

یافتن نواحی آسیب دیده در سازه های پوسته ی مخروطی با استفاده از روش های تحلیلی مبتنی بر ارتعاش آزاد سازه

احسان آقا احمدی^۱، رضا تقی پور^{۱*}، محسن بزرگ نسب^۱، محمد ملاعلی پور^۲

۱- گروه مهندسی عمران، دانشکده مهندسی و فناوری، دانشگاه مازندران، بابلسر، ایران

۲- گروه مهندسی مکانیک، دانشکده مهندسی و فناوری، دانشگاه مازندران، بابلسر، ایران

* نویسنده مسئول، ایمیل: r.taghipour@umz.ac.ir

چکیده

پایش سلامت سازه ها و شناسایی نواحی آسیب دیده بمنظور بررسی وضعیت عملکردی آنها امری مهم و ضروری می باشد. زیرا عدم توجه به آسیب های موضعی باعث کاهش کارایی عملکرد سازه گردیده و ممکن است باعث افزایش شدت آسیب به علت بارگذاری های طبیعی و یا مصنوعی و در نتیجه تخریب کل سازه گردد. هدف اصلی در این پژوهش پیشنهاد مدلی با استفاده از روش های تحلیلی و توسعه آن جهت شناسایی نواحی آسیب دیده در پوسته های مخروطی ساخته شده از مواد مدرج تابعی مستقر بر بستر الاستیک می باشد. از آنجائیکه اشکال مودی پارامتری حساس به وجود آسیب در المان هاست، این پارامترها به منظور پروسه تشخیص آسیب در سازه مورد استفاده قرار گرفت. معادلات حاکم بر اساس تئوری برشی مرتبه اول در نرم افزار میپل استخراج گردید. روش تحلیلی با استفاده از سری توانی، فرکانس های طبیعی و اشکال مودی سازه را محاسبه می کند. جهت اطمینان از عملکرد مدل پیشنهاد شده، نتایج حاصل از مدلسازی با نتایج دیگر مراجع و نیز مدل عددی ساخته شده در نرم افزار آباکوس صحت سنجی شده است. در نهایت، با در نظر گرفتن انواع شرایط تکیه گاهی و سختی های متفاوت برای بستر، المان های آسیب دیده پوسته مخروطی شکل با در نظر گرفتن سناریوهای مختلف آسیب مشخص شده است. بررسی ها نشانگر عملکرد مناسب مدل پیشنهادی در تشخیص محدوده آسیب دیده می باشد.

کلمات کلیدی

پوسته مخروطی، یافتن نواحی آسیب دیده، رفتار ارتعاش آزاد، تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول، مشتقات اشکال مودی.

* رضا تقی پور، استادیار دانشکده مهندسی عمران - دانشگاه مازندران.
ایمیل: r.taghipour@umz.ac.ir (نویسنده مسئول مقاله)

شناسایی آسیب های محلی در سازه ها از اهمیت ویژه ای برخوردار می باشد. زیرا عدم توجه به آنها باعث کاهش کارایی سازه گردیده و ممکن است با بارگذاری حاصل از خطرات طبیعی یا مصنوعی تشدید شده و در نهایت منجر به تخریب کل سازه گردد. اثرات آسیب های محلی سازه به صورت تغییر در مقاومت و سختی در آن محل است. این تغییرات در رفتار استاتیکی و دینامیکی سازه اثر کرده که منجر به تغییر پاسخ های دینامیکی و استاتیکی آن از جمله فرکانس های طبیعی و اشکال مودی آن می گردد. در نتیجه با داشتن اطلاعات مودی و مشتقات آن در حالت های سازه سالم و آسیب دیده امکان بررسی مکان آسیب فراهم می گردد.

در سال ۲۰۰۱، بوچانن و ونگ^۱ با استفاده از روش اجزاء محدود به مطالعه ارتعاش مخروط توخالی پرداختند. معادلات فشار با استفاده از جابجایی سه بعدی المان محدود در سیستم مختصات مخروطی مورد بررسی قرار گرفت. با فرض تقارن محوری فرمول به دو بعد کاهش می یابد این امر در حالی است که تجزیه و تحلیل سه بعدی حفظ می شود [۱]. در سال ۲۰۰۶، بنگال^۲ و همکاران از یک فرمول المان محدود که بر پایه تئوری تغییر شکل برشی بوده، برای مطالعه رفتار خمشی و ارتعاش پوسته های مخروطی FGM در یک محیط با درجه حرارت بالا استفاده کرده اند. بمنظور مدل سازی پوسته مخروطی FGM، از سری فوریه برای متغیر جابجایی در جهت پیرامونی استفاده شده است [۲]. در سال ۲۰۱۰، شریعت و علی پور بر اساس یک روش تبدیل دیفرانسیل، راه حل نیمه تحلیلی برای رفتار ارتعاش آزاد ارائه نمودند و به بررسی تنش مودال صفحات دایره ای هدفمند با ضخامت متغیر و لبه های گیردار بر بستر الاستیک پرداختند. تغییرات پارامترهای مواد و هندسه با پنج توابع نمایی به صورت مجزا بیان شده است [۳]. در سال ۲۰۱۳، شریعت و علی پور راه حل مبتنی بر سری توانی برای بررسی صفحات هدفمند (FGM) با رفتار ارتعاش آزاد و با میرایی ویسکوالاستیک ارائه نمودند. تغییرات خواص برای مواد هدفمند همزمان در دو جهت مختلف عرضی و شعاعی مورد بررسی قرار گرفته است [۴]. در سال ۲۰۱۴، علی پور و شریعت، به معرفی روشی جهت تحلیل رفتار ارتعاشات آزاد ورق ساندویچ حلقوی هدفمند بر روی بستر الاستیک وینکلر ارائه نمودند. نتایج روش پیشنهادی با نتایج حاصل از مدل سازی در نرم افزار آباکوس مورد مقایسه قرار گرفته است [۵].

در سال ۲۰۱۴، جین و همکاران یک روش سه بعدی برای ارتعاش آزاد پوسته های مخروطی ایزوتروپیک و ارتوتروپیک با محدودیت های کششی الاستیک ارائه شده است. فرمول ها با استفاده از روش ریلی ریتز و بر اساس تئوری الاستیسیته سه بعدی در نظر گرفته شده اند. جابجایی اجزای پوسته های مخروطی توسط سری فوریه در جهت محیطی و همچنین یک سری فوریه دو کسینوس همراه با چند تابع کمکی در جهت ضخامت و جهت های مرزی، بیان شد [۶]. در سال ۲۰۱۶، نواییان و همکاران یک شاخص موثر بر اساس اطلاعات اشکال مودی و مشتقات آن برای سازه صفحه ای در حالت های سالم و آسیب دیده پیشنهاد دادند. بمنظور بررسی صحت عملکرد شاخص آسیب های منفرد و چندگانه، اعمال گردید. نتایج بدست آمده نشانگر آن است که شاخص پیشنهادی با دقت بالایی توانایی تشخیص محل وقوع آسیب های منفرد و چندگانه را دارا می باشد [۷].

در سال ۲۰۱۶، علیپور یک رویکرد جدید برای تحلیل استاتیکی صفحات دایره ای ساندویچی براساس لایه یابی که شباهت زیادی به تئوری سه بعدی الاستیک دارد، ارائه کرده است. هر لایه از صفحات ساندویچی از مواد هدفمند ساخته شده است. شرایط مرزی می تواند بر بستر الاستیک باشد که به صورت تنش نرمال غیر یکنواخت و یا برش کششی فرض می شود. برش عرضی، تنش نرمال و شرایط مرزی در بالا و پایین صفحه ساندویچ و همچنین در بین لایه ها مورد بررسی قرار گرفته است [۸]. در سال ۲۰۱۹، محمدرضا زاده و جعفری با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول به بررسی رفتار ارتعاشی فعال لایه کامپوزیتی پوسته های استوانه ای ساده دوار محبوس شده در لایه مغناطیسی پرداختند. در این پژوهش، جزئیات تاثیر پذیری پارامترهای مختلف بر روی ویژگی های میرایی و پاسخ رفتار ارتعاش بررسی شده است [۹]. در سال ۲۰۲۰، آقا احمدی و همکاران به بررسی رفتار ارتعاش آزاد و همچنین تشخیص محدوده آسیب دیده ی سازه پوسته استوانه ای هدفمند پرداختند [۱۰]. در سال ۲۰۲۱، ستوده نیا به بررسی سیستم جدیدی از معادلات برای شناسایی آسیب پوسته های استوانه ای بر اساس روش المان محدود کلاسیک و داده های مودال ناقص

¹ Buchanan and Wong

² Bhargale

با در نظر گرفتن نويز پرداختند. آنها از روش المان محدود برای پوسته‌های استوانه‌ای نازک و محاسبه داده‌های ارتعاشی استفاده کردند [۱۱]. در سال ۲۰۲۱، تقی پور و همکاران به معرفی شاخص خرابی بمنظور تعیین محل آسیب در تیرها پرداختند. مدل پیشنهادی بر اساس روش اجزای محدود و در نرم افزار متلب توسعه داده شده است و کارایی شاخص پیشنهادی را در تعیین محل آسیب های تک گانه و چندگانه مورد ارزیابی قرار داده است. نتایج نشان دهنده دقت بالای روش پیشنهادی برای شناسایی محل آسیب دیده در قاب ها می باشد [۱۲]. در سال ۲۰۲۲، نشتا و همکاران به معرفی یک شاخص خرابی در تعیین محل آسیب در قاب ها پرداختند و بمنظور بررسی عملکرد شاخص، نتایج را با نتایج آزمایشگاهی مورد مقایسه قرار داده است. همچنین عملکرد شاخص را با وجود نويز در اطلاعات مودی نیز بررسی کرده است. نتایج نشان دهنده دقت بالای روش پیشنهادی برای شناسایی محل عناصر آسیب دیده در قاب ها است [۱۳]. در سال ۲۰۲۴ فان و لزگی نظرگاه [۱۴] به بررسی یک نظریه پوسته ورقه ای پیشرفته و کارآمد پرداخته اند که تنها هفت متغیر میدان جابجایی در آن وجود دارد، در این پژوهش از یک المان پوسته چهارضلعی با هشت گره برای حل معادلات دینامیکی حرکت استفاده شده است. دقت نظریه پوسته پیشنهادی و فرمول بندی المان محدود توسعه یافته از طریق تحلیل ارتعاش آزاد پوسته‌های ساندویچی چندلایه متقاطع، زاویه دار و هسته نرم ارزیابی شده است. در سال ۲۰۲۴ یائو و لزگی نظرگاه [۱۵] یک نظریه جدید براساس تغییر شکل برشی پوسته با هفت پارامتر مجهول ارائه شده است و معادلات حاکم بر پوسته‌ها تحت بارهای استاتیکی با توسعه یک المان پوسته هشت گره‌ای حل شده است. همچنین روابط سینماتیکی که برای مدل پوسته چند لایه ارائه شده بر اساس مشتق برهم نهی دوگانه بیان شده است.

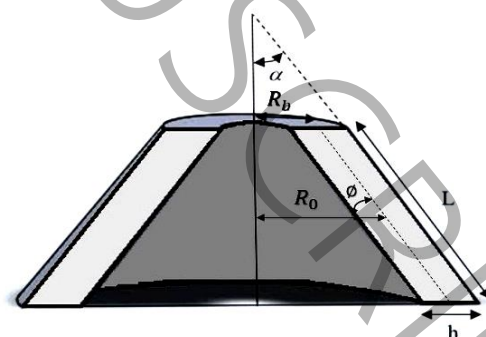
همانطور که در مطالعات پیشین ملاحظه می شود، تحقیقات انجام شده در خصوص پوسته های مخروطی، متمرکز بر فرایند مدل سازی بوده و به بحث پایش سلامت و آسیب های ایجاد شده در این نوع سازه پرداخته نشده است. همچنین مطالعات انجام شده در خصوص تعیین محل آسیب، بر روی سازه های دیگر نظیر تیرها و صفحات مستوی و ... صورت پذیرفته است. در این پژوهش مدل سازی تحلیلی بر روی پوسته های مخروطی با مصالح هدفمند (FGM) انجام شده و شناسایی وجود آسیب و محل آن مورد نظر قرار گرفته است. ابتدا معادلات حاکم بر سازه بر اساس تئوری برشی مرتبه اول در نرم افزار میپل استخراج شده و سپس اشکال مودی و فرکانس های طبیعی با استفاده از روش سری توانی حاصل گردیده است. صحت سنجی مدل با مقایسه نتایج حاصله با نتایج دیگر مراجع و نیز مدل عددی ساخته شده در نرم افزار آباکوس انجام شده است. روند مدل سازی و تشخیص محل آسیب دیده شکل با در نظر گرفتن سناریوهای مختلف آسیب در شرایط مختلف تکیه گاهی و سختی های متفاوت برای بستر مورد ارزیابی قرار گرفته است. در بخش انتهایی پژوهش، نتیجه گیری و جمع بندی مطالب، ارائه شده است.

