



Studying Stabilization Methods for Calibrating a Reduced-Order Model of Single-Layer Quasi-Geostrophic Ocean Circulation Based on Dynamic Mode Decomposition

Mohammad Kazem Moayyedi * , Zohreh Sadat Khakzari

CFD and Turbulence Research Lab., Department of Mechanical Engineering, University of Qom, Qom, Iran.

ABSTRACT: The development of models aimed at reducing computational cost has always been a key challenge in advanced engineering analyses. Among the available approaches, Reduced Order Models (ROMs) provide an effective means of accelerating simulations by reducing the complexity of the governing system. When the underlying dynamical system is nonlinear and exhibits inherent physical complexity, the accuracy of a ROM becomes highly sensitive to the method used to extract the dominant structures of the system dynamics. Consequently, the modal decomposition technique must be consistent with the physical characteristics of the problem. Reduced Order Models obtained through the projection of the governing flow equations onto a modal subspace may exhibit limited accuracy in predicting the temporal evolution of the flow field, primarily due to inherent modeling and truncation errors in the reduced dynamical system. To improve the temporal prediction capability of the Reduced Order Model, a correction term is introduced into the reduced dynamical equations. In this research, stabilization methods for a Reduced Order Model of the axial equation based on Dynamic Mode Decomposition (DMD) are investigated and analyzed for the simulation of quasi-geostrophic flow. An important advantage of the modified Reduced Order Model, which addresses its accuracy limitations, is its high computational efficiency. Accordingly, for a Reynolds number of 450 and a Rossby number of 0.0036, the time required to compute the direct numerical solution data over a specified time interval was approximately 450 minutes. In contrast, the computation time using the Reduced Order Model for the same time interval was about 21 minutes, demonstrating a significant reduction in computational time.

Review History:

Received: Jul. 23, 2025
Revised: Nov. 16, 2025
Accepted: Nov. 28, 2025
Available Online: Dec. 15, 2025

Keywords:

Reduce Order Model
Dynamic Mode Decomposition
Quasi-geostrophic Flow
Stabilization Method
Geophysical Flow

1- Introduction

Geostrophic currents constitute a substantial portion of large-scale ocean circulation and play a major role in climate variability and change. For example, Reid and colleagues investigated the effects of geostrophic currents on coastal sea-level variations in the northern North Pacific Ocean [1]. Due to the inherent complexity of geostrophic current dynamics, particularly in large-scale and long-term simulations, data-driven approaches are frequently employed. One such approach is the Dynamic Mode Decomposition (DMD) method. Duke et al. applied the DMD technique to investigate the growth rates of flow instabilities [2]. Moreover, Moayyedi et al. investigated the effect of an eddy-viscosity-based approach on modifying a Reduced Order Model derived from Dynamic Mode Decomposition to predict the long-term behavior of infiltration-displacement equations [3]. Their results demonstrated that the reduced-order model was both highly accurate and computationally efficient. The primary objective of the present study is to investigate and analyze stabilization and modification strategies for a reduced-order axial equation model based on Dynamic Mode

Decomposition, with particular emphasis on the simulation of quasi-geostrophic flows.

2- Governing Equation

The governing equation for two-dimensional incompressible barotropic flow, expressed in dimensionless form, is given as follows:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + J(\omega, \psi) - \frac{1}{Ro} \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1}{Re} \nabla^2 \omega + \frac{1}{Ro} \sin(\pi y) \quad (1)$$

3- Problem Geometry and Boundary Conditions

The problem considered in this study involves a single-layer quasi-geostrophic flow at a Reynolds number of 450 and a Rossby number of 0.0036. Direct numerical simulations were performed from an initial quiescent state up to a maximum dimensionless time of 90, using a constant time step of 0.0001. The computational domain was discretized using a uniform Cartesian grid with 300×150 nodes.

*Corresponding author's email: moayyedi@qom.ac.ir



Table 1. Reduced Order Model stabilization methods based on dynamic mode decomposition.

Number	Methods
1	$\Psi_k = k / N_R$
2	$\Psi_k = k / N_R^2$
3	$\Psi_k = \sqrt{k / N_R}$

4- Stabilization of Reduced Order Model using Eddy Viscosity Approach

Standard Reduced Order Models may exhibit limited accuracy in predicting the temporal evolution of the flow field. This limitation can arise from the following factors:

- 1) Numerical instabilities resulting from the truncation of modes associated with high wavenumbers.
- 2) Insufficient accuracy of the input profiles, which may not fully satisfy the governing equations.

To restore stability to the reduced dynamical system, an artificial eddy-viscosity term is introduced into the dynamic system equations. The correction term is added as follows:

$$\begin{aligned}\hat{C}_k &= (\nu_e \Psi_k L(\bar{u}), \phi_k) \\ \hat{B}_{ki} &= (\nu_e \Psi_k L(\phi_i), \phi_k)\end{aligned}\quad (2)$$

The Reduced Order Model is therefore modified as follows:

$$\begin{aligned}\frac{da^k(t)}{dt} &= \tilde{A}_{kij} \times a^i(t) \times a^j(t) + (\tilde{B}_{ki} + \hat{B}_{ki}) \\ &\times a^i(t) + \tilde{C}_k + \hat{C}_k\end{aligned}\quad (3)$$

The stabilization methods considered in this study are summarized in Table 1.

5- Calibration of the Reduced Order Model

The proposed approach for determining the coefficients of the correction term involves solving a local optimization problem over a specified time interval. The optimization problem is formulated based on the following relation[4]:

$$\begin{aligned}J(t_i) &= \left[\sum_{k=1}^{N_r} \left(\frac{da^k(t_i)}{dt} - \frac{d\hat{a}^k(t_i)}{dt} \right) \right. \\ &\quad \left. - \sum_{k=1}^{N_r} B'_{ki} a^k(t_i) - C'_k \right]^2\end{aligned}\quad (4)$$

6- Results and Discussion

This section presents and compares the results obtained from the stabilization and modification of the Reduced Order Model based on Dynamic Mode Decomposition. Figure 1 illustrates a comparison of the temporal evolution of the real

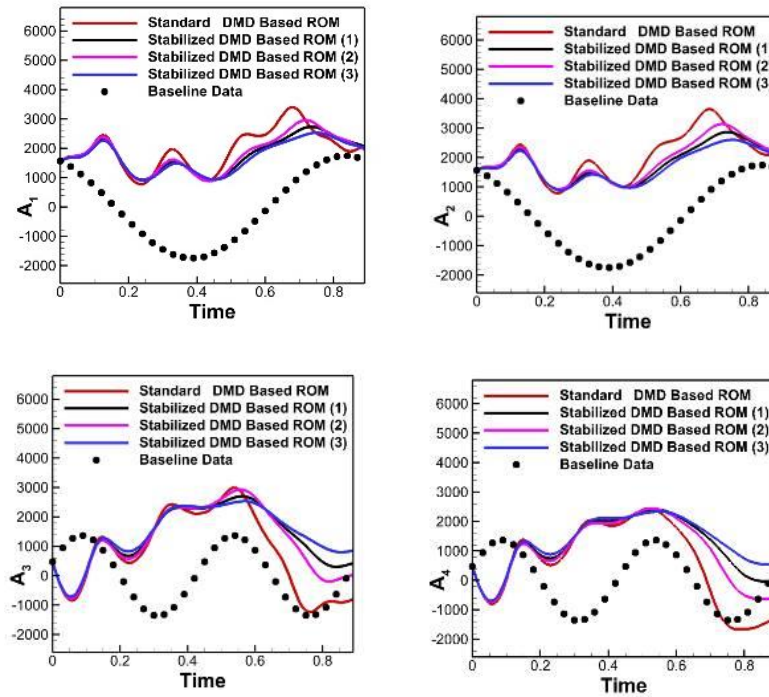


Fig. 1. Comparison of Time Variations of the Real Part of Modal Coefficients obtained from the Standard Reduced Order Model, Stabilized Reduced Order Model and Direct Numerical Solution Data.

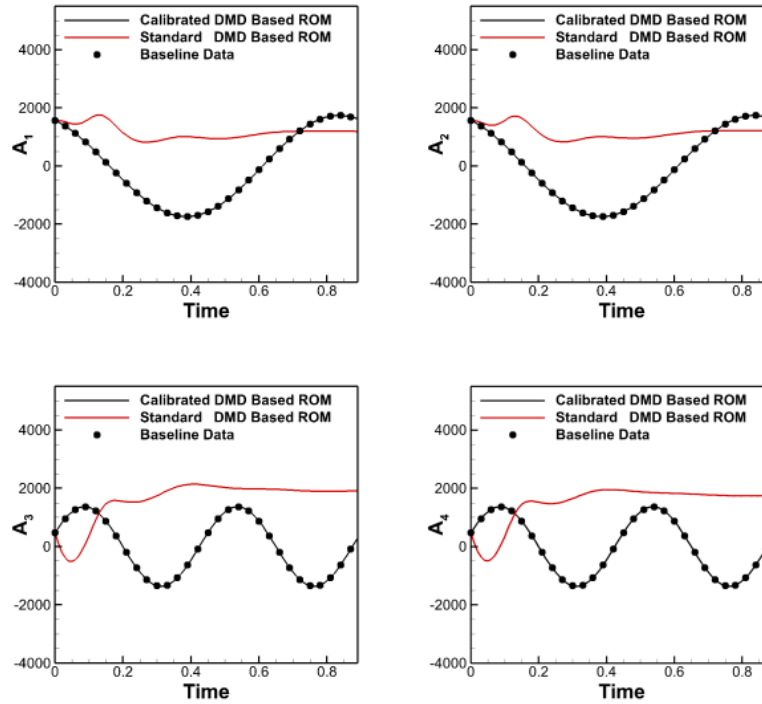


Fig. 2. Comparison Between the Calibrated-DMD-ROM, the Standard Reduced Order Model and Direct Numerical Simulation in Predicting the Time Variations of the Real Part of Modal Coefficients

part of the modal coefficients obtained from the standard Reduced Order Model, the stabilized Reduced Order Model, and the direct numerical simulation data. The results indicate that the stabilized model significantly reduces deviations from the exact solution data. Figure 2 compares the calibrated Reduced Order Model, the standard Reduced Order Model, and the direct numerical simulation in the time domain of the real part of the modal coefficients. As observed, the application of Reduced Order Model modification and calibration techniques leads to improved stability and accuracy across different time intervals, enabling reliable prediction of the governing flow dynamics..

7- Conclusions

Based on the analyses conducted, the main achievements of this research can be summarized as follows:

1. Investigation of various stabilization methods for reduced-order quasi-geostrophic flow models based on the barotropic vorticity transport equation.
2. Development of an optimized Reduced Order Model based on minimizing the error between the Reduced Order Model predictions and the direct numerical simulation data.
3. Significant reduction in computational time for the

modified Reduced Order Model compared with direct numerical simulations, while maintaining high accuracy in reconstructing the flow patterns.

References

- [1] J.L. Reid, A.W. Mantyla, The effect of the geostrophic flow upon coastal sea elevations in the northern North Pacific Ocean, *Journal of geophysical research*, 81(18) (1976) 3100–3110.
- [2] D. Duke, J. Soria, D. Honnery, An error analysis of the dynamic mode decomposition, *Experiments in fluids*, 52(2) (2012) 529–542.
- [3] M.K. Moayyedi, Z. Khakzari, F. Sabaghzadeghan, Studying the Effect of Eddy Viscosity Closure on the Calibration of the DMD based Reduced-order Model to Predict the Long-term Behavior of Convection-Diffusion Equations, *Fluid Mechanics & Aerodynamics*, 11(1) (2022) 83–96.
- [4] M. Moayyedi, F. Sabetghadam, M. Taeibi-Rahni, Calibrated Low-dimensional POD Dynamical Model for Simulation of Unsteady Incompressible Flows, *Fluid Mechanics and Aerodynamics Journal*, 1(1) (2021) 29–39.



مطالعه روش‌های پایدارسازی و اصلاح مدل رتبه کاسته چرخش اقیانوسی شبه ژئوستروفیک تک لایه بر پایه روش تجزیه مود دینامیکی

محمد کاظم مؤیدی*^{id}، زهره سادات خاکزاری

آزمایشگاه پژوهشی توربولانس و دینامیک سیالات محاسباتی، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه قم، قم، ایران.

تاریخچه داوری:

دریافت: ۱۴۰۴/۰۵/۰۱

بازنگری: ۱۴۰۴/۰۸/۲۵

پذیرش: ۱۴۰۴/۰۹/۰۷

ارائه آنلاین: ۱۴۰۴/۰۹/۲۴

کلمات کلیدی:

مدل رتبه کاسته

روش تجزیه مود دینامیکی

جریان شبه ژئوستروفیک

روش پایدارسازی

جریان‌های ژئوفیزیکی

خلاصه: از آنجا که روش‌های تحلیلی دارای دقت کم و دامنه کاربرد محدودی می‌باشد، لذا محققین به استفاده از روش‌های عددی روی آوردند. این دسته از روش‌ها به دلیل محدودیت سخت‌افزارهای کامپیوتری به ویژه برای مسائل ناپایا، همواره از سرعت و عملکرد خوبی برخوردار نیستند. به همین دلیل توسعه مدل‌هایی که باعث کاهش هزینه‌های محاسباتی شوند همواره به عنوان یکی از موضوعات مهم در تحلیل‌های مهندسی پیشرو بوده است. از جمله راهکارهای موجود، استفاده از مدل‌های رتبه کاسته بوده که با کاستن از پیچیدگی‌های سیستم، سرعت آن افزوده می‌شود. در صورتی که سیستم دینامیکی غیرخطی و دارای پیچیدگی‌های خاص باشد حساسیت به چگونگی محاسبه ساختارهای غالب در دینامیک آن بیشتر شده و نیاز است مودهای آن از روش‌هایی با ویژگی منطبق با فیزیک مسئله محاسبه شوند. مدل‌های رتبه کاسته حاصل از تصویرسازی معادلات حاکم بر میدان جریان در فضای مودال، ممکن است به دلیل خطاهای ذاتی سیستم دینامیکی دقت بالایی در پیش‌بینی تغییرات زمانی میدان جریان نداشته باشند. به منظور بهبود پیش‌بینی زمانی مدل رتبه کاسته یک ترم اصلاح به معادله سیستم دینامیکی افزوده می‌شود. در این پژوهش، به بررسی و مطالعه روش‌های پایدارسازی مدل رتبه کاسته معادله محور مبتنی بر تجزیه مود دینامیکی برای شبیه‌سازی جریان شبه ژئوستروفیک پرداخته شده است. ویژگی مهم مدل رتبه کاسته جایگزین با رفع مشکل دقت آن، سرعت بالای محاسبات آن می‌باشد. بر این اساس، برای عدد رینولدز ۴۵۰ و عدد راسی ۰/۰۳۶، زمان محاسبه داده‌های حل عددی مستقیم در یک بازه زمانی مشخص، ۴۵۰ دقیقه بوده است. در حالی زمان محاسبه با بهره‌گیری از مدل رتبه کاسته برای همین بازه زمانی، در حدود ۲۱ دقیقه بوده که اختلاف زمان محاسباتی قابل توجهی را نشان می‌دهد.

