

شبیه‌سازی سقوط دو ذره صلب دایروی در کانال عمودی: ترکیب روش مرز غوطه‌ور - شبکه بولتزمن و روش اجزا گسسته

بهروز افرا، محسن نظری^{*}، محمدحسن کیهانی

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، ایران

تاریخچه داوری:

دریافت: ۲۴ بهمن ۱۳۹۵
بازنگری: ۷ اردیبهشت ۱۳۹۶
پذیرش: ۱۷ اردیبهشت ۱۳۹۶
ارائه آنلاین: ۲۷ اردیبهشت ۱۳۹۶

کلمات کلیدی:

مرز غوطه‌ور - شبکه بولتزمن
الگوریتم اعمال نیروی چندمرحله‌ای
المان گسسته
سقوط دو ذره

چکیده: در این مطالعه، روش مرز غوطه‌ور [۱] شبکه بولتزمن به عنوان حلگر ناحیه سیال با روش اجزا گسسته به عنوان شبیه ساز برخورد ذرات ترکیب می‌شود. حاصل این ترکیب ایجاد مدل عددی توانمند خواهد بود که قادر به تحلیل جریانهای ذره‌ای با دقت مرتبه دو می‌باشد. در روش اجزا گسسته جهت تحلیل نیروی برخورد، به دو ذره اجازه داده می‌شود که در یکدیگر نفوذ کنند که این امر باعث ایجاد یک مدل واقع‌تری از برخورد نسبت به مدل‌های قبلی می‌شود. روش ترکیبی ذکر شده به طور جداگانه با شبیه سازی برخورد خشک (عدم حضور سیال) دو ذره صلب و همچنین شبیه سازی سقوط تک ذره صلب دایروی در یک کانال عمودی صحت سنجی می‌شود. در نهایت سقوط دو ذره صلب دایروی در کانال عمودی مورد مطالعه قرار خواهد گرفت و تأثیر پارامترهای فیزیکی مؤثر بر رفتار ذرات در حین برخورد، نظیر میزان صلیبیت، ضریب بازگشت و اصطکاک بر نتایج بررسی می‌شود. در فصل نتایج نشان داده شده است که ضریب اصطکاک باعث افزایش مدت زمان کسینگ می‌شود که در نتیجه باعث ایجاد تغییرات قابل توجهی در مسیر حرکت ذرات خواهد شد. همینطور نشان داده شد، که در این فیزیک خاص، ضریب بازگشت تأثیر چندانی بر رفتار ذرات حین برخورد نخواهد داشت.

۱- مقدمه

شناخته شده است [۲ و ۱]. معادلات شبکه بولتزمن یک معادله جنبشی (حرکتی) تابع توزیع ذرات است که در فضای منتظم کارترین گسسته شده است. در هر نقطه کارترین، تابع توزیع قادر به بیان پارامترهای هیدرودینامیکی جریان مانند چگالی و سرعت است. خصوصیت مشترک روش شبکه بولتزمن و روش مرز غوطه‌ور در استفاده از شبکه ساده‌ی کارترین، میل ترکیب این دو روش را تحت عنوان روش ترکیبی مرز غوطه‌ور - شبکه بولتزمن برای محققان به وجود می‌آورد. با جایگزینی معادله نویر استوکس توسط معادلات شبکه بولتزمن، تقریباً تمامی موارد بحث شده در ترکیب معادله نویر استوکس و روش مرز غوطه‌ور، بر روی روش شبکه بولتزمن قابل استفاده و قابل نگاشت است.