۲- معادلات حاکم بر پوسته مخروطی هدفمند

بمنظور استخراج معادلات حاکم بر پوسته مخروطی هدفمند، ابتدا به معرفی مشخصات هندسی آن پرداخته شده است. شکل (۱) مشخصات هندسی پوسته مخروطی و نمونه ای از کاربرد آن در برج های خنک کننده را نشان می دهد.



ب- برج خنک کننده
b. Cooling tower



الف- هندسه پوسته مخروطی
a. Conical shell geometry

شکل ۱- هندسه پوسته مخروطی شکل ناقص و نمونه‌ای از کاربرد آنها

Figure 1. Geometry of incomplete conical shells and an example of their application

همانطور که ملاحظه می شود، R_b کوچکترین شعاع مخروط می باشد که مقدار آن $0 \leq R_b$ می باشد، R_0 شعاع وابسته به طول

مخروط می باشد، L طول مخروط، ϕ و α زوایای مخروط هستند که با هم براساس $\phi = \frac{\pi}{2} + \alpha$ به یکدیگر مرتبط می باشند و h ضخامت استوانه می باشد. براساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول [۹]، معادلات حاکم بر روابط پوسته مخروطی به صورت زیر می باشد:

$$\begin{cases} u = u_x + z \psi_x \\ w = w_x \end{cases} \quad (1)$$

که در آن u و w جابجایی ها می باشند و u_x و w_x جابجایی های صفحه میانی ($z=0$) در راستای محور طولی x و محور عرضی z هستند و ψ_x چرخش حول راستای محور طولی مخروط و z متغیر ضخامت مخروط می باشد. روابط جابجایی کرنش برای پوسته های مخروطی شکل به صورت معادلات زیر بیان می شود:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} + z \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \\ \varepsilon_\theta = \frac{u_0 \cos(\phi)}{R_0} + \frac{w \sin(\phi)}{R_0} + z \frac{\psi_x \cos(\phi)}{R_0} \\ \gamma_{xz} = \psi_x + \frac{\partial w_x}{\partial x} \end{cases} \quad (2)$$

که در معادله فوق ε_x کرنش طولی و ε_θ کرنش زاویه ای و γ_{xz} کرنش برشی و R_0 شعاع مخروط برحسب طول مخروط می باشند. همچنین مقدار R_0 براساس R_b کوچکترین شعاع مخروط و x متغیر در راستای طول مخروط، به صورت زیر بیان می گردد:

$$R_0 = R_b + x \cos(\phi) \quad (3)$$

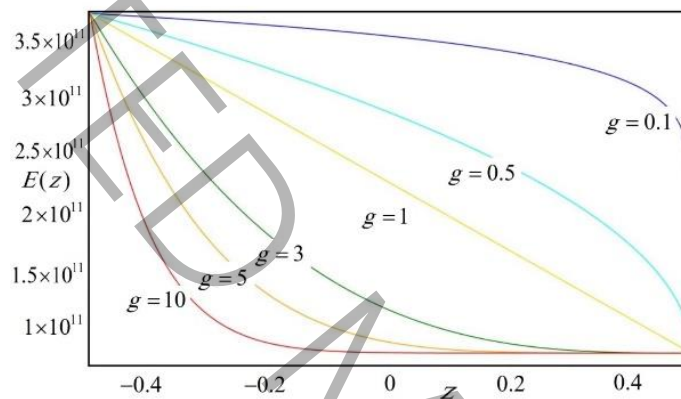
تنش های متناظر بر اساس قانون هوک تعمیم داده شده به صورت زیر بیان شده است:

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_\theta), \\ \sigma_\theta = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_\theta + \nu \varepsilon_x), \\ \tau_{xz} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xz} \end{cases} \quad (4)$$

که در معادلات (۴)، ν ضریب پواسون و E مدول الاستیسیته و σ_x و σ_θ تنش های نرمال و τ_{xy} تنش برشی می باشند. پوسته مخروطی شکل به صورت هدفمند FGM ترکیبی از سرامیک و فلز می باشد به این صورت که در ابتدا، مواد به صورت سرامیک هستند و خواص ماده به طور پیوسته براساس روابط زیر تغییر می کنند و در انتها مواد به صورت فلز می باشند:

$$\begin{cases} E = (E_c - E_m) \left[\left(-\frac{z}{h} \right) + 0.5 \right]^g + E_m \\ \rho = (\rho_c - \rho_m) \left[\left(-\frac{z}{h} \right) + 0.5 \right]^g + \rho_m \\ \nu = (\nu_c - \nu_m) \left[\left(-\frac{z}{h} \right) + 0.5 \right]^g + \nu_m \end{cases} \quad (5)$$

در معادلات (5)، ρ_m چگالی فلز و E_m مدول الاستیسیته فلز و ν_m ضریب پواسون فلز و ρ_c چگالی سرامیک و E_c مدول الاستیسیته سرامیک و E ضریب پواسون سرامیک می‌باشند و g پارامتر دلخواه توانی کسر حجمی می‌باشد که مقدار آن برابر $g > 0$ است. با توجه به نکات ذکر شده نمودار E بر حسب z به ازای مقادیر مختلف g به شرح شکل (۲) می‌باشد:



شکل ۲- تغییرات مقدار مدول یانگ (E) بر حسب ضخامت (z) به ازای مقادیر مختلف g

Figure 2. Changes in Young's modulus (E) value depending on thickness (z) for different values of g

معادلات حرکت ممکن است با استفاده از اصل کمینه‌سازی انرژی پتانسیل محاسبه شود.

$$\delta U + \delta K + \delta V = 0 \quad (6)$$

که در آن U انرژی کرنشی و K انرژی جنبشی و V انرژی ناشی از بار خارجی می‌باشد. بکارگیری این اصل منجر به سه معادله حرکت برای پوسته مخروطی می‌شود:

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_V \left\{ \sigma_x \delta(u_{0,x} + z\psi_{x,x}) + \sigma_\theta \delta\left(\frac{w}{R_0}\right) + \tau_{xz} \delta(\psi_x + w_{,x}) \right\} dV \\ \delta K &= - \int_V \rho \{ \ddot{U} \delta U + \ddot{W} \delta W \} dV, \\ \delta V &= \int_V [k_w(\gamma_0 + \gamma_1 x + \gamma_2 x^2) w \delta w] dA \end{aligned} \quad (7)$$

که با جایگذاری معادلات (۲) و (۵) در معادلات (۷) و گرفتن انتگرال جز به جز در راستای طول و ضخامت معادلات، معادلات مخروط استخراج می‌شود و به شرح ذیل می‌باشد.

$$\begin{cases} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{N_x - N_\theta}{R_0} \cos(\phi) = I_0 \frac{d^2 u}{d^2 x} + I_1 \frac{d^2 \psi_x}{d^2 x} \\ \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{M_x - M_\theta}{R_0} \cos(\phi) - Q_x = I_1 \frac{d^2 u}{d^2 x} + I_2 \frac{d^2 \psi_x}{d^2 x} \\ \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{Q_x}{R_0} \cos(\phi) - \frac{N_\theta}{R_0} \sin(\phi) + k_w (a_0 + a_1 x + a_2 x^2) w = I_0 \frac{d^2 w}{d^2 x} \end{cases} \quad (8)$$

که در معادلات ۵، N_x نیروی درون صفحه‌ای، M_x گشتاور خمشی و Q_{xz} نیروی برشی عرضی می‌باشند که بر اساس تئوری برشی مرتبه‌ی اول هستند و $\tilde{K}_w$ ضریب وینکلر بستر الاستیک و a_0 و a_1 و a_2 ضرایب می‌باشند و I_0 و I_1 و I_2 ضرایبی هستند که در معادلات (۱۱) توضیح داده شده است. D^* پارامتر بی بعد ساز می‌باشد و $\tilde{K}_w$ سختی بستر که در رابطه زیر بی بعد شده است:

$$D^* = \frac{E_m h^3}{12(1-\nu^2)}, K_w = \frac{k_w L^4}{D^*} \quad (9)$$

برای محاسبه‌ی پارامترهای روابط (۸) از معادلات (۱۰) استفاده شده است که با جایگذاری معادله (۲) در معادله (۴) بدست آمده است:

$$\begin{aligned} N_x &= \int_{h_b}^{h_t} \sigma_x dz = A \frac{\partial u_x}{\partial x} + \bar{A} \frac{\cos(\phi)}{R_0} u_0 + \bar{A} \frac{\sin(\phi)}{R_0} w + B \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \bar{B} \frac{\cos(\phi)}{R_0} \psi_x \\ N_\theta &= \int_{h_b}^{h_t} \sigma_\theta dz = A \frac{\cos(\phi)}{R_0} u_0 + A \frac{\sin(\phi)}{R_0} w + \bar{A} \frac{\partial u_x}{\partial x} + B \frac{\cos(\phi)}{R_0} \psi_x + \bar{B} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \\ M_x &= \int_{h_b}^{h_t} \sigma_x z dz = B \frac{\partial u_x}{\partial x} + \bar{B} \frac{\cos(\phi)}{R_0} u_0 + \bar{B} \frac{\sin(\phi)}{R_0} w + D \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \bar{D} \frac{\cos(\phi)}{R_0} \psi_x \\ M_\theta &= \int_{h_b}^{h_t} \sigma_\theta z dz = B \frac{\cos(\phi)}{R_0} u_0 + B \frac{\sin(\phi)}{R_0} w + \bar{B} \frac{\partial u_x}{\partial x} + D \frac{\cos(\phi)}{R_0} \psi_x + \bar{D} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \\ Q_x &= k \int_{h_b}^{h_t} \tau_{xz} dz = k \tilde{A} \left(\psi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (10)$$

در معادله فوق $k = \frac{5}{6}$ ضریب تصحیح برشی مربوط به تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول جهت بهبود پاسخ‌ها می‌باشد. در ادامه طبق معادلات (۸) از معادلات (۱۰) مشتق گرفته می‌شود، ضرایبی که در معادله (۸) و (۱۰) مشاهده می‌شود به شرح زیر بدست می‌آید:

$$\left\{ \begin{matrix} A \\ B \\ D \end{matrix} \right\} = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(x, z)}{1 - \nu^2} \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ z^2 \end{Bmatrix} dz, \quad \left\{ \begin{matrix} \bar{A} \\ \bar{B} \\ \bar{D} \end{matrix} \right\} = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\nu E(x, z)}{1 - \nu^2} \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ z^2 \end{Bmatrix} dz, \quad (11)$$

$$\left\{ \begin{matrix} \tilde{A} \\ \tilde{B} \\ \tilde{D} \end{matrix} \right\} = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(x, z)}{2(1 + \nu)} \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ z^2 \end{Bmatrix} dz, \quad \left\{ \begin{matrix} I_0 \\ I_1 \\ I_2 \end{matrix} \right\} = \int_{-h/2}^{h/2} \rho(x, z) \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ z^2 \end{Bmatrix} dz$$