۱- مقدمه

هستند. فعالیت‌های بسیاری در زمینه مطالعه جریان‌های ژئوستروفیک و شبه ژئوستروفیک انجام گرفته است. به طور مثال، رید و همکاران اثرات جریان ژئوستروفیک بر ارتفاع ساحل در شمال اقیانوس آرام شمالی را بررسی کردند [۱]. براساس مطالعه آنها، تعادل ژئوستروفیک در سطح دریا در امتداد مرز شرقی، شمالی و غربی اقیانوس به دلیل اثرات مکانی چرخش‌های زیرقطبی در اقیانوس آرام شمالی، علت افزایش طول زمستان در این نواحی می‌باشد. فلاحی و همکاران نیز جریان ژئوستروفیک را در اقیانوس اطلس شمالی محاسبه کردند [۲]. کفایا باد و همکاران، امواج اینرسی-گرانشی منتشر شده به وسیله تلاطم جریان ژئوستروفیک را مورد مطالعه قرار دادند [۳]. محاسبات جریان ژئوستروفیک یک سری پیچیدگی‌هایی دارد که شبیه‌سازی این جریان‌ها نیازمند صرف زمان طولانی است. کاهش مرتبه مدل که از تئوری‌های ریاضی و الگوریتم‌های عددی قوی توسعه یافته است، به عنوان یک ابزار کارآمد برای شبیه‌سازی سریع شناخته شده است. با وجود در دسترس

مطالعه و بررسی حوزه‌های آبی یکی از اهداف جوامع علمی در سایر جهان می‌باشد. بررسی جریان‌های دریایی، تاثیر آن بر آب و هوا و اقلیم خشکی‌ها از موضوعات مورد پژوهش در این حوزه است. مطالعه جریان‌های دریایی در مسائل مهمی چون مدیریت منابع دریایی و ساحلی، ماهیگیری و مسیریابی از اهمیت زیادی برخوردار است. به جبرانی که از تعادل بین نیروی کوریولیس و نیروهای گرادیان فشار افقی حاصل می‌شود، جریان ژئوستروفیک گفته می‌شود. حرکت شبه ژئوستروفیک به جریان‌هایی اطلاق می‌شود که در آن نیروی کوریولیس و نیروهای گرادیان فشار تقریباً در تعادل هستند، اما اینرسی نیز موثر است. جریان‌های ژئوستروفیک، بخش بزرگی از جریان‌های اقیانوسی را تشکیل می‌دهند که نقش عمده‌ای در تغییرات آب و هوایی ایفا می‌کنند. این جریان‌ها، یک مدل ساده شده از جریان‌های ژئوفیزیکی

* نویسنده عهده‌دار مکاتبات: moayyedi@qom.ac.ir



بودن داده‌های اندازه‌گیری و شبیه‌سازی شده گسترده، اندازه، پیچیدگی و ابعاد مجموعه داده‌های مدرن چالش‌های خاص خود را ایجاد می‌کند. پیش‌بینی دقیق و از نظر محاسباتی قابل محاسبه در سیستم‌های دینامیکی مستلزم توسعه مدل‌هایی با ابعاد کمتر است که به سرعت حل می‌شوند، اما به خوبی دینامیک اصلی را با وضوح بالا تقریب می‌زنند. این امر منجر به نیاز روزافزون به تکنیک‌های کاهش ابعاد و مدل‌سازی رتبه‌کاسته شده و این موضوع به بخش جدایی‌ناپذیر از الگوریتم‌های پیش‌بینی مبتنی بر داده تبدیل شده‌است [۴]. فوریه^۱ در سال ۱۸۰۷ ایده تقریب یک تابع با بهره‌گیری از توابع مثلثاتی که از روش‌های ابتدایی کاهش مرتبه در ریاضیات است را، مطرح کرد [۵]. یکی از پرکاربردترین الگوها برای کاهش مرتبه معادلات حاکم بر جریان سیال روش تجزیه متعامد بهینه^۲ می‌باشد [۶]. این روش ابتدا توسط کارهونن لوو و سپس کوسامبی به عنوان روشی جهت تحلیل‌های آماری مطرح شد [۷]. برای نخستین بار در سال ۱۹۶۷ میلادی لاملی پیشنهاد کرد که از تجزیه متعامد بهینه می‌توان برای استخراج ساختارهای بزرگ ظاهر شده در این جریان‌ها استفاده نمود [۸]. پس از آن با توجه به محدودیت کامپیوترها و الگوهای عددی این روش برای مدت‌ها بدون کاربرد باقی ماند. با مطرح شدن روش نمایه‌ها توسط سیرویش در اواخر دهه ۸۰ میلادی، روش تجزیه متعامد بهینه به عنوان ابزاری کارآمد برای توسعه مدل‌های رتبه‌کاسته برای سامانه‌های دینامیکی پیچیده‌ای که داده‌هایی از آزمایش‌های تجربی یا حل عددی مستقیم دارند نمایان شد [۹]. مویدی و همکاران از مدل رتبه‌کاسته پارامتری و وابسته به زمان مبتنی بر تجزیه متعامد بهینه برای شبیه‌سازی مسائل نفوذ و نفوذ-جابجایی استفاده کردند [۱۰]. مویدی و همکاران به ارائه یک شکل جدید از مدل اصلاح سامانه‌های دینامیکی رتبه‌کاسته برپایه روش تجزیه متعامد بهینه و اثبات قابلیت آن برای مدل‌سازی دقیق جریان ناپایای تراکم ناپذیر حول یک سیلندر مربع شکل پرداختند [۱۱]. اویی و همکاران توانستند شبیه‌سازی‌های دینامیکی سیالات گذرا مانند جریان یک استوانه ثابت را با استفاده از ادغام چندین روش یادگیری ماشین و روش رتبه‌کاسته مبتنی بر تجزیه متعامد بهینه بررسی کنند [۱۲]. هیگام و همکاران از روش تجزیه متعامد بهینه برای تحلیل جریان سیال رئولوژیک در یک بستر سیال که در آن مقدار دبی حجم به صورت یک تابع پالسی تغییر می‌کند، استفاده کرده‌اند. آنها توانستند علاوه بر شناسایی ساختارهای منسجم مکانی میدان، میزان تغییرات انرژی جنبشی میدان را برحسب مکان و زمان توصیف کنند [۱۳]. از آنجا که بررسی ساختارهای میدان در روش تجزیه متعامد بهینه

صرفاً براساس محتوای انرژی هریک از ساختارها بوده و این روش، سیستم را از نظر رفتار دینامیکی مورد ارزیابی قرار نمی‌دهد، لذا مدل رتبه‌کاسته حاصل، در بلند مدت قادر به پیش‌بینی رفتار سیستم بادقت بالا نخواهد بود. به همین دلیل در سال‌های اخیر پژوهشگران با مطالعه فیزیک میدان‌های جریان و تعمیم روش آرنولدی موفق به توسعه روشی قدرتمند در راستای تجزیه و تحلیل دینامیک سیستم‌های غیر خطی شدند [۱۴، ۱۵]. اشمید در سال ۲۰۲۲ در پژوهشی به بررسی تجزیه مود دینامیکی استاندارد شامل تشریح الگوریتم اصلی مدل، به عنوان یک روش برای تجزیه ماتریس داده‌ها، همراه با یک روش بهینه‌سازی مناسب برای استخراج ضرایب مودال پرداخت. همچنین به بررسی سه مسئله که انعطاف‌پذیری تجزیه مود دینامیکی را به عنوان یک ابزار تحلیل برای پیکربندی‌های جریان ساده تا پیچیده نشان می‌دهد، پرداخت [۱۶]. بادو و همکاران چگونگی ادغام اصول فیزیکی با تجزیه مود دینامیکی را نشان دادند. آنها توانستند با تمرکز بر روی پنج قانون اصلی بقای فیزیکی، الگوریتم‌های کارآمد برای بهینه‌سازی‌های تجزیه مود دینامیکی مبتنی بر فیزیک^۳ مربوطه را استخراج کنند [۱۷]. حسن و همکاران یک مسئله جریان گردابه‌ای غیر خطی با رویکرد (گپی)^۴ تجزیه متعامد بهینه پایدار شده را مورد بررسی قرار دادند [۱۸]. سالوادور و همکاران با بکار بردن روش تجزیه مودال در یک محفظه ی احتراق پایدار شده، به بررسی کارامدی روش تجزیه مود دینامیکی در زمینه ی ناپایداری‌های هیدرو دینامیکی پرداختند [۱۹]. سان و همکاران با استفاده از روش رتبه‌کاسته مبتنی بر تجزیه متعامد پایدار شده چرخش اقیانوسی شبه ژئوستروفیک را در مقیاس بزرگ مدل کرد [۲۰]. مویدی و همکاران پایدارسازی مدل رتبه‌کاسته تجزیه متعامد بهینه را جهت شبیه‌سازی جریان ناپایای لایه‌ای تراکم ناپذیر، با جایگزینی عبارت فشار بر حسب مودهای میدان سرعت انجام دادند [۲۱]. مویدی و همکاران ناپایداری مدل رتبه‌کاسته نفوذ-جابجایی مبتنی بر تجزیه مود دینامیکی در اعداد رینولدز بالا را با بهره‌گیری از رویکرد لزجت گردابه‌ای اصلاح کردند [۲۲]. در پژوهشی دیگر، مویدی و همکاران تاثیر رویکرد لزجت گردابه‌ای در اصلاح مدل رتبه‌کاسته مبتنی بر تجزیه مود دینامیکی، برای پیش‌بینی رفتار بلند مدت معادلات نفوذ-جابجایی را بررسی کردند. نتایج نشان‌دهنده دقت و سرعت بالای الگوی رتبه‌کاسته برای مدل‌سازی معادلات نفوذ-جابجایی بود [۲۳].

در این پژوهش به مطالعه جریان شبه‌ژئوستروفیک تک لایه و بررسی چگونگی تغییرات ساختار میدان جریان با تکیه بر تغییرات کمیت‌هایی

3. Physics-informed DMD (piDMD)

4. Gappy

1. Fourier

2. Proper Orthogonal Decomposition

$$J(\omega, \psi) = \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} \quad (2)$$

همچنین مولفه‌های بردار سرعت برای یک جریان دوبعدی را می‌توان از تابع جریان به شکل زیر بدست آورد:

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (3)$$

معادله انتقال ورتیسیتهی باروتروپیک ارائه شده در رابطه (۱) از تقریب صفحه بتا استفاده می‌کند. برای محاسبه اثرات چرخش زمین در تقریب صفحه بتا، پارامتر کوریولیس با تقریب $f = f_0 + \beta y$ محاسبه می‌شود که در آن f_0 ثابت کوریولیس متوسط و مقدار β گرادیان پارامتر کوریولیس در مرکز حوزه اقیانوسی ($y=0$) می‌باشد. مکانیزم اتلاف لزجت موجود در معادله (۱) در فرم استاندارد به صورت زیر می‌باشد:

$$D = \nu \nabla^2 \omega \quad (4)$$

در این رابطه ν ضریب لزجت گردابه‌ای است. همچنین ترم تابع اجباری باد با دو هسته چرخشی موجود در رابطه (۱) به شکل زیر محاسبه می‌شود:

$$F = \frac{\tau_0}{\rho H} \frac{\pi}{L} \sin\left(\pi \frac{y}{L}\right) \quad (5)$$

τ_0 حداکثر دامنه تنش، ρ چگالی و H میانگین عمق حوزه مورد مطالعه می‌باشد. به منظور بی‌بعد سازی معادله (۱) از روابط زیر استفاده می‌شود:

$$\tilde{x} = \frac{x}{L} \quad \tilde{y} = \frac{y}{L}$$

$$\tilde{t} = \frac{t}{L/V} \quad \omega = \frac{\omega}{V/L}$$

همچون ورتیسیتهی و تابع جریان پرداخته شده‌است. بدین منظور معادلات حاکم بر جریان شبه‌ژئوستروفیک تک لایه، که همان معادله انتقال ورتیسیتهی باروتروپیک دوبعدی می‌باشد، به صورت عددی حل شده‌است. حل این معادله با استفاده از طرح عددی آراکاو، روش رانگ-کوتا انجام گرفته است. شبیه‌سازی عددی مستقیم در عدد رینولدز ۴۵۰ و عدد راسبی ۰/۰۰۳۶ صورت گرفته‌است. مدل رتبه‌کاسته معادله انتقال ورتیسیتهی باروتروپیک با استفاده از روش تجزیه مود دینامیکی ایجاد شده‌است. مدل‌های رتبه‌کاسته به دلیل وجود برخی خطاهای مرتبط با الگوهای کاهش مرتبه، ممکن است دقت کافی در پیش‌بینی تحولات زمانی میدان جریان نداشته باشند. برای ارتقای دقت این مدل یک عبارت تصحیح‌کننده به معادله حاکم اضافه شده‌است. در این پژوهش، در ابتدا از روش‌های گوناگون برای پایداری‌سازی مدل رتبه‌کاسته استفاده شده که نتایج حاصل با دقت قابل قبولی حاصل نشدند. به منظور اصلاح عملکرد مدل از یک روش مبتنی بر کمینه‌سازی خطای بین داده‌های دقیق و نتایج مدل جایگزین بهره برده شده‌است. اصلاح مدل رتبه‌کاسته و نتایج حاصل از آن در مقایسه با داده‌های حل دقیق، نشان از عملکرد مناسب این روش دارد. ویژگی اصلی این پژوهش بررسی و مطالعه روش‌های پایداری‌سازی و اصلاح مدل رتبه‌کاسته معادله محور مبتنی بر تجزیه مود دینامیکی برای شبیه‌سازی جریان ژئوستروفیک می‌باشد.