فنگ و میخیلیدز [۳] برای اولین بار روش مرز غوطه‌ور - شبکه بولتزمن را مطرح کردند. روش آن‌ها بر مبنای روش مرز غوطه‌ور بازگشتی ارائه شده توسط لای و پسکین [۴] ارائه شد، با این تفاوت که آن‌ها به جای حل معادله نویر استوکس، معادلات بولتزمن را وارد حل میدان جریان کردند. مدت‌ها بعد آن‌ها رویکرد ترکیبی خود را با روش اعمال نیروی مستقیم و در قالب الگوریتم واسطه دیفیوز صریح مطرح کردند [۵] و توانستند جریان حاوی ذرات را در فضای سه‌بعدی شبیه‌سازی کنند. با این وجود آن‌ها برای محاسبه نیروی

بررسی ته‌نشینی و سقوط ذرات دارای کاربردهای وسیعی در حوزه صنعتی و علوم طبیعی می‌باشد. برای بیان چند نمونه از آنها می‌توان به حرکت ریزگردها در لایه‌های مختلف اتمسفر، ته‌نشینی ذرات صلب در هنگام تصفیه آب و نفوذ دی اکسید کربن از سطح آب به اعماق دریا اشاره کرد. از طرفی به منظور پیش‌بینی دقیق رفتار ذرات غوطه‌ور در جریان، باید یک پیش‌زمینه اساسی در مورد انواع روش‌های برخورد ذرات و نقاط ضعف و قوت آن‌ها داشته باشیم. تئوری کلاسیک و قدیمی لوبریکاسیون نیرویی متناسب با عکس فاصله بین دو ذره تعریف می‌کند؛ بنابراین با کاهش فاصله ذرات، این نیرو به سمت بی‌نهایت میل کرده که مانع لمس کردن ذرات می‌شود. به‌طور کلی، هیچ نوع فرمول و روش عددی برای تحلیل فاصله بسیار باریک‌بین ذرات وجود ندارد؛ بنابراین به مدل‌های دیگری جهت شبیه سازی برخورد نیاز است.

به‌منظور سادگی و بهره‌وری، روش شبکه بولتزمن به‌طور گسترده در شبیه‌سازی جریان‌های پیچیده‌ی تک فاز و دو فاز استفاده می‌شود. به همین دلیل در سال‌های اخیر به‌عنوان پرکاربردترین جایگزین معادله نویر استوکس

برخورد الاستیک بین دو سیلندر دایروی را در جریان ویسکوز مورد مطالعه قرار دادند. مطالعات قبلی نشان می‌دهد ذرات هیچ‌گونه برخوردی با یکدیگر نخواهند داشت و محاسبه نیروی برخورد زمانی آغاز می‌شود که فاصله بین دو ذره از یک مقدار بحرانی کمتر شود. به‌منظور شبیه‌سازی صحیح برخورد دو ذره صلب این مقدار بحرانی برابر اندازه یک واحد المان شبکه باشد که توسط گلووینسکی و همکاران [۱۹] گزارش شده است. اردکانی و همکاران [۲۰] مدلی پیشنهاد کردند که در آن سرعت ذرات در حین برخورد تغییری پیدا نکرده و نیروی برخورد یکجا و بدون در نظر گرفتن میزان نفوذ ذرات به هم حساب می‌شود. آن‌ها با این روش توانستند ناپایداری‌های عددی موجود در روش‌های قبلی را کاهش دهند. گلووینسکی و همکاران [۲۱] با ارائه مدلی تحت عنوان روش اجزا گسسته^۱ اجازه دادند تا دو ذره در یکدیگر نفوذ کنند و نیروی محاسبه‌شده به‌صورت تابعی از میزان فرورفتگی ذرات در یکدیگر محاسبه می‌شود. همچنین در روش آن‌ها هیچ‌گونه محدودیتی برای شکل ذره وجود ندارد. بحث‌های اولیه این روش توسط کوندال و استراک در سال ۱۹۷۹ [۲۲] مطرح شد. ما در این مطالعه جهت شبیه‌سازی برخورد ذرات از این روش استفاده خواهیم کرد. بخش اعظم استراتژی ذکرشده در ادامه این قسمت مربوط به کار واچس و همکاران است [۲۳ و ۲۴]. در این مطالعه برای نخستین بار روش مرز غوطه‌ور - شبکه بولتزن با روش اجزا گسسته ترکیب و برای شبیه‌سازی جریان‌های حاوی ذرات به کار می‌رود. همچنین پدیده درفتینگ، کیسینگ و تامبلینگ^۲ برای نخستین بار با استفاده از این روش ترکیبی مدل‌سازی و اثر پارامترهای فیزیکی بر رفتار ذرات مورد مطالعه قرار می‌گیرد.

