شود:

$$\sigma(x) = \iiint \alpha(|x' - x|, \tau) C \varepsilon(x') dv \quad (1)$$

که در آن $\alpha(|x' - x|, \tau)$ تابعی است که به مدول غیرموضعی^۵ مشهور است و در واقع نوعی تابع وزنی برای معادله‌ی انتگرالی محسوب می‌شود. $|x' - x|$ فاصله‌ی نقطه‌ی موضعی x و نقطه‌ی غیرموضعی x' می‌باشد. مؤلفه C آرایه مشخصات مصالح از مرتبه چهار^۶ است. τ در رابطه‌ی (۱) مؤلفه‌ی است که با نسبت طول مشخصه داخلی نانوساختار $\bar{a}$ و طول مشخصه خارجی l تعیین می‌شود و میزان اهمیت مقیاس‌های کوچک را در معادله‌ی ساختاری انتگرالی نظریه غیرموضعی مشخص می‌سازد. در واقع τ به‌صورت رابطه (۲) تعریف می‌شود:

$$\tau = \frac{e_0 \bar{a}}{l} = \sqrt{\frac{\mu}{l^2}} \quad (2)$$

¹ Eringen

² Continuous medium

³ Constitutive law

⁴ Eringen's nonlocal elasticity theory

⁵ Nonlocal modulus

⁶ Fourth-order constitutive tensor

که در آن e_0 یک عامل مادی است که با تطابق نتایج نظریه‌ی غیرموضعی با نتایج آزمایش یا شبیه‌سازی تعیین می‌شود. مؤلفه $\mu = (e_0 \bar{a})^2$ به عامل ابعاد کوچک^۱ مشهور است. در معادله‌ی انتگرالی ساختاری، وقتی τ به سمت صفر میل می‌کند باید اثر غیرموضعی بودن تابع تنش و کرنش از بین رفته و معادله به حالت کلاسیک $\sigma = C : \varepsilon$ میل کند. بنابراین مدول غیرموضعی $\alpha(|x' - x|, \tau)$ باید طوری باشد که وقتی τ به سمت صفر میل می‌کند، به تابع دلتای دیراک^۲ میل کند، یعنی:

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \alpha(|x' - x|, \tau) = \delta(|x' - x|) \quad (۳)$$

همچنین تابع α باید حداکثر مقدار خود را در نقطه‌ی موضعی اختیار کند. با تعریف مدول غیرموضعی مناسبی که شرایط لازم را ارضا کند، قالب دیفرانسیلی معادله‌ی ساختاری غیرموضعی از شکل انتگرالی آن، به صورت رابطه (۴) بدست می‌آید:

$$(1 - \mu \nabla^2) \sigma^{nl} = C : \varepsilon = \sigma^l \quad (۴)$$

در رابطه (۴)، σ^{nl} ، تانسور تنش غیرموضعی^۳، σ^l تانسور تنش موضعی^۴ و ∇^2 عملگر لاپلاس است که به صورت $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ تعریف می‌شود در صورت عدم فرض ابعاد کوچک، μ و در نتیجه τ به سمت صفر میل می‌کنند و رابطه (۴)، به معادله‌ی ساختاری کلاسیک $\sigma = C : \varepsilon$ تبدیل می‌شوند [۴۱].

۳- حل عددی

در این مطالعه، برای تحلیل کمانش نانورق‌های اوتوتروپ ترک‌دار، برنامه‌نویسی در نرم‌افزار متلب^۵ به روش المان محدود توسعه‌یافته^۶ صورت پذیرفت. به‌طوری‌که در صورت بروز ترک در نانورق‌ها، روش المان محدود توسعه‌یافته برای تجزیه و تحلیل ورق‌های ترک خورده نسبت به المان محدود استاندارد سودمندتر است. روش المان محدود توسعه یافته، یک مدل تکینگی از میدان تنش در نزدیکی نوک ترک ایجاد می‌کند و ناپیوستگی‌های قوی را در اشکال پرش در میدان جابجایی در سطح ترک‌ها ثبت می‌کند. در این تحقیق از المان‌های ورق چهارضلعی هشت‌گره‌ای براساس نظریه تغییرشکل برشی مرتبه اول در چارچوب المان محدود توسعه‌یافته برای تجزیه و تحلیل معادلات درون صفحه و کمانش

^۱ Small-scale parameter

^۲ Dirac's delta function

^۳ Nonlocal

^۴ Local

^۵ MATLAB

^۶ Extended finite element method (XFEM)

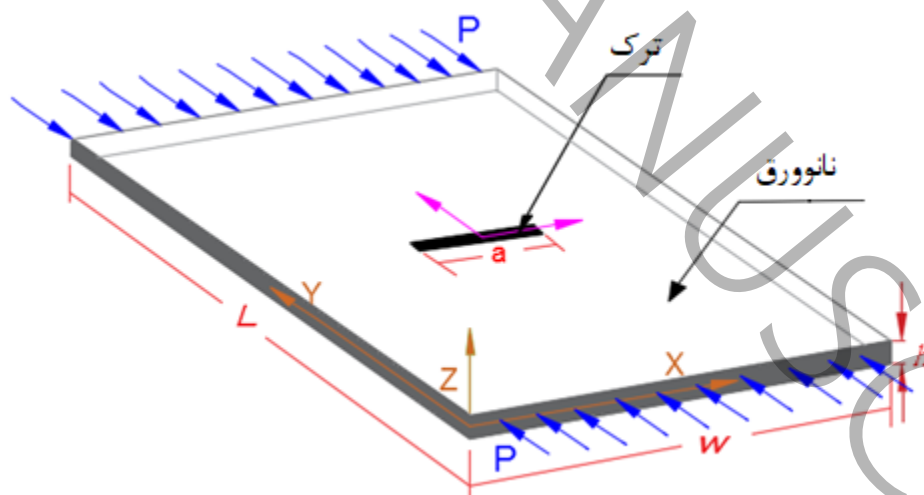
ویژه استفاده شده است.

۳-۱- پیکربندی مسأله

معادلات تعادل برای المانهای مستطیلی ورق زیر بارهای درون صفحه، به شرح روابط (۵) می باشند [۴۵] (نشان گر nl) نشان دهنده محیط غیرموضعی و نشان گر (l) نشان دهنده محیط پیوسته موضعی می باشد):

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_{xx}^{nl}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}^{nl}}{\partial y} &= 0, & \frac{\partial N_{xy}^{nl}}{\partial x} + \frac{\partial N_{yy}^{nl}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial Q_x^{nl}}{\partial x} + \frac{\partial Q_y^{nl}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left(N_{xx}^{nl} \frac{\partial w}{\partial x} + N_{xy}^{nl} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(N_{xy}^{nl} \frac{\partial w}{\partial x} + N_{yy}^{nl} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + q &= 0 \\ \frac{\partial M_{xx}^{nl}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}^{nl}}{\partial y} - Q_x^{nl} &= 0, & \frac{\partial M_{xy}^{nl}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yy}^{nl}}{\partial y} - Q_y^{nl} &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

در روابط (۵) عاملهای بردار نیروهای محوری منتهجه^۱ (N) ، نیروهای برشی (Q) ، و گشتاورهای ورق (M) زیر یک بار درون صفحه، منظور شده است. با توجه به این که در این تحقیق، بار کمانشی نانورق اورتوتروپ با ترک مرکزی زیر بار فشاری مطابق شکل (۲) مورد بررسی می باشد بار عمود بر سطح صفر $(q = 0)$ منظور می گردد.



شکل (۲) نانورق اورتوتروپ دارای ترک مرکزی زیر بارگذاری تک محوری

Figure (2) Orthotropic nanosheet with central crack under uniaxial loading

¹ Resulting axial forces

حال با در نظر گرفتن $(q = 0)$ و رابطه (۴) براساس نظریه غیرموضعی، شکل انتگرال وزنی^۱ رابطه (۵) با اعمال عملگر $(1 - \mu \nabla^2)$ ، به صورت رابطه (۶) تغییر می یابد:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \chi \left(\frac{\partial N_{xx}^I}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}^I}{\partial y} \right) d\Omega = 0, \quad \int_{\Omega} \chi \left(\frac{\partial N_{xy}^I}{\partial x} + \frac{\partial N_{yy}^I}{\partial y} \right) d\Omega = 0 \\ \int_{\Omega} \chi \left(\frac{\partial Q_x^I}{\partial x} + \frac{\partial Q_y^I}{\partial y} + (1 - \mu \nabla^2) \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(N_{xx}^{nl} \frac{\partial w}{\partial x} + N_{xy}^{nl} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(N_{xy}^{nl} \frac{\partial w}{\partial x} + N_{yy}^{nl} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] \right) d\Omega = 0 \\ \int_{\Omega} \chi \left(\frac{\partial M_{xx}^I}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}^I}{\partial y} - Q_x^I \right) d\Omega = 0, \quad \int_{\Omega} \chi \left(\frac{\partial M_{xy}^I}{\partial x} + \frac{\partial M_{yy}^I}{\partial y} - Q_y^I \right) d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

که در روابط (۶)، χ تابع وزن^۲ و Ω محیط مادی^۳ در انتگرال گیری وزنی می باشند. از طرفی میدان جابجایی^۴ براساس نظریه تغییر شکل برشی مرتبه اول^۵ [۴۵]، به صورت رابطه (۷) تعریف می شود:

$$\begin{aligned} U(x, y, z) = u(x, y) + z \theta_x(x, y) \\ V(x, y, z) = v(x, y) + z \theta_y(x, y), \quad W(x, y, z) = w(x, y) \end{aligned} \quad (7)$$

که در آن U و V و W مولفه های جابجایی نقطه (x, y, z) از ورق و u ، v و w جابجایی همان نقطه در میان ورق در راستاهای به ترتیب x ، y و z بر اساس مختصات دکارتی ورق می باشند و همچنین θ_x و θ_y به ترتیب بیان گر زاویه ی چرخش صفحه ی میانی حول محورهای x ، y هستند. همچنین روابط کرنش-جابجایی بر اساس رابطه (۸) نیز مطرح می گردد [۴۵]:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) \quad (8)$$

¹ Weighted integral form

² Weight function

³ Material domain

⁴ Displacement field

⁵ First order shear deformation theory (FSDT)

با جایگذاری میدان جابجایی، رابطه (۷)، در روابط کرنش - تغییر مکان براساس رابطه غیرخطی ون - کارمن^۱، رابطه (۸)، روابط کرنش براساس نظریه برشی مرتبه اول، به صورت روابط (۹) حاصل می گردد:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + z \frac{\partial \theta_x}{\partial x}, & \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + z \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + z \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right)\end{aligned}\quad (9)$$

که تانسور نیروهای محوری منتهجه^۲ (N)، نیروهای برشی^۳ (Q) و ممان ها (M) بر حسب واحد طول المان های دیفرانسیلی ورق زیر بار درون صفحه بر اساس کرنش های بدست آمده در رابطه (۶) طبق نظریه تغییر شکل برشی مرتبه اول به شرح روابط (۱۰) بدست می آیند [۴۵]:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 & \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 & \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix}^T \\ \begin{bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} & \frac{\partial \theta_y}{\partial y} & \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \end{bmatrix}^T \\ \begin{bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{bmatrix} &= \kappa_s \begin{bmatrix} A_{44} & 0 \\ 0 & A_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial y} + \theta_y & \frac{\partial w}{\partial x} + \theta_x \end{bmatrix}^T\end{aligned}\quad (10)$$

در رابطه (۱۰)، κ_s ضریب اصلاح برش^۴ می باشد. که برای ورق مستطیلی بدون ترک $\kappa_s = \frac{5}{6}$ است. مؤلفه های D_{ij} و

A_{ij} به ترتیب سختی های طولی و خمشی^۵ در روابط (۱۰)، که به صورت روابط (۱۱) مطرح می گردند [۴۵]:

$$A_{11} = \frac{E_1 h}{1 - \nu_{12} \nu_{21}}, \quad A_{22} = \frac{E_2 h}{1 - \nu_{12} \nu_{21}}, \quad A_{12} = \frac{\nu_{12} E_2 h}{1 - \nu_{12} \nu_{21}}$$

¹ Von-Karman

² Resulting axial forces

³ Shear forces

⁴ Shear correction factor

⁵ Extensional and bending stiffnesses

$$A_{44} = G_{23}h, \quad A_{55} = G_{13}h, \quad A_{66} = G_{12}h$$

$$D_{11} = \frac{E_1 h^3}{12(1-\nu_{12}\nu_{21})}, \quad D_{22} = \frac{E_2 h^3}{12(1-\nu_{12}\nu_{21})}, \quad D_{12} = \frac{\nu_{12}E_2 h^3}{12(1-\nu_{12}\nu_{21})}, \quad D_{66} = \frac{G_{12}h^3}{12} \quad (11)$$