۲- معادلات حاکم

با استفاده از معادله انتقال ورتیسیتهی باروتروپیک تراکم‌ناپذیر دوبعدی می‌توان جریان اقیانوسی شبه‌ژئوستروفیک یک‌لایه را به منظور پیش‌بینی میدان جریان سیال مدل کرد. این معادله یکی از پرکاربردترین مدل‌های ریاضی برای بررسی مسائل گردش اقیانوسی است. رابطه (۱) معادله انتقال ورتیسیتهی باروتروپیک را بیان می‌کند [۲۰]:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + J(\omega, \psi) - \beta \frac{\partial \psi}{\partial x} = D + F \quad (1)$$

دو ترم D و F به ترتیب بیانگر اتلاف و نیرو هستند. ترم جابجایی $J(\omega, \psi)$ که ژاکوبین^۱ غیرخطی نامیده می‌شود به شکل رابطه (۲) بیان می‌شود:

در این روابط، L ، طول مشخصه (طول محدوده در راستای افقی) و V سرعت مشخصه می‌باشد و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$V = \frac{\tau_0}{\rho H} \frac{\Pi}{\beta L} \quad (۶)$$

در نهایت معادله حاکم بر جریان باروتروپیک تراکم‌ناپذیر دوبعدی در حالت بدون بعد به صورت زیر خواهد بود که برای سهولت در نوشتار از علامت $\sim$ صرف نظر شده است:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + J(\omega, \psi) - \frac{1}{Ro} \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1}{Re} \nabla^2 \omega + \frac{1}{Ro} \sin(\pi y) \quad (۷)$$

در این رابطه، Ro عدد راسبی و Re عدد رینولدز می‌باشد که به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$Re = \frac{vL}{\nu} \quad Ro = \frac{v}{\beta L^2}$$

۳- روش حل عددی مستقیم

به منظور حل عددی معادله انتقال ورتیستی باروتروپیک دوبعدی حاکم بر جریان شبه‌ژئوستروفیک تک لایه از الگوی شبیه‌سازی عددی مستقیم استفاده شده است. بدین منظور ترم‌های مکانی و زمانی معادله به صورت مجزا مدل شده و برای ترم مشتقات مکانی نیز از دو الگوریتم مختلف برای ترم‌های غیرخطی و عبارت نفوذ استفاده شده است. برای جداسازی ترم جابجایی از روش آراکاو طبق رابطه (۸) استفاده شده است [۲۴]:

$$J_T(\omega, \psi) = \frac{1}{3} (J_1(\omega, \psi) + J_2(\omega, \psi) + J_3(\omega, \psi)) \quad (۸)$$

به طوریکه:

$$\begin{aligned} J_1(\omega, \psi) &= \frac{1}{4\Delta x \Delta y} [(\omega_{i+1,j} - \omega_{i-1,j})(\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j-1}) \\ &\quad - (\omega_{i,j+1} - \omega_{i,j-1})(\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j})] \\ J_2(\omega, \psi) &= \frac{1}{4\Delta x \Delta y} [\omega_{i+1,j}(\psi_{i+1,j+1} - \psi_{i+1,j-1}) \\ &\quad - \omega_{i-1,j}(\psi_{i-1,j+1} - \psi_{i-1,j-1}) \\ &\quad - \omega_{i,j+1}(\psi_{i+1,j+1} - \psi_{i-1,j+1}) \\ &\quad + \omega_{i,j-1}(\psi_{i+1,j-1} - \psi_{i-1,j-1})] \\ J_3(\omega, \psi) &= \frac{1}{4\Delta x \Delta y} [\omega_{i+1,j+1}(\psi_{i,j+1} - \psi_{i+1,j}) \\ &\quad - \omega_{i-1,j-1}(\psi_{i-1,j} - \psi_{i,j-1}) \\ &\quad - \omega_{i-1,j+1}(\psi_{i,j+1} - \psi_{i-1,j}) \\ &\quad + \omega_{i+1,j-1}(\psi_{i+1,j} - \psi_{i,j-1})] \end{aligned} \quad (۹)$$

برای محاسبه فرم گسسته ترم اتلاف موجود در معادله حاکم نیز، روش اختلاف محدود تفاضل مرکزی مرتبه دوم بکار گرفته شده است:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j}}{\Delta x^2} \quad (۱۰)$$

همچنین، انتگرال‌گیری زمانی نیز از روش رانگ-کوتا مرتبه چهارم انجام شده است.

۴- هندسه مسئله و شرایط مرزی معادله انتقال ورتیستی باروتروپیک

مسئله مورد بررسی در این پژوهش، شامل جریان شبه‌ژئوستروفیک تک لایه در عدد رینولدز ۴۵۰ و عدد راسبی ۰/۰۰۳۶ می‌باشد. شبیه‌سازی عددی مستقیم از حالت سکون تا حداکثر زمان بدون بعد برابر با ۹۰ با استفاده از یک گام زمانی ثابت و متوالی برابر با ۰/۰۰۰۱ روی شبکه‌ای به فرم یکنواخت در مختصات کارتزین و با تعداد گره‌هایی برابر با ۱۵۰×۳۰۰ انجام شده است. این وضوح شبکه مبتنی بر مطالعات دیگر محققان بدست آمده که عموماً برای بررسی چرخش‌های اقیانوسی استفاده می‌شود [۲۵، ۲۰]. بنابراین، گام زمانی و شبکه‌بندی فرض شده به اندازه کافی کوچک می‌باشد تا مسئله مورد بررسی را در حالت گذر از ناحیه گذرش و آشفته تا رسیدن به یک حالت پایدار

جدول ۱. کمیت‌های تنظیم شده در ناحیه مورد مطالعه.

Table 1. Regulated quantities in the study area.

کمیت	مقدار
L	۱۰۰۰ (km)
H	۱ (km)
V	۵۴۰۸۸/۲۶ (m/s)
L/V	۲/۱۴۱ (روز)
ρ	۱۰۳۰ (kg/m ³)
β	$1/5 \times 10^{-11}$ (1/ms)
τ_0	۰/۲۶۶ (N/m ²)

موجود در سمت راست معادله (۱) از رابطه (۱۱) استفاده شده است، این رابطه در پژوهشی دیگر نیز توسط سان مورد ارزیابی قرار گرفته است [۲۶]:

$$F = -\pi \cos(\pi x) \sin(\pi y) - \frac{Ro}{Re} 4\pi^4 \sin(\pi x) \sin(\pi y) \quad (11)$$

بنابراین مقادیر حاصل از حل دقیق برای پارامتر ورتیسیته و تابع جریان به ترتیب از رابطه (۱۲) بدست خواهد آمد:

$$\begin{aligned} \omega(x, y) &= 2\pi^2 \sin(\pi x) \sin(\pi y) \\ \psi(x, y) &= \sin(\pi x) \sin(\pi y) \end{aligned} \quad (12)$$

به منظور بررسی دقت شبیه‌سازی، در شکل ۱، مقایسه‌ای بین خطوط هم‌تراز تابع جریان حاصل از شبیه‌سازی عددی مستقیم و حل دقیق معادله انتقال ورتیسیته باروتروپیک دوبعدی نمایش داده شده است. همانطور که در شکل دیده می‌شود نتایج حاصل از شبیه‌سازی عددی مستقیم برای محاسبه مقدار تابع جریان دارای دقت کافی است. به همین ترتیب، مقایسه‌ای بین خطوط هم‌تراز حاصل از حل دقیق و شبیه‌سازی عددی مستقیم برای کمیت ورتیسیته نیز انجام گرفته که در اکثر نقاط کاملاً منطبق بوده و دارای دقت مناسبی می‌باشد. شایان ذکر است که نتایج حاصل، نشان‌دهنده دو هسته چرخشی در میدان جریان در هر دو شبیه‌سازی می‌باشد. همچنین مقدار خطای موجود بین نتایج حاصل از شبیه‌سازی عددی و حل دقیق از طریق روش خطای جذر میانگین مربعات بدست آمده که در جدول ۲ برای هر دو کمیت مورد بررسی نمایش داده شده است.

۶- روش تجزیه مود دینامیکی

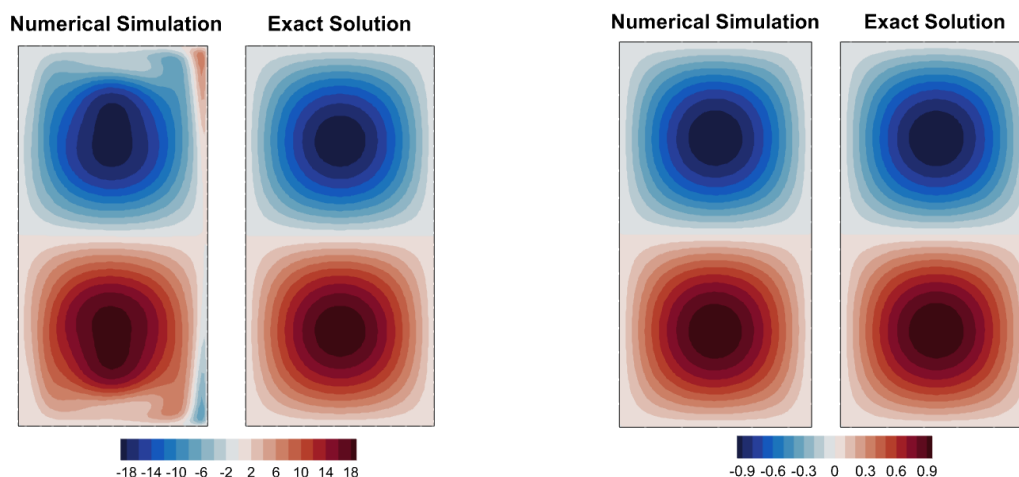
تجزیه مود دینامیکی یک تکنیک کاهش ابعاد است که توسط اشمید معرفی شده و داده‌های با ابعاد بالا را به ساختارهای منسجم مکانی-زمانی غالب تجزیه می‌کند [۲۷]. مدت کوتاهی پس از معرفی تجزیه مود دینامیکی، این روش توسط رویل و همکاران به عنوان یک تکنیک عددی برای تخمین عملکرد کوپمن^۱ و ایجاد یک روش قدرتمند برای تحلیل سیستم‌های دینامیکی غیرخطی مورد استفاده قرار گرفت [۲۸-۳۲]. این روش از رویکردی مشابه

آماری پیش‌بینی کند. اگرچه از اعداد بدون بعد در تجزیه و تحلیل معادله حاکم استفاده شده اما می‌توان به راحتی مقادیر ابعادی متناظر را با استفاده از ابعاد ناحیه مورد بررسی اقیانوس محاسبه کرد. به همین منظور مقادیر عددی مرتبط طبق جدول ۱ تنظیم می‌شوند. بنابراین آخرین گام زمانی بدون بعد محاسبه شده، در حالت ابعادی تقریباً معادل ۱۹۳ روز زمینی خواهد شد.

۵- اعتبار سنجی حل عددی

روش‌های شبیه‌سازی عددی مستقیم به لطف کاهش هزینه‌ها و افزایش سرعت پردازشگرها پیشرفت زیادی داشته است. لیکن حل یک مسئله با استفاده از روش‌های عددی تنها یافتن نتیجه نیست، بلکه اطمینان از کیفیت نیز باید مدنظر باشد. برای این اطمینان لازم است یک معیار اعتبارسنجی ایجاد شود که امکان کمی‌سازی عینی تفاوت بین نتایج حاصل و داده‌های واقعی را فراهم کند. بنابراین در این بخش، اعتبار سنجی نتایج شبیه‌سازی عددی مستقیم معادله انتقال ورتیسیته باروتروپیک دوبعدی به منظور شبیه‌سازی جریان شبه‌ژئوستروفیک تک‌لایه مورد بررسی قرار گرفته است. به منظور صحت‌سنجی کد شبیه‌سازی عددی از مقایسه داده‌ها با حل دقیق معادله به ازای یک تابع باد اجباری خاصی استفاده شده است. در این روش روابط مشخصی برای کمیت‌های ورتیسیته و تابع جریان به طور دقیق بدست آمده که به صورت نتایج غیروابسته به زمان می‌باشد. برای محاسبه عددی دقیق معادله حاکم بر مسئله شبه‌ژئوستروفیک، به ازای نیروی اجباری

1. Koopman Operator



شکل ۱. خطوط هم‌تراز (الف) تابع جریان و (ب) ورتیسیته حاصل از حل دقیق و شبیه‌سازی عددی مستقیم.

Fig. 1. Contour plots of (a) stream function and (b) vorticity obtained from the exact solution and direct numerical simulation.

نواحی از میدان با رفتارهای دینامیکی مختلف را دارد. تجزیه مود دینامیکی به ابزاری پیشرو برای مدل‌سازی مبتنی بر داده‌های سیستم‌های دینامیکی تبدیل شده‌است. از زمانی که روش تجزیه مود دینامیکی معرفی شد به طور گسترده‌ای در زمینه‌های مختلف از جمله اپیدمیولوژی^۱ [۳۳]، علوم اعصاب^۲ [۳۴]، رباتیک^۳ [۳۵]، پردازش ویدئو^۴ [۳۶] و تجارت مالی^۵ [۳۷] مورد استفاده قرار گرفته‌است.