در ادامه از معادلات و مشتقات (۱۰) برای محاسبه معادلات (۸) استفاده می‌گردد که در نتیجه معادلات (۸) به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} & A \frac{d^2 u}{d^2 x} + A \frac{\cos(\phi)}{R_0} \frac{\partial u}{\partial x} - A \frac{\cos^2(\phi)}{R_0^2} u + \frac{d^2 \psi_x}{d^2 x} + B \frac{\cos(\phi)}{R_0} \frac{\partial \psi}{\partial x} - B \frac{\cos^2(\phi)}{R_0^2} \psi_x + \\ & + \bar{A} \frac{\sin(\phi)}{R_0} \frac{\partial w}{\partial x} - A \frac{\sin(\phi) \cos(\phi)}{R_0^2} w = I_0 \ddot{u}_0 + I_1 \ddot{\psi}_x \\ & B \frac{d^2 u}{d^2 x} + B \frac{\cos(\phi)}{R_0} \frac{\partial u}{\partial x} - B \frac{\cos^2(\phi)}{R_0^2} u_0 + D \frac{d^2 \psi_x}{d^2 x} + D \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\cos(\phi)}{R_0} - D \frac{\cos^2(\phi)}{R_0^2} \psi_x + \bar{B} \frac{\sin(\phi)}{R_0} \frac{\partial w}{\partial x} - \\ & - B \frac{\sin(\phi) \cos(\phi)}{R_0^2} w - \kappa \tilde{A} \left(\psi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = I_1 \ddot{u}_0 + I_2 \ddot{\psi}_x \\ & - \bar{A} \frac{\sin(\phi)}{R_0} \frac{\partial u}{\partial x} - A \frac{\cos(\phi) \sin(\phi)}{R_0^2} u_0 - \frac{\sin(\phi)}{R_0} \bar{B} \frac{\partial \psi}{\partial x} - B \frac{\cos(\phi) \sin(\phi)}{R_0^2} \psi_x + \kappa \tilde{A} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \\ & + \kappa \tilde{A} \frac{\cos(\phi)}{R_0} \psi_x + \kappa \tilde{A} \frac{d^2 w}{d^2 x} + \kappa \tilde{A} \frac{\cos(\phi)}{R_0} \frac{\partial w}{\partial x} - A \frac{\sin^2(\phi)}{R_0^2} w + k_w (a_0 + a_1 x + a_2 x^2) w = I_0 \ddot{w} \end{aligned} \quad (12)$$

انواع شرایط مرزی برای پوسته مخروطی شکل به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned} \text{تکیه‌گاه ساده:} \quad & U_x = 0, M_x = 0, w_x = 0, \\ \text{انتها آزاد:} \quad & N_x = 0, M_x = 0, Q_x = 0, \\ \text{انتهاگیردار:} \quad & u_x = 0, \psi_x = 0, w_x = 0, \end{aligned} \quad (13)$$

برای حل معادلات از سری توانی تیلور استفاده شده است که مجهولات براساس سری توانی تیلور به صورت زیر ارائه شده است:

$$\begin{aligned} u_x &= \sum_{i=0}^{\infty} U_i (x - x_0)^i \\ \psi_x &= \sum_{i=0}^{\infty} \Psi_i^{(x)} (x - x_0)^i \\ w_x &= \sum_{i=0}^{\infty} W_i (x - x_0)^i \end{aligned} \quad (14)$$

برای سهولت و کم شدن حجم محاسبات از تغییر متغیر زیر استفاده شده است:

$$\frac{\cos(\phi)}{R_b + x \cos(\phi)} = - \sum_{j=0}^{\infty} \left(- \frac{\cos(\phi)}{R_b + x_0 \cos(\phi)} \right)^{j+1} (x - x_0)^j = - \sum_{j=0}^{\infty} (Y)^{j+1} (x - x_0)^j \quad (15)$$

$$\frac{\cos(\phi)^2}{(R_b + x \cos(\phi))^2} = \sum_{j=0}^{\infty} (j+1) \left(- \frac{\cos(\phi)}{R_b + x_0 \cos(\phi)} \right)^{j+2} (x - x_0)^j = \sum_{j=0}^{\infty} (j+1) (Y)^{j+2} (x - x_0)^j$$

با استفاده از سری توانی تیلور و با جایگذاری معادلات (۱۴) در مجموعه معادلات (۱۲) و (۱۳)، به ترتیب معادلات حاکم و شرایط مرزی به صورت سری قابل بیان می باشد که نتایج در پیوست (الف) ارائه شده است.

در این معادلات که حول نقطه L (نقطه انتهایی پوسته در راستای محور x) بسط داده شده است، توابع $U_j^{(i)}, \Psi_j^{(i)}, W_j^{(i)}$ در این معادلات که حول نقطه L (نقطه انتهایی پوسته در راستای محور x) بسط داده شده است، توابع $U_j^{(i)}, \Psi_j^{(i)}, W_j^{(i)}$ براساس توابع $U_0^{(i)}, U_1^{(i)}, \Psi_0^{(i)}, \Psi_1^{(i)}, W_0^{(i)}, W_1^{(i)}$ محاسبه می شوند. تعداد شرایط مرزی ابتدائی مخروط، ۳ رابطه، شرایط مرزی انتهائی مخروط، ۳ رابطه و اگر پوسته مخروطی از چند قسمت تشکیل شده باشد، شرایط پیوستگی در محل اتصال هر قسمت، ۶ رابطه می باشد. در مجموع $6n$ رابطه برای شرایط مرزی و پیوستگی مخروط وجود دارد که n تعداد قسمت های موجود در طول مخروط می باشد. که این روابط به صورت ماتریس زیر ارائه گردیده شده است:

$$\begin{bmatrix} \chi_{11}^{(\omega)} & \chi_{12}^{(\omega)} & \dots & \chi_{1(n-1)}^{(\omega)} & \chi_{1n}^{(\omega)} \\ \chi_{21}^{(\omega)} & \chi_{22}^{(\omega)} & \dots & \chi_{2(n-1)}^{(\omega)} & \chi_{2n}^{(\omega)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \chi_{(n-1)1}^{(\omega)} & \chi_{(n-1)2}^{(\omega)} & \dots & \chi_{(n-1)(n-1)}^{(\omega)} & \chi_{(n-1)n}^{(\omega)} \\ \chi_{n1}^{(\omega)} & \chi_{n2}^{(\omega)} & \dots & \chi_{n(n-1)}^{(\omega)} & \chi_{nn}^{(\omega)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_0^{(i)} \\ U_1^{(i)} \\ \Psi_0^{(i)} \\ \vdots \\ U_n^{(i)} \\ \Psi_n^{(i)} \\ W_n^{(i)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (16)$$

که در ماتریس بالا $\chi_{ij}^{(\omega)}$ چند جمله ای فرکانس طبیعی پوسته مخروطی می باشد. بنابراین با گرفتن دترمینان ماتریس، فرکانس طبیعی برای پوسته مخروطی بدست می آید:

$$\begin{vmatrix} \chi_{11}^{(\omega)} & \chi_{12}^{(\omega)} & \dots & \chi_{1(n-1)}^{(\omega)} & \chi_{1n}^{(\omega)} \\ \chi_{21}^{(\omega)} & \chi_{22}^{(\omega)} & \dots & \chi_{2(n-1)}^{(\omega)} & \chi_{2n}^{(\omega)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \chi_{(n-1)1}^{(\omega)} & \chi_{(n-1)2}^{(\omega)} & \dots & \chi_{(n-1)(n-1)}^{(\omega)} & \chi_{(n-1)n}^{(\omega)} \\ \chi_{n1}^{(\omega)} & \chi_{n2}^{(\omega)} & \dots & \chi_{n(n-1)}^{(\omega)} & \chi_{nn}^{(\omega)} \end{vmatrix} = 0 \quad (17)$$

۳- صحت سنجی مدل عددی پوسته مخروطی

برای صحت سنجی مدل پیشنهادی مورد استفاده، نتایج بدست آمده از مدل پیشنهادی با نتایج نظیر در مرجع [۱] و همچنین با نتایج حاصل از مدلسازی عددی در نرم افزار آباکوس مقایسه می گردد. مشخصات مصالح پوسته مخروطی مورد استفاده در بررسی صحت سنجی در جدول (۱) ارائه شده است.

جدول ۱- مشخصات مصالح پوسته مخروطی

Table 1. Conical shell material specifications

چگالی (kg / m^3)	مدول الاستیسیته (GPa)	ضریب پواسون
۵۷۰۰	۱۶۸	۰/۳

به منظور مدلسازی در نرم افزار آباکوس از تئوری الاستیسیته سه بعدی در حالت متقارن محوری استفاده شده است. جهت مدلسازی از ۲۵۰۰ المان ۸ گره‌ای متقارن محوری (CAX8R) استفاده شده است تعداد المان‌ها بر اساس آنالیز حساسیت تعیین شده است؛ بنحوی که با کوچک‌تر نمودن ابعاد المان، تغییرات چندانی در پاسخ بوجود نیامده است. حال به مقایسه فرکانس مود اول تا سوم سازه در حالت سالم (قبل از اعمال خرابی) مدل پیشنهادی و مرجع [۱] و نرم افزار آباکوس می پردازیم. لازم به ذکر است فرکانس های بدست آمده همانند مرجع و با استفاده از رابطه $\Omega = \omega R \sqrt{(1-\nu^2)} \rho / E$ بی بعد شده است و این مقایسه برای شرایط مرزی دو سر گیردار و دو سر آزاد و به ازای ضریب سختی صفر ($\tilde{k}_w = 0$) انجام گردیده و در جداول (۲) و (۳) ارائه شده است.

جدول ۲- مقایسه فرکانس سه مود اول بدست آمده از مرجع [۱] و مدل پیشنهادی برای پوسته مخروطی با تکیه‌گاه دوسر گیردار

$$\frac{R_b}{L} = 0.2 \text{ و } (\tilde{k}_w = 0)$$

Table 2. Comparison of the frequencies of the first three modes obtained from reference [1] and the proposed model for a conical shell with a fixed end supports

$$(\tilde{k}_w = 0) \frac{R_b}{L} = 0.2$$

فرکانس (Hz)	h/L=۰/۲۵				h/L=۰/۵				h/L=۱			
	مدل پیشنهادی	آباکوس	مرجع [۱]	درصد خطا	مدل پیشنهادی	آباکوس	مرجع [۱]	درصد خطا	مدل پیشنهادی	آباکوس	مرجع [۱]	درصد خطا
ω_1	۲/۹۷۳۷	۳/۰۴۴	۳/۰۵۰	۲/۵۰	۳/۱۴۵۰	۳/۲۷۰	۳/۲۷۶	۳/۹۹	۳/۱۱۱۱	۳/۳۰۳	۳/۳۱۰	۶/۰۰
ω_2	۴/۶۶۲۴	۴/۷۲۰	۴/۷۳۴	۱/۵۱	۵/۰۴۹۲	۵/۱۵۸	۵/۱۶۸	۲/۲۹	۵/۱۷۱۶	۵/۳۴۲	۵/۳۵۱	۳/۳۵
ω_3	۵/۶۵۳۸	۵/۷۳۴	۵/۷۴۲	۱/۵۳	۵/۶۳۰۸	۵/۷۳۹	۵/۷۴۶	۲/۰۰	۵/۵۰۴۷	۵/۵۶۶	۵/۵۷۰	۱/۱۷