در روابط (۱۱)، مؤلفه‌های E ، G و ν به ترتیب مدول الاستیسته، مدول برشی و نسبت پواسون در راستاهای ۱، ۲ و ۳ در مواد و h ضخامت نانورق می‌باشد. که در این تحقیق برای نانورق‌های ایزوتروپ، مشخصات مصالح طبق روابط (۱۱) به صورت $E_1 = E_2 = E$ ، $\nu_{12} = \nu_{21} = \nu$ ، $G_{12} = G_{23} = G_{13} = G$ منظور می‌گردند. از طرفی، معادلات تعادل نانورق براساس رابطه (۶)، را می‌توان با جایگزینی روابط (۱۰) به صورت روابط (۱۲) بدست آورد:

$$\int_{\Omega} \chi \left[A_{11} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + A_{12} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial xy} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial xy} \right) + A_{66} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial xy} + \frac{\partial^2 w}{\partial xy} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] d\Omega = 0$$

$$\int_{\Omega} \chi \left[A_{66} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial xy} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial xy} \frac{\partial w}{\partial x} \right) + A_{12} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial xy} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial xy} \right) + A_{22} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] d\Omega = 0$$

$$\int_{\Omega} \chi \left[K_s A_{55} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right) + K_s A_{44} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right) + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \left(N_{xx} \frac{\partial w}{\partial x} + N_{xy} \frac{\partial w}{\partial y} \right)}_a + \underbrace{\frac{\partial}{\partial y} \left(N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} + N_{yy} \frac{\partial w}{\partial y} \right)}_b \right] d\Omega = 0$$

$$(12) \int_{\Omega} \chi \left[D_{11} \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2} + D_{12} \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial xy} + D_{66} \left(\frac{\partial^2 \theta_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial xy} \right) - K_s A_{55} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \theta_x \right) \right] d\Omega = 0$$

$$\int_{\Omega} \chi \left[D_{66} \left(\frac{\partial^2 \theta_x}{\partial xy} + \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial x^2} \right) + D_{12} \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial xy} + D_{22} \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial y^2} - K_s A_{44} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \theta_y \right) \right] d\Omega = 0$$

حال با گرفتن انتگرال جزء به جزء از عبارت‌های دارای مرتبه بالای مشتق در رابطه (۱۲)، شکل ضعیف^۱ رابطه حاصل می‌گردد، به طور مثال، با گرفتن انتگرال جزء به جزء سه رابطه آخر رابطه (۱۲) بجز عبارت‌های a و b ، رابطه (۱۳) حاصل گردید:

¹ Weak form

$$-\int_{\Omega} \frac{\partial \chi}{\partial x} K_s A_{55} \frac{\partial w}{\partial x} d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\partial \chi}{\partial x} K_s A_{55} \theta_x d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\partial \chi}{\partial y} K_s A_{44} \frac{\partial w}{\partial y} d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\partial \chi}{\partial y} K_s A_{44} \theta_y d\Omega \quad (13)$$

$$-\int_{\Omega} \chi K_s A_{55} \frac{\partial w}{\partial x} d\Omega - \int_{\Omega} \chi K_s A_{55} \theta_x d\Omega - \int_{\Omega} \chi K_s A_{44} \frac{\partial w}{\partial y} d\Omega - \int_{\Omega} \chi K_s A_{44} \theta_y d\Omega$$

$$-\int_{\Omega} \frac{\partial \chi}{\partial x} D_{11} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\partial \chi}{\partial x} D_{12} \frac{\partial \theta_y}{\partial y} d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\partial \chi}{\partial y} D_{66} \frac{\partial \theta_x}{\partial y} d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\partial \chi}{\partial y} D_{66} \frac{\partial \theta_y}{\partial x} d\Omega$$

$$-\int_{\Omega} \frac{\partial \chi}{\partial x} D_{66} \frac{\partial \theta_x}{\partial y} d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\partial \chi}{\partial x} D_{66} \frac{\partial \theta_y}{\partial x} d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\partial \chi}{\partial y} D_{12} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\partial \chi}{\partial y} D_{22} \frac{\partial \theta_y}{\partial y} d\Omega$$

که با منظور نمودن مؤلفه $(j=1,2,3)$ $\chi = \varphi_j$ براساس روش ریتز، در رابطه (۱۳)، ماتریس سختی استاندارد^۱

نانوورق (K_s) به صورت رابطه (۱۴) حاصل می گردد:

$$K_s = \int_{\Omega} k_s \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \\ 0 & \varphi_j \\ \varphi_j & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{44} & 0 \\ 0 & A_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} & 0 & \varphi_i \\ \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} & \varphi_i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{bmatrix} d\Omega$$

$$+ \int_{\Omega} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} & 0 & \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} & \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{bmatrix} d\Omega \quad (14)$$

و به همین ترتیب، ماتریس سختی هندسی^۲ نانوورق (K_G) به شکل رابطه (۱۵) حاصل می گردد:

¹ Standard stiffness matrices

² Geometric stiffness matrices

$$\begin{aligned}
K_G = & \int_{\Omega} \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} N_{xx}^l & N_{xy}^l \\ N_{xy}^l & N_{yy}^l \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} & 0 & 0 \\ \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} & 0 & 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{array} \right] d\Omega \\
& + \mu \int_{\Omega} \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial y^2} & 2 \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial xy} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccc} N_{xx}^{nl} & N_{xx}^{nl} & 0 \\ N_{yy}^{nl} & N_{yy}^{nl} & 0 \\ N_{xy}^{nl} & N_{xy}^{nl} & 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x^2} & 0 & 0 \\ \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial y^2} & 0 & 0 \\ 2 \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial xy} & 0 & 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{array} \right] d\Omega \quad (15) \\
& + 2\mu \int_{\Omega} \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial y^2} & 2 \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial xy} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccc} 0 & -N_{xx}^{nl} & \frac{1}{2} N_{xy}^{nl} \\ -N_{yy}^{nl} & 0 & \frac{1}{2} N_{xy}^{nl} \\ -\frac{1}{2} N_{xy}^{nl} & -\frac{1}{2} N_{xy}^{nl} & \frac{N_{xx}^{nl} + N_{yy}^{nl}}{4} \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x^2} & 0 & 0 \\ \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial y^2} & 0 & 0 \\ 2 \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial xy} & 0 & 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{array} \right] d\Omega
\end{aligned}$$

۳-۲- المان محدود توسعه یافته^۱

در روش المان محدود توسعه یافته از همان توابع شکل روش المان محدود استاندارد استفاده می شود و تنها درجات آزادی گره های اطراف ترک افزایش پیدا می کند (غنی سازی^۲). یعنی با اضافه نمودن توابع خاص، درجات آزادی که به واسطه ناپیوستگی در محل ترک درون المان بوجود می آید، به گره های آن المان اختصاص پیدا می کند. در روش اجزاء محدود توسعه یافته جهت غنی سازی برای مدل کردن ناپیوستگی قوی^۳ (ترک) از تابع هویساید^۴ و توابع تکنه^۵ استفاده می شود [۴۳]. به عنوان مثال طبق شکل (۳)، گره های اطراف ترک که با مربع مشخص شده اند از طریق تابع هویساید غنی می شوند و هشت گره ی اطراف نوک ترک که با دایره ی توپر مشخص شده اند از طریق توابع تکنه غنی می شوند.

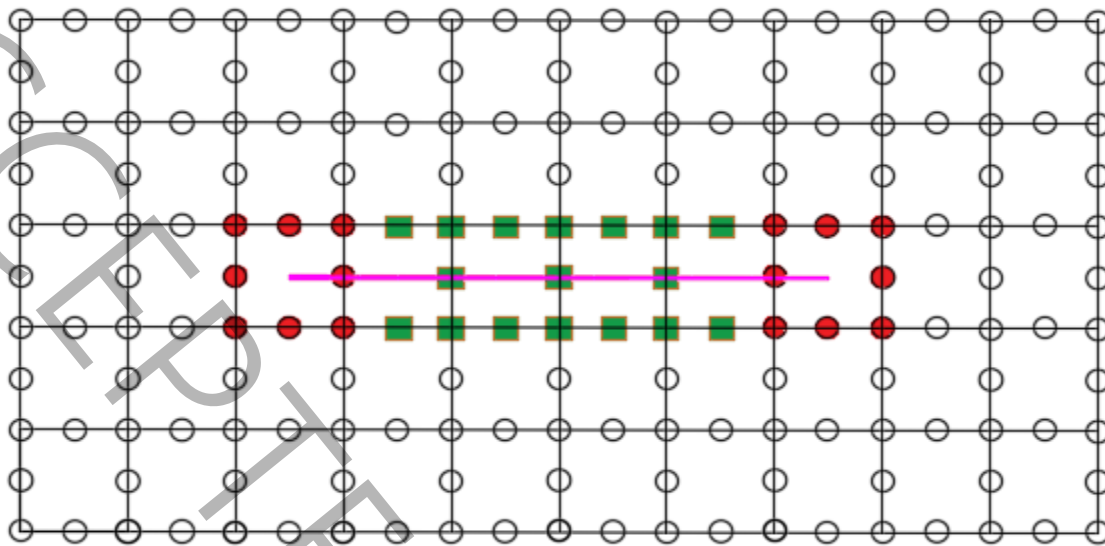
¹ Extended finite element method (XFEM)

² Enrichmen

³ Strong discontinuity

⁴ Heaviside function

⁵ Singular functions



شکل (۳) گره‌های غنی شده با تابع هویساید و توابع تکینه [۴۳].

Figure (3) Enriched nodes with the Heaviside function and singular functions [43].

در حقیقت عمل غنی‌سازی به منظور انتقال ناپیوستگی از درون المان‌ها به گره‌ها انجام می‌شود. تابع غنی‌ساز هویساید و تکینه طبق روابط (۱۶) و (۱۷) بیان می‌شود، در رابطه (۱۷)، فاصله تا نوک ترک و θ زاویه نسبت به راستای ترک در دستگاه مختصات قطبی هستند [۴۳]:

$$H(x) = \begin{cases} +1 & \text{برای گره‌های بالای ترک طبق شکل (۳)} \\ -1 & \text{برای گره‌های پایین ترک طبق شکل (۳)} \end{cases} \quad (۱۶)$$

در رابطه (۱۶)، x مختصات نقطه مورد نظر است.

$$B(r, \theta) = \{B_1, B_2, B_3, B_4\} = \left\{ \sqrt{r} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right), \sqrt{r} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \sqrt{r} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin(\theta), \sqrt{r} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin(\theta) \right\} \quad (۱۷)$$

۳-۳ گسسته‌سازی المان محدود توسعه یافته^۱

در این پژوهش از المان‌های هشت گره‌ای^۲ ورق جهت مدل کردن کمانش نانوورق‌های ترک‌دار استفاده شده است. برای درونیابی این المان‌ها از رابطه (۱۸) استفاده شده است [۴۴].

^۱ Extended finite element method discretization

^۲ 8-noded elements

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n \varphi_i(\xi, \eta) \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix} + \frac{\zeta t}{2} \sum_{i=1}^n \varphi_i(\xi, \eta) \mathbf{V}^3, \quad \mathbf{V}^3 = \begin{Bmatrix} \mathbf{V}^{3(1)} \\ \mathbf{V}^{3(2)} \\ \mathbf{V}^{3(3)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (18)$$

در رابطه فوق، t ضخامت المان نانوورق، $\varphi_i(\xi, \eta)$ توابع شکل^۱ در دستگاه مختصات طبیعی، $n=8$ تعداد گره‌ها در المان، $\mathbf{V}^3$ بردار نرمال واحد و ζ دستگاه مختصات طبیعی^۲ عمود بر سطح نانوورق می‌باشد. توابع شکل در دستگاه مختصات طبیعی در یک المان هشت گره‌ای طبق رابطه (۱۹) بدست می‌آیند [۴۵]:

$$\varphi_i = -\frac{1}{4}(1-\xi_i\xi)(1-\eta_i\eta)(1+\xi_i\xi+\eta_i\eta) \quad (\xi_i, \eta_i = 0, 1, -1) \quad (19)$$

بر اساس تجربه نویسندگان، استفاده از توابع درون‌یاب مربوط به اجزای محدود ورق چهارگره‌ای در حل عددی ورق‌ها با فرض نظریه میندلین^۳ منجر به ایجاد پدیده قفل برشی^۴ و در نتیجه خطای عمده محاسباتی می‌شود. یک راه پیشگیری از وقوع این پدیده، استفاده از اجزای محدود ورق هشت‌گره‌ای است که در مقاله حاضر از آن استفاده شده است؛ روش دیگر پیشگیری از وقوع قفل برشی، استفاده از روش انتگرال‌گیری کاهش‌یافته است که در مرجع [۲۱] به تفصیل شرح داده شده است.