در ابتدا به مجموعه‌ای از داده‌ها یا همان ماتریس داده‌ها برای بکارگیری این روش نیاز است. به عبارتی، با توصیف کلی میدان‌های جریان گردآوری شده با نمونه‌گیری از شبیه‌سازی عددی مستقیم یا داده‌های تجربی شروع می‌شود. داده‌هایی که به صورت یک دنباله از میدان‌های لحظه‌ای جریان هستند، تحت عنوان بردار v_i مرتب خواهند شد. معمولاً نمایه‌ها با گام زمانی ثابت نسبت به یکدیگر قرار دارند. بنابراین سیستم مورد مطالعه به صورت ماتریسی با M سطر و N ستون طبق رابطه (۱۳) مرتب خواهد شد:

$$V_1^N = [v_1, v_2, v_3, \dots, v_N] \quad (13)$$

1. Epidemiology
2. Neuroscience
3. Robotics
4. Video Processing
5. Financial Trading

جدول ۲. میزان خطا بین داده‌های حل دقیق و شبیه‌سازی عددی مستقیم.

Table 2. Error rate between exact solution data and direct numerical simulation.

کمیت	خطا
تابع جریان	$4/0.9 \times 10^{-5}$
ورتیسیته	$1/29 \times 10^{-3}$

روش‌های تکراری برای محاسبه مقادیر ویژه خطی یا سایر مسائل جبر خطی استفاده می‌کند. هدف از این روش، استفاده از یک فرمول‌بندی با تکیه بر داده‌های ورودی، که از طریق حل عددی یا نتایج آزمایشگاهی بدست می‌آید، می‌باشد. در واقع، از یک روش مبتنی بر مدل برای استخراج اطلاعات دینامیکی اجتناب و در عوض روی یک روش داده محور مبتنی بر فیزیک تمرکز شده‌است. بنابراین این روش مجموعه‌ای از مودها را همراه با یک مدل تکاملی خطی تولید می‌کند. این روش قدرتمند که داده‌محور می‌باشد، به عنوان روشی برای جداسازی اطلاعات مهم سیستم دینامیکی موردنظر (مانند جریان سیال) به منظور تعیین ساختارهای اصلی سازنده رفتار دینامیکی مسئله معرفی شده‌است. در واقع این روش قادر به بررسی و تجزیه و تحلیل ساختار سیستم‌های پیچیده و غیرخطی بوده و امکان شناسایی

با ضرب U^T و $W\Sigma^T$ در طرفین معادله (۱۸)، رابطه زیر بدست می‌آید:

$$S = U^T A U \Sigma W^T W \Sigma^{-1} = U^T V_2^N W \Sigma^{-1} \quad (۱۹)$$

مقادیر ویژه ماتریس A و S با هم برابر بوده و از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$S y_i = \mu_i y_i \quad i = 1, \dots, M \quad (۲۰)$$

در این رابطه y_i ، بیانگر بردار ویژه^۲ و μ_i مقادیر ویژه^۳ ماتریس S هستند. بنابراین مودهای مکانی بدست آمده از روش تجزیه مود دینامیکی به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\begin{aligned} \phi_i &= U y_i \\ A \phi_i &= \mu_i \phi_i \end{aligned} \quad (۲۱)$$

مودهای دینامیکی (وابسته به زمان) با نگاشت لگاریتمی مقادیر ویژه طبق رابطه زیر بدست خواهند آمد:

$$\lambda_i = \frac{\ln(\mu_i)}{dt} \quad (۲۲)$$

که این مقادیر ویژه حاصل از روش تجزیه مود دینامیکی به شکل مختلط هستند که بخش حقیقی آن‌ها پایداری مودها را مشخص خواهد کرد. در صورتی که بخش حقیقی λ_i مقداری مثبت داشته باشد، مود متناظر ناپایدار بوده و با گذر زمان نیز رشد پیدا خواهد کرد. همچنین اگر مقدار آن برابر با صفر شود، می‌توان گفت مود دینامیکی متناظر به پایداری لازم رسیده و در حالتی که بخشی حقیقی آن منفی بدست آید، مود دینامیکی متناظر با گذشت زمان به زوال خواهد رسید. از طرفی برای محاسبات مربوط به فرکانس هر مود نیز می‌توان از بخش موهومی مقادیر ویژه هر مود دینامیکی استفاده کرد.

برای پیش‌بینی رفتار سیستم در بلند مدت و بازسازی مجموعه نمایه‌های

در رابطه فوق، v بردار بیانگر میدان جریان در لحظه t است. سپس در ماتریس‌های V_1^{N-1} و V_2^N به ترتیب آخرین نمایه و اولین نمایه از ماتریس داده‌های اصلی حذف می‌شوند:

$$V_1^{N-1} = [v_1, v_2, v_3, \dots, v_{N-1}] \quad (۱۴)$$

$$V_2^N = [v_2, v_3, v_4, \dots, v_N] \quad (۱۵)$$

فرض بر این است که داده‌های ورودی از شبیه‌سازی عددی مستقیم بدست آمده باشند، باید ماتریس A برای تکامل معادلات حاصل شود. حال با استفاده از نگاشت خطی، بین ماتریس داده‌های لحظه‌ای اول، V_1^{N-1} و مجموعه دوم V_2^N رابطه زیر برقرار خواهد شد:

$$V_2^N = A V_1^{N-1} \quad (۱۶)$$

ماتریس نگاشت A ، ماتریسی فرضی است که شامل اطلاعات تکامل تدریجی سیستم بوده و در طول زمان ثابت می‌باشد. برای برقراری رابطه (۱۶)، باید عبارت به ماتریس A ، متکی نباشد. اگر ماتریس غیرمربعی V_1^{N-1} با استفاده از روش تجزیه مقادیر تکین^۱، تجزیه شود، رابطه زیر بدست خواهد آمد:

$$V_1^{N-1} = U \Sigma W^T \quad (۱۷)$$

که در آن به ترتیب U ماتریس غیرمربعی و متعامد با ابعاد $M \times N - 1$ ، با اطلاعات بیانگر ساختارهای مکانی سیستم، ماتریس Σ یک ماتریس مربعی با ابعاد $(N - 1) \times (N - 1)$ و همچنین W ماتریسی مربعی و متعامد با ابعاد $(N - 1) \times (N - 1)$ ، با اطلاعاتی شامل ساختارهای زمانی سیستم، می‌باشند. در ادامه با جایگذاری مقادیر حاصل از روش تجزیه مقادیر تکین در رابطه V_1^{N-1} ، معادله (۱۸) حاصل می‌شود:

$$V_2^N = A U \Sigma W^T \quad (۱۸)$$

2. Eigenvector

3. Eigenvalue

1. Singular Value Decomposition

جمع بخش متوسط‌گیری شده زمانی و یک بخش اغتشاشی طبق الگوی تجزیه رینولدز نوشت:

$$U(\vec{x}, t^i) = \bar{U}(\vec{x}) + U'(\vec{x}, t^i) \quad (25)$$

بخش متوسط‌گیری شده به صورت زیر قابل بازنویسی است:

$$\bar{U}(\vec{x}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N U_i(\vec{x}) \quad (26)$$

و بخش اغتشاشی براساس تقریب گالرکین به صورت زیر می‌باشد:

$$U'(x, t) = \sum_{i=1}^N a^i(t) \phi_i(x) \quad (27)$$

در این رابطه، ϕ_i پایه‌های دلخواه و a^i ضرایب زمانی هستند که باید مقادیر آن‌ها به نحوی انتخاب شود تا معادله دیفرانسیل را با تقریب خوبی ارضا کنند. با جایگذاری روابط مربوط به بخش متوسط و اغتشاشی میدان لحظه‌ای در معادله (۷)، معادله انتقال ورتیسیتی باروتروپیک، نتیجه زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \omega'}{\partial t} + \frac{\partial \psi'}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial \psi'}{\partial y} \frac{\partial \omega'}{\partial x} + \frac{\partial \psi'}{\partial y} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x} \\ & + \frac{\partial \psi'}{\partial y} \frac{\partial \omega'}{\partial x} - \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y} - \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x} \frac{\partial \omega'}{\partial y} \\ & - \frac{\partial \psi'}{\partial x} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y} - \frac{\partial \psi'}{\partial x} \frac{\partial \omega'}{\partial y} - \frac{1}{Ro} \left(\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x} - \frac{\partial \psi'}{\partial x} \right) = \\ & \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 \omega'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{\omega}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega'}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{\omega}}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{Ro} \sin(\pi y) \end{aligned} \quad (28)$$

حال با استفاده از تقریب گالرکین برای بخش اغتشاشی دو کمیت ورتیسیتی و تابع جریان به ترتیب می‌توان نوشت:

$$\omega'(x, y, t) = \sum_{i=1}^N a^i(t) \phi_i(x, y) \quad (29)$$

اولیه، با استفاده از محاسبه ضرایب زمانی و مودهای دینامیکی، یک بسط خطی تقریب زده می‌شود. این عمل با تصویرسازی هر یک از مودهای دینامیکی در اولین نمایه طبق رابطه زیر انجام می‌شود:

$$a_i = \phi_{ij}^t v_{1j} \quad (23)$$

در رابطه فوق، ϕ^t شبه معکوس ماتریس مودهای دینامیکی است. به منظور بازسازی هر یک از نمایه‌های اولیه از رابطه زیر استفاده می‌شود:

$$V_k = \sum_i^M a_i \phi_i \mu_i^{k-1} \quad (24)$$

در رابطه فوق، k شمارنده زمانی، μ_i مقدار ویژه و V_k نمایه ثبت شده در زمان است. در روش استفاده شده در این پژوهش، برخلاف روش تجزیه متعامد بهینه، مودهای حاصل از ماتریس نمایه‌ها که برای توسعه مدل‌های رتبه‌کاسته بکار می‌روند، دارای خاصیت تعامد نبوده و دارای ویژگی مستقل خطی نیز نیستند.

۷- مدل رتبه‌کاسته معادله محور مبتنی بر تجزیه مود دینامیکی

جریان آشفته که با عنوان توربولانس نیز شناخته شده به نوعی از حرکت سیال اشاره دارد، که در آن ذرات سیال به صورت غیر منظم و پیچیده حرکت می‌کنند. فهم و تحلیل جریان‌های آشفته در بسیاری از زمینه‌ها از جمله مهندسی مکانیک، هوافضا، مهندسی شیمی و علوم جوی اهمیت دارد. از ویژگی‌های جریان آشفته می‌توان به نوسانات نامنظم، اختلاط بیشتر و قدرت پخش بالا و تولید گردابه‌ها با اندازه‌های مختلف اشاره کرد. جریان آشفته می‌تواند در هر محیطی که شرایط نامناسب برای نوسانات و اختلاط سریع فراهم باشد، ایجاد شود. این جریان ذاتا وابسته به زمان بوده و ویژگی‌های آن در طول زمان تغییر می‌کنند. این تغییرات می‌توانند به صورت سریع و غیر قابل پیش‌بینی باشد. مدل‌سازی و شبیه‌سازی این جریان به دلیل پیچیدگی زیاد آن یکی از چالش‌های بزرگ در دینامیک سیالات محاسباتی است. با این حال استفاده از مقادیر متوسط و بررسی توزیع‌های احتمالی هر یک از این کمیت‌ها در میدان جریان، کمک‌کننده بوده و توانایی بازتولید خواص آماری جریان آشفته را به کاربر خواهد داد. پس می‌توان کمیت حاکم بر دینامیک مسئله به صورت حاصل

$$\begin{aligned}
 & (\phi_k^H(x, y), \phi_i(x, y)) \\
 & \times \sum_1^N \frac{d}{dt} (a^i(t)) + (\phi_k^H(x, y), \frac{d\bar{\psi}}{dy} \frac{d\bar{\omega}}{dx}) + \\
 & (\phi_k^H(x, y), a^i(t) \times \sum_1^N \frac{d}{dx} (\phi_i(x, y)) \times \frac{d\bar{\psi}}{dy}) \\
 & + (\phi_k^H(x, y), a^i(t) \times \sum_1^N \frac{d}{dy} (\phi_i(x, y)) \times \frac{d\bar{\omega}}{dx}) \\
 & + (\phi_k^H(x, y), a^i(t) \times a^j(t) \\
 & \times \sum_{i=j=1}^N (\frac{d}{dy} (\phi_i(x, y)) \times \frac{d}{dx} (\phi_j(x, y)))) \\
 & - (\phi_k^H(x, y), \frac{d\bar{\psi}}{dx} \frac{d\bar{\omega}}{dy}) - (\phi_k^H(x, y), a^i(t) \\
 & \times \sum_1^N \frac{d}{dy} (\phi_i(x, y)) \times \frac{d\bar{\psi}}{dx}) \\
 & - (\phi_k^H(x, y), a^i(t) \times \sum_1^N \frac{d}{dx} (\phi_i(x, y)) \times \frac{d\bar{\omega}}{dy}) \\
 & - (\phi_k^H(x, y), a^i(t) \times a^j(t) \\
 & \times \sum_{i=j=1}^N (\frac{d}{dx} (\phi_i(x, y)) \times \frac{d}{dy} (\phi_j(x, y)))) \\
 & - \frac{1}{Ro} (\phi_k^H(x, y), (a^i(t) \\
 & \times \sum_1^N \frac{d}{dx} (\phi_i(x, y)) + \frac{d\bar{\psi}}{dx})) \\
 & = \frac{1}{Re} (\phi_k^H(x, y), (\nabla^2 \bar{\omega} + a^i(t) \\
 & \times \sum_1^N \nabla^2 \phi_i(x, y))) + \frac{1}{Ro} (\phi_k^H(x, y), \sin(\pi y))
 \end{aligned} \tag{۳۳}$$

$$\psi'(x, y, t) = \sum_{i=1}^N a^i(t) \varphi_i(x, y) \tag{۳۰}$$

با قرار دادن این دو رابطه در معادله انتقال ورتیسیته، معادله زیر بدست خواهد آمد:

$$\begin{aligned}
 & \phi_i(x, y) \times \sum_1^N \frac{d}{dt} (a^i(t)) + \frac{d\bar{\psi}}{dy} \frac{d\bar{\omega}}{dx} \\
 & + a^i(t) \times \sum_1^N \frac{d}{dx} (\phi_i(x, y)) \times \frac{d\bar{\psi}}{dy} \\
 & + a^i(t) \times \sum_1^N \frac{d}{dy} (\phi_i(x, y)) \times \frac{d\bar{\omega}}{dx} \\
 & + a^i(t) \times a^j(t) \\
 & \times \sum_{i=j=1}^N (\frac{d}{dy} (\phi_i(x, y)) \times \frac{d}{dx} (\phi_j(x, y))) - \\
 & \frac{d\bar{\psi}}{dx} \frac{d\bar{\omega}}{dy} - a^i(t) \times \sum_1^N \frac{d}{dy} (\phi_i(x, y)) \times \frac{d\bar{\psi}}{dx} - \\
 & a^i(t) \times \sum_1^N \frac{d}{dx} (\phi_i(x, y)) \times \frac{d\bar{\omega}}{dy} - a^i(t) \times a^j(t) \\
 & \times \sum_{i=j=1}^N (\frac{d}{dx} (\phi_i(x, y)) \times \frac{d}{dy} (\phi_j(x, y))) \\
 & - \frac{1}{Ro} (a^i(t) \times \sum_1^N \frac{d}{dx} (\phi_i(x, y)) + \frac{d\bar{\psi}}{dx}) \\
 & = \frac{1}{Re} (\nabla^2 \bar{\omega} + a^i(t) \times \sum_1^N \nabla^2 \phi_i(x, y)) + \frac{1}{Ro} \sin(\pi y)
 \end{aligned} \tag{۳۱}$$