۲- روش‌های عددی

در این قسمت روش‌های عددی تکراری مبتنی بر روش مرز غوطه‌ور - شبکه بولتزن - شبکه فنر ارائه می‌شود.

۲-۱- روش شبکه بولتزن

در این روش معادلات حاکم توسط توابع توزیع چگالی ذره f_i بیان می‌شوند. که یک سطح از معادلات نویر استوکس در مقیاس بین ماکرو و میکرو را نشان می‌دهد. معادله شبکه بولتزن با زمان آسایش منفرد برای میدان سیال با عبارت نیرویی خارجی (به دلیل وجود مرز جامد) در بعد زمان (t) و مکان (\vec{r}) به‌صورت زیر گسسته‌سازی می‌شود:

$$f_i(\vec{r} + \vec{e}_i \delta t, t + \delta t) = f_i(\vec{r}, t) - \tau^{-1} [f_i(\vec{r}, t) - f_i^{eq}(\vec{r}, t)] + F_i(\vec{r}, t) \delta t \quad (1)$$

که \vec{e}_i بردار سرعت ذره در جهت i ام شبکه است. در کار حاضر از مدل شبکه بولتزن دوبعدی با نه جهت سرعت مستقل (D_2Q_9) استفاده شده

مرزی از معادله نویر استوکس استفاده کردند. نیو و همکاران [۶] هم نوع دیگر از روش ترکیبی مطرح‌شده در بالا با الگوریتم دیفیوز صریح را توسعه دادند که روش مبادله مومنتوم مبتنی بر روش مرز غوطه‌ور - شبکه بولتزن نامیده می‌شود. در این روش، به‌جای حل معادله نویر استوکس برای محاسبه نیروی مرزی، آن‌ها از قاعده بازگشت به عقب شبکه بولتزن استفاده کردند که برای دیواره‌های جامد جهت ارضای شرط مرزی عدم لغزش کاربرد دارد. باید توجه کرد که به‌کارگیری این روش اعمال نیرو، مانند مدل پیشنهادشده در نوع اول [۵] از دقت مرتبه دوم برخوردار نیست. دوپوس و همکاران [۷] نوعی دیگر از روش ترکیبی بالا پیشنهاد کردند که نیاز به حل معادله نویر استوکس برای اندازه‌گیری چگالی نیروی مرزی ندارد. مدل آنها به‌عنوان اولین مدل بی‌نیاز از معادله نویر استوکس و به‌طور کامل وابسته به معادلات بولتزن معرفی شد؛ زیرا برای محاسبه نیروی مرزی به‌گونه‌ای از معادلات بولتزن کمک گرفتند که دقت بالایی موجود در حل میدان جریان برای مقدار نیروی محاسبه‌شده نیز پدیدار می‌شود. آن‌ها الگوریتم‌های واسط دیفیوز صریح و شارپ را برای تحلیل جریان عبوری از روی یک سیلندر نوسانی در رژیم آرام به کار بردند.