میدان جابجایی کلی در روش اجزاء محدود توسعه‌یافته برای هر نقطه دلخواه طبق رابطه (۲۰) بدست می‌آید [۴۳]:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \mathbf{u}_{fem} + \mathbf{u}_{enrich} \quad (20)$$

در رابطه فوق، u, v, w به ترتیب مؤلفه‌های جابجایی در راستای x, y, z هستند. همچنین $\mathbf{u}_{fem}$ میدان جابجایی اجزاء محدود استاندارد و $\mathbf{u}_{enrich}$ میدان جابجایی قسمت‌های شامل سطح ترک و اطراف نوک ترک است. میدان جابجایی اجزاء محدود استاندارد طبق رابطه (۲۱) بیان می‌شود [۴۳]:

$$\mathbf{u}_{fem} = \sum_{i=1}^n \varphi_i \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix} + \frac{\zeta t}{2} \sum_{i=1}^n \varphi_i \{ \beta_i \mathbf{V}^1 - \alpha_i \mathbf{V}^2 \}, \quad \mathbf{V}^1 = \begin{Bmatrix} \mathbf{V}^{1(1)} \\ \mathbf{V}^{1(2)} \\ \mathbf{V}^{1(3)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{V}^2 = \begin{Bmatrix} \mathbf{V}^{2(1)} \\ \mathbf{V}^{2(2)} \\ \mathbf{V}^{2(3)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (21)$$

¹ Shape functions

² Natural coordinate system

³ Mindlin Theory

⁴ Shear locking

در رابطه فوق، $\mathbf{V}^1$ و $\mathbf{V}^2$ بردارهای متعامد بردار نرمال واحد هستند. α_i و β_i به ترتیب درجات آزادی چرخشی نسبت به راستای $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ هستند. میدان جابجایی قسمت‌های شامل سطح ترک و اطراف نوک ترک ($\mathbf{u}_{enrich}$) طبق رابطه (۲۲) بیان می‌شود [۴۳]:

$$\mathbf{u}_{enrich} = \mathbf{u}_{Heaviside} + \mathbf{u}_{Tip} \quad (۲۲)$$

در رابطه فوق، $\mathbf{u}_{Heaviside}$ و $\mathbf{u}_{Tip}$ به ترتیب میدان جابجایی غنی شده توسط تابع هوپساید و میدان جابجایی غنی شده توسط توابع تکیه هستند که طبق روابط (۲۳) و (۲۴) بدست می‌آیند [۱۹]:

$$\mathbf{u}_{Heaviside} = \sum_{i=1}^n \varphi_i (H(\mathbf{x}) - H(\mathbf{x}_i)) \begin{Bmatrix} a_i^u \\ a_i^v \\ a_i^w \end{Bmatrix} + \frac{\zeta t}{2} \sum_{i=1}^n \varphi_i (H(\mathbf{x}) - H(\mathbf{x}_i)) \{a_i^\beta \mathbf{V}^1 - a_i^\alpha \mathbf{V}^2\} \quad (۲۳)$$

$$\mathbf{u}_{Tip} = \sum_{i=1}^n \varphi_i \sum_{j=1}^m (F_j(\mathbf{x}) - F_j(\mathbf{x}_i)) \begin{Bmatrix} b_i^u \\ b_i^v \\ 0 \end{Bmatrix} + \sum_{i=1}^n \varphi_i \sum_{j=1}^m (G_j(\mathbf{x}) - G_j(\mathbf{x}_i)) \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_i^w \end{Bmatrix} + \frac{\zeta t}{2} \sum_{i=1}^n \varphi_i \sum_{j=1}^m (R_j(\mathbf{x}) - R_j(\mathbf{x}_i)) \{b_i^{\beta j} \mathbf{V}^1 - b_i^{\alpha j} \mathbf{V}^2\} \quad (۲۴)$$

در رابطه (۲۳)، $H(\mathbf{x})$ تابع هوپساید است که طبق رابطه (۱۶) محاسبه می‌شود، $\mathbf{x}_i$ مختصات گره‌ی i ام و a_i^j ها درجات آزادی غنی‌کننده‌ی اضافی^۱ هستند. و در رابطه (۲۴)، m تعداد توابع غنی‌کننده نوک ترک^۲، b_i^j ها درجات آزادی غنی‌کننده‌ی اضافی و F ، G و R به ترتیب توابع غنی‌کننده تکیه در حالت درون صفحه^۳، خارج از صفحه^۴ و چرخش^۵ هستند که در دستگاه مختصات قطبی طبق روابط (۲۵) تا (۲۷) بیان می‌شوند [۱۹]:

$$F(r, \theta) = \{F_1, F_2, F_3, F_4\} = \left\{ \sqrt{r} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right), \sqrt{r} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \sqrt{r} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin(\theta), \sqrt{r} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin(\theta) \right\} \quad (۲۵)$$

$$G(r, \theta) = \{G_1\} = \left\{ \sqrt{r} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right\} \quad (۲۶)$$

$$R(r, \theta) = \{R_1, R_2, R_3, R_4\} = \left\{ \sqrt{r} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right), \sqrt{r} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \sqrt{r} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin(\theta), \sqrt{r} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin(\theta) \right\} \quad (۲۷)$$

^۱ Additional enrichment degrees of freedom

^۲ Crack tip functions

^۳ In plane

^۴ Out of plane

^۵ Rotational

بردار جابجایی‌های گره‌ای استاندارد ($\mathbf{d}$)، بردار غنی‌کننده درجات آزادی با تابع هویساید ($\mathbf{h}$) و بردار غنی‌کننده درجات آزادی با توابع تکینه ($\mathbf{t}$) به‌ترتیب طبق روابط (۲۸) تا (۳۰) تعریف می‌شوند [۱۹]:

$$\mathbf{d} = \{u, v, w, \alpha, \beta\}^T \quad (28)$$

$$\mathbf{h} = \{a^u, a^v, a^w, a^\alpha, a^\beta\}^T \quad (29)$$

$$\mathbf{t} = \{b^u, b^v, b^w, b^\alpha, b^\beta\}^T \quad (30)$$

بردار جابجایی گره‌ای کلی طبق رابطه (۳۱) بیان می‌شود [۱۹]:

$$\mathbf{D} = \{\mathbf{d} \ \mathbf{h} \ \mathbf{t}_1 \ \mathbf{t}_2 \ \mathbf{t}_3 \ \mathbf{t}_4\}^T \quad (31)$$

با گسسته کردن درجات آزادی با استفاده از توابع شکل درونیابی روابط (۱۸) تا (۱۹)، و اعمال شرایط مرزی، جهت بدست آوردن باربحرانی کمانش نانورق از معادلات مقدار ویژه استفاده می‌شود. معادله مقدار ویژه نانورق به‌صورت رابطه (۳۲) بیان می‌شود [۱۹]:

$$(\mathbf{K}_S + \lambda \mathbf{K}_G) \{\mathbf{D}\} = \mathbf{0} \quad (32)$$

در رابطه (۳۲)، λ و $\mathbf{D}$ به‌ترتیب مقدار ویژه و بردار ویژه هستند و کوچکترین مقدار λ_{cr} باربحرانی کمانش را مشخص می‌کند. پس از بدست آوردن کوچکترین باربحرانی کمانش (λ_{cr})، ضریب کمانش^۱ (k_{cr}) نانورق طبق رابطه (۳۳) بدست می‌آید:

$$k_{cr} = \lambda_{cr} \frac{12(1-\nu_{12}\nu_{21})W^2}{\pi^2 E_1 h^3} \quad (33)$$

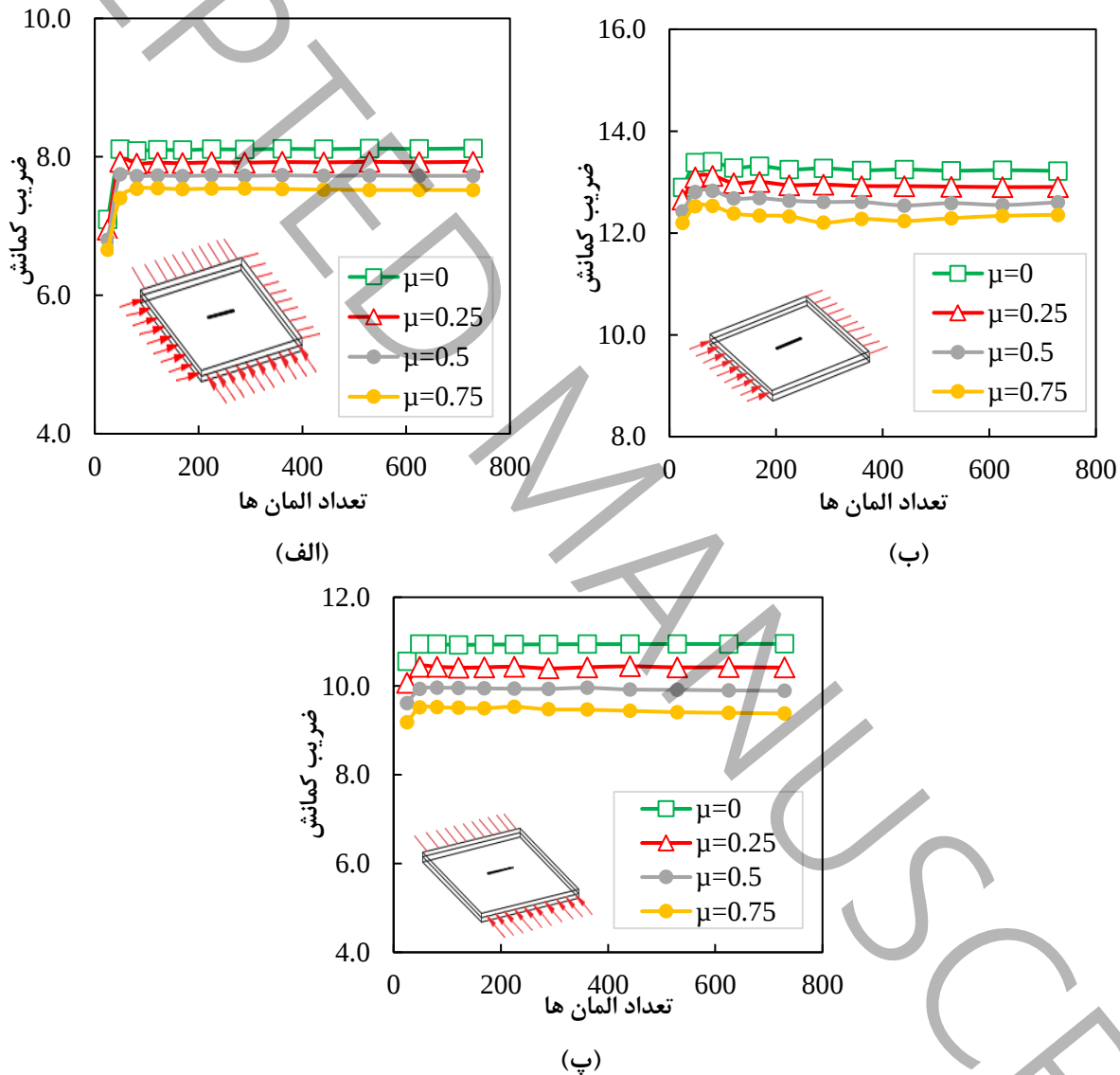
چنان که می‌دانیم، تحلیل کمانشی سازه‌ها از نوع حل مسأله ویژه^۲ بوده، معادلات تعادل روی جسم تغییرشکل‌یافته نوشته شده، با حل آن مقادیر و بردارهای ویژه که به‌ترتیب بار کمانشی و مود کمانشی به‌دست می‌آید. از این‌رو، شرایط مرزی مربوط به ترک در بار فشاری یا کششی اعمالی بر ورق یکسان‌اند. قابل توجه است که مودهای کمانشی ورق‌های ترک‌دار زیر بار فشاری اغلب از نوع کمانش کلی و زیر بار کششی از نوع کمانش موضعی است.

^۱ Buckling coefficient

^۲ Eigen Problem

۴- همگرایی و صحت‌سنجی^۱

در مطالعه حاضر، شکل‌های (۴) نشان‌دهنده همگرایی رضایت‌بخش برنامه متلب برای نانورق‌های اورتوتروپ ترک-دار تحت تاثیر حالت‌های مختلف بارگذاری بوده و همچنین دقت و قابلیت اطمینان مدل محاسباتی مورد استفاده در تحلیل، را تایید می‌کند. بنابراین براساس یافته‌های تحلیل حساسیت، برای نانورق با ابعاد $W=L=17\text{nm}$ و $h=0.34\text{nm}$ ، تعداد مش 13×13 با ابعاد المان‌ها تقریباً $1/3$ نانومتر جهت تجزیه و تحلیل در تحقیق حاضر انتخاب گردید.



شکل (۴) بررسی تحلیل حساسیت نانورق‌های اورتوتروپ ترک‌دار زیر بارگذاری دوماحوری (الف)، اورتوتروپ زیر بارگذاری تک‌محوری موازی ترک (ب)، اورتوتروپ زیر بار تک‌محوری عمود به ترک (پ).

¹ Convergence and verification

Figure (4) Sensitivity analysis of cracked orthotropic nanosheets under biaxial loading (a), orthotropic under uniaxial loading parallel to the crack (b), orthotropic under uniaxial loading perpendicular to the crack (c).