رابطه فوق یک معادله دیفرانسیل ساده مرتبه اول بوده که پس از بازنویسی بر حسب ترم‌های غیرخطی، خطی و ثابت به صورت زیر تبدیل خواهد شد:

$$\begin{aligned}
 \frac{da^k(t)}{dt} &= \tilde{A}_{kij} \times a^i(t) \times a^j(t) \\
 &+ \tilde{B}_{ki} \times a^i(t) + \tilde{C}_k
 \end{aligned} \tag{۳۴}$$

به طوریکه:

$$\begin{aligned}
 \tilde{A}_{kij} &= (\frac{d}{dy} (\phi_i(x, y)) \times \frac{d}{dx} (\phi_j(x, y)), \\
 &\phi_k^H(x, y)) \times \phi^{ad}
 \end{aligned} \tag{۳۵}$$

در روش تجزیه مود دینامیکی، مودها الزاما دارای ویژگی تعامد نبوده پس یک پایه الحاقی شبه متعامد لازم است تا در طرفین رابطه، ضرب ماتریسی شود. این پایه الحاقی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\phi^{ad} = ((\phi_k^H(\vec{x}), \phi_i(\vec{x}))^{-1} \tag{۳۲}$$

بنابراین باید در هر دو طرف معادله (۳۱) در رابطه (۳۲) ضرب داخلی شوند. در این صورت فرم نهایی به صورت زیر خواهد شد:

$$\begin{aligned}\bar{C}_k &= (\nu_e \Psi_k L(\bar{u}), \phi_k) \\ \bar{B}_{ki} &= (\nu_e \Psi_k L(\phi_i), \phi_k)\end{aligned}\quad (36)$$

عبارت‌های مندرج در معادله (۳۶) به ضرایب عبارات خطی و ثابت معادله (۳۴) افزوده می‌شوند. در معادله بالا ν_e شدت لزجت گردابه‌ای مصنوعی و Ψ_k وزن مرتبط با هر مود است. هدف اصلی این الگو ارائه یک طرح پایدار با حفظ دقت مناسب است که بر این اساس یک لزجت مصنوعی را در بالاترین فرکانس‌ها اضافه می‌کند. با بکار بردن عبارات‌های موجود در معادله (۳۶)، مدل رتبه‌کاسته مشروح در معادله (۳۴)، به صورت زیر اصلاح خواهد شد:

$$\begin{aligned}\frac{da^k(t)}{dt} &= \tilde{A}_{kij} \times a^i(t) \times a^j(t) \\ &+ (\tilde{B}_{ki} + \hat{B}_{ki}) \times a^i(t) + \tilde{C}_k + \hat{C}_k\end{aligned}\quad (37)$$

اولین و ساده‌ترین روش برای پایدارسازی روش هایزنبرگ^۱ است، در این مدل اصلاح شده^۲، که در مرجع [۳۸] معرفی شده است، از ضریب لزجت مصنوعی^۳ به صورت رابطه زیر استفاده می‌کند:

$$\Psi_k = 1 \quad (38)$$

روش ارتقا یافته مدل هایزنبرگ توسط رمپفر^۴ پیشنهاد شده و از یک ضریب لزجت مصنوعی مشابه با یک مدل خطی بهره برده شده است [۳۹]. در این معادلات N_R تعداد مود و k شمارنده زمانی می‌باشد. اولین معادله مربوط به محاسبه ترم پایدارسازی به صورت زیر است:

$$\Psi_k = k / N_R \quad (39)$$

در این راستا، دو مدل اصلاح‌شده جدید، که نسخه‌هایی از معادله (۳۷) به شمار می‌روند، معرفی شده‌اند. در مدل نخست، از یک مدل درجه دوم^۵

$$\begin{aligned}\tilde{B}_{ki} &= \left(\frac{d\bar{\psi}}{dy} \times \frac{d}{dx} (\phi_i(x, y)) \right. \\ &- \frac{d\bar{\omega}}{dx} \frac{d}{dy} (\varphi_i(x, y)) - \frac{d\bar{\psi}}{dx} \frac{d}{dy} (\phi_i(x, y)) \\ &- \frac{d\bar{\omega}}{dy} \frac{d}{dx} (\varphi_i(x, y)) - \frac{1}{Ro} \frac{d}{dx} (\varphi_i(x, y)) \\ &\left. + \frac{1}{Re} \nabla^2 \phi_i(x, y), \phi_k^H(x, y) \right) \times \phi^{ad}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{C}_k &= \left(\frac{d\bar{\psi}}{dy} \frac{d\bar{\omega}}{dx} - \frac{d\bar{\psi}}{dx} \frac{d\bar{\omega}}{dy} + \frac{1}{Re} \nabla^2 \bar{\omega} \right. \\ &- \frac{1}{Ro} \left(\frac{d\bar{\psi}}{dx} - \sin(\pi y) \right), \phi_k^H(x, y) \left. \right) \times \phi^{ad}\end{aligned}$$

در نهایت معادله فوق با احتساب تمام بخش‌های غیرخطی، خطی و ثابت آن باید در تمامی گام‌های زمانی حل شود.

۸- پایدارسازی مدل رتبه‌کاسته با استفاده از روش لزجت گردابه‌ای مصنوعی

مدل‌های رتبه‌کاسته استاندارد که از تصویرسازی معادلات حاکم بر دینامیک سیال در راستای موده‌های دینامیکی حاصل می‌شوند، ممکن است دقت بالایی در پیش‌بینی تغییرات زمانی میدان جریان نداشته باشند. این موضوع می‌تواند ناشی از دلیل‌های زیر باشد:

- (۱) ناپایداری‌های ناشی از حذف موده‌های با اعداد موج بالا
- (۲) دقت پایین نمایه‌های ورودی که در نتیجه معادلات را به طور کامل ارضا نخواهد کرد.

بنابراین استهلاک سیستم دینامیکی رتبه‌کاسته کم شده و ممکن است در پیش‌بینی دینامیک مسئله مورد نظر دچار ناپایداری شود. یکی از رویکردهای بکار گرفته‌شده در این پژوهش، به منظور اصلاح این ناپایداری و جبران استهلاک از دست رفته، برای رسیدن مجدد سیستم به پایداری، استفاده از ترم لزجت گردابه‌ای مصنوعی در معادله سیستم دینامیکی می‌باشد. عبارت افزوده‌شده می‌تواند به عنوان جایگزین اثر موده‌های حذف شده در فرآیند کاهش مرتبه بکار رفته و مشابه رویکرد شبیه‌سازی جریان‌های آشسته برای مدل‌سازی ساختارهای متجانسی که سطح انرژی پایین‌تری دارند، استفاده شود. ترم اصلاح به صورت زیر به معادله افزوده می‌شود:

1. Heisenberg
2. Closure model
3. Viscosity kernel
4. Rempfer
5. quadratic viscosity kernel

استفاده شده است:

۱۰- نتایج

در این بخش نتایج حاصل از شبیه‌سازی عددی مستقیم معادله انتقال ورتیستی باروتروپیک دو بعدی برای میدان مطابق شرایط مندرج در جدول ۱ ارائه خواهد شد. معادله حاکم برای شبیه‌سازی جریان شبه‌ژئوستروفیک یک لایه با فرض نیروی متکی بر باد با دو هسته چرخشی متقارن و اتلافات برای دو مورد مطالعاتی متفاوت محاسبه شده است. در مسئله موردنظر دو کمیت عدد رینولدز و عدد راسبی به ترتیب برابر با ۴۵۰ و ۰/۰۰۳۶ در نظر گرفته شده است. شبیه‌سازی عددی مستقیم و مدل‌سازی رتبه‌کاسته هردو روی یک کامپیوتر با مشخصات فنی مندرج در جدول ۳ اجرا گرفته شده است. زمان محاسبات مربوط به هر دو روش نیز در جدول ۴ گزارش شده است:

$$\Psi_k = k / N_R^2 \quad (40)$$

مدل اصلاح‌شده نوع دوم از یک مدل جذر مربع^۱ بر حسب تعداد مودها استفاده می‌کند [۴۰]:

$$\Psi_k = \sqrt{k / N_R} \quad (41)$$

۹- اصلاح مدل رتبه‌کاسته با استفاده از مدل خطی و ثابت گذرا

در بخش قبل دلایلی برای کاهش پیش‌بینی تغییرات زمانی میدان جریان مطرح شد. زمانی که پاسخ مدل رتبه‌کاسته به درستی تغییرات زمانی سیستم دینامیکی موردنظر را پیش‌بینی نکند، افزودن عبارت اصلاح‌کننده سبب می‌شود که رفتار مدل بهبود یافته و بتواند تغییرات زمانی واقعی مسئله را پیش‌بینی کند. در این شرایط ترم اصلاح، همچون عبارت استهلاک مصنوعی در معادله حاکم عمل می‌کند. روشی که برای محاسبه ضرایب ترم اصلاح ارائه می‌شود استفاده از حل یک مسئله بهینه‌سازی محلی در بازه زمان بوده است. بازه‌ای که برای کمینه‌سازی در نظر گرفته شده است، از t_0 تا $t_0 + \Delta t$ می‌باشد. مسئله بهینه‌سازی براساس رابطه زیر تعریف می‌شود [۱۱]:

$$J(t_i) = \left[\sum_{k=1}^{N_r} \left(\frac{da^k(t_i)}{dt} - \frac{d\hat{a}^k(t_i)}{dt} \right) - \sum_{k=1}^{N_r} B'_{ki} a^k(t_i) - C'_k \right]^2 \quad (42)$$

در رابطه فوق، $\frac{d\hat{a}^k}{dt}$ آهنگ تغییرات زمانی ضرایب مودال حاصل از حل عددی مستقیم است که با استفاده از یک روش جداسازی مرتبه چهارم محاسبه می‌شود. آهنگ تغییرات زمانی ضرایب مودال حاصل از مدل رتبه‌کاسته معمولی را نشان داده که برابر سمت راست معادله سیستم دینامیکی است. N_r نیز تعداد مودهای به کار رفته برای ایجاد مدل رتبه‌کاسته می‌باشد.

1. square-root viscosity kernel

در صورتیکه در میدان جریان، مقیاس‌های مکانی بزرگی وجود داشته باشد طبیعتاً به دلیل چرخش بالا و ورتیستی افزایش یافته، انرژی جنبشی بیشتری در میدان جریان وجود داشته بنابراین جریان با توسعه آشفتگی همراه خواهد بود. این درحالی است که اگر مقیاس‌های مکانی کوچک در جریان غالب شوند، سرعت تولید آشفتگی به دلیل پایین بودن سطح انرژی جنبشی مقیاس‌های مکانی کاهش می‌یابد. شکل ۲، خطوط همتراز ورتیستی در چهار گام زمانی مختلف نشان می‌دهد. به وضوح غالب بودن گردابه‌های با چرخش بالا قابل مشاهده است. با مشاهده مرحله به مرحله می‌توان دریافت که در هر گام زمانی تغییرات زیادی در یک نقطه مشخص بدون هیچ قاعده‌ای رخ داده است که با مفهوم آشفتگی تطابق دارد.

شکل ۳ خطوط همتراز تابع جریان، را در چهار گام زمانی مختلف نشان می‌دهد. همانطور که در شکل دیده می‌شود در ابتدا جریان حالتی متقارن و پایدار داشته و گردابه‌ها به صورت متوازن در دو سوی میدان جریان شکل گرفته‌اند. با گذشت زمان ساختار جریان کاملاً پیچیده‌تر شده و تعداد هسته‌های چرخشی بدون قاعده خاصی افزایش پیدا کرده است.

در تحلیل جریان سیال، ورتیستی به عنوان معیاری برای بیان میزان چرخش یا گردش جریان در نواحی مختلف دامنه مورد استفاده قرار می‌گیرد. متوسط ورتیستی نشان دهنده مقدار متوسط این کمیت در یک ناحیه خاص از میدان جریان است و به درک رفتار کلی جریان از نظر ساختارهای گردابه‌ای کمک می‌کند.

در شکل ۴ خطوط همتراز متوسط میدان ورتیستی نشان داده شده است. عدد رینولدز بالا بیانگر غلبه اینرسی بر لزجت بوده و سبب شکل‌گیری ساختارهای گردابه‌ای قوی‌تر و پیچیده‌تر در جریان می‌گردد. از سوی دیگر، عدد راسبی بالا به معنای تضعیف نقش نیروهای چرخشی مانند نیروی

جدول ۳. مشخصات سیستم محاسباتی مورد استفاده.