جدول ۳- مقایسه فرکانس سه مود اول بدست آمده از مرجع [۱] و مدل پیشنهادی برای پوسته مخروطی با تکیه‌گاه دوسر آزاد

$$\frac{R_b}{L} = 0.25 \quad (\tilde{k}_w = 0)$$

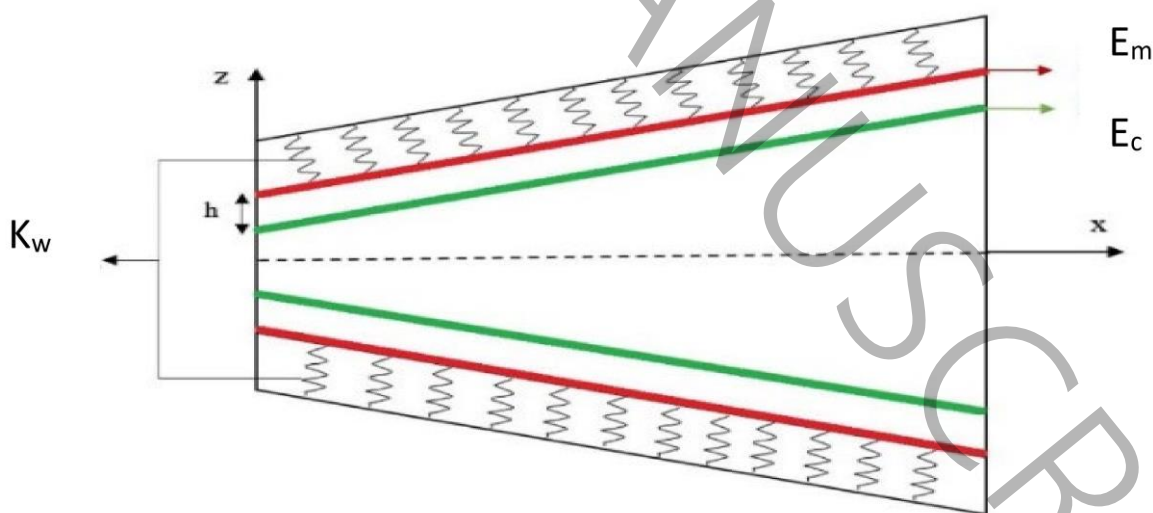
Table 3. Comparison of the frequencies of the first three modes obtained from reference [1] and the proposed model for a conical shell with free ends

$$(\tilde{k}_w = 0) \quad \frac{R_b}{L} = 0.25$$

فرکانس (Hz)	h/L=0.25				h/L=0.5				h/L=1			
	مدل پیشنهادی	آباکوس	مرجع [۱]	درصد خطا	مدل پیشنهادی	آباکوس	مرجع [۱]	درصد خطا	مدل پیشنهادی	آباکوس	مرجع [۱]	درصد خطا
ω_1	۱/۸۳۹	۱/۹۲۷	۱/۹۲۸	۴/۷۹	۱/۵۶۷	۱/۷۳۱	۱/۷۳۲	۹/۵۲	۱/۱۰۱	۱/۲۷۳	۱/۲۷۴	۱۳/۵۷
ω_2	۲/۸۹۲	۲/۹۵۴	۲/۹۵۶	۲/۱۶	۲/۴۵۰	۲/۵۷۷	۲/۵۸۳	۵/۱۴	۱/۶۹۴	۱/۸۷۹	۱/۸۸۰	۹/۸۹
ω_3	۳/۵۷۲	۳/۶۴۸	۳/۶۵۰	۲/۱۳	۳/۸۷۴	۳/۸۷۷	۳/۸۸۰	۰/۱۵	۴/۱۷۷	۴/۲۳۳	۴/۲۳۸	۱/۴۳

همانطور که از جداول (۲) و (۳) ملاحظه می‌گردد نتایج بدست آمده از مدل پیشنهادی با نتایج نظیر در مرجع [۱] و نرم افزار آباکوس از دقت قابل قبولی برخوردار می‌باشد. نکته ی قابل ذکر آنکه در مرجع [۱] و نیز نرم‌افزار آباکوس از روش اجزای محدود استفاده شده است لذا نتایج حاصله به یکدیگر بسیار نزدیک است.

در ادامه به بررسی پوسته مخروطی هدفمند (FGM) پرداخته می‌شود. با توجه به نتایج بدست آمده در نرم افزار آباکوس نشان از صحت مدلسازی آن می‌باشد. در بخش بعدی نتایج مدل پیشنهادی با نتایج بدست آمده از نرم افزار آباکوس مقایسه می‌گردد. لایه ی داخلی پوسته از جنس فلز و لایه ی خارجی آن سرامیک می‌باشد و تغییرات مشخصات مصالح به صورت پیوسته و با کمک معادله (۴) محاسبه می‌گردد. همانطور که در شکل مشاهده می‌گردد نامگذاری المان های در نظر گرفته شده در راستای طول مخروط می‌باشد. پارامترهای هندسی و مشخصات مصالح بکار رفته در شکل (۳) و جدول (۴) نشان داده شده است. پوسته مخروطی شکل تحت ارتعاش آزاد قرار گرفته و تغییرات پارامترهای مختلفی در آن مورد بررسی قرار می‌گیرد. تغییر در ضخامت المان های مختلف، تغییر درصد آسیب و مشخصات مصالح المان های مختلف و همچنین تغییر در سختی بستر $\tilde{k}_w$ و نیز شرایط تکیه‌گاهی متفاوت در آن مورد بررسی قرار گرفته است.



شکل ۳- برخی از پارامترهای هندسی و مشخصات مصالح پوسته مخروطی FGM با در نظر گرفتن تکیه‌گاه الاستیک

Figure 3. Some geometric parameters and material characteristics of the FGM conical shell considering elastic support

جدول ۴- مشخصات مصالح پوسته مخروطی برای حالت FGM

Table 4. Conical shell material specifications for FGM mode

چگالی (Kg/m ³)	مدول الاستیسیته (GPa)	ضریب پواسون	نوع مصالح
۲۷۰۰	۷۰	۰/۳	فلز
۳۸۰۰	۳۸۰	۰/۳	سرامیک

پس از مدلسازی و تحلیل پوسته مخروطی، فرکانس مود اول تا پنجم آن بدست آمده است. این فرکانس ها با کمک رابطه $\Omega = \omega R \sqrt{(1-\nu^2)} \rho_m / E_m$ بی بعد گردیده اند. نتایج حاصله برای ضخامت های مختلف پوسته مخروطی هدفمند (FGM) در شرایط تکیه گاهی دو سر گیردار و دوسر آزاد و دو سر ساده و به ازای ضریب سختی صفر $\tilde{k}_w = 0$ و $g=1$ استخراج شده اند و با مقادیر نظیر که از نرم افزار آباکوس بدست آمده است مقایسه گردیده اند.

جدول ۵-مقایسه فرکانس بی بعد شده مود اول تا پنجم بدست آمده از مدل پیشنهادی و خروجی نرم افزار آباکوس

برای ضخامت های مختلف پوسته مخروطی FGM در شرایط مرزی دو سر گیردار

$$g=1 \text{ و } (\tilde{k}_w = 0)$$

Table 5. Comparison of the dimensionless frequencies of the first to fifth modes obtained from the proposed model and the output of the Abaqus software for different thicknesses of the FGM conical shell under the fixed ends boundary conditions

$$g=1 \text{ و } (\tilde{k}_w = 0)$$

فرکانس(Hz)	h=۰/۱, L=۱, R=۱, α=۳۰			h=۰/۱۵, L=۱, R=۱, α=۳۰			h=۰/۲, L=۱, R=۱, α=۳۰		
	مدل پیشنهادی	نرم افزار آباکوس	درصد خطا (%)	مدل پیشنهادی	نرم افزار آباکوس	درصد خطا (%)	مدل پیشنهادی	نرم افزار آباکوس	درصد خطا (%)
ω_1	۰/۲۲۸۴	۰/۲۳۰۴	۰/۸۷	۰/۲۶۹۱	۰/۲۷۲۳	۱/۲۰	۰/۳۰۶۱	۰/۳۱۰۵	۱/۴۴
ω_2	۰/۴۱۰۰	۰/۴۱۲۹	۰/۷۱	۰/۵۲۲۴	۰/۵۲۸۴	۱/۱۵	۰/۶۰۱۵	۰/۶۱۰۳	۱/۴۶
ω_3	۰/۶۹۷۴	۰/۷۰۴۲	۰/۹۷	۰/۸۱۹۹	۰/۸۲۱۶	۰/۲۰	۰/۸۱۸۱	۰/۸۱۹۰	۰/۱۱
ω_4	۰/۶۹۷۴	۰/۸۲۳۱	۰/۱۶	۰/۸۷۱۷	۰/۸۸۵۴	۱/۵۶	۰/۹۷۹۷	۰/۹۹۹۰	۱/۹۶
ω_5	۱/۰۴۳۲	۱/۰۵۶۷	۱/۲۹	۱/۲۶۳۶	۱/۲۸۸۴	۱/۹۶	۱/۳۹۰۷	۱/۴۲۳۵	۲/۳۵

جدول ۶- مقایسه فرکانس بی بعد شده مود اول تا پنجم بدست آمده از مدل پیشنهادی و خروجی نرم افزار آباکوس برای ضخامت‌های مختلف پوسته مخروطی FGM در شرایط مرزی دو سر آزاد

$$g=1 \text{ و } (\tilde{k}_w = 0)$$

Table 6. Comparison of the dimensionless frequencies of the first to fifth modes obtained from the proposed model and the output of Abaqus software for different thicknesses of FGM conical shell in free ends boundary conditions

فرکانس (Hz)	$h=0.1, L=1, R=1, \alpha=30$			$h=0.15, L=1, R=1, \alpha=30$			$h=0.2, L=1, R=1, \alpha=30$		
	مدل پیشنهادی	نرم افزار آباکوس	درصد خطا (%)	مدل پیشنهادی	نرم افزار آباکوس	درصد خطا (%)	مدل پیشنهادی	نرم افزار آباکوس	درصد خطا (%)
ω_1	۰/۲۳۹۰	۰/۲۴۱۹	۱/۱۹	۰/۲۴۰۹	۰/۲۴۵۶	۱/۹۱	۰/۲۴۱۳	۰/۲۴۷۸	۲/۶۲
ω_2	۰/۳۱۳۸	۰/۳۱۷۳	۱/۱۰	۰/۳۱۷۳	۰/۳۲۳۴	۱/۸۸	۰/۳۱۶۷	۰/۳۲۴۶	۲/۴۳
ω_3	۰/۳۵۲۹	۰/۳۵۵۸	۰/۸۱	۰/۴۱۵۷	۰/۴۱۸۵	۰/۶۶	۰/۴۸۳۰	۰/۴۸۵۸	۰/۵۷
ω_4	۰/۶۳۷۲	۰/۶۳۸۹	۰/۲۶	۰/۸۳۷۱	۰/۸۴۱۴	۰/۵۱	۰/۹۹۲۸	۰/۹۹۹۵	۰/۶۷
ω_5	۱/۰۸۹۸	۱/۰۹۴۵	۰/۴۲	۱/۲۳۰۲	۱/۲۲۴۸	۰/۴۴	۱/۲۳۲۵	۱/۲۲۲۹	۰/۷۸

جدول ۷- مقایسه فرکانس بی بعد شده مود اول تا پنجم بدست آمده از مدل پیشنهادی و خروجی نرم افزار آباکوس برای ضخامت‌های مختلف پوسته مخروطی FGM در شرایط مرزی دو سر ساده

$$g=1 \text{ و } (\tilde{k}_w = 0)$$

Table 7. Comparison of the dimensionless frequencies of the first to fifth modes obtained from the proposed model and the output of Abaqus software for different thicknesses of FGM conical shell under simple ends boundary conditions

$$g=1 \text{ و } (\tilde{k}_w = 0)$$

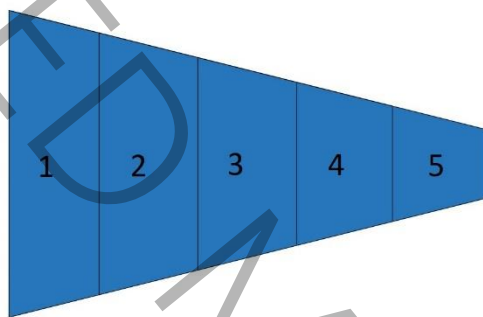
فرکانس (Hz)	$h=0.1, L=1, R=1, \alpha=30$			$h=0.15, L=1, R=1, \alpha=30$			$h=0.2, L=1, R=1, \alpha=30$		
	مدل پیشنهادی	نرم افزار آباکوس	درصد خطا (%)	مدل پیشنهادی	نرم افزار آباکوس	درصد خطا (%)	مدل پیشنهادی	نرم افزار آباکوس	درصد خطا (%)
ω_1	۰/۲۳۵۵	۰/۲۴۱۹	۲/۶۴	۰/۲۳۶۴	۰/۲۴۵۶	۳/۷۴	۰/۲۳۶۵	۰/۲۴۷۸	۴/۵۶
ω_2	۰/۳۲۰۲	۰/۳۱۷۳	۰/۹۰	۰/۳۳۱۲	۰/۳۲۳۴	۲/۳۵	۰/۳۳۱۷	۰/۳۲۴۶	۲/۱۴
ω_3	۰/۳۶۱۹	۰/۳۵۵۸	۱/۶۸	۰/۴۱۸۳	۰/۴۱۸۵	۰/۰۰۴	۰/۴۸۵۳	۰/۴۸۵۸	۰/۱۰
ω_4	۰/۶۳۷۴	۰/۶۳۸۹	۰/۲۳	۰/۸۳۷۷	۰/۸۴۱۴	۰/۴۳	۰/۹۹۳۸	۰/۹۹۹۵	۰/۵۷
ω_5	۱/۰۹۳۰	۱/۰۹۴۵	۰/۱۳	۱/۲۳۷۶	۱/۲۲۴۸	۱/۰۳	۱/۲۳۸۳	۱/۲۲۲۹	۱/۴۴

همانطور که در جدول (۵) تا (۷) مشاهده می گردد نتایج مدل پیشنهادی با خروجی نرم افزار آباکوس از تطابق قابل قبولی برخوردار هستند.