جهت صحت‌سنجی، نتایج به‌دست‌آمده از مطالعه حاضر با برخی مراجع معتبر مورد بررسی قرار گرفت. تأیید صحت‌سنجی در چهار مرحله شامل ورق‌ها، نانورق‌های ایزوتروپ و اورتوتروپ بدون ترک و برای ورق‌های ترک‌دار انجام می‌شود. که مؤلفه‌های نانورق‌ها طبق شکل (۲) عبارتند از: عامل غیرموضعی یا مقیاس کوچک (μ)، طول ترک (a)، ضخامت نانورق (h)، ابعاد جانبی (W, L)، نسبت عرض به ضخامت (W/h)، طول نسبی ترک (a/W)، نسبت ابعادی^۱ (L/W) و شرایط مرزی^۲ مختلف نیز در نظر گرفته شده است، همچنین در جداول (۱) و (۲)، مشخصات نانورق‌گرافن تک‌لایه و نانورق‌های اورتوتروپ در این تحقیق مطرح شده‌اند.

جدول (۱) مشخصات نانورق گرافن تک‌لایه

Table (1) Specifications of single-layer graphene nanosheets

نسبت پواسون	مدول الاستیسیته
0.3	0.73 GP

جدول (۲) مشخصات نانورق اورتوتروپ [۲۴]

Table (2) Specifications of orthotropic nanosheets [24]

E_1	E_2	ν_{12}	ν_{21}	G_{12}	G_{13}	G_{23}
1.02 GPa	0.1* E_1	0.3	0.1* ν_{12}	0.6* E_2	0.6* E_2	0.5* E_2

در نهایت تعدادی مثال عددی متنوع تحقیق حاضر با مراجع معتبر جهت صحت‌سنجی مورد بحث و بررسی قرار می‌گیرد، برای این موضوع، صحت‌سنجی در چند مرحله صورت می‌پذیرد، نویسندگان در مطالعات پیشین [۱۱] تحلیل‌های متعددی را برای اثبات اعتبار مدل‌های اجزای محدود نانورق‌های ایزوتروپ ترک‌دار به انجام رسانده‌اند. و در نهایت براساس جدول (۳)، نتایج تحقیق حاضر برای نانورق‌های مربعی اورتوتروپ بدون ترک با شرایط تکیه‌گاهی چهارطرف مفصلی و زیر بارگذاری دو محوری، با نسبت عرض به ضخامت‌های (W/h) مختلف مورد بررسی قرار گرفت، نتایج حاصل این تحقیق با مشخصات جدول (۲) با عامل ابعاد کوچک (μ) مختلف، با نتایج حاصل از تحقیق صبحی [۴۶] براساس روش حل مثلثاتی^۳، نتایج حاصل از پرادهان^۴ [۴۷] براساس نظریه برشی مرتبه سوم اصلاحی^۵ و نتایج حاصل از کاداری و

¹ Aspect ratio

² Boundary conditions (B.C.)

³ Trigonometric solution

⁴ Pradhan

⁵ Refined third shear deformation theory solutions

همکاران [۲۴] براساس نظریه هیپربولیک جدید کنترل گردید و براساس جدول (۳) مشخص گردید نتایج دارای درصد اختلاف قابل قبولی می باشند.

جدول (۳) صحت سنجی بار بحرانی کمانش نانورق مربعی اورتوتروپ بدون ترک زیر بار فشاری دوجوری

Table (3) Verification of critical buckling load of orthotropic square nanosheet without cracks under biaxial compressive load

μ (nm ²)	نظریه	ضریب کمانش			
		W/h=5	W/h=10	W/h=20	W/h=30
۰/۰۰	روش حل مثلثاتی [۴۶].	۴/۰۱۱۶	۵/۸۵۵۹	۶/۶۶۳۰	۶/۸۴۰۰
	نظریه برشی مرتبه سوم اصلاحی [۴۷].	۴/۰۰۵۵	۵/۸۵۴۰	۶/۶۶۲۵	۶/۸۳۹۸
	نظریه هیپربولیک جدید [۲۴].	۴/۰۳۱۹	۵/۸۶۴۷	۶/۶۶۵۷	۶/۸۴۱۳
	تحقیق حاضر	۳/۹۸۹۵	۵/۸۵۱۷	۶/۶۶۲۴	۶/۸۳۹۸
	درصد اختلاف با مرجع [۴۷].	%۰/۰۴	%۰/۰۴	%۰/۰۰	%۰/۰۰
۱	روش حل مثلثاتی [۴۶].	۰/۵۱۲۳	۲/۱۶۲۸	۴/۶۶۹۶	۵/۷۴۹۲
	نظریه برشی مرتبه سوم اصلاحی [۴۷].	۰/۵۱۱۶	۲/۱۶۲۱	۴/۶۶۹۳	۵/۷۴۹۱
	نظریه هیپربولیک جدید [۲۴].	۰/۵۱۴۹	۲/۱۶۶۱	۴/۶۷۱۵	۵/۷۵۰۳
	تحقیق حاضر	۰/۵۰۱۰	۲/۱۴۴۳	۴/۶۵۳۰	۵/۷۳۹۱
	درصد اختلاف با مرجع [۴۷].	%۲/۱۲	%۰/۸۳	%۰/۳۵	%۰/۱۷
۲	روش حل مثلثاتی [۴۶].	۰/۲۷۳۶	۱/۳۲۶۳	۳/۵۹۴۳	۴/۹۵۸۵
	نظریه برشی مرتبه سوم اصلاحی [۴۷].	۰/۲۷۳۲	۱/۳۲۵۹	۳/۵۹۴۰	۴/۹۵۸۳
	نظریه هیپربولیک جدید [۲۴].	۰/۲۷۵۰	۱/۳۲۸۳	۳/۵۹۵۷	۴/۹۵۹۴
	تحقیق حاضر	۰/۲۶۶۹	۱/۳۱۲۴	۳/۵۷۴۴	۴/۹۴۲۸
	درصد اختلاف با مرجع [۴۷].	%۲/۳۶	%۱/۰۳	%۰/۵۵	%۰/۳۱
۳	روش حل مثلثاتی [۴۶].	۰/۱۸۶۷	۰/۹۵۶۴	۲/۹۲۱۵	۴/۳۵۹۰
	نظریه برشی مرتبه سوم اصلاحی [۴۷].	۰/۱۸۶۴	۰/۹۵۶۱	۲/۹۲۱۳	۴/۳۵۸۸
	نظریه هیپربولیک جدید [۲۴].	۰/۱۸۷۶	۰/۹۵۷۹	۲/۹۲۲۷	۴/۳۵۹۷
	تحقیق حاضر	۰/۱۸۱۹	۰/۹۴۵۶	۲/۹۰۱۸	۰/۳۴۰۶
	درصد اختلاف با مرجع [۴۷].	%۲/۴۷	%۱/۱۱	%۰/۶۷	%۰/۴۲
۴	روش حل مثلثاتی [۴۶].	۰/۱۴۱۷	۰/۷۴۷۹	۲/۴۶۰۹	۳/۸۸۸۸
	نظریه برشی مرتبه سوم اصلاحی [۴۷].	۰/۱۴۱۴	۰/۷۴۷۶	۲/۴۶۰۷	۳/۸۸۸۷
	نظریه هیپربولیک جدید [۲۴].	۰/۱۴۲۴	۰/۷۴۹۰	۲/۴۶۰۷	۳/۸۸۹۵
	تحقیق حاضر	۰/۱۳۸۰	۰/۷۳۹۰	۲/۴۴۲۱	۳/۸۶۹۱
	درصد اختلاف با مرجع [۴۷].	%۲/۴۶	%۱/۱۶	%۰/۷۶	%۰/۵۱

همان طور که مشاهده گردید صحت سنجی برنامه در چهار مرحله برای ورق همگن بدون ترک، نانورق ایزوتروپ و اورتوتروپ بدون ترک و برای ورق همگن ترک دار با مراجع معتبر علمی صورت پذیرفته، پس می توان از نتایج برنامه برای بدست آوردن بار بحرانی کمانش نانورق های اورتوتروپ ترک دار نیز استفاده نمود.

۵- بحث و بررسی

کمانش نانورق‌های ترک‌دار زیر بار تک و دومحوری، در این بخش مورد ارزیابی قرار می‌گیرند. به‌منظور تأکید بر اعتبارسنجی نتایج حاضر، عامل نسبت بار کمانشی^۱ [۴۹, ۴۸] به‌عنوان یک مؤلفه بی‌بعد، به‌صورت رابطه (۳۴) تعریف می‌شود:

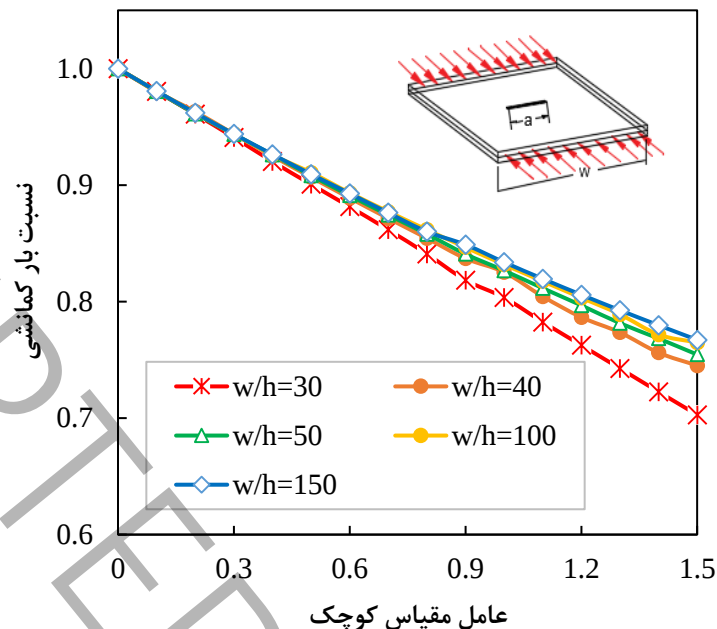
$$\text{نسبت بار کمانشی} = \frac{\text{بار کمانشی غیرموضعی}}{\text{بار کمانشی موضعی}} \quad (34)$$

به‌طوری‌که رابطه (۳۴) نشان‌دهنده نسبت ضریب کمانش نانورق به ضریب کمانش ورق همگن با همان مشخصات ابعادی است که ضرایب مذکور براساس رابطه (۳۳)، قبلاً محاسبه شده است.

۵-۱- نانورق‌های اورتوتروپ ترک‌دار زیر بارگذاری تک‌محوری

کمانش غیرموضعی نانورق‌های اورتوتروپ ترک‌دار، زیر بارهای فشاری تک‌محوری یکنواخت طبق شکل (۲) در این بخش مورد بحث قرار گرفته است. در شکل (۵)، اثر عامل مقیاس کوچک (μ) و نسبت عرض به ضخامت (W/h) بر نسبت بار کمانشی نانورق‌های اورتوتروپ مربعی ترک‌دار با تکیه گاه مفصلی زیر بارگذاری تک‌محوری بررسی شده است. شکل (۵) نشان می‌دهد که ضخامت نانورق تأثیر قابل توجهی بر شدت اثر غیرموضعی ندارد. با این‌حال، تأثیر عامل غیرموضعی بر کاهش نسبت بار کمانشی برای نانورق‌های ضخیم‌تر کمی بیشتر است. به‌طوری‌که در حالت مورد مطالعه $\mu = 1.5 \text{ nm}^2$ ، هنگامی که ضخامت حدود ۵ برابر افزایش می‌یابد، نسبت بار کمانشی حدود ۷ درصد کاهش می‌یابد.

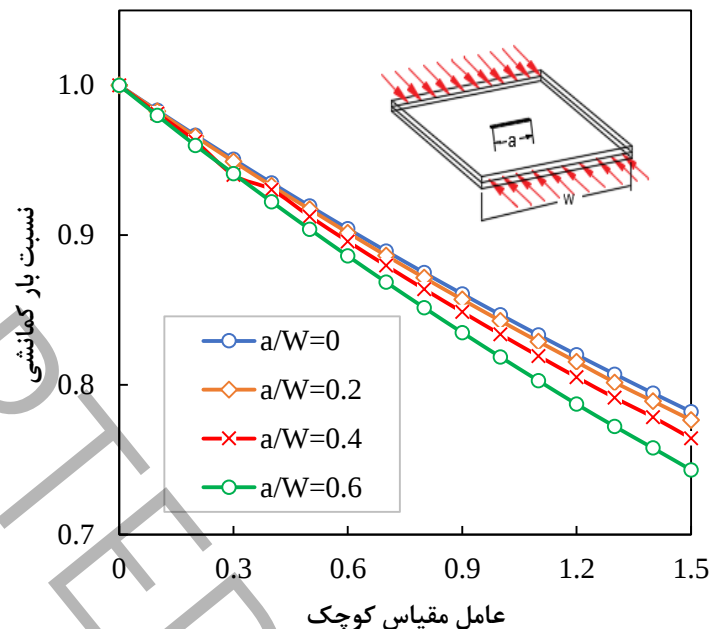
¹ Buckling load ratio



شکل (۵) بررسی تاثیر عامل مقیاس کوچک (μ) و نسبت عرض به ضخامت (W/h) بر نسبت بار کماشی نانورق‌های اورتوتروپ مربعی ترک‌دار زیر بارگذاری تک‌محوری.