در مقابل، برخی محققان [۹ و ۸] روش مرز غوطه‌ور - شبکه بولتزن با روش اعمال نیروی مستقیم را مبتنی بر مدل اعمال نیروی چندمرحله‌ای پیشنهاد کردند. برای اولین بار، روش اعمال نیروی چندمرحله‌ای توسط جیو و همکاران [۱۰] مطرح شد. اتخاذ این روش همراه با مدل‌های ترکیبی مطرح‌شده در قسمت‌های قبل نه تنها دقت مرتبه دوم در محاسبه‌ی نیرو را بازیابی می‌کند، بلکه موجب افزایش دقت بیشتری در استفاده از الگوریتم‌های واسط می‌شود. کنگ و حسن [۸] از الگوریتم صریح دیفیوز استفاده کردند تا جریان ذره‌ای ایستا و متحرک را شبیه‌سازی کنند. درحالی‌که وو و شو [۹]، شو و همکاران [۱۱] و لی و همکاران [۱۲] از روش دیفیوز ضمنی برای حل مرزهای پیچیده در جریان استفاده کردند.

به‌منظور پیش‌بینی دقیق رفتار ذرات غوطه‌ور در جریان، باید یک پیش‌زمینه اساسی در مورد انواع روش‌های برخورد ذرات و نقاط ضعف و قوت آن‌ها داشته باشیم. تئوری کلاسیک و قدیمی لوپریکاسیون نیرویی متناسب با عکس فاصله بین دو ذره تعریف می‌کند؛ بنابراین با کاهش فاصله ذرات، این نیرو به سمت بی‌نهایت میل کرده که مانع لمس کردن ذرات می‌شود. به‌طور کلی، هیچ نوع فرمول و روش عددی برای تحلیل فاصله بسیار باریک بین ذرات وجود ندارد [۱۳]؛ بنابراین به مدل‌های دیگری جهت شبیه‌سازی برخورد نیاز است.

داویس [۱۴] یک مدل غلغشی - لغزشی و غلغشی - چرخشی برای حرکت کره‌های چسبان به یکدیگر ارائه کرد و نشان داد که مدل غلغشی - لغزشی دارای تطابق بیشتری با نتایج تجربی است. اوایل و همکاران [۱۵ و ۱۶] از مدل غلغش - لغزشی برای مطالعه برخورد دو کره مغروق در سیال استفاده کردند. ژانر و همکاران [۱۷] برخورد یک کره به کره ثابت دیگر را در جریان آرام بررسی کردند. این و همکاران [۱۸] با استفاده از روش شبکه بولتزن

¹Discrete Element Method (DEM)

²Drafting, Kissing and Tumbling (DKT)

• **نخستین مرحله: اعمال نیرو اولیه**

$$\rho(\vec{r}, t)u(\vec{r}, t) = \sum_i \vec{e}_i f_i(\vec{r}, t) + \frac{\delta t}{2} F_i(\vec{r}, t) \quad (۸)$$

• **دومین مرحله: برخورد**

$$f_i(\vec{r}, t) = f_i(\vec{r}, t) - \tau^{-1} [f_i(\vec{r}, t) - f_i^{eq}(\vec{r}, t)] \quad (۹)$$

• **سومین مرحله: اعمال نیرو ثانویه**

$$f_i(\vec{r}, t) = f_i(\vec{r}, t) + F(\vec{r}, t) \delta t \quad (۱۰)$$

• **چهارمین مرحله: جاری شدن**

$$f_i(\vec{r} + \vec{e}_i \delta t, t + \delta t) = f_i(\vec{r}, t + \delta t) \quad (۱۱)$$

۲-۲- روش مرز غوطه‌ور

برای اعمال شرط مرزی عدم لغزش بر روی مرز جامد باید سرعت سیال با سرعت مرز یکی باشد. در اینجا جهت ارضای این شرط از روش مرز غوطه‌ور با اعمال نیروی مستقیم استفاده شده است. شکل ۱ نشان می‌دهد که در این روش نیازی به هم‌پوشانی نقاط مرزی (لاگرانژی) و نقاط سیال (اویلری) نیست. در این روش ابتدا سرعت سیال بر روی نقاط مرزی میانبایی شده و نیروی اندرکنش مرزی محاسبه می‌شود. سپس این نیروی بر روی نقاط اویلری اطراف پخش و به معادلات حرکتی سیال اضافه می‌شود.