۴- بررسی عملکرد مدل عددی پیشنهادی در مکان های آسیب با سناریوهای مختلف

در ادامه مطالعه و براساس شکل (۴) در لایه های مختلف پوسته مخروطی هدفمند (FGM) آسیب ایجاد گردیده و فرکانس بی بعد شده مود اول سازه های سالم و آسیب دیده برای شرایط تکیه گاهی مختلف و به ازای ضریب سختی های ($\tilde{k}_w$) مختلف در جداول (۸) تا (۱۰) ارائه شده است. آسیب مربوطه از طریق کاهش در مدول الاستیسیته مصالح لایه ها اعمال شده است. سناریو های آسیب بنحوی انتخاب شده است تا دقت مدل برای خرابی های تک گانه، دو گانه و چند گانه و همچنین همجواری المان های آسیب دیده با درصد خطاهای مختلف مورد بررسی قرار گیرد. مشخصات هندسی مرتبط با پوسته مخروطی شامل ضخامت (h) برابر با ۰/۲ متر، طول کلی (L) برابر با ۱ متر که به پنج لایه به ترتیب به طول های ۰/۲، ۰/۱۵، ۰/۳، ۰/۱۵ و ۰/۲ تقسیم شده است؛ همچنین کوچکترین شعاع مخروط R_b برابر با ۱ متر می باشد و R_0 شعاع وابسته به طول مخروط می باشد.

همانطور که در جداول (۸) تا (۱۰) دیده می شود، فرکانس مود اول سازه آسیب دیده نسبت به فرکانس مود سالم در هر سناریو کاهش می یابد و همچنین با افزایش ضریب سختی بستر الاستیک که موجب افزایش صلبیت بستر می شود فرکانس افزایش می یابد. لذا در ادامه، تغییرات این پارامتر برای شکل مودی اول سازه آسیب دیده در سناریوهای مختلف آسیب جداول (۸) تا (۱۰) مورد بررسی قرار می گیرد.



شکل ۴- نحوه تقسیم بندی پوسته مخروطی

Figure 4- The method of dividing the conical shell

جدول ۸- مقایسه فرکانس بی بعد شده مود اول بدست آمده برای سازه آسیب دیده و سالم در سناریوهای خرابی مختلف در شرایط تکیه گاهی

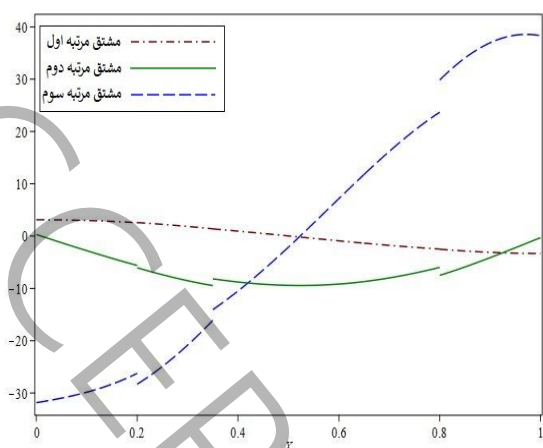
دو سر گیردار و دوسر ساده به ازای $g=1$

Table 8 - Comparison of the dimensionless frequency of the first mode obtained for the damaged and intact structure in different damage scenarios for fixed and simple end supports and considering $g=1$

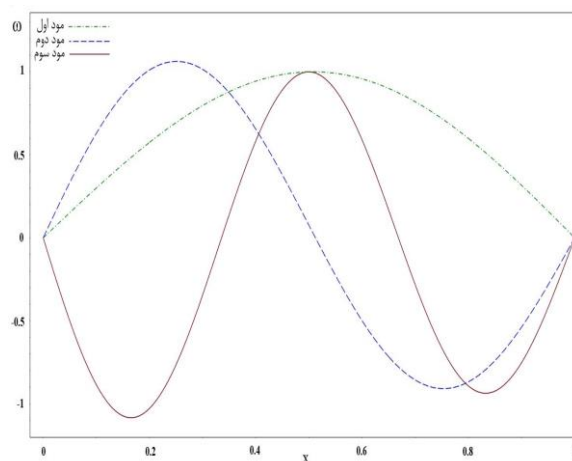
	سناریو آسیب			سناریوی ۱			سناریوی ۲			سناریوی ۳		
	شماره المان			۳			۴ و ۱			۵ و ۲ و ۱		
	نوع آسیب			تک گانه			دو گانه			سه گانه		
	درصد آسیب			۸٪			۸٪ و ۱۶٪			۶٪ و ۱۲٪ و ۱۸٪		
	سختی بستر ($\bar{k}_w$)			۱۰۰	۵۰	۰	۵۰	۰	۰	۱۰۰	۵۰	۰
دو سر گیردار	فرکانس سازه سالم			۰/۶۰۳۴	۰/۵۳۷۲	۰/۴۵۹۲	۰/۶۰۳۴	۰/۵۳۷۲	۰/۴۵۹۲	۰/۶۰۳۴	۰/۵۳۷۲	۰/۴۵۹۲
	فرکانس سازه آسیب دیده			۰/۶۰۰۱	۰/۵۳۲۵	۰/۴۵۲۱	۰/۵۹۶۸	۰/۵۳۰۲	۰/۴۵۱۸	۰/۵۸۷۴	۰/۵۲۱۱	۰/۴۴۳۱
دو سر ساده	فرکانس سازه سالم			۰/۵۳۳۱	۰/۴۱۳۷	۰/۳۱۸۳	۰/۵۳۳۱	۰/۴۱۳۷	۰/۳۱۸۳	۰/۵۳۳۱	۰/۴۱۳۷	۰/۳۱۸۳
	فرکانس سازه آسیب دیده			۰/۴۸۶۹	۰/۴۰۸۶	۰/۳۱۱۳	۰/۴۸۷۱	۰/۴۰۹۴	۰/۳۱۲۷	۰/۴۸۶۱	۰/۴۰۸۴	۰/۳۱۲۱

بمنظور بررسی تاثیر مشتقات مراتب بالاتر اشکال مودی در تشخیص محل آسیب در سناریو ۳ با تکیه گاه ساده مستقر بر بستر الاستیک، در شکل (۵) شکل مود اول تا سوم و همچنین مشتق اول، دوم و سوم اولین شکل مود ارائه شده است. همانطور که ملاحظه می شود منحنی شکل مود به صورت پیوسته بوده و محل های آسیب دیده از روی منحنی شکل مودی قابل تشخیص نمی باشد، همانطور که در شکل ۵-ب مشخص است در مراتب بالاتر مشتق، آسیب ها با وضوح بهتری قابل تشخیص می باشند، برای نشان دادن این موضوع از نسبت آسیب های مشتق مرتبه اول، دوم و سوم برای یک نقطه استفاده شد که به ترتیب ۱/۰، ۱/۱ و ۱/۲ می باشند، با توجه به این امر از مشتق سوم برای نمایش نمودار ها استفاده شده است.

اشکال (۶) تا (۸) تغییرات مشتق سوم شکل مودی اول در طول مخروط برای سازه آسیب دیده برای هر یک از سناریوهای فوق نشان می دهند. در شکل (۶) مشتق سوم جابجایی برای سازه ی آسیب دیده در المان سوم با ضرایب سختی ۰، ۵۰ و ۱۰۰ نشان داده شده است؛ همانطور که مشاهده می شود مشتق سوم در ابتدا و انتهای المان سوم در $x=0/35m$ و $x=0/65m$ نسبت به ابتدای مخروط دارای ناپیوستگی بوده که نشان دهنده ی آسیب در این المان می باشد و در سایر قسمت ها، نمودار پیوسته می باشد که نشانگر عدم وجود آسیب دیدگی در سایر المان های سازه است. همچنین مشاهده می شود که با کاهش ضریب بستر، ناپیوستگی در نقاط مورد نظر محسوس تر می باشد. موارد اشاره شده برای هر دو حالت تکیه گاهی گیردار و ساده برقرار می باشد.



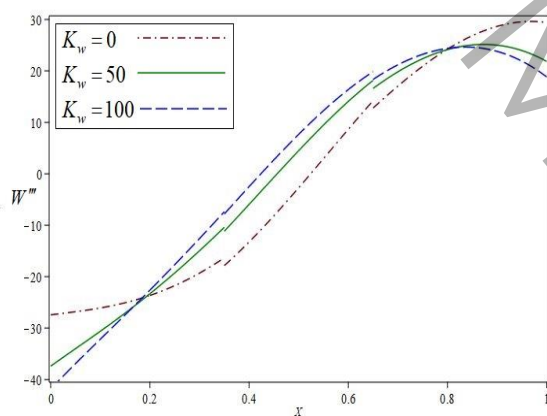
(ب)



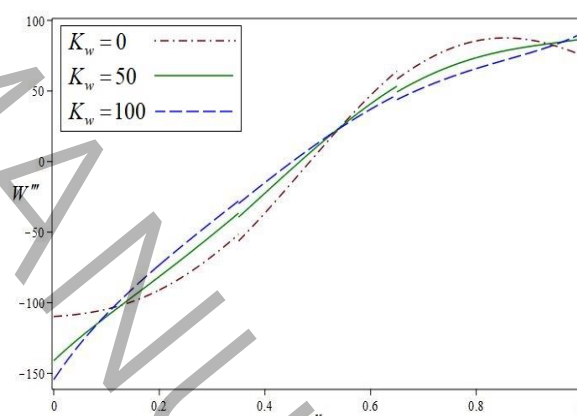
(الف)

شکل ۵. نتایج مربوط به سناریوی (۳) با تکیه گاه ساده مستقر بر بستر الاستیک، الف: شکل مودهای اول تا سوم، ب: مشتق مرتبه اول، دوم و سوم شکل مود اول

Figure 5. Results for scenario (3) with a simple support resting on an elastic bed, a. first to third mode shapes b. first, second, and third order derivatives of the first mode shape.