Figure (5) Investigation of the effect of the small-scale parameter (μ) and the width-to-thickness ratio (W/h) on the buckling load ratio of cracked square orthotropic nanosheets under uniaxial loading.

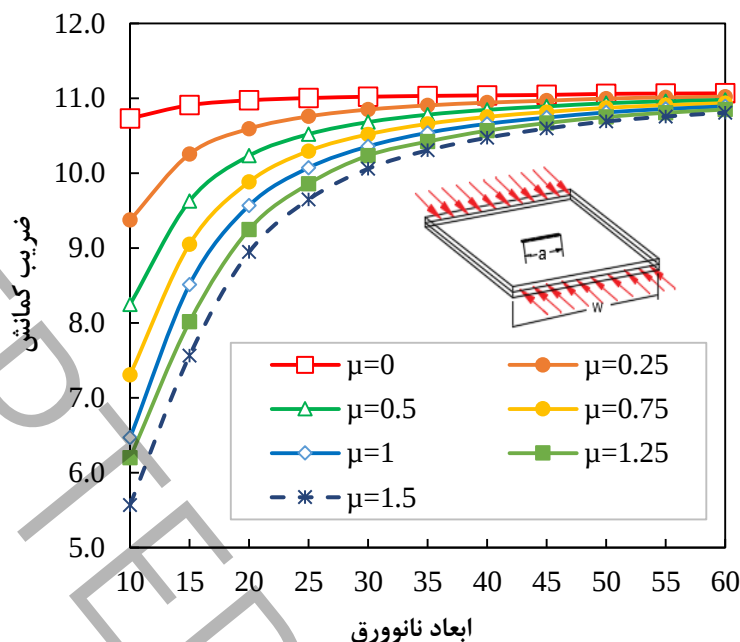
در شکل (۶)، تأثیر عامل مقیاس کوچک (μ) و نسبت طول ترک (a/W) بر نسبت بار کماشی نانورق‌های ترک‌دار مربعی اورتوتروپ با تکیه‌گاه‌های مفصلی زیر بارگذاری تک‌محوری مورد مطالعه قرار گرفته است. شکل (۶) نشان می‌دهد که اثر غیرموضعی سبب کاهش نسبت بار کماشی نانورق‌های ترک‌دار و بدون ترک می‌گردد. همان‌طور که نشان داده شده است، در تمام موارد (a/W)، نسبت بار کماشی با نرخ تقریباً ثابتی با عامل غیرموضعی کاهش می‌یابد. علاوه بر این، افزایش طول ترک در نانورق‌ها، اثر غیرموضعی را تشدید می‌کند. به عنوان مثال برای نانورق با شرایط $\mu = 1.5 \text{ nm}^2$ ، اثر غیرموضعی باعث کاهش ۲۲٪ و ۲۶٪ به ترتیب برای نسبت‌های طول ترک ۰ و ۰/۶ در نسبت بار کماشی می‌شود. به این معنی است که ترک با نسبت ۰/۶، تأثیر غیرموضعی را در مقایسه با حالت بدون ترک حدود ۱/۱۸ برابر می‌کند.



شکل (۶) بررسی تاثیر عامل مقیاس کوچک (μ) و مؤلفه (a/W) بر نسبت بار کمانشی نانورق‌های اورتوتروپ مربعی ترک‌دار زیر بارگذاری تک‌محوری.

Figure (6) Investigation of the effect of the small-scale parameter (μ) and the component (a/W) on the buckling load ratio of cracked square orthotropic nanosheets under uniaxial loading.

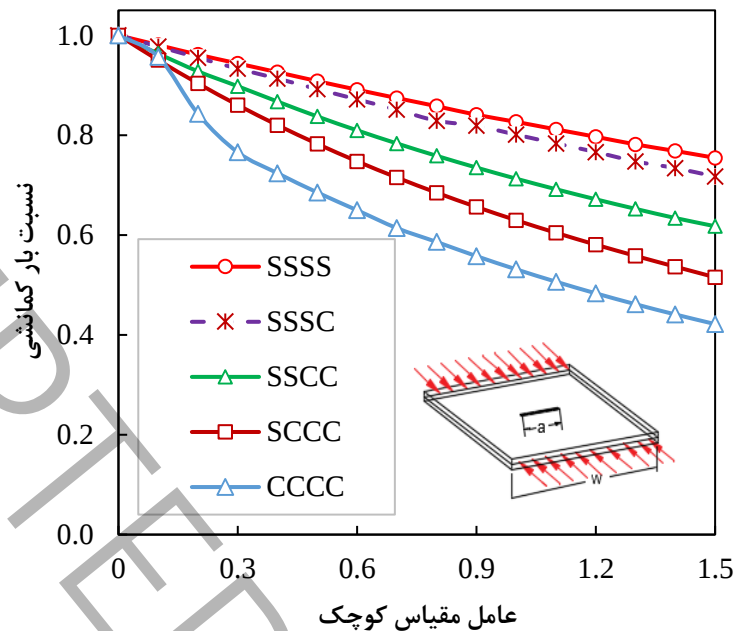
در شکل (۷) نانورق‌های اورتوتروپ مربعی ترک‌دار با ابعاد جانبی مختلف زیر فشار تک‌محوری یکنواخت جهت بررسی تأثیر ابعاد جانبی نانورق بر ضریب کمانشی مورد تحلیل قرار گرفتند. نتایج نشان می‌دهد که برای نانورق‌ها با ابعاد بزرگ، نتایج غیرموضعی و موضعی نزدیک می‌شوند و اثر غیرموضعی به تدریج از بین می‌رود. به عنوان مثال، نانورق با شرایط $W = L = 10\text{nm}$ ، $h = 0.34\text{nm}$ و $\mu = 1.5\text{nm}^2$ ، دارای نسبت بار کمانشی ۰/۵۲ است در صورتی که ابعاد جانبی شش برابر افزایش داده شود، تأثیر اثر غیرموضعی تقریباً از بین می‌رود. علاوه بر این، ضریب کمانش نانورق‌های با ابعاد کوچک و مقادیر زیاد عامل غیرموضعی، حساسیت بیشتری نسبت به تغییر ابعاد جانبی نانورق‌ها دارند.



شکل (۷) بررسی تاثیر عامل مقیاس کوچک (μ) و افزایش ابعاد نانورق مربعی بر روی بار بحرانی بی بعد کمانش نانورق‌های اورتوتروپ ترک‌دار زیر بارگذاری تک‌محوری.

Figure (7) Investigating the effect of the small-scale parameter (μ) and increasing the dimensions of the square nanosheet on the dimensionless critical buckling load of cracked orthotropic nanosheets under uniaxial loading.

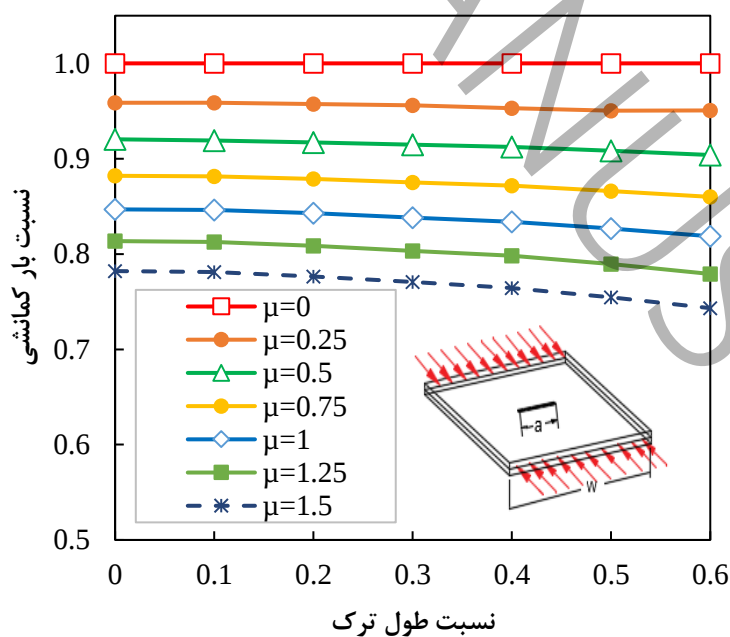
شکل (۸)، تاثیر عامل مقیاس کوچک را بر نسبت بار کمانشی نانورق‌های اورتوتروپ ترک‌دار زیر فشار تک‌محوری برای شرایط تکیه‌گاهی مختلف را نشان می‌دهد. پنج شرط مرزی در نظر گرفته شده است. برای اختصار، از یک نماد چهار حرفی برای تعریف شرایط مرزی استفاده می‌شود، به طوری که حروف S و C به ترتیب نشان‌دهنده شرایط مفصلی و گیردار هستند. شکل (۸) نشان می‌دهد که اثر غیرموضعی، تحت تاثیر شرایط مرزی قرار می‌گیرد. همچنین مطابق شکل پیش‌گفت، در حالت بارگذاری تک‌محوری، اثر غیرموضعی با مقید کردن لبه‌های نانورق‌های ترک‌دار افزایش می‌یابد. برای نانورق با شرایط $\mu = 1.5 \text{ nm}^2$ ، کاهش نسبت بار کمانشی ناشی از اثر غیرموضعی برای شرایط مرزی SSSS و CCCC به ترتیب ۲۵٪ و ۴۸٪ است.



شکل (۸) بررسی تاثیر عامل مقیاس کوچک (μ) و شرایط تکیه‌گاهی بر نسبت بار کمانشی نانورق‌های اورتوتروپ مربعی ترک‌دار زیر بارگذاری تک‌محوری.

Figure (8) Investigation of the effect of the small-scale parameter (μ) and support conditions on the buckling load ratio of cracked square orthotropic nanosheets under uniaxial loading.

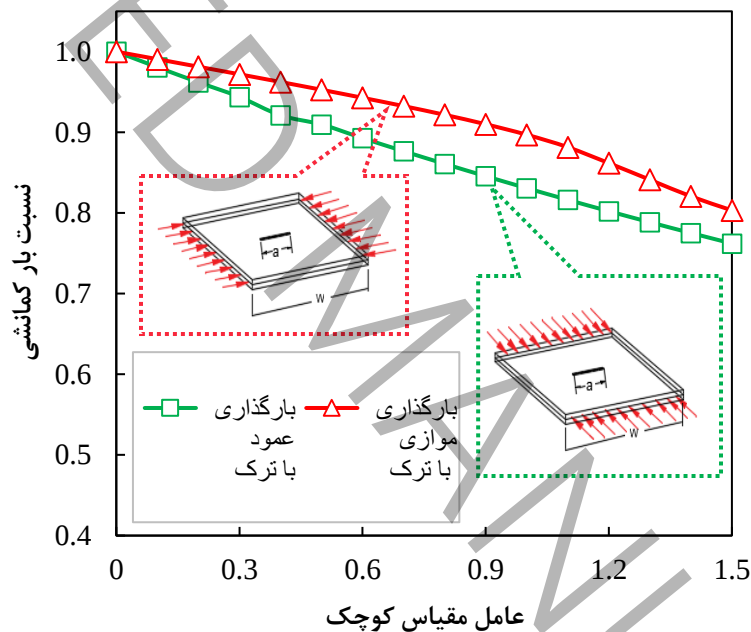
شکل (۹) نشان می‌دهد که وجود ترک در نانورق‌های اورتوتروپ با عامل‌های مقیاس کوچک مختلف، تاثیر زیادی بر نسبت بار کمانشی ندارد.



شکل (۹) بررسی تاثیر عامل مقیاس کوچک (μ) و مؤلفه (a/W) بر نسبت بار کمانشی نانورق‌های اورتوتروپ مربعی ترک‌دار زیر بارگذاری تک‌محوری.

Figure (9) Investigation of the effect of the small-scale parameter (μ) and the component (a/W) on the buckling load ratio of cracked square orthotropic nanosheets under uniaxial loading.

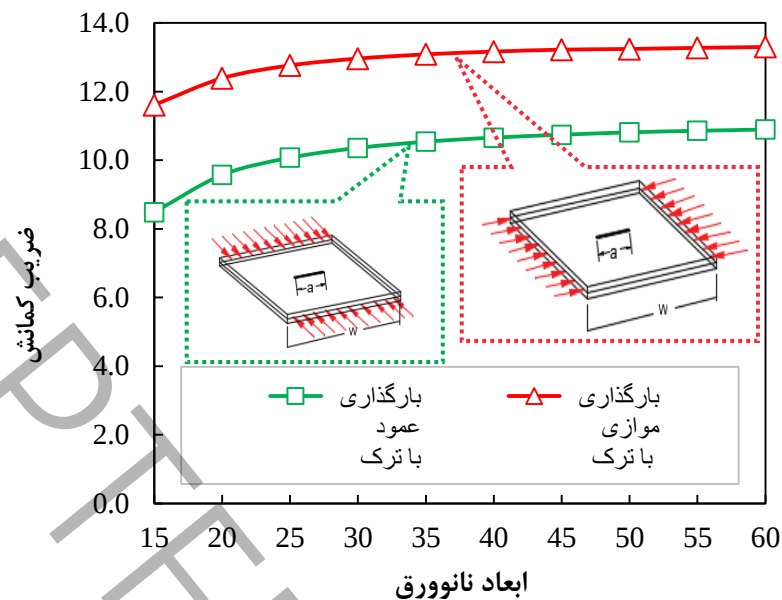
مقایسه بین اثرات غیرموضعی برای دو حالت بارگذاری تک‌محوری، موازی و عمود بر راستای ترک، بر نسبت بار کمانشی نانورق‌های مربعی اورتوتروپ در شکل (۱۰) نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، نسبت بار کمانشی با افزایش عامل مقیاس کوچک، کاهش می‌یابد، به این معنی که اثر غیرموضعی افزایش می‌یابد. علاوه بر این، برای نانورق‌ها با شرایط $\mu = 1.5 \text{ nm}^2$ ، کاهش نسبت بار کمانشی در صورتی که بار عمود بر راستای ترک وارد شود ۴٪ بیشتر از زمانی است که بارگذاری موازی راستای ترک باشد.