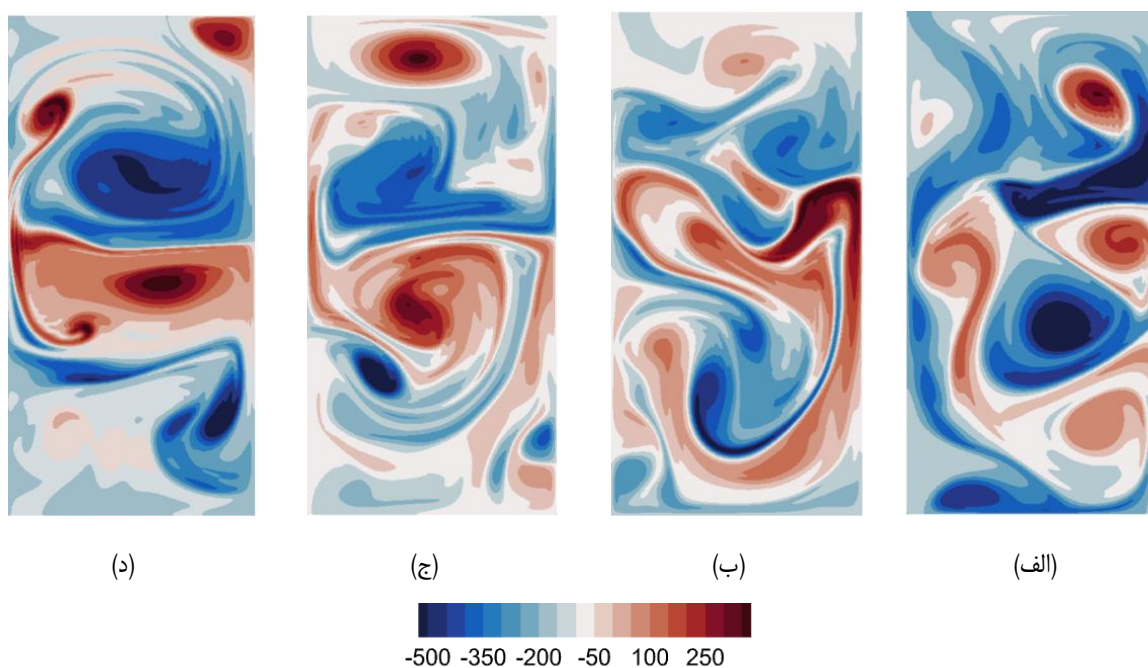
Table 3. Specifications of the computing system used

ASUS X556UF	مدل لپ تاپ
Intel(R) Core (TM) i7-6500U CPU @ 2.50GHz 2.59 GHz	پردازنده
RAM 8 GB	حافظه

جدول ۴. زمان محاسبات بکار رفته برای مدل رتبه کاسته و شبیه سازی عددی مستقیم.

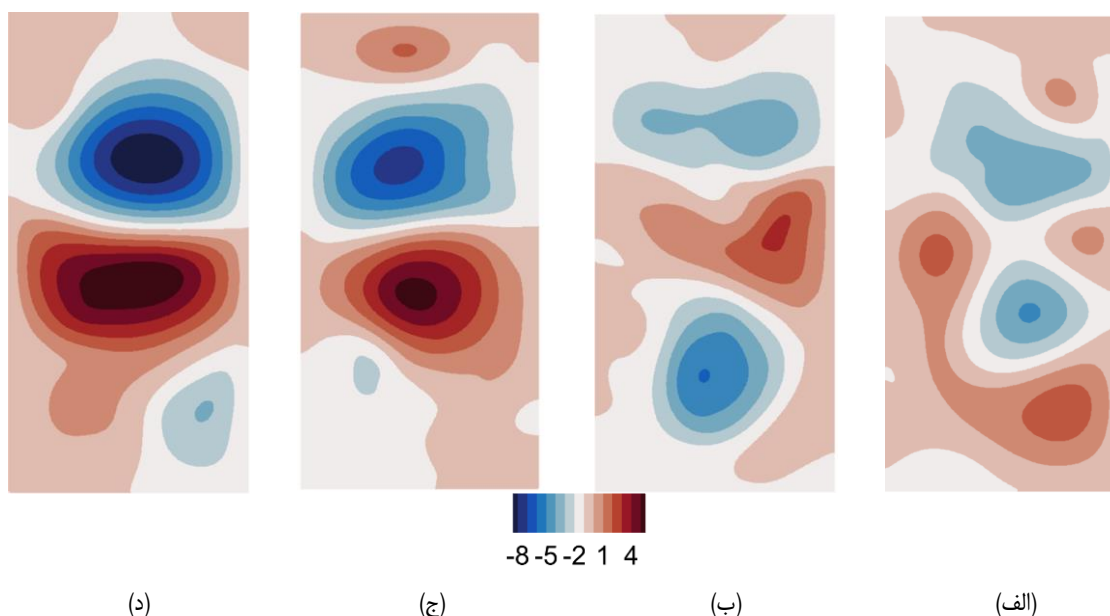
Table 4. Computational time used for the Reduced Order Model and direct numerical simulation.

مدل	زمان محاسبات (دقیقه)
شبیه سازی عددی مستقیم	۴۵۰
مدل رتبه کاسته	۲۱



شکل ۲. خطوط همتراز ورتیسیتی برای (الف) $t=10$ ، (ب) $t=20$ ، (ج) $t=50$ و (د) $t=70$.

Fig. 2. Contour plots vorticity for a) $t=10$, b) $t=20$, c) $t=50$, d) $t=70$.



شکل ۳. خطوط همتراز تابع جریان برای (الف) $t=10$ ، (ب) $t=20$ ، (ج) $t=50$ و (د) $t=70$.

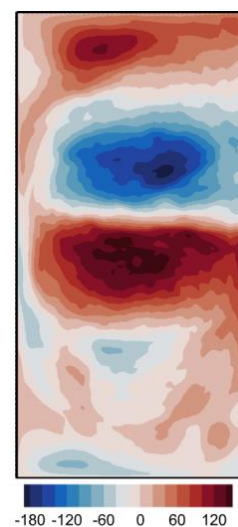
Fig. 3. Contour plots stream function for a) $t=10$, b) $t=20$, c) $t=50$, d) $t=70$.

متوسط ورتیسیتی نیز بیشتر می‌شود.

۱۰-۱- پایدارسازی مدل رتبه‌کاسته مبتنی بر روش تجزیه مود دینامیکی در کاربرد روش تجزیه مود دینامیکی برای مسائلی مانند معادله انتقال ورتیسیتی باروتروپیک، برخی چالش‌ها وجود دارند که می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

(۱) مودهایی با رفتار ناپایدار: یکی از ویژگی‌های مهم روش تجزیه مود دینامیکی که آن را از روش تجزیه متعامد بهینه متمایز می‌کند، عدم تعامد مودهای آن است. برخلاف مودهای روش تجزیه متعامد بهینه که به صورت بهینه به ترتیب بیشینه انرژی مرتب می‌شوند، مودهای روش تجزیه مود دینامیکی نه متعامد هستند و نه الزاما قابل رتبه‌بندی انرژی می‌باشند. این ویژگی سبب می‌شود که تحلیل انرژی مودها در روش تجزیه مود دینامیکی دشوار بوده و نتوان به طور واضح مشخص کرد که کدام مود بیشترین سهم را در دینامیک سیستم دارد. در نتیجه ممکن است مودهایی که رفتاری ناپایدار دارند در مدل باقی بمانند، زیرا در روش تجزیه مود دینامیکی شاخصی برای ارزیابی انرژی مودها وجود ندارد.

(۲) وابستگی شدید به دقت داده‌ها در زمان و مکان: از آنجایی که روش تجزیه مود دینامیکی داده محور می‌باشد، بنابراین ممکن است یکی



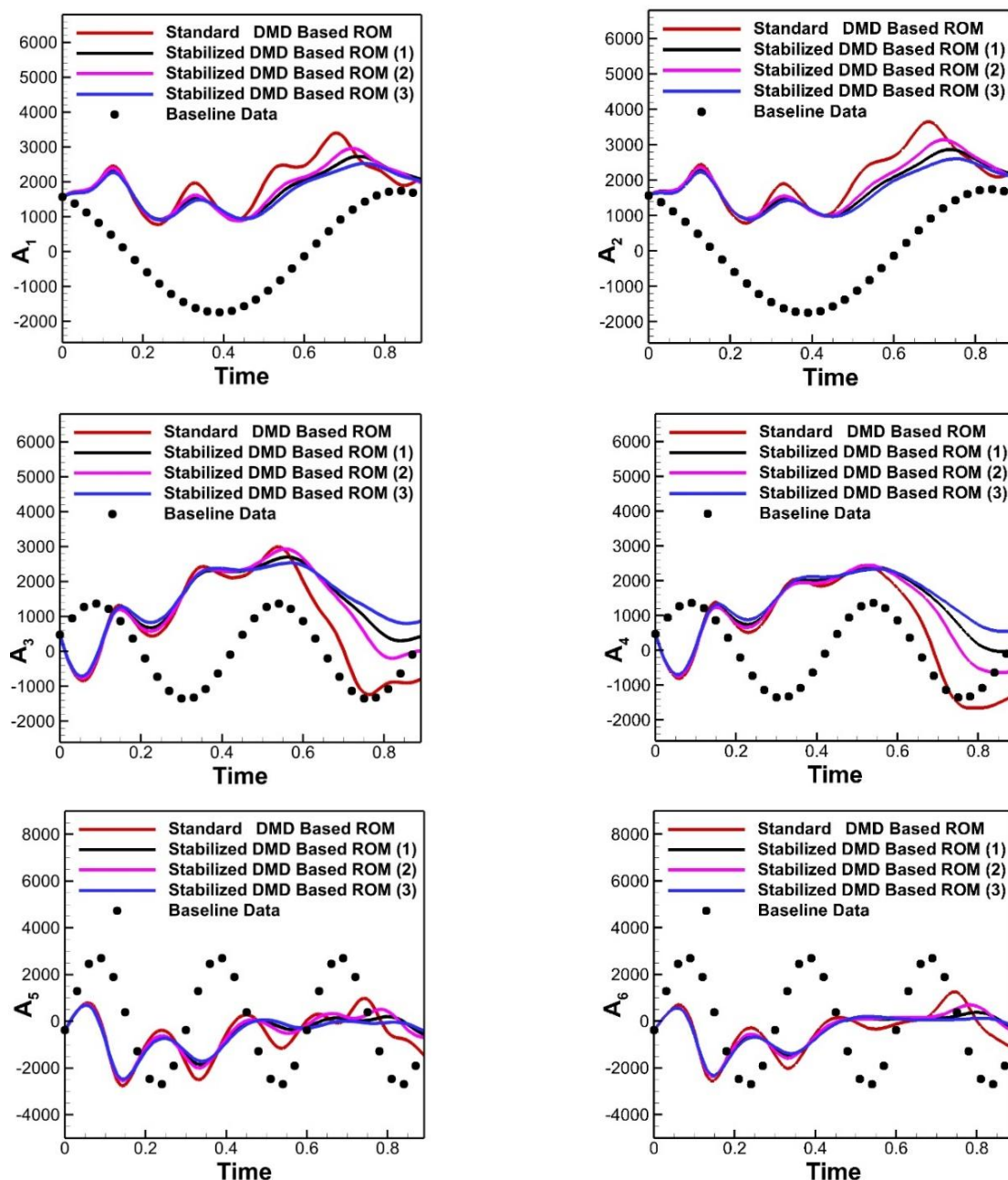
شکل ۴. خطوط همتراز بخش متوسط ورتیسیتی.

Fig. 4. Contour plots of the middle section of the vorticity.

کورئولیس است. این ترکیب باعث افزایش تمایل جریان به ناپایداری، آشفتگی و تولید گردابه‌های شدیدتر می‌شود. در چنین شرایطی، شدت جریان چرخشی در نواحی مختلف میدان جریان افزایش یافته، و به دنبال آن مقدار

حاصل از حل دقیق صورت گرفته است. همانطور که در شکل‌ها مشخص است نتایج حاصل از مدل رتبه‌کاسته استاندارد تا بخشی آورده شده است و از این بخش به بعد نتایج واگرا شده و اعداد بی‌معنایی بدست‌آمده که در نمودار قابل ترسیم نمی‌باشد. همچنین روش‌های پایدارسازی نتوانسته سیستم را

از دلایل ناپایداری در این مسئله، تعداد محدود نمایه‌ها و دقت مکانی پایی باشد که در حل عددی مسئله موردنظر استفاده شده است. بنابر چالش‌هایی که اشاره شد از روش‌های پایدارسازی استفاده شده است. در شکل‌های ۴ و ۵ مقایسه‌ای بین روش‌های پایدارسازی، مدل رتبه‌کاسته استاندارد و داده‌های



شکل ۵. مقایسه تغییرات زمانی بخش حقیقی ضرایب مودال حاصل از مدل رتبه‌کاسته استاندارد، مدل رتبه‌کاسته اصلاح شده با روش‌های پایدارسازی و داده‌های حل دقیق.

Fig. 5. Comparison of time variations of the real part of modal coefficients obtained from the standard Reduced Order Model, the modified Reduced Order Model with stabilization methods and exact solution data

جدول ۵. روش‌های پایداری سازی مدل رتبه‌کاسته مبتنی بر تجزیه مود دینامیکی.

Table 5. Reduced Order Model stabilization methods based on dynamic mode decomposition

$\Psi_k = k / N_R$	روش اول (معادله ۳۹)
$\Psi_k = k / N_R^2$	روش دوم (معادله ۴۰)
$\Psi_k = \sqrt{k / N_R}$	روش سوم (معادله ۴۱)

برای اطمینان بیشتر از نتایج حاصله، خطا بین مدل اصلاح شده و شبیه‌سازی عددی مستقیم برای ضرایب مودال حقیقی و موهومی محاسبه شده‌است. در جدول (۶) مقادیر خطای متوسط بین نتایج حاصل از مدل اصلاح شده و شبیه‌سازی عددی مستقیم برای ضرایب مودال بخش حقیقی آورده شده‌است. لازم به ذکر است مقدار خطا برای بخش موهومی شش ضریب مودال صفر بدست آمده‌است.