ب

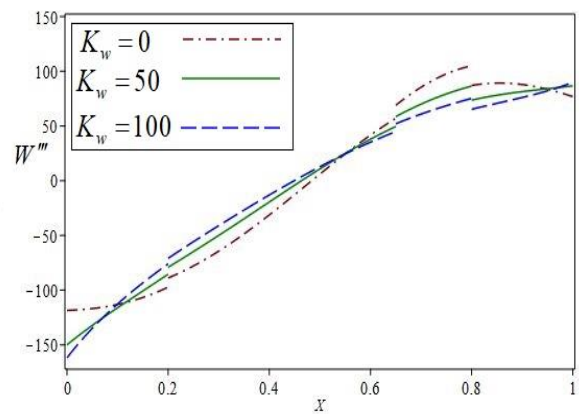
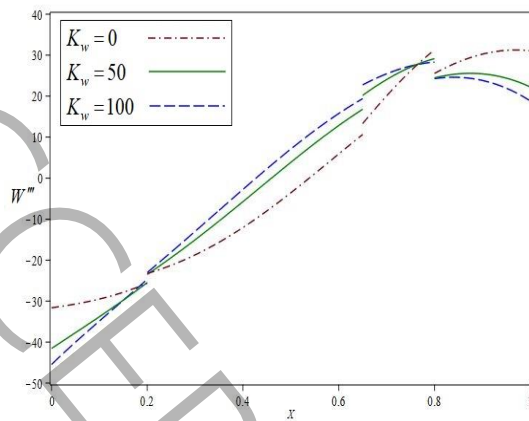


الف

شکل ۶- مقادیر مشتق سوم مود اول فرکانس برای سناریوی (۱): الف: حالت دو سر گیردار، ب: حالت دو سر ساده

Figure 6. Third derivative values of the first mode frequency for scenario (1); a. for fixed supports ; b. for simple supports

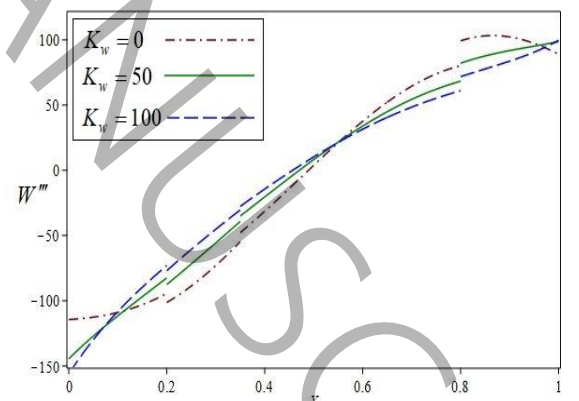
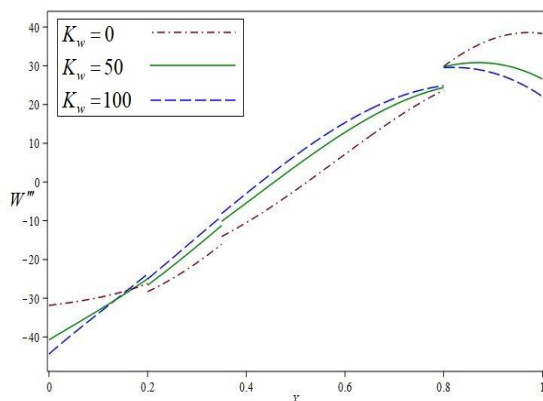
در شکل (۷) مشتق سوم جابجایی برای سازه‌ی آسیب‌دیده در المان اول و چهارم (سناریوی (۲)) با ضرایب سختی ۰، ۵۰ و ۱۰۰ نشان داده شده است؛ در این حالت، برخلاف سناریوی (۱)، تعداد المان‌های آسیب‌دیده افزایش یافته است تا کارایی روش مورد استفاده در تشخیص محل آسیب‌های دوگانه مشخص گردد.



شکل ۷- مقادیر مشتق سوم مود اول فرکانس برای سناریوی (۲): الف: حالت دو سر گیردار و ب: حالت دو سر ساده

Figure 7. Third derivative values of the first mode frequency for scenario (2); a. for fixed supports; b. for simple supports

همانطور که از شکل (۷) مشاهده می‌شود مشتق سوم شکل مود اول در انتهای المان اول و دو سر المان چهارم (در $x=0/2m$ ، $x=0/65m$ و $x=0/8m$ نسبت به ابتدای مخروط) دارای ناپیوستگی بوده که نشان دهنده آسیب در المانهای فوق می باشد و در سایر قسمت ها، نمودار پیوسته می‌باشد که نشانگر عدم وجود آسیب دیدگی در سایر المان های سازه است. همانند شکل (۶)، مشاهده می شود که با کاهش ضریب بستر ناپیوستگی در نقاط مدنظر محسوس تر می باشد. نتایج حاصل از شکل فوق نمایانگر کارایی روش مورد استفاده در تشخیص محل آسیب ها دوگانه است. همانند سناریوهای خرابی پیشین، در شکل (۸)، در اطراف المان های آسیب دیده، مشتق سوم شکل مودی دارای ناپیوستگی است. همچنین مشابه حالت های قبل، این ناپیوستگی در حالت ضریب بستر کوچکتر با وضوح بیشتری در نمودارها مشاهده می گردد.



شکل ۸- مقادیر مشتق سوم مود اول فرکانس برای سناریوی (۳): الف: حالت دو سر گیردار و ب: حالت دو سر ساده

Figure 8. Third derivative values of the first mode frequency for scenario (3); a. for fixed supports; b. for simple supports

با توجه به آنچه که در اشکال (۶) الی (۸) مشاهده شده است، روش ارائه شده برای مدلسازی پوسته های مخروطی هدفمند، به خوبی قادر به تشخیص محدوده آسیب خواهد بود و می تواند در سازه های واقعی نیز مورد استفاده قرار گیرد. در ادامه به بررسی مقدار g پردا خته شده است، g پارامتر دلخواه توانی کسر حجمی می باشد که در رابطه (۴) نشان داده شده و تغییرات E نسبت به g در نمودار شکل (۲) ارائه شده است. همانطور که از جداول (۹) و (۱۰) مشخص است تعداد سناریو و نوع و درصد آسیب و سختی بستر مشابه جدول (۸) بیان شده است این مشابهت برای بررسی بهتر تغییرات مقدار g می باشد.

جدول ۹- مقایسه فرکانس بی بعد شده مود اول بدست آمده برای سازه آسیب دیده و سالم در سناریوهای آسیب مختلف در شرایط تکیه گاهی دو سر گیردار و دوسر آزاد به ازای $g=0.2$

Table 9. Comparison of the dimensionless frequency of the first mode obtained for the damaged and intact structures in different damage scenarios for fixed and simple end supports and considering $g=0.2$

سناریو آسیب	سناریوی ۱			سناریوی ۲			سناریوی ۳		
شماره المان	۳			۴ و ۱			۵ و ۲ و ۱		
نوع آسیب	تک گانه			دو گانه			سه گانه		
درصد آسیب	۸٪			۸٪ و ۱۶٪			۶٪ و ۱۲٪ و ۱۸٪		
سختی بستر ($\tilde{k}_w$)	۱۰۰	۵۰	۰	۱۰۰	۵۰	۰	۱۰۰	۵۰	۰
دوسر گیردار	فرکانس سازه سالم	۰/۶۵۶۲	۰/۶۰۱۸	۰/۵۴۰۷	۰/۶۰۱۸	۰/۵۴۰۷	۰/۶۵۶۲	۰/۶۰۱۸	۰/۵۴۰۷
	فرکانس سازه آسیب دیده	۰/۶۵۱۶	۰/۵۹۵۸	۰/۵۳۲۶	۰/۶۴۷۹	۰/۵۹۳۲	۰/۵۳۱۷	۰/۵۸۲۳	۰/۵۲۱۳
دوسر ساده	فرکانس سازه سالم	۰/۵۷۳۷	۰/۴۵۲۵	۰/۳۷۷۰	۰/۵۷۳۷	۰/۴۵۲۵	۰/۳۷۷۰	۰/۴۵۲۵	۰/۳۷۷۰
	فرکانس سازه آسیب دیده	۰/۵۱۱۸	۰/۴۴۶۰	۰/۳۶۸۸	۰/۵۱۲۳	۰/۴۴۷۱	۰/۳۷۰۴	۰/۴۴۵۷	۰/۳۶۹۴

بر اساس نتایج نشان داده شده در جدول (۹) و همانطور که انتظار می رود، مقدار فرکانس های سازه سالم و هم فرکانس های سازه آسیب دیده نسبت به جدول (۸) افزایش پیدا کرده است این افزایش به دلیل کاهش مقدار g می باشد. در ادامه مشابه جدول قبل و این بار مقدار g افزایش داده شده است و نتایج در جدول (۱۰) نشان داده شده است.

جدول ۱۰- مقایسه فرکانس بی بعد شده مود اول بدست آمده برای سازه آسیب دیده و سالم در سناریوهای آسیب

مختلف در شرایط تکیه گاهی دو سر گیردار و دوسر آزاد به ازای $g = 5$

Table 10. Comparison of the dimensionless frequency of the first mode obtained for the damaged and intact structures in different damage scenarios for fixed and simple end supports and considering $g=5$

سناریو آسیب			سناریوی ۱			سناریوی ۲			سناریوی ۳		
شماره المان			۳			۴ و ۱			۱ و ۲ و ۵		
نوع آسیب درصد آسیب			تک گانه ٪۸			دو گانه ٪۸ و ٪۱۶			سه گانه ٪۶ و ٪۱۲ و ٪۱۸		
سختی بستر ($\tilde{K}_w$)			۱۰۰	۵۰	۰	۱۰۰	۵۰	۰	۱۰۰	۵۰	۰
دو سر گیردار	فرکانس سازه سالم	۰/۵۵۶۱	۰/۴۷۵۷	۰/۳۷۴۸	۰/۵۵۶۱	۰/۴۷۵۷	۰/۳۷۴۸	۰/۵۵۶۱	۰/۴۷۵۷	۰/۳۷۴۸	۰/۳۷۴۸
	فرکانس سازه آسیب دیده	۰/۵۵۴۷	۰/۴۷۳۰	۰/۳۶۹۳	۰/۵۵۰۸	۰/۴۶۹۹	۰/۳۶۸۶	۰/۵۴۲۵	۰/۴۶۲۰	۰/۳۶۱۳	۰/۳۶۱۳
دو سر ساده	فرکانس سازه سالم	۰/۵۰۳۶	۰/۳۸۰۹	۰/۲۵۷۷	۰/۵۰۳۶	۰/۳۸۰۹	۰/۲۵۷۷	۰/۵۰۳۶	۰/۳۸۰۹	۰/۲۵۷۷	۰/۲۵۷۷
	فرکانس سازه آسیب دیده	۰/۴۷۰۷	۰/۳۷۷۶	۰/۲۵۲۱	۰/۴۷۰۱	۰/۳۷۷۷	۰/۲۵۳۲	۰/۴۶۹۳	۰/۳۷۶۸	۰/۲۵۲۷	۰/۲۵۲۷

همانطور که از جدول فوق مشخص است با افزایش مقدار g و بدون تغییر بقیه عوامل، مشاهده می شود که مقدار فرکانس سازه سالم و فرکانس سازه آسیب دیده در هر دو حالت تکیه گاهی کاهش پیدا می کند.

همانطور که از جداول (۹) و (۱۰) پیداست مقدار g با فرکانس رابطه عکس دارد، هرچقدر مقدار g از یک کمتر باشد مقدار فرکانس بیشتر است و جنس جسم به سمت سرامیک میل پیدا می کند و هرچقدر مقدار g بیشتر از یک باشد مقدار فرکانس کاهش می یابد و خواص ماده به سمت فلز میل پیدا می کند. حال باید به این نکته اشاره کرد که اگر مقدار g یک باشد رابطه خطی می باشد که در جدول (۸) به آن پرداخته شده است.

نتیجه گیری و جمع بندی:

در این مطالعه، یک روش تحلیلی براساس تئوری برشی مرتبه اول برای مدلسازی پوسته های مخروطی هدفمند بیان گردیده است. با استخراج معادلات حاکم و بمنظور بررسی صحت مدلسازی عددی، نتایج حاصله با نتایج ارائه شده در مرجع [۱] مقایسه شده است و همچنین با نتایج بدست آمده از نرم افزار آباکوس برای پوسته مخروطی هدفمند با تکیه گاه دو سر ساده و دو سر گیردار و دو سر آزاد مورد مقایسه قرار گرفته است که در هر دو حالت صحت سنجی از تطابق قابل قبولی برخوردار بوده است. در ادامه برای بررسی کارایی روش پیشنهادی در تشخیص محدوده آسیب دیده سازه، پوسته مخروطی به پنج المان تقسیم گردید؛ سناریوهای خرابی تک گانه، دوگانه و چندگانه در شرایط تکیه گاهی مختلف و با اعمال شرایط بستر متفاوت تعریف گردید. با کمک مشتقات اشکال مودی، محدوده آسیب بررسی گردید. بررسی ها نشانگر عملکرد مناسب مدل پیشنهادی در تشخیص محل آسیب می باشند. روش پیشنهادی قابلیت گسترش در سازه های واقعی را دارا می باشد.