شکل (۱۰) بررسی تاثیر عامل مقیاس کوچک (μ) و بارگذاری عمود و موازی با راستای ترک بر نسبت بار کمانشی نانورق‌های اورتوتروپ مربعی ترک‌دار.

Figure (10) Investigation of the effect of the small-scale parameter (μ) and loading perpendicular and parallel to the crack direction on the buckling load ratio of cracked square orthotropic nanosheets.

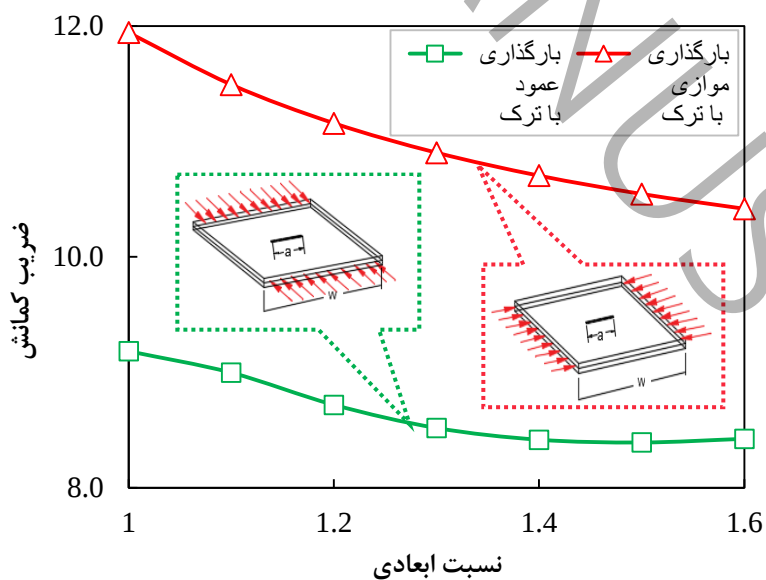
در شکل (۱۱)، اثر ابعاد جانبی نانورق‌های اورتوتروپ مربعی ترک‌دار برای دو حالت بارگذاری تک‌محوری موازی و عمود بر راستای ترک مقایسه گردید و مشاهده شد که با افزایش ابعاد جانبی نانورق‌ها، ضریب کمانش با نرخ تقریباً مشابهی افزایش می‌یابد، علاوه بر این، ضرایب کمانش مربوط به بارگذاری موازی با راستای ترک، بیشتر از ضرایب مربوطه برای حالت بارگذاری عمود بر راستای ترک است.



شکل (۱۱) بررسی تاثیر ابعاد نانورق و بارگذاری عمود و موازی ترک بر روی بار بحرانی بی بعد کماتش نانورق های مربعی اورتوتروپ ترک دار.

Figure (11) Investigating the effect of nanosheet dimensions and loading perpendicular and parallel to the crack on the dimensionless critical buckling load of cracked orthotropic square nanosheets.

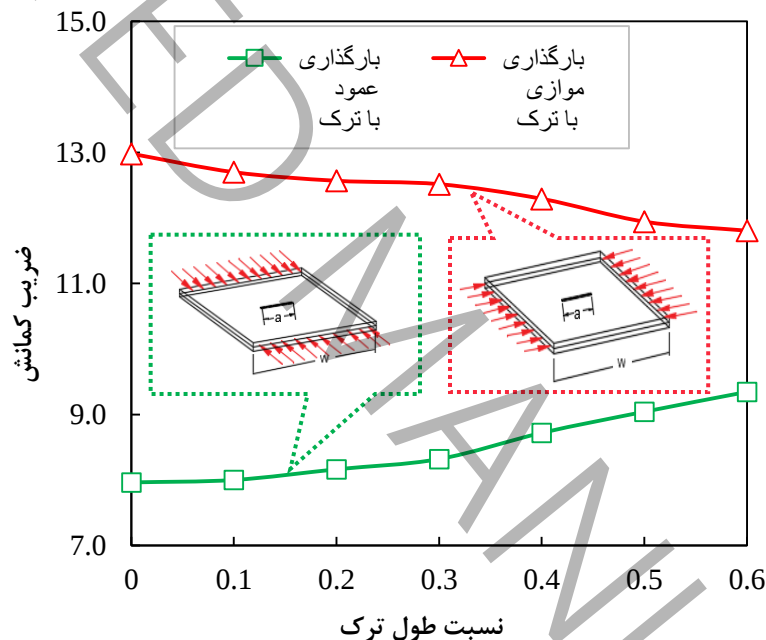
شکل (۱۲) نشان دهنده تاثیر نسبت ابعادی نانورق و راستای بارگذاری تک محوری، بر ضریب کماتشی نانورق های مربعی اورتوتروپ ترک دار با شرایط $(W = 17nm, a = 8.5nm, h = 0.34, \mu = 1nm^2)$ می باشد. از شکل (۱۲) می توان نتیجه گرفت که در حالت بارگذاری تک محوری عمود بر راستای ترک و بارگذاری موازی بر راستای ترک، با افزایش نسبت ابعادی نانورق ها، ضریب کماتشی در دو حالت با نرخ ثابتی کاهش می یابد.



شکل (۱۲) بررسی عامل نسبت طول به عرض نانورق (L/W) و بارگذاری عمود و موازی ترک بر روی بار بحرانی بی‌بعد کمانش نانورق-های اورتوتروپ ترک‌دار.

Figure (12) Investigation of the factor of length to width ratio of nanosheet (L/W) and loading perpendicular and parallel to the crack on the dimensionless critical buckling load of cracked orthotropic nanosheets.

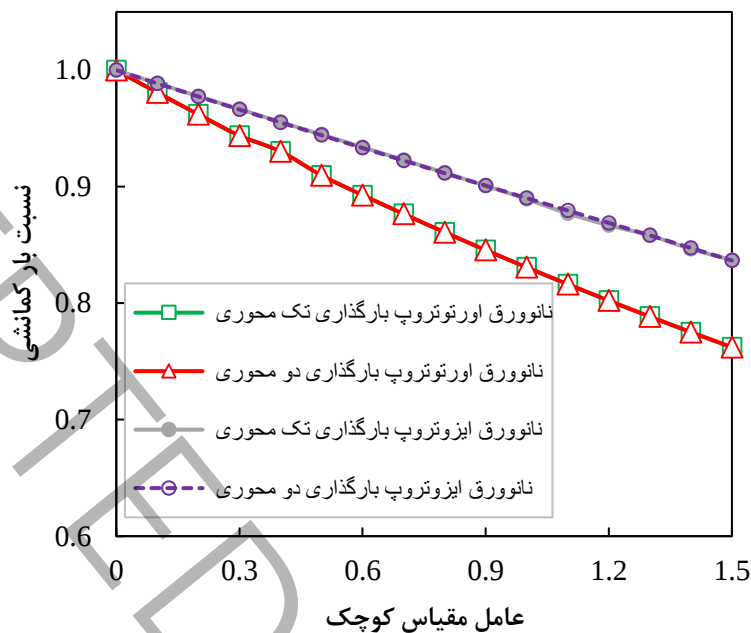
در شکل (۱۳) اثر راستای بارگذاری بر ضریب کمانش نانورق‌های مربعی اورتوتروپ با شرایط تکیه‌گاهی چهارطرف مفصلی مورد بررسی قرار گرفت. بر این اساس، همان‌طور که مشاهده می‌گردد، رفتار کمانشی نانورق‌های ترک‌دار برای دو حالت بارگذاری موازی و عمود بر راستای ترک متفاوت است. تفاوت بین ضرایب کمانش دو حالت مورد مطالعه با افزایش طول ترک کاهش می‌یابد، به‌طوری که در حالت بارگذاری عمود بر راستای ترک، با افزایش طول ترک، ضریب کمانش افزایش می‌یابد در حالی که در حالت دیگر، ضریب کمانش کاهش می‌یابد.



شکل (۱۳) بررسی تاثیر عامل (a/W) و بارگذاری عمود و موازی با ترک بر روی بار بحرانی بی‌بعد کمانش نانورق‌های اورتوتروپ مربعی ترک‌دار.

Figure (13) Investigation of the effect of the factor (a/W) and loading perpendicular and parallel to the crack on the dimensionless critical buckling load of cracked square orthotropic nanosheets.

مقایسه بین اثرات غیرموضعی برای دو حالت بارگذاری تک و دوماحوری، در نانورق‌های اورتوتروپ و ایزوتروپ ترک‌دار بر نسبت بار کمانشی در شکل (۱۴) نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، برای هر دو نانورق اورتوتروپ و ایزوتروپ ترک‌دار، با افزایش عامل مقیاس کوچک، نسبت بار کمانشی با شیب یکسان کاهش می‌یابد. علاوه بر این، برای نانورق‌های اورتوتروپ و ایزوتروپ ترک‌دار با شرایط $\mu = 1.5 \text{ nm}^2$ ، کاهش نسبت بار کمانشی نانورق اورتوتروپ ۸٪ بیشتر از نانورق ایزوتروپ ترک‌دار می‌باشد.

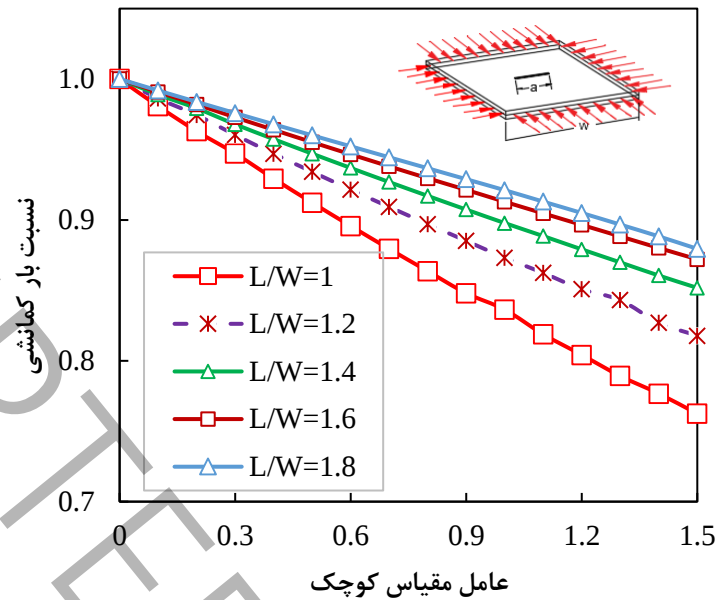


شکل (۱۴) بررسی تاثیر عامل مقیاس کوچک (μ) و بارگذاری تک و دو محوری بر نسبت بار کمانشی نانوورق های اورتوتروپ و ایزوتروپ مربعی ترک دار.

Figure (14) Investigation of the effect of small-scale parameter (μ) and uniaxial and biaxial loading on the buckling load ratio of orthotropic and isotropic square cracked nanosheets

۲-۵- نانوورق های اورتوتروپ ترک دار زیر بارگذاری دو محوری

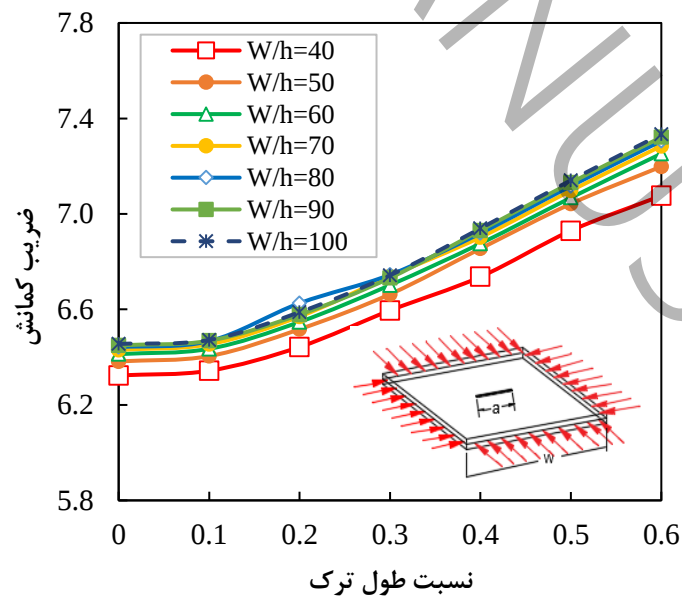
کمانش غیرموضعی نانوورق های اورتوتروپ ترک دار، زیر بارهای فشاری دو محوری یکنواخت، در این بخش مورد بحث قرار گرفته است. تاثیر عامل مقیاس کوچک بر نسبت بار کمانشی برای نسبت های ابعادی مختلف نانوورق اورتوتروپ ترک دار زیر بارگذاری دو محوری در شکل (۱۵) نشان داده شده است. همان طور که مشاهده می گردد، نسبت بار کمانشی با افزایش نسبت ابعادی، افزایش می یابد. به عبارت دیگر، اثر غیرموضعی با افزایش نسبت ابعادی نانوورق کاهش می یابد. در شرایط $\mu = 1.5 \text{ nm}^2$ ، افزایش نسبت ابعادی از $L/W = 1$ به $L/W = 1.8$ ، باعث کاهش اثر غیرموضعی حدود ۱۲ درصد می گردد.