۱۱- نتیجه‌گیری

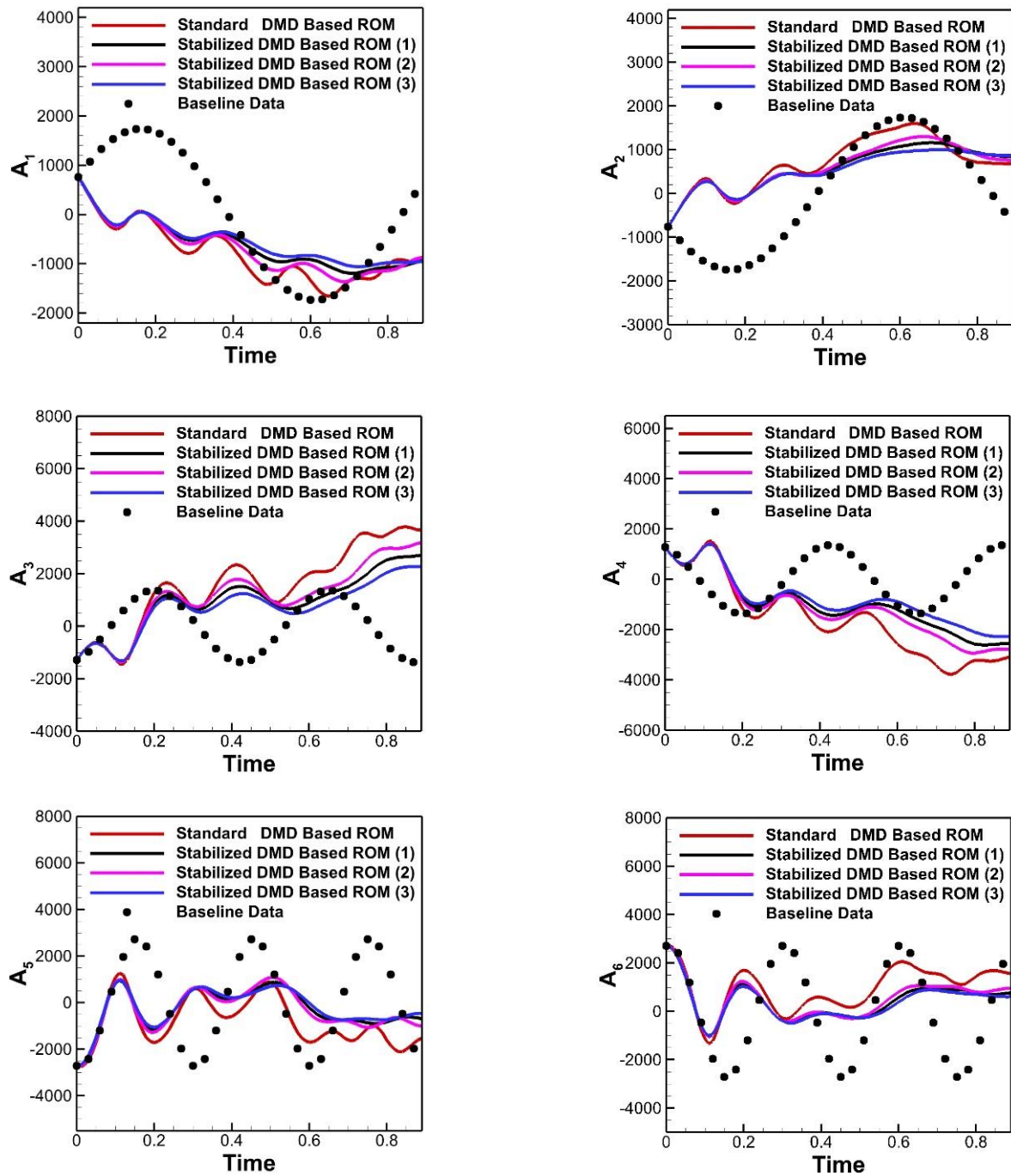
رویکرد محاسباتی همواره سهم قابل توجهی در توصیف و درک جریان‌های اتمسفری و اقیانوسی داشته است. برای حل مسائل فیزیکی با تغییرات مکانی و زمانی سریع، شبیه‌سازی عددی مستقیم به یک تکنیک مدل‌سازی با صحت و دقت بالا بدل شده‌است. با این حال به دلیل محدودیت‌های سخت‌افزاری و همچنین هزینه بالای این روش، محققان حوزه مکانیک سیالات به تجزیه مودال به عنوان ابزار انتخابی برای تجزیه و تحلیل داده‌محور روی آورده‌اند. هدف از توسعه مدل رتبه‌کاسته، کاهش پیچیدگی‌های محاسباتی است. همچنین برای مطالعه جریان‌های جوی و اقیانوسی به دلیل زمان‌بر بودن داده‌برداری و یا هزینه بر بودن محاسبات آزمایشگاهی، روش رتبه‌کاسته پیشنهاد شده‌است. یکی از الگوهای پرکاربرد برای توسعه‌ی مدل رتبه‌کاسته روش تجزیه مود دینامیکی می‌باشد. در مطالعه حاضر، معادله انتقال ورتیسیتی باروتروپیک به عنوان یک مدل اقیانوسی شبه‌ژئوستروفیک با استفاده از مدل رتبه‌کاسته معادله‌محور مبتنی بر تجزیه مود دینامیکی، با حفظ ویژگی‌های ذاتی مسئله توسعه یافته است. با ترکیب مدل رتبه‌کاسته معادله‌محور با یک روش اساساً داده‌محور که همان روش تجزیه مود دینامیکی است، مدل‌سازی به مراتب از دقت بالاتری برخوردار خواهد بود. از چالش‌های مهم در توسعه مدل‌های رتبه‌کاسته، می‌توان به ناپایداری مدل در اثر حذف تعدادی از مودها و ناپایداری ذاتی شماری از

اصلاح و دینامیک حاکم بر مسئله را به درستی پیش‌بینی کند. برای مراجعه آسان‌تر به معادلات پایداری سازی، در جدول ۵، روابط مربوط به آنها آورده شده‌است:

در شکل ۵ بین تغییرات زمانی بخش حقیقی ضرایب مودال حاصل از مدل رتبه‌کاسته استاندارد، مدل رتبه‌کاسته اصلاح شده با روش‌های پایداری سازی و داده‌های حل دقیق مقایسه انجام شده که نتایج پایداری سازی انحراف قابل توجهی با داده‌های حل دقیق دارد. در شکل ۶ مقایسه تغییرات زمانی بخش موهومی ضرایب مودال حاصل از مدل رتبه‌کاسته استاندارد، مدل رتبه‌کاسته اصلاح شده با روش‌های پایداری سازی و داده‌های حل دقیق صورت گرفته‌است. همانطور که مشاهده می‌شود روش پایداری سازی نتوانسته دینامیک حاکم بر جریان را به درستی پیش‌بینی کند.

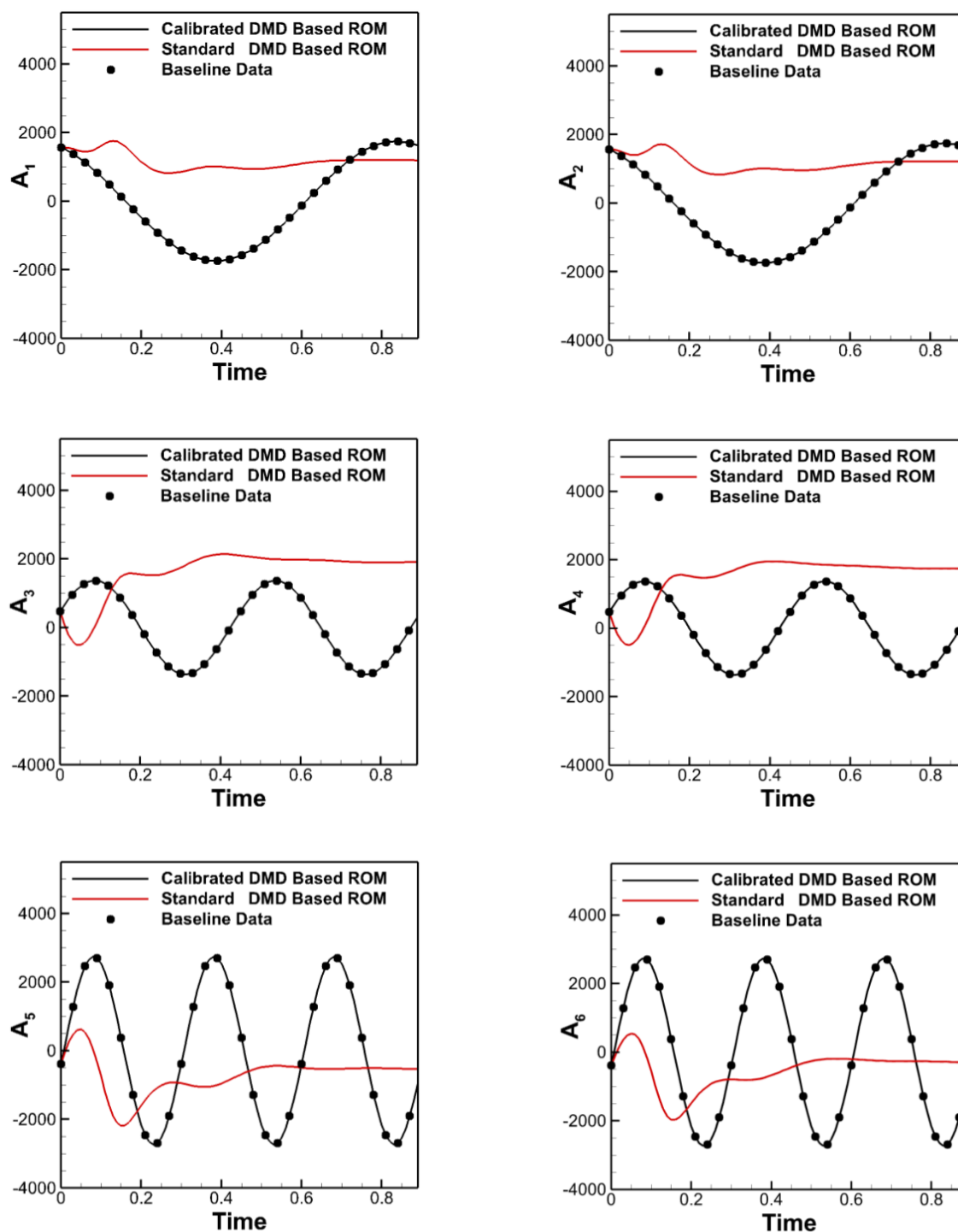
۱۰-۲- اصلاح مدل رتبه‌کاسته مبتنی بر روش تجزیه مود دینامیکی

در این بخش به بررسی و مقایسه نتیجه‌های بدست‌آمده از روش اصلاح مدل رتبه‌کاسته مبتنی بر تجزیه مود دینامیکی پرداخته می‌شود. این روش با به حداقل رساندن خطاهای بین داده‌های استاندارد با حل دقیق، موجب پایداری و انطباق بیشتر پاسخ‌های مدل با نتایج حاصل از حل دقیق می‌شود. به منظور ارزیابی صحت نتیجه‌های حاصل از مدل استاندارد و مدل اصلاح‌شده، با داده‌های حاصل از مدل شبیه‌سازی عددی مستقیم مقایسه شده‌اند. در شکل ۷ و شکل ۸ به ترتیب مقایسه بین مدل اصلاح‌شده، مدل رتبه‌کاسته استاندارد و شبیه‌سازی عددی مستقیم، در تحلیل دامنه تغییرات زمانی بخش حقیقی و موهومی ضرایب مودال صورت گرفته‌است. همانطور که از نتایج مشخص است، با بهره‌گیری از روش اصلاح مدل رتبه‌کاسته پایداری نتایج حاصل از مدل در زمان‌های مختلف نیز به خوبی حاصل شده و مدل حاصل دارای دقت مناسب برای پیش‌بینی دینامیک حاکم بر مسئله خواهد بود.



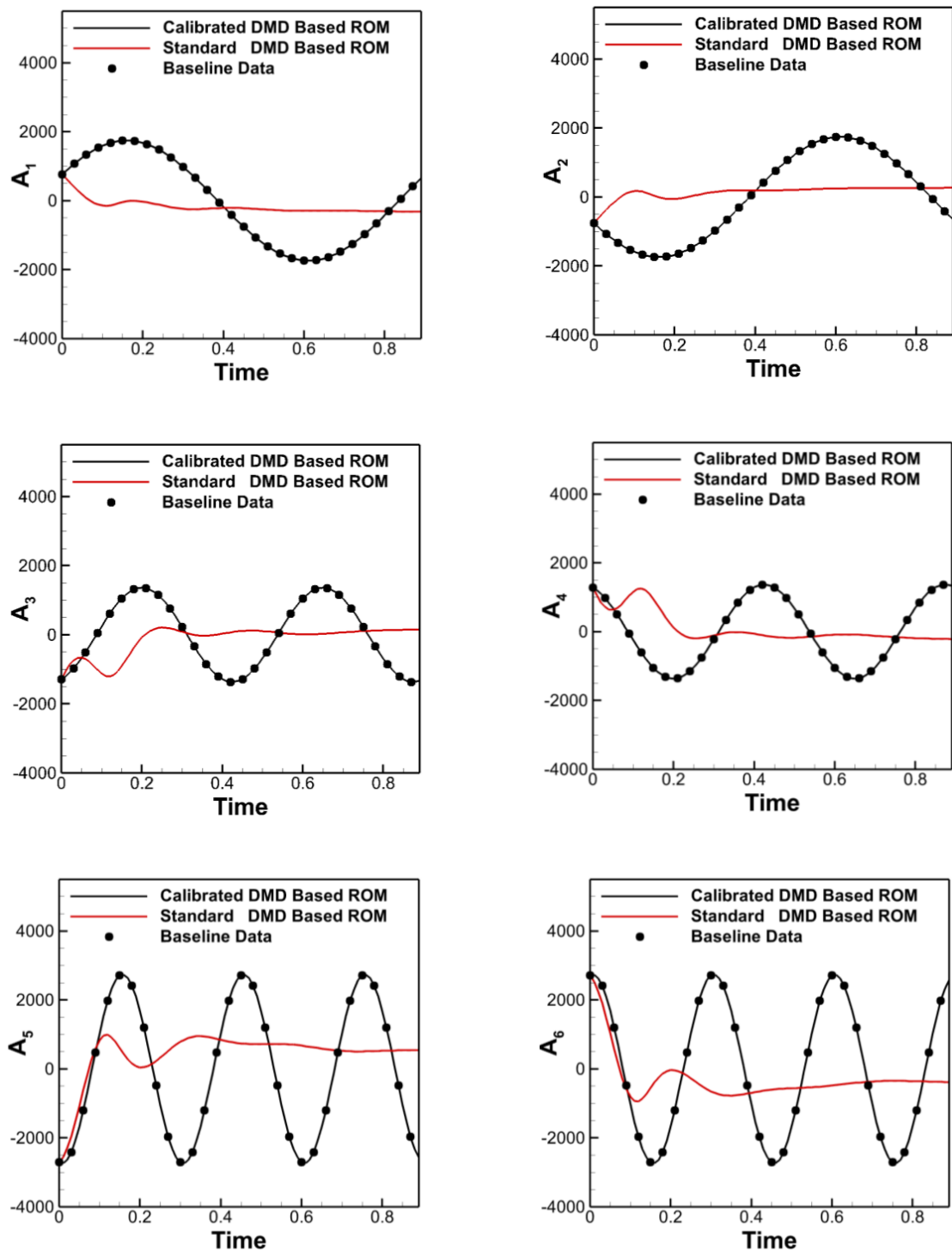
شکل ۶. مقایسه تغییرات زمانی بخش موهومی ضرایب مودال حاصل از مدل رتبه کاسته استاندارد، مدل رتبه کاسته اصلاح شده با روش‌های پایدارسازی و داده‌های حل دقیق.