- [1] G. Buchanan, F.-I. Wong, Frequencies and mode shapes for thick truncated hollow cones, *International journal of mechanical sciences*, 43(12) (2001) 2815-2832.
- [2] R.K. Bhangale, N. Ganesan, C. Padmanabhan, Linear thermoelastic buckling and free vibration behavior of functionally graded truncated conical shells, *Journal of Sound and Vibration*, 292(1-2) (2006) 341-371.
- [3] M. Shariyat, M. Alipour, A Differential Transform Approach for Modal Analysis of Variable Thickness Two-directional FGM Circular Plates on Elastic Foundations, *Iranian Journal of Mechanical Engineering Transactions of the ISME*, 11(2) (2010) 15-38.
- [4] M. Shariyat, M. Alipour, A power series solution for vibration and complex modal stress analyses of variable thickness viscoelastic two-directional FGM circular plates on elastic foundations, *Applied Mathematical Modelling*, 37(5) (2013) 3063-3076.
- [5] M. Alipour, M. Shariyat, An analytical global-local Taylor transformation-based vibration solution for annular FGM sandwich plates supported by nonuniform elastic foundations, *Archives of Civil and Mechanical Engineering*, 14(1) (2014) 6-24.
- [6] G. Jin, Z. Su, T. Ye, X. Jia, Three-dimensional vibration analysis of isotropic and orthotropic conical shells with elastic boundary restraints, *International Journal of Mechanical Sciences*, 89 (2014) 207-221.
- [7] N. Navabian, M. Bozorgnasab, R. Taghipour, O. Yazdanpanah, Damage identification in plate-like structure using mode shape derivatives, *Archive of Applied Mechanics*, 86(5) (2016) 819-830.
- [8] M. Alipour, A novel economical analytical method for bending and stress analysis of functionally graded sandwich circular plates with general elastic edge conditions, subjected to various loads, *Composites Part B: Engineering*, 95 (2016) 48-63.
- [9] S. Mohammadrezazadeh, A.A. Jafari, The influences of magnetostrictive layers on active vibration control of laminated composite rotating cylindrical shells based on first-order shear deformation theory, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 233(13) (2019) 4606-4619.
- [10] E. Aghaahmadi, R. Taghipour, M. Bozorgnasab, M. Mollaalipour, Damage Identification In Cylindrical Shells With Functionally Graded Materials Resting On Elastic Foundation, *Sharif Journal of Civil Engineering*, 36.2(3.2) (2020) 125-133.
- [11] E. Sotoudehnia, F. Shahabian, A.A. Sani, Damage detection of cylindrical shells based on Sander's theory and model updating using incomplete modal data considering random noises, *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 85 (2021) 104110.
- [12] R. Taghipour, M.R. Nashta, M. Bozorgnasab, H. Mirgolbabaei, A new index for damage identification in beam structures based on modal parameters, *Archive of Mechanical Engineering*, 68(4) (2021) 375-394.
- [13] M.R. Nashta, R. Taghipour, M. Bozorgnasab, H. Mirgolbabaei, A novel method for identification of damage location in frame structures using a modal parameters-based indicator, *Archives of Civil Engineering*, 68(3) (2022) 633-643.
- [14] G. Fan, M. Lezgy-Nazargah, An efficient seven-parameter double superposition-based theory for free vibration analysis of laminated composite shells, *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 106 (2024) 105299.
- [15] D. Yao, M. Lezgy-Nazargah, A new double superposition-based shear deformation theory for static analysis of multilayered composite and sandwich doubly-curved shells, *Thin-Walled Structures*, 198 (2024) 111703.

Damage identification in conical shell structures using analytical methods based on free vibration of the structure

ABSTRACT

Structural health monitoring and detection of damaged areas in a structure is essential for surveying its performance during the structural life. Because not paying attention to the local damages is reduced the efficiency of the structural performance and could result in increasing the damaged intensity due to natural or artificial loads and consequently collapse of entire structure. The main goal of this research is to propose a model using analytical methods and developing it to identify the damaged areas in conical shells made of functionally graded materials placed on an elastic substrate. Since the mode shapes are sensitive parameters to damage presence in the elements, they are used for damage detection process of the structure. The governing equations have been extracted based on the first-order shear theory in Maple software. The analytical method uses the power series to obtain the natural frequencies and mode shapes of the structure. In order to ensure the performance of the proposed model, the results of the modeling have been verified with the results of other references and those of the numerical model built in Abaqus software. Finally, taking into account various types of support conditions and different stiffnesses for the substrate, the damaged elements of the conical shell have been specified considering different damage scenarios. Investigations show the proper performance of the proposed model in detecting the damaged area.

Keywords

Functionally graded materials (FGM), Conical shell, Damage identification, First-order shear deformation theory, Modal derivatives shapes.

پیوست (الف). معادلات حاکم بر اساس سری توانی

همانطور که در متن بیان گردید با استفاده از سری توانی تیلور و با جایگذاری معادلات (۱۴) در معادلات (۱۲) و (۱۳) معادلات حاکم و شرایط مرزی به صورت سری قابل بیان می باشد. همچنین در روابط زیر ω فرکانس طبیعی سازه می باشد:

معادله اول:

$$\begin{aligned}
 & A \sum_{i=2}^N (i)(i-1)U_i(x-x_0)^{i-2} - A \sum_{i=1}^N iU_i(x-x_0)^{i-1} \sum_{j=0}^N Y^{j+1}(x-x_0)^j - A \sum_{i=0}^N U_i(x-x_0)^i \sum_{j=0}^N (j+1)Y^{j+2}(x-x_0)^j - \\
 & - B \sum_{j=0}^N Y^{j+1}(x-x_0)^j \sum_{i=1}^N (i)\Psi_i^{(x)}(x-x_0)^{i-1} + B \sum_{i=2}^N i(i-1)\Psi_i^{(x)}(x-x_0)^{i-2} - B \sum_{j=0}^N (j+1)Y^{j+2}(x-x_0)^j \sum_{i=0}^N \Psi_i^{(x)}(x-x_0)^i - \\
 & - \bar{A} \sum_{j=0}^N Y^{j+1}(x-x_0)^j \tan(\phi) \sum_{i=1}^N (i)W_i(x-x_0)^{i-1} - A \sum_{j=0}^N (j+1)Y^{j+2}(x-x_0)^j \tan(\phi) \sum_{i=0}^N W_i(x-x_0)^i = -I_0 \omega^2 \sum_{i=0}^N U_i(x-x_0)^i - \\
 & I_1 \omega^2 \sum_{i=0}^N \Psi_i^{(x)}(x-x_0)^i \Rightarrow A \sum_{i=0}^N (i+1)(i+2)U_{i+2}(x-x_0)^i - A \sum_{i=0}^N (i+1)U_{i+1}(x-x_0)^i \sum_{j=0}^N Y^{j+1}(x-x_0)^j - \\
 & A \sum_{i=0}^N U_i(x-x_0)^i \sum_{j=0}^N (j+1)Y^{j+2}(x-x_0)^j - B \sum_{j=0}^N Y^{j+1}(x-x_0)^j \sum_{i=0}^N (i+1)\Psi_{i+1}^{(x)}(x-x_0)^i + B \sum_{i=0}^N (i+1)(i+2)\Psi_{i+2}^{(x)}(x-x_0)^i - \\
 & B \sum_{j=0}^N (j+1)Y^{j+2}(x-x_0)^j \sum_{i=0}^N \Psi_i^{(x)}(x-x_0)^i - \bar{A} \sum_{j=0}^N Y^{j+1}(x-x_0)^j \tan(\phi) \sum_{i=0}^N (i+1)W_i(x-x_0)^i - \\
 & A \sum_{j=0}^N (j+1)Y^{j+2}(x-x_0)^j \tan(\phi) \sum_{i=0}^N W_i(x-x_0)^i + I_0 \omega^2 \sum_{i=0}^N U_i(x-x_0)^i + I_1 \omega^2 \sum_{i=0}^N \Psi_i^{(x)}(x-x_0)^i = 0 \Rightarrow \\
 & \Rightarrow \sum_{i=0}^N \left[\sum_{j=0}^{i+1} (i-j+1)Y^{j+1} \left(AU_{i-j+1} + B\Psi_{i-j+1}^{(x)} + \tan(\phi)\bar{A}W_{i-j+1} \right) + \right. \\
 & \left. \sum_{j=0}^i (j+1)Y^{j+2} \left((\bar{A}-A)U_{i-j} + (\bar{B}-B)\Psi_{i-j}^{(x)} + \tan(\phi)(\bar{A}-A)W_{i-j} \right) + \right. \\
 & \left. + (i+2)(i+1) \left(AU_{i+2} + B\Psi_{i+2}^{(x)} \right) + \omega^2 \left(I_0 U_i + I_1 \Psi_i^{(x)} \right) \right] (x-x_0)^i = 0
 \end{aligned}$$

الف-۱

$$\begin{aligned}
& B \sum_{i=2}^N i(i-1)U_i(x-x_0)^{i-2} - B \sum_{j=0}^N Y^{j+1}(x-x_0)^j \sum_{i=1}^N iU_i(x-x_0)^{i-1} - \\
& B \sum_{j=0}^N (j+1)Y^{j+2}(x-x_0)^j \sum_{i=0}^N U_i(x-x_0)^i + D \sum_{i=2}^N i(i-1)\Psi_i^{(x)}(x-x_0)^{i-2} - \\
& D \sum_{j=0}^N Y^{j+1}(x-x_0)^j \sum_{i=1}^N i\Psi_i^{(x)}(x-x_0)^{i-1} - D \sum_{j=0}^N (j+1)Y^{j+2}(x-x_0)^j \sum_{i=0}^N \Psi_i^{(x)}(x-x_0)^i - \\
& -\bar{B} \sum_{j=0}^N Y^{j+1}(x-x_0)^j \tan(\phi) \sum_{i=0}^N W_i(x-x_0)^{i-1} - B \sum_{j=0}^N (j+1)Y^{j+2}(x-x_0)^j \tan(\phi) \sum_{i=0}^N W_i(x-x_0)^i - \\
& -k\tilde{A} \sum_{i=0}^N \Psi_i^{(x)}(x-x_0)^i - k\tilde{A} \sum_{i=0}^N W_i(x-x_0)^{i-1} = -I_1 \omega^2 \sum_{i=0}^N U_i(x-x_0)^i - I_2 \omega^2 \sum_{i=0}^N \Psi_i^{(x)}(x-x_0)^i \Rightarrow \\
& \Rightarrow B \sum_{i=0}^N (i+1)(i+2)U_{i+2}(x-x_0)^i - B \sum_{j=0}^N Y^{j+1}(x-x_0)^j \sum_{i=0}^N (i+1)U_{i+1}(x-x_0)^i - \\
& B \sum_{j=0}^N (j+1)Y^{j+2}(x-x_0)^j \sum_{i=0}^N U_i(x-x_0)^i + D \sum_{i=0}^N (i+1)(i+2)\Psi_{i+2}^{(x)}(x-x_0)^i - \\
& D \sum_{j=0}^N Y^{j+1}(x-x_0)^j \sum_{i=0}^N (i+1)\Psi_{i+1}^{(x)}(x-x_0)^i - D \sum_{j=0}^N (j+1)Y^{j+2}(x-x_0)^j \sum_{i=0}^N \Psi_i^{(x)}(x-x_0)^i - \\
& -\bar{B} \sum_{j=0}^N Y^{j+1}(x-x_0)^j \tan(\phi) \sum_{i=0}^N (i+1)W_{i+1}(x-x_0)^i - B \sum_{j=0}^N (j+1)Y^{j+2}(x-x_0)^j \tan(\phi) \sum_{i=0}^N W_i(x-x_0)^i - \\
& -k\tilde{A} \sum_{i=0}^N \Psi_i^{(x)}(x-x_0)^i - k\tilde{A} \sum_{i=0}^N (i+1)W_{i+1}(x-x_0)^i + I_1 \omega^2 \sum_{i=0}^N U_i(x-x_0)^i + I_2 \omega^2 \sum_{i=0}^N \Psi_i^{(x)}(x-x_0)^i = 0 \Rightarrow \\
& \Rightarrow \sum_{i=0}^N \left[\sum_{j=0}^i (j+1)Y^{j+2} \left((-B)U_{i-j} + (-D)\Psi_{i-j}^{(x)} + (-B)\tan(\phi)W_{i-j} \right) + \right. \\
& \left. (i+2)(i+1) \left(BU_{i+2} + D\Psi_{i+2}^{(x)} \right) - k\tilde{A} \left(\Psi_i^{(x)} + (i+1)W_{i+1} \right) + \omega^2 \left(I_1 U_i + I_2 \Psi_i^{(x)} \right) \right] (x-x_0)^i = 0
\end{aligned}$$