شکل (۱۵) بررسی تاثیر عامل مقیاس کوچک (μ) و نسبت طول به عرض ورق (L/W) بر نسبت بار کمناشی نانورق‌های اورتوتروپ ترک‌دار زیر بارگذاری دومیخوری.

Figure (15) Investigation of the effect of the small-scale parameter (μ) and the aspect ratio of the nanosheet (L/W) on the buckling load ratio of cracked orthotropic nanosheets under biaxial loading.

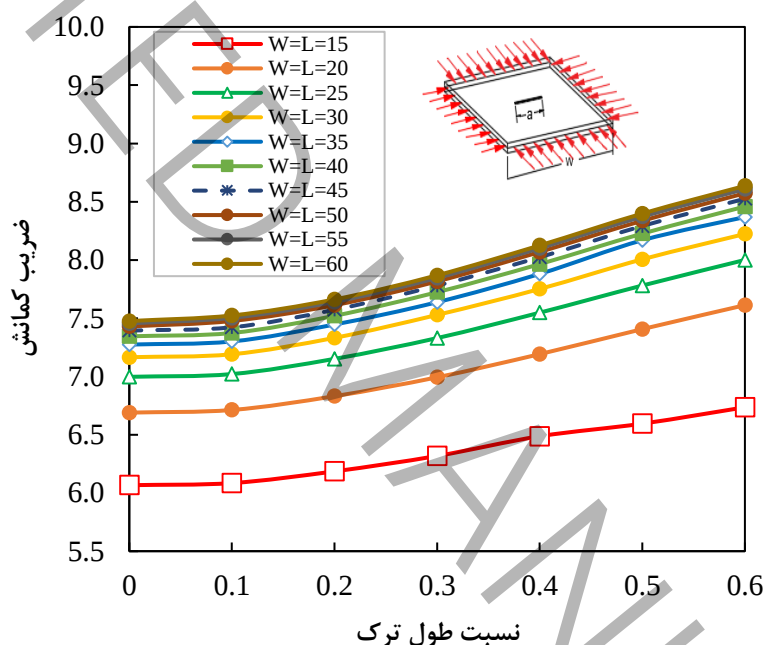
همان‌طور که در شکل (۱۶) مشاهده می‌شود، ضخامت بر ضریب کمناش نانورق‌های اورتوتروپ ترک‌دار تاثیر دارد. برای نانورق‌های ترک‌دار، با افزایش ضخامت، ضریب کمناش کاهش می‌یابد. نانورق‌های با ضخامت‌های مختلف دارای حداقل ضریب کمناش در شرایط ترک با نسبت ۰/۱ می‌باشند.



شکل (۱۶) بررسی تاثیر مؤلفه (a/W) و نسبت عرض به ضخامت (W/h) بر روی بار بحرانی بی بعد کمانش نانورق های اورتوتروپ مربعی ترک دار زیر بارگذاری دوجوهری

Figure (16) Investigation of the effect of the component (a/W) and the width-to-thickness ratio (W/h) on the dimensionless critical buckling load of cracked square orthotropic nanosheets under biaxial loading.

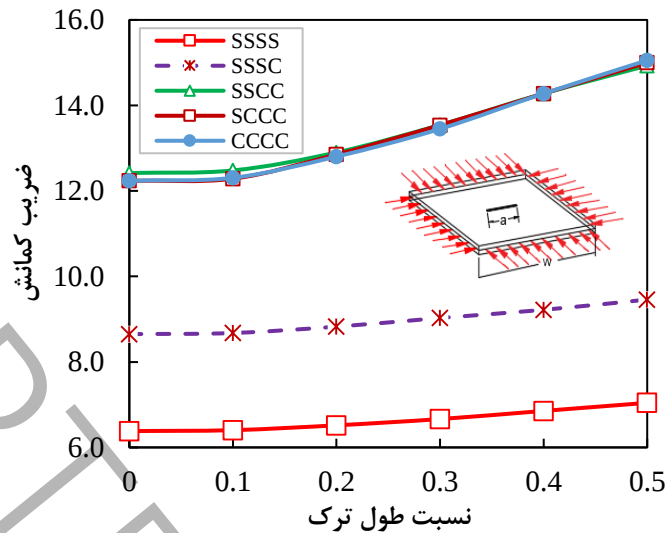
در شکل (۱۷) به بررسی تاثیر نسبت طول ترک (a/W) بر ضریب کمانشی نانورق اورتوتروپ مربعی ترک دار با شرایط تکیه گاهی چهارطرف مفصلی با شرایط $(W = L = 17nm, \mu = 1nm^2)$ زیر بارگذاری دو محوری پرداخته شد و مشخص گردید با افزایش نسبت طول ترک در ابعادهای مختلف نانورق ها، ضریب کمانشی نانورق مربعی اورتوتروپ با نرخ ثابتی افزایش می یابد.



شکل (۱۷) بررسی تاثیر مؤلفه (a/W) و افزایش ابعاد ورق مربعی بر روی بار بحرانی بی بعد کمانش نانورق های اورتوتروپ ترک دار زیر بارگذاری دوجوهری.

Figure (17) Investigating the effect of the (a/W) component and increasing the dimensions of the square sheet on the dimensionless critical buckling load of cracked orthotropic nanosheets under biaxial loading.

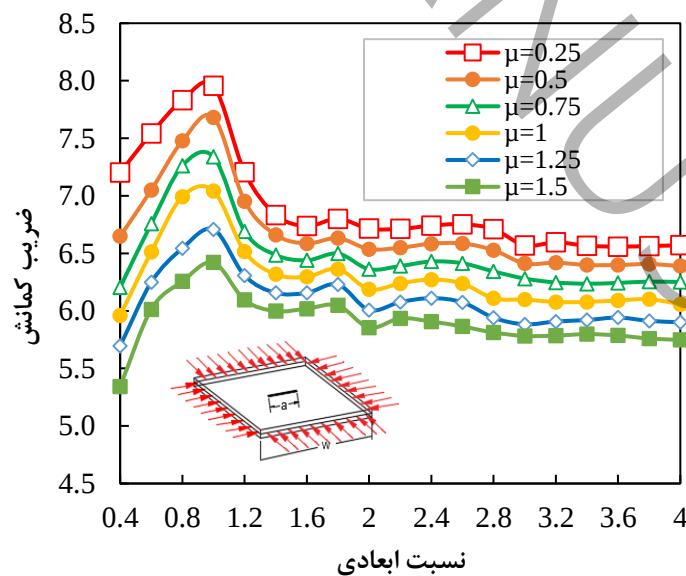
در شکل (۱۸) به بررسی اثر شرایط مرزی بر ضریب کمانش نانورق های اورتوتروپ زیر فشار دوجوهری پرداخته شده است. همان طور که در شکل (۱۸) برای نانورق های ترک دار مشاهده می شود، ضریب کمانش با مقید کردن لبه های نانورق ها افزایش می یابد. به عبارت دیگر، اثر غیرموضعی کاهش می یابد.



شکل (۱۸) بررسی تاثیر مؤلفه (a/w) و شرایط تکیه گاهی بر روی بار بحرانی بی بعد کماتش نانورق های اورتوتروپ مربعی ترک دار زیر بارگذاری دومیحوری.

Figure (18) Investigation of the effect of the component (a/w) and support conditions on the dimensionless critical buckling load of cracked square orthotropic nanosheets under biaxial loading.

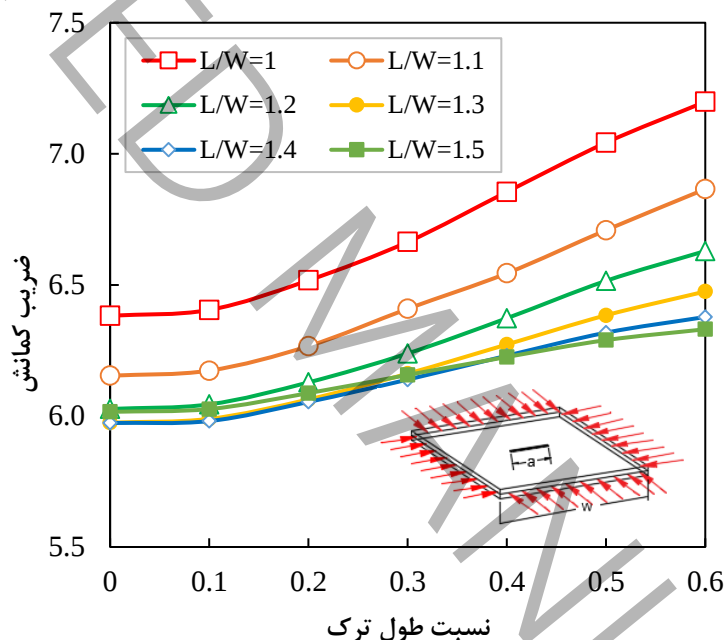
در شکل (۱۹) ضریب کماتش نانورق با عامل ابعاد کوچک بر حسب نسبت های مختلف ابعادی ورق ترسیم شده است. با توجه به این نمودار، نسبت ابعاد نانورق ها عاملی تاثیر گذار بر رفتار کماتش است. که برای نانورق ها با نسبت ابعادی کوچکتر از $1/4$ ، ضریب کماتش با تغییر این مؤلفه، تغییر قابل توجهی می کند. کمترین و بیشترین مقدار ضریب کماتش به ترتیب متعلق به نسبت های ابعادی $0/4$ و 1 است. از شکل (۱۹)، برای همه نسبت های ابعادی، ضریب کماتش نانورق با افزایش عامل مقیاس کوچک، کاهش می یابد.



شکل (۱۹) بررسی تاثیر عامل مقیاس کوچک (μ) و نسبت ابعادی نانورق (L/W) بر روی بار بحرانی بی‌بعد کمناش نانورق‌های اورتوتروپ ترک‌دار زیر بارگذاری دوجوری.

Figure (19) Investigation of the effect of the small-scale parameter (μ) and the aspect ratio of the nanosheet (L/W) on the dimensionless critical buckling load of cracked orthotropic nanosheets under biaxial loading.

شکل (۲۰) اثر طول ترک به عرض ورق (a/W) را بر ضریب کمناش نانورق‌های اورتوتروپ با نسبت‌های مختلف ابعادی را نشان می‌دهد. که حداکثر تغییر در ضریب کمناش ناشی از تغییر طول ترک حدود ۱۲ درصد متعلق به نانورق‌های با نسبت ابعادی یک است. با افزایش نسبت ابعادی نانورق‌ها از یک، اثر طول ترک به تدریج کاهش می‌یابد. در نانورق‌های با نسبت ابعادی بیشتر از $1/3$ ، تا نسبت طول ترک حدود $0/2$ ، حساسیت ضریب کمناش به افزایش طول ترک ناچیز است. پس از آن اثر بیشتری دارد.



شکل (۲۰) بررسی تاثیر مؤلفه (a/W) و نسبت طول به عرض (L/W) بر روی بار بحرانی بی‌بعد کمناش نانورق‌های اورتوتروپ ترک‌دار زیر بارگذاری دوجوری.

Figure (20) Investigation of the effect of the component (a/W) and the aspect ratio of the nanosheet (L/W) on the dimensionless critical buckling load of cracked orthotropic nanosheets under biaxial loading

۶- پیشنهاد برای تحقیقات آینده

مقاله حاضر پایه‌ای برای تحلیل کمناش نانورق‌های ترک‌دار به همراه راستی‌آزمایی مربوط و نیز بررسی تأثیر متغیرهای مختلف ورق و اثر اندازه را ارائه نموده است. روشن است که تأثیر متغیرهای مربوط به میزان اورتوتروپ بودن مصالح ورق جزو مباحث مهمی است که نویسندگان در نظر دارند در تحقیقات بعدی به آن بپردازند.