Fig. 6. Comparison of time variations of the imaginary part of modal coefficients obtained from the standard Reduced Order Model, the modified Reduced Order Model with stabilization methods and exact solution data.



شکل ۷. مقایسه بین مدل اصلاح شده، مدل رتبه کاسته استاندارد و شبیه سازی عددی مستقیم در پیش بینی دامنه تغییرات زمانی بخش حقیقی ضرایب مودال.

Fig. 7. Comparison between the Calibrationed model, the standard Reduced Order Model, and direct numerical simulation in predicting the amplitude of time variations of the real part of modal coefficients.



شکل ۸. مقایسه بین مدل اصلاح شده، مدل رتبه کاسته استاندارد و شبیه سازی عددی مستقیم در پیش بینی دامنه تغییرات زمانی بخش موهومی ضرایب مودال.

Fig. 8. Comparison between the Calibration model, the standard Reduced Order Model, and direct numerical simulation in predicting the amplitude of time variations of the imaginary part of modal coefficients.

جدول ۶. خطا متوسط بین نتایج حاصل از مدل رتبه‌کاسته اصلاح شده و شبیه‌سازی عددی مستقیم برای بخش حقیقی ضرایب مودال.

Table 6. Average error between the results from the modified Reduced Order Model and direct numerical simulation for the real part of the modal coefficients.

خطا	ضریب مودال
$1/6 \times 10^{-13}$	a_1
$1/14 \times 10^{-13}$	a_2
$6/65 \times 10^{-14}$	a_3
$2/7 \times 10^{-13}$	a_4
$2/9 \times 10^{-13}$	a_5
$1/96 \times 10^{-13}$	a_6

منابع

- [1] J.L. Reid, A.W. Mantyla, The effect of the geostrophic flow upon coastal sea elevations in the northern North Pacific Ocean, *Journal of geophysical research*, 81(18) (1976) 3100–3110.
- [2] M. Fallahi, M.S. Sadrinasab, Calculation of Geostrophic Current in North Atlantic Ocean, *Hydrophysics*, 3(1) (2017) 11–19. (In Persian)
- [3] H.A. Kafiabad, M.A. Savva, J. Vanneste, Diffusion of inertia-gravity waves by geostrophic turbulence, *Journal of Fluid Mechanics*, 869 (2019) R7.
- [4] A. Ghadami, B.I. Epureanu, Data-driven prediction in dynamical systems: recent developments, *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, 380(2229) (2022) 20210213.
- [5] J.-B.J. Fourier, *Series de Fourier*, Paris: sn, 1811 (1807).
- [6] Y. Liang, H. Lee, S. Lim, W. Lin, K. Lee, C. Wu, Proper orthogonal decomposition and its applications—Part I: Theory, *Journal of Sound and vibration*, 252(3) (2002) 527–544.
- [7] K. Karhunen, Zur spektraltheorie stochastischer prozesse, *Ann. Acad. Sci. Fennicae, AI*, 34 (1946).
- [8] J.L. Lumley, The structure of inhomogeneous turbulent

مودها اشاره کرد. این موضوع سبب کاهش پایداری پاسخ سیستم دینامیکی حاکم بر مسئله شده و ممکن است رفتار سیستم به سمت واگرایی پیش رود. به منظور پایداری‌سازی مدل رتبه‌کاسته از رویکردی مشابه با مفهوم لزجت گردابه‌ای مشابه با آنچه در مدل‌سازی جریان‌های آشفته بکار می‌رود، بهره برده‌است. این کار با اضافه شدن ترم‌هایی جدید به عبارت‌های خطی و ثابت مدل رتبه‌کاسته انجام می‌گیرد. نتایج حاصل از پژوهش نشان دادند که استفاده از ترم پایداری‌سازی به تنهایی نمی‌تواند سبب رفع خطای مدل رتبه‌کاسته در پیش‌بینی دقیق دینامیک حاکم بر جریان شود. لیکن مدل اصلاح‌شده که بر اساس کمینه‌سازی خطای بین گرادیان تغییرات زمانی ضرایب مودال مدل رتبه‌کاسته و داده‌های دقیق، توسعه یافته، می‌تواند با دقت بسیار بالاتری تغییرات زمانی میدان جریان را محاسبه کند. بر اساس تحلیل‌های صورت گرفته، از مهم‌ترین دست‌آوردهای این پژوهش می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

- ۱) مطالعه برای بکارگیری روش‌های مختلف پایداری‌سازی مدل رتبه‌کاسته جریان شبه ژئوستروفیک مبتنی بر معادله انتقال ورتیسیته باروتروپیک
- ۲) استفاده از مدل بهینه‌سازی شده مبتنی بر کمینه‌سازی خطای موجود بین پیش‌بینی مدل رتبه‌کاسته و داده‌های حل دقیق
- ۳) کاهش چشمگیر زمان محاسبات مدل رتبه‌کاسته اصلاح‌شده در مقایسه با داده‌های حاصل از حل دقیق، در عین دقت بالای بازسازی الگوهای جریان

- current problem by a gappy-POD approach, IEEE Transactions on Magnetics, 54(12) (2018) 1–8.
- [19] F.J. Salvador, M. Carreres, J. García-Tiscar, M. Belmar-Gil, Modal decomposition of the unsteady non-reactive flow field in a swirl-stabilized combustor operated by a Lean Premixed injection system, Aerospace Science and Technology, 112 (2021) 106622.
- [20] O. San, T. Iliescu, A stabilized proper orthogonal decomposition reduced-order model for large scale quasigeostrophic ocean circulation, Advances in Computational Mathematics, 41(5) (2015) 1289–1319.
- [21] M. Moayyedi, Calibration of Reduced Order POD Model of Unsteady Incompressible Laminar Flow Using Pressure Representation as a Function of Velocity Field Modes, (2018). (In Persian)
- [22] M.K. Moayyedi, F. Bigdeloo, F. Sabaghzadeghan, Stabilization of Reduced Order Model for Convection-Diffusion Problems Based on Dynamic Mode Decomposition at High Reynolds Numbers Using Eddy Viscosity Approach, Amirkabir Journal of Mechanical Engineering, 54(11) (2023) 2479–2498. (In Persian)
- [23] M.K. Moayyedi, Z. Khakzari, F. Sabaghzadeghan, Studying the Effect of Eddy Viscosity Closure on the Calibration of the DMD based Reduced-order Model to Predict the Long-term Behavior of Convection-Diffusion Equations, Fluid Mechanics & Aerodynamics, 11(1) (2022) 83–96. (In Persian)
- [24] A. Arakawa, Computational design for long-term numerical integration of the equations of fluid motion: Two-dimensional incompressible flow. Part I, Journal of computational physics, 135(2) (1997) 103–114.
- [25] R. Maulik, O. San, Dynamic modeling of the horizontal eddy viscosity coefficient for quasigeostrophic ocean circulation problems, Journal of Ocean Engineering and Science, 1(4) (2016) 300–324.
- [26] O. San, A.E. Staples, Z. Wang, T. Iliescu, Approximate deconvolution large eddy simulation of a barotropic ocean circulation model, Ocean Modelling, 40(2) (2011) 120–132.
- flows, Atmospheric turbulence and radio wave propagation, (1967) 166–178.
- [9] L. Sirovich, M. Kirby, Low-dimensional procedure for the characterization of human faces, Journal of the Optical Society of America A, 4(3) (1987) 519–524.
- [10] M.K. Moayyedi, F. Sabaghzadeghan, Development of parametric and time dependent reduced order model for diffusion and convection-diffusion problems based on proper orthogonal decomposition method, Amirkabir Journal of Mechanical Engineering, 53(7) (2021) 4241–4260. (In Persian)
- [11] M. Moayyedi, F. Sabetghadam, M. Taeibi-Rahni, Calibrated Low-dimensional POD Dynamical Model for Simulation of Unsteady Incompressible Flows, Fluid Mechanics and Aerodynamics Journal, 1(1) (2021) 29–39. (In Persian)
- [12] C. Ooi, Q.T. Le, M.H. Dao, V.B. Nguyen, H.H. Nguyen, T. Ba, Modeling transient fluid simulations with proper orthogonal decomposition and machine learning, International Journal for Numerical Methods in Fluids, 93(2) (2021) 396–410.
- [13] J. Higham, M. Shahnam, A. Vaidheeswaran, Using a proper orthogonal decomposition to elucidate features in granular flows, Granular Matter, 22(4) (2020) 86.
- [14] W. Edwards, L.S. Tuckerman, R.A. Friesner, D. Sorensen, Krylov methods for the incompressible Navier-Stokes equations, Journal of computational physics, 110(1) (1994) 82–102.
- [15] R.B. Lehoucq, Implicitly restarted Arnoldi methods and subspace iteration, SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications, 23(2) (2001) 551–562.
- [16] P.J. Schmid, Dynamic mode decomposition and its variants, Annual Review of Fluid Mechanics, 54(1) (2022) 225–254.
- [17] P.J. Baddoo, B. Herrmann, B.J. McKeon, J. Nathan Kutz, S.L. Brunton, Physics-informed dynamic mode decomposition, Proceedings of the Royal Society A, 479(2271) (2023) 20220576.
- [18] M.R. Hasan, L. Montier, T. Henneron, R.V. Sabariego, Stabilized reduced-order model of a non-linear eddy

- in large-scale neural recordings using dynamic mode decomposition, *Journal of neuroscience methods*, 258 (2016) 1–15.
- [35] E. Berger, M. Sastuba, D. Vogt, B. Jung, H. Ben Amor, Estimation of perturbations in robotic behavior using dynamic mode decomposition, *Advanced Robotics*, 29(5) (2015) 331–343.
- [36] J. Grosek, J.N. Kutz, Dynamic mode decomposition for real-time background/foreground separation in video, arXiv preprint arXiv:1404.7592, (2014).
- [37] J. Mann, J.N. Kutz, Dynamic mode decomposition for financial trading strategies, *Quantitative Finance*, 16(11) (2016) 1643–1655.
- [38] N. Aubry, P. Holmes, J.L. Lumley, E. Stone, The dynamics of coherent structures in the wall region of a turbulent boundary layer, *Journal of fluid Mechanics*, 192 (1988) 115–173.
- [39] D. Rempfer, Kohärente Strukturen und Chaos beim laminar-turbulenten Grenzschichtumschlag, Universität Stuttgart, 1991.
- [40] O. San, T. Iliescu, Proper orthogonal decomposition closure models for fluid flows: Burgers equation, arXiv preprint arXiv:1308.3276, (2013).
- [27] P.J. Schmid, Dynamic mode decomposition of numerical and experimental data, *Journal of fluid mechanics*, 656 (2010) 5–28.
- [28] C.W. Rowley, I. Mezić, S. Bagheri, P. Schlatter, D.S. Henningson, Spectral analysis of nonlinear flows, *Journal of fluid mechanics*, 641 (2009) 115–127.
- [29] B.O. Koopman, Hamiltonian systems and transformation in Hilbert space, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 17(5) (1931) 315–318.
- [30] I. Mezić, Spectral properties of dynamical systems, model reduction and decompositions, *Nonlinear Dynamics*, 41(1) (2005) 309–325.
- [31] I. Mezić, Analysis of fluid flows via spectral properties of the Koopman operator, *Annual review of fluid mechanics*, 45(1) (2013) 357–378.
- [32] S. Bagheri, Koopman-mode decomposition of the cylinder wake, *Journal of Fluid Mechanics*, 726 (2013) 596–623.
- [33] J.L. Proctor, P.A. Eckhoff, Discovering dynamic patterns from infectious disease data using dynamic mode decomposition, *International health*, 7(2) (2015) 139–145.
- [34] B.W. Brunton, L.A. Johnson, J.G. Ojemann, J.N. Kutz, Extracting spatial-temporal coherent patterns

چگونه به این مقاله ارجاع دهیم

M. K. Moayyedi, Z. Sadat Khakzari, *Studying Stabilization Methods for Calibrating a Reduced-Order Model of Single-Layer Quasi-Geostrophic Ocean Circulation Based on Dynamic Mode Decomposition*, *Amirkabir J. Mech Eng.*, 57(7) (2025) 939-962.

DOI: [10.22060/mej.2025.24431.7871](https://doi.org/10.22060/mej.2025.24431.7871)