الف-٢

معادله سوم:

$$\begin{aligned}
& \bar{A} \sum_{j=0}^N Y^{j+1} (x-x_0)^j \tan(\phi) \sum_{i=1}^N (i) U_i (x-x_0)^{i-1} - A \sum_{j=0}^N (j+1) Y^{j+2} (x-x_0)^j \tan(\phi) \sum_{i=0}^N U_i (x-x_0)^i + \\
& + \bar{B} \sum_{j=0}^N Y^{j+1} (x-x_0)^j \tan(\phi) \sum_{i=1}^N i \Psi_i^{(x)} (x-x_0)^{i-1} - B \sum_{j=0}^N (j+1) Y^{j+2} (x-x_0)^j \tan(\phi) \sum_{i=0}^N \Psi_i^{(x)} (x-x_0)^i + \\
& + k\tilde{A} \sum_{i=1}^N i \Psi_i^{(x)} (x-x_0)^{i-1} - k\tilde{A} \sum_{j=0}^N Y^{j+1} (x-x_0)^j \sum_{i=0}^N \Psi_i^{(x)} (x-x_0)^i + k\tilde{A} \sum_{i=2}^N (i)(i-1) W_i (x-x_0)^{i-2} - \\
& - k\tilde{A} \sum_{j=0}^N Y^{j+1} (x-x_0)^j \sum_{i=1}^N (i) W_i (x-x_0)^{i-1} - A \sum_{j=0}^N (j+1) Y^{j+2} (x-x_0)^j \sum_{i=0}^N W_i (x-x_0)^i - \\
& + k_w a_0 \sum_{i=0}^N W_i (x-x_0)^i + k_w a_1 \sum_{i=1}^N (i) W_i (x-x_0)^{i-1} + k_w a_2 \sum_{i=2}^N (i)(i-1) W_i (x-x_0)^{i-2} = -I_1 \omega^2 \sum_{i=0}^N W_i (x-x_0)^i \Rightarrow \\
& \Rightarrow \bar{A} \sum_{j=0}^N Y^{j+1} (x-x_0)^j \tan(\phi) \sum_{i=0}^N (i+1) U_{i+1} (x-x_0)^i - A \sum_{j=0}^N (j+1) Y^{j+2} (x-x_0)^j \tan(\phi) \sum_{i=0}^N U_i (x-x_0)^i + \\
& + \bar{B} \sum_{j=0}^N Y^{j+1} (x-x_0)^j \tan(\phi) \sum_{i=0}^N (i+1) \Psi_{i+1}^{(x)} (x-x_0)^i - B \sum_{j=0}^N (j+1) Y^{j+2} (x-x_0)^j \tan(\phi) \sum_{i=0}^N \Psi_i^{(x)} (x-x_0)^i + \\
& + k\tilde{A} \sum_{i=0}^N (i+1) \Psi_{i+1}^{(x)} (x-x_0)^i - k\tilde{A} \sum_{j=0}^N Y^{j+1} (x-x_0)^j \sum_{i=0}^N \Psi_i^{(x)} (x-x_0)^i + k\tilde{A} \sum_{i=0}^N i(i+1) W_{i+2} (x-x_0)^i - \\
& - k\tilde{A} \sum_{j=0}^N Y^{j+1} (x-x_0)^j \sum_{i=0}^N (i+1) W_{i+1} (x-x_0)^i - A \sum_{j=0}^N (j+1) Y^{j+2} (x-x_0)^j \sum_{i=0}^N W_i (x-x_0)^i + I_1 \omega^2 \sum_{i=0}^N W_i (x-x_0)^i - \\
& + k_w a_0 \sum_{i=0}^N W_i (x-x_0)^i + k_w a_1 \sum_{i=0}^N (i+1) W_{i+1} (x-x_0)^i + k_w a_2 \sum_{i=0}^N (i+1)(i+2) W_{i+2} (x-x_0)^i = 0 \Rightarrow \\
& \Rightarrow \sum_{i=0}^N \left[\tan(\phi) \sum_{j=0}^{i+1} Y^{j+1} (i-j+1) (\bar{A} U_{i-j+1} + \bar{B} \Psi_{i-j+1}^{(x)}) - \tan(\phi) \sum_{j=0}^i (j+1) Y^{j+2} (A U_{i-j} + B \Psi_{i-j}^{(x)}) + \right. \\
& \left. + k\tilde{A} ((i+1) \Psi_{i+1}^{(x)} + (i+2)(i+1) W_{i+2}) - k\tilde{A} \sum_{j=0}^{i+1} Y^{j+1} (i-j+1) W_{i-j+1} - k\tilde{A} \sum_{j=0}^i Y^{j+1} \Psi_{i-j}^{(x)} - \right. \\
& \left. - A \tan^2(\phi) \sum_{j=0}^i (j+1) Y^{j+2} W_{i-j} + I_1 \omega^2 W_i + k_w a_0 W_i + k_w a_1 (i+1) W_{i+1} + k_w a_2 (i+1)(i+2) W_{i+2} \right] (x-x_0)^i = 0
\end{aligned}$$

الف-۳

معادلات حاکم حول نقطه L (نقطه انتهایی پوسته در راستای محور X) بسط داده شده است. در ادامه برای به دست آوردن شرایط

مرزی از معادلات (۱۳) و (۱۰) استفاده شده است که با کمک سری توانی تیلور معادلات زیر بدست می آیند :

معادله چهارم:

$$\begin{aligned}
 N_x &= A \sum_{i=1}^N (i) u_i (x - x_0)^{i-1} + \bar{A} \frac{\cos(\phi)}{R_0} \sum_{i=0}^N u_i (x - x_0)^i + \\
 &\bar{A} \frac{\sin(\phi)}{R_0} \sum_{i=0}^N w_i (x - x_0)^i + B \sum_{i=1}^N (i) \psi_i^{(x)} (x - x_0)^{i-1} + \\
 &\bar{B} \frac{\cos(\phi)}{R_0} \sum_{i=0}^N \psi_i^{(x)} (x - x_0)^i \Rightarrow N_x = A \sum_{i=0}^N (i+1) u_{i+1} (x - x_0)^i + \\
 &\bar{A} \frac{\cos(\phi)}{R_0} \sum_{i=0}^N u_i (x - x_0)^i + \bar{A} \frac{\sin(\phi)}{R_0} \sum_{i=0}^N w_i (x - x_0)^i + \\
 &B \sum_{i=0}^N (i+1) \psi_{i+1}^{(x)} (x - x_0)^i + \bar{B} \frac{\cos(\phi)}{R_0} \sum_{i=0}^N \psi_i^{(x)} (x - x_0)^i \Rightarrow \\
 \Rightarrow N_x &= \sum_{i=0}^N \left[\begin{aligned} &A(i+1)u_{i+1} + \bar{A} \frac{\cos(\phi)}{R_0} u_i + \bar{A} \frac{\sin(\phi)}{R_0} w_i + \\ &B(i+1)\psi_{i+1}^{(x)} + \bar{B} \frac{\cos(\phi)}{R_0} \psi_i^{(x)} \end{aligned} \right] (x - x_0)^i
 \end{aligned}$$

الف-۴

معادله پنجم:

$$\begin{aligned}
 M_x &= B \sum_{i=1}^N (i) u_i (x - x_0)^{i-1} + \bar{B} \frac{\cos(\phi)}{R_0} \sum_{i=0}^N u_i (x - x_0)^i + \\
 &\bar{B} \frac{\sin(\phi)}{R_0} \sum_{i=0}^N w_i (x - x_0)^i + D \sum_{i=0}^N (i) \psi_i^{(x)} (x - x_0)^{i-1} + \\
 &\bar{D} \frac{\cos(\phi)}{R_0} \sum_{i=1}^N \psi_i^{(x)} (x - x_0)^i \Rightarrow M_x = B \sum_{i=0}^N (i+1) u_{i+1} (x - x_0)^i + \\
 &\bar{B} \frac{\cos(\phi)}{R_0} \sum_{i=0}^N u_i (x - x_0)^i + \bar{B} \frac{\sin(\phi)}{R_0} \sum_{i=0}^N w_i (x - x_0)^i + \\
 &D \sum_{i=0}^N (i+1) \psi_{i+1}^{(x)} (x - x_0)^i + \bar{D} \frac{\cos(\phi)}{R_0} \sum_{i=1}^N \psi_i^{(x)} (x - x_0)^i \Rightarrow \\
 \Rightarrow M_x &= \sum_{i=0}^N \left[\begin{aligned} &B(i+1)u_{i+1} + \bar{B} \frac{\cos(\phi)}{R_0} u_i + \bar{B} \frac{\sin(\phi)}{R_0} w_i + \\ &D(i+1)\psi_{i+1}^{(x)} + \bar{D} \frac{\cos(\phi)}{R_0} \psi_i^{(x)} \end{aligned} \right] (x - x_0)^i
 \end{aligned}$$

الف-۵

$$Q_x = k \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} dz = k \tilde{A} (\psi_x + w_{,x}) = k \tilde{A} \sum_{i=0}^N \psi_i^{(x)} (x - x_0)^i +$$

$$k \tilde{A} \sum_{i=1}^N (i) w_{,i} (x - x_0)^{i-1} \Rightarrow Q_x = k \tilde{A} \sum_{i=0}^N \psi_i^{(x)} (x - x_0)^i +$$

$$k \tilde{A} \sum_{i=0}^N (i+1) w_{,i+1} (x - x_0)^i \Rightarrow$$

$$Q_x = \sum_{i=0}^N \left[k \tilde{A} \psi_i^{(x)} + k \tilde{A} (i+1) w_{,i+1} \right] (x - x_0)^i$$

الف-۶

بخشی از کد مورد استفاده در مقاله (دستور for)

for i from 0 to N do

```
Equation_1[i]:=evalf(simplify((i+2)*(i+1)*(Aa*U[i+2]+Ba*F[i+2])-sum((-cos(phi)/Rb)^(j+1)*(i-j+1)*(Aa*U[i-j+1]+Ba*F[i-j+1]),j=0..i+1)-sum((j+1)*(-cos(phi)/Rb)^(j+2)*(Aa*U[i-j]+Ba*F[i-j]),j=0..i)+tan(phi)*Ab*sum((-cos(phi)/Rb)^(j+1)*(i-j+1)*W[i-j+1],j=0..i+1)-Aa*tan(phi)*sum((j+1)*(-cos(phi)/Rb)^(j+2)*W[i-j],j=0..i)+omega^2*I0*U[i]+omega^2*I1*F[i])));
```

```
Equation_2[i]:=evalf(simplify((i+2)*(i+1)*(Ba*U[i+2]+Ca*F[i+2])-sum((-cos(phi)/Rb)^(j+1)*(i-j+1)*(Ba*U[i-j+1]+Ca*F[i-j+1]),j=0..i+1)-sum((j+1)*(-cos(phi)/Rb)^(j+2)*(Ba*U[i-j]+Ca*F[i-j]),j=0..i)+tan(phi)*Bb*sum((-cos(phi)/Rb)^(j+1)*(i-j+1)*W[i-j+1],j=0..i+1)-Ba*tan(phi)*sum((j+1)*(-cos(phi)/Rb)^(j+2)*W[i-j],j=0..i)-k*Ac*(F[i]+(i+1)*W[i+1])+omega^2*I1*U[i]+omega^2*I2*F[i])));
```

```
Equation_3[i]:=evalf(simplify(tan(phi)*sum((-cos(phi)/Rb)^(j+1)*(i-j+1)*(Ab*U[i-j+1]+Bb*F[i-j+1]),j=0..i+1)-tan(phi)*sum((-cos(phi)/Rb)^(j+2)*(j+1)*(Aa*U[i-j]+Ba*F[i-j]),j=0..i)-k*Ac*sum((-cos(phi)/Rb)^(j+1)*F[i-j],j=0..i)-k*Ac*sum((-cos(phi)/Rb)^(j+1)*(i-j+1)*W[i-j+1],j=0..i+1)+k*Ac*(i+1)*F[i+1]+k*Ac*(i+1)*(i+2)*W[i+2]-Aa*tan(phi)^2*sum((-cos(phi)/Rb)^(j+2)*(j+1)*W[i-j],j=0..i)+omega^2*I0*W[i])));
```

end do;