۷- نتیجه گیری

در این تحقیق، اثر مقیاس کوچک بر رفتار پایداری کمانش نانورق‌های اورتوتروپ ترک‌دار زیر بارگذاری فشاری به‌روش مکانیک پیوسته غیرموضعی بررسی گردید. راه حل‌های غیرموضعی برای ضریب کمانشی و نسبت بار کمانشی با روش المان محدود توسعه یافته انجام پذیرفت. مؤلفه‌های مورد مطالعه عبارتند از: عامل مقیاس کوچک (μ)، طول ترک (a)، ضخامت نانورق (h)، ابعاد جانبی (L, W)، و نسبت ابعادی (L/W). شرایط مرزی متفاوتی برای نانورق‌ها در نظر گرفته شد. نتایج حاصل از پژوهش حاضر بر روی ضریب کمانشی و نسبت بار کمانشی نانورق‌های اورتوتروپ دارای ترک مرکزی زیر بار فشاری تک و دومحوری عبارتند از:

۱- بر اساس یافته‌های این تحقیق، اثر مقیاس کوچک، باعث کاهش نسبت بار کمانشی نانورق‌های اورتوتروپ ترک‌دار و بدون ترک می‌گردد. اما وجود ترک و افزایش طول آن اثر غیرموضعی را تشدید می‌کند. به‌طوری‌که تأثیر غیرموضعی یک ترک با نسبت ابعادی $0/6$ در نانورق‌های اورتوتروپ مربعی با شرایط تکیه‌گاهی چهارطرف مفصلی و زیر بار فشاری تک‌محوری، نسبت به حالت نانورق بدون ترک، حدود $1/18$ برابر می‌گردد.

۲- حداکثر تغییر ضریب کمانش به دلیل تغییر طول ترک حدود 12 درصد متعلق به نانورق‌های اورتوتروپ با نسبت ابعادی یک است. با افزایش نسبت ابعادی نانورق‌های اورتوتروپ ترک‌دار از یک، اثر مقیاس کوچک به تدریج کاهش می‌یابد.

۳- ضخامت نانورق‌ها تأثیر قابل توجهی بر شدت اثر غیرموضعی ندارد. با این حال، تأثیر عامل غیرموضعی برای نانورق‌های ضخیم‌تر کمی بیشتر است.

۴- با افزایش ابعاد جانبی نانورق‌های اورتوتروپ، اثر غیرموضعی به تدریج از بین می‌رود. به‌طوری‌که وقتی ابعاد جانبی حدود شش برابر افزایش می‌یابد، تأثیر اثر غیرموضعی تقریباً از بین می‌رود.

۵- اثرات غیرموضعی برای نانورق‌های اورتوتروپ ترک‌دار زیر فشار تک‌محوری عمود و موازی بر راستای ترک تقریباً یکسان است، اگرچه رفتار کمانشی آن‌ها متفاوت است.

۶- مشاهده گردید که برای نانورق‌های اورتوتروپ و ایزوتروپ ترک‌دار با شرایط $\mu = 1.5 \text{ nm}^2$ ، کاهش نسبت بار کمانشی نانورق اورتوتروپ 8% بیشتر از نانورق ایزوتروپ می‌باشد.

۷- ضریب کمانش نانورق‌های اورتوتروپ با مقید کردن لبه‌های نانورق‌ها افزایش می‌یابد. به عبارت دیگر، اثر غیرموضعی کاهش می‌یابد.

۸- مشاهده گردید که ضریب کمانش نانورق‌های اورتوتروپ ترک‌دار در حالت بارگذاری عمود بر راستای ترک، با افزایش طول ترک، افزایش می‌یابد در حالی‌که در حالت بارگذاری موازی بر راستای ترک، ضریب کمانش کاهش می‌یابد.

مراجع

- [2] M. Ma, J. Tu, Y. Yuan, X. Wang, K. Li, F. Mao, Z. Zeng, Electrochemical performance of ZnO nanoplates as anode materials for Ni/Zn secondary batteries, *Journal of Power Sources*, 179(1) (2008) 395-400.
- [3] J. Yguerabide, E.E. Yguerabide, Resonance light scattering particles as ultrasensitive labels for detection of analytes in a wide range of applications, *Journal of Cellular Biochemistry*, 84(S37) (2001) 71-81.
- [4] M. Aagesen, C. Sørensen, Nanoplates and their suitability for use as solar cells, *Proceedings of Clean Technology*, (2008) 109-112.
- [5] W. Bai, X. Zhu, Z. Zhu, J. Chu, Synthesis of zinc oxide nanosheet thin films and their improved field emission and photoluminescence properties by annealing processing, *Applied Surface Science*, 254(20) (2008) 6483-6488.
- [6] A. Farajpour, A. Shahidi, M. Mohammadi, M. Mahzoon, Buckling of orthotropic micro/nanoscale plates under linearly varying in-plane load via nonlocal continuum mechanics, *Composite Structures*, 94(5) (2012) 1605-1615.
- [7] A. Farajpour, A.A. Solghar, A. Shahidi, Postbuckling analysis of multi-layered graphene sheets under non-uniform biaxial compression, *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, 47 (2013) 197-206.
- [8] T. Aksencer, M. Aydogdu, Levy type solution method for vibration and buckling of nanoplates using nonlocal elasticity theory, *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, 43(4) (2011) 954-959.
- [9] P. Malekzadeh, A. Setoodeh, A.A. Beni, Small scale effect on the thermal buckling of orthotropic arbitrary straight-sided quadrilateral nanoplates embedded in an elastic medium, *Composite Structures*, 93(8) (2011) 2083-2089.
- [10] P. Malekzadeh, A. Setoodeh, A.A. Beni, Small scale effect on the free vibration of orthotropic arbitrary straight-sided quadrilateral nanoplates, *Composite Structures*, 93(7) (2011) 1631-1639.
- [11] V. Abdolvahab, P. Memarzadeh, Effect of crack damage on size-dependent instability of graphene sheets, *Applied Mathematical Modelling*, 129 (2024) 408-427.
- [12] M. Alinia, S. Hosseinzadeh, H. Habashi, Numerical modelling for buckling analysis of cracked shear panels, *Thin-Walled Structures*, 45(12) (2007) 1058-1067.
- [13] M. Alinia, S. Hosseinzadeh, H. Habashi, Buckling and post-buckling strength of shear panels degraded by near border cracks, *Journal of Constructional Steel Research*, 64(12) (2008) 1483-1494.
- [14] R. Brighenti, A. Carpinteri, Buckling and fracture behaviour of cracked thin plates under shear loading, *Materials & Design*, 32(3) (2011) 1347-1355.
- [15] A. Milazzo, I. Benedetti, V. Gulizzi, A single-domain Ritz approach for buckling and post-buckling analysis of cracked plates, *International Journal of Solids and Structures*, 159 (2019) 221-231.
- [16] R. Brighenti, Buckling of cracked thin-plates under tension or compression, *Thin-Walled Structures*, 43(2) (2005) 209-224.
- [17] R. Brighenti, Numerical buckling analysis of compressed or tensioned cracked thin plates, *Engineering structures*, 27(2) (2005) 265-276.
- [18] M.R. Khedmati, P. Edalat, M. Javidruzi, Sensitivity analysis of the elastic buckling of cracked plate elements under axial compression, *Thin-Walled Structures*, 47(5) (2009) 522-536.
- [19] A. Nasirmanesh, S. Mohammadi, XFEM buckling analysis of cracked composite plates, *Composite Structures*, 131 (2015) 333-343.
- [20] S. Saberi, P. Memarzadeh, T. Zirakian, Study of buckling stability of cracked plates under uniaxial compression using singular FEM, *Structural Engineering and Mechanics, An Int'l Journal*, 69(4) (2019) 417-426.
- [21] P. Memarzadeh, S. Mousavian, M.H. Ghehi, T. Zirakian, Effect of crack location on buckling analysis and SIF of cracked plates under tension, *Steel and Composite Structures, An International Journal*, 35(2) (2020) 215-235.
- [22] M.H. Taheri, P. Memarzadeh, Experimental and numerical study of compressive buckling stability of plates with off-center crack, *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 109 (2020) 102706.
- [23] M.H. Taheri, P. Memarzadeh, Effect of crack on shear buckling of CNTRC plates, *International Journal of Mechanical Sciences*, 229 (2022) 107519.
- [24] B. Kadari, A. Bessaim, A. Tounsi, H. Heireche, A.A. Bousahla, M.S.A. Houari, Buckling analysis of orthotropic nanoscale plates resting on elastic foundations, *Journal of Nano Research*, 55 (2018) 42-56.
- [25] M. Rajabi, H. Lexian, A. Rajabi, Analysis of Nanoplate with a Central Crack Under Distributed Transverse Load Based on Modified Nonlocal Elasticity Theory, *Journal of Solid Mechanics*, 13(2) (2021) 213-232.
- [26] D. Panahandeh-Shahraki, A.A. Rad, Buckling of cracked functionally graded plates supported by Pasternak foundation, *International Journal of Mechanical Sciences*, 88 (2014) 221-231.
- [27] A.A. Rad, D. Panahandeh-Shahraki, Buckling of cracked functionally graded plates under tension, *Thin-Walled Structures*, 84 (2014) 26-33.
- [28] S. Natarajan, S. Chakraborty, M. Ganapathi, M. Subramanian, A parametric study on the buckling of functionally graded material plates with internal discontinuities using the partition of unity method, *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 44 (2014) 136-147.

- [29] P. Liu, T. Bui, D. Zhu, T. Yu, J. Wang, S. Yin, S. Hirose, Buckling failure analysis of cracked functionally graded plates by a stabilized discrete shear gap extended 3-node triangular plate element, *Composites Part B: Engineering*, 77 (2015) 179-193.
- [30] H. Tanzadeh, H. Amoushahi, Buckling analysis of orthotropic nanoplates based on nonlocal strain gradient theory using the higher-order finite strip method (H-FSM), *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 95 (2022) 104622.
- [31] X. Wang, X. Shi, A.E. Ragab, R. Sabetvand, Investigating the effect of external heat flux on the crack growth process in an aluminum nanoplate using molecular dynamics simulation, *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 150 (2024) 107199.
- [32] R.A. Arpanahi, B. Mohammadi, M.T. Ahmadian, S.H. Hashemi, Study on the buckling behavior of nonlocal nanoplate submerged in viscous moving fluid, *International Journal of Dynamics and Control*, 11(6) (2023) 2820-2830.
- [33] M. Sadeghian, A. Palevicius, G. Janusas, Nonlinear Thermal/Mechanical Buckling of Orthotropic Annular/Circular Nanoplate with the Nonlocal Strain Gradient Model, *Micromachines*, 14(9) (2023) 1790.
- [34] H.R. Analooei, M. Azhari, H. Salehipour, Thermo-electro-mechanical vibration and buckling analysis of quadrilateral and triangular nanoplates with the nonlocal finite strip method, *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, 51(3) (2023) 1684-1704.
- [35] A.A. Daikh, M.-O. Belarbi, A. Khechai, L. Li, H.M. Ahmed, M.A. Eltaher, Buckling of bi-coated functionally graded porous nanoplates via a nonlocal strain gradient quasi-3D theory, *Acta Mechanica*, 234(8) (2023) 3397-3420.
- [36] Y. Chen, J.D. Lee, A. Eskandarian, Atomistic viewpoint of the applicability of microcontinuum theories, *International journal of solids and structures*, 41(8) (2004) 2085-2097.
- [37] A.C. Eringen, Nonlocal polar elastic continua, *International journal of engineering science*, 10(1) (1972) 1-16.
- [38] A.C. Eringen, On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves, 1983.
- [39] A.C. Eringen, D. Edelen, On nonlocal elasticity, *International journal of engineering science*, 10(3) (1972) 233-248.
- [40] A. Eringen, J. Wegner, Nonlocal continuum field theories, in, *American Society of Mechanical Engineers Digital Collection*, 2003.
- [41] P.P. Minh, T. Van Do, D.H. Duc, N.D. Duc, The stability of cracked rectangular plate with variable thickness using phase field method, *Thin-Walled Structures*, 129 (2018) 157-165.
- [42] J.N. Reddy, *Theory and analysis of elastic plates and shells*, CRC press, 2006.
- [43] A.R. Khoei, *Extended finite element method: theory and applications*, John Wiley & Sons, 2015.
- [44] R.D. Cook, *Concepts and applications of finite element analysis*, John Wiley & Sons, 2007.
- [45] J.N. Reddy, *An introduction to the finite element method*, McGraw-Hill New York, 2005.
- [46] M. Sobhy, Natural frequency and buckling of orthotropic nanoplates resting on two-parameter elastic foundations with various boundary conditions, *Journal of Mechanics*, 30(5) (2014) 443-453.
- [47] S. Pradhan, Buckling of single layer graphene sheet based on nonlocal elasticity and higher order shear deformation theory, *Physics letters A*, 373(45) (2009) 4182-4188.
- [48] S. Pradhan, T. Murmu, Small scale effect on the buckling analysis of single-layered graphene sheet embedded in an elastic medium based on nonlocal plate theory, *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, 42(5) (2010) 1293-1301.
- [49] S. Pradhan, T. Murmu, Small scale effect on the buckling of single-layered graphene sheets under biaxial compression via nonlocal continuum mechanics, *Computational materials science*, 47(1) (2009) 268-274.