با اعمال نیروی چندمرحله‌ای پیشنهادشده، الگوریتم اعمال نیروی مستقیم به صورت زیر خواهد بود [۲۵]:

$$\vec{F}(\vec{r}_b, t + \delta t) = \rho \frac{\vec{U}_b^{desire} - \vec{u}_b^{nof}(\vec{r}_b, t + \delta t)}{\delta t / 2} \quad (۱۲)$$

که \vec{U}_b^{desire} سرعت موردنظر مسأله بر روی مرز که در اینجا برابر صفر و \vec{u}_b^{nof} سرعت میانبایی شده نقاط اویلری بر روی نقاط لاگرانژی قبل از اعمال نیرو و \vec{r}_b موقعیت نقاط لاگرانژی می‌باشد. معادله بالا با استفاده از ترکیب روش مرز غوطه‌ور-اعمال نیروی مستقیم- شبکه بولتزمن با اعمال نیروی چندمرحله‌ای محاسبه شده است که در اینجا از ذکر جزئیات صرف نظر شده است. سرعت $\vec{u}_b^{nof}(\vec{r}_b, t + \delta t)$ با استفاده از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\vec{u}_b^{nof} = \sum_{b=1}^n \vec{u}^{nof}(\vec{r}_{ij}, t) D(\vec{r}_{ij} - \vec{r}_b) \quad (۱۳)$$

که D و \vec{r}_{ij} به ترتیب تابع میانبایی و مکان نقاط اویلری می‌باشد. نیرو پس از محاسبه توسط معادله (۱۲) بر روی نودهای اویلری مجاور توسط معادله زیر توزیع می‌شود:

است. تابع توزیع گسسته نیروی خارجی در جهت i ام و τ زمان آسایش منفرد مرتبط با معادلات جریان سیال است. سرعت‌هایی گسسته در ۹ جهت به صورت زیر معرفی می‌شود:

$$\vec{e}_i = c \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (۲)$$

که $c = \delta x / \delta t$ برابر سرعت شبکه بولتزمن است و δx اندازه شبکه و δt گام زمانی است. تابع توزیع تعادلی $f_i^{(eq)}$ در حالت دوبعدی برابر مقدار زیر تعریف می‌شود:

$$f_i^{eq} = w_i \rho \times \left[1 + \frac{3}{c^2} (\vec{e}_i \cdot \vec{u}) + \frac{9}{2c^4} (\vec{e}_i \cdot \vec{u})^2 - \frac{3}{2c^2} \vec{u} \cdot \vec{u} \right] \quad (۳)$$

که $w_0 = 4/9$ و $w_{1,4} = 1/9$ و $w_{5,8} = 1/36$. همچنین توزیع نیرویی گسسته به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$F_i(\vec{r}, t) = \left(1 - \frac{1}{2\tau} \right) w_i \times \left[3 \frac{\vec{e}_i \cdot \vec{u}(\vec{r}, t)}{c^2} + 9 \frac{\vec{e}_i \cdot \vec{u}(\vec{r}, t)}{c^4} - \vec{e}_i \right] \cdot \vec{F}(\vec{r}, t) \quad (۴)$$

که $F_i(\vec{r}, t)$ عبارت مربوط به چگالی نیرویی است. متغیرهای چگالی ρ سرعت در واحد جرم e به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\rho = \sum_i f_i = \sum_i f_i^{eq} \quad (۵)$$

$$\rho \vec{u} = \sum_i \vec{e}_i f_i + \frac{\delta t}{2} \vec{F} \quad (۶)$$

علاوه بر این با استفاده از بسط چاپمن-اینسکاک، ویسکوزیته سیال ν به طریق زیر محاسبه خواهد شد:

$$\tau = c_s^2 \left(\tau - \frac{1}{2} \right) \delta t \quad (۷)$$

برای رسیدن به دقت بالاتر خصوصاً در جریان‌های غیریکنواخت و غیر دائم، یک روش شبکه بولتزمن با اعمال نیروی چندمرحله‌ای توسط گو و همکاران [۲۲] پیشنهاد شده است. تفاوت بین روش شبکه بولتزمن با اعمال نیروی یک مرحله‌ای و چندمرحله‌ای بدین گونه معرفی می‌شود که در اعمال نیروی یک مرحله‌ای، یک‌ذره در دو گام زمانی t و $t + \delta t$ به ترتیب تحت اثر توابع نیرویی $\vec{F}(\vec{r}, t)$ و $\vec{F}(\vec{r}, t + \delta t)$ قرار گرفته که به واسطه آن از نقطه ۱ تا ۲ حرکت می‌کند، اما در روش شبکه بولتزمن با اعمال نیروی چندمرحله‌ای، این دو نیرو به ترتیب در طی دو نیم گام زمانی اول و دوم اعمال می‌گردد. در واقع مومنتم همان‌طور که تحت تأثیر نیرو در زمان t است، تحت تأثیر نیرو در زمان $t + \delta t$ می‌باشد؛ بنابراین اعمال معادله شبکه بولتزمن نیرویی در چهار مرحله خلاصه می‌شود [۲۵]:

۲-۳- مدل عددی برخورد

به‌طور کلی دو نوع مدل کره سخت و کره نرم برخورد در تحلیل جریان‌های ذره‌ای وجود دارد [۲۶]. در مدل کره سخت نیروی برخورد دقیقاً در لحظه سایش دو ذره اعمال شده و هیچ‌گونه فرورفتگی در نظر گرفته نمی‌شود؛ اما در مدل کره نرم به دو جسم اجازه داده می‌شود تا حدی در یکدیگر رسوخ کرده و نیروی برخورد به‌صورت تابعی از این فرورفتگی محاسبه می‌شود. در این قسمت از روش دوم برای محاسبه نیروی اندرکنش بهره گرفته شده است. مدل‌های مختلفی از برخورد روش اجزا گسسته کره نرم در مقالات گوناگون ارائه شده است که ما در اینجا از پرکاربردترین آن‌ها که مربوط به کار پیترز و همکارش است [۲۷]، استفاده خواهیم کرد. در این قسمت، هدف ما ارائه یک روش پیشنهادی جهت اعمال نیروی برخورد برای اشکال دایروی و غیر دایروی است، بنابراین مدل ساده و قدیمی هوکین را جهت محاسبه نیروی برخورد اتخاذ کرده‌ایم. طبق این مدل نیروی برخورد کلی که ذره j به ذره i وارد می‌کند به چند نیروی مختلف تقسیم می‌شود [۲۴]:

• نیروی عمودی بازگرداننده هوکین

این نیرو تابعی خطی از میزان فرورفتگی دو جسم درهم است و انرژی دو جسم را حین برخورد تلف نمی‌کند.

$$F_{res,n}^{j \rightarrow i} = -k_n \delta_{ij} n_{ij} \quad (17)$$

که k_n ضریب سختی عمودی، δ_{ij} میزان نفوذ ذرات و n_{ij} بیانگر بردار یکه عمودی در محل فصل مشترک دو جسم که در اینجا به‌عنوان نقطه برخورد شناخته می‌شود، می‌باشد. بردار یکه نرمال برابر است با برداری عمود بر بردار مماس در نقطه برخورد. منظور از بردار مماس، برداری است که بر فصل مشترک ایجاد شده بر اثر نفوذ دو ذره در هم مماس است. نحوه یافتن فصل مشترک و نقطه برخورد در اشکال مختلف (نظیر دایره-دایره، مربع-دایره، مربع-مربع و غیره) به شیوه‌های گوناگون در مقالات مختلف بیان شده است [۲۴ و ۳۰-۲۸]. در این مطالعه که هدف برخورد ذرات دایروی است، نقطه برخورد r_c^{ij} و بردار عمود n_{ij} به شکل زیر تعریف می‌شود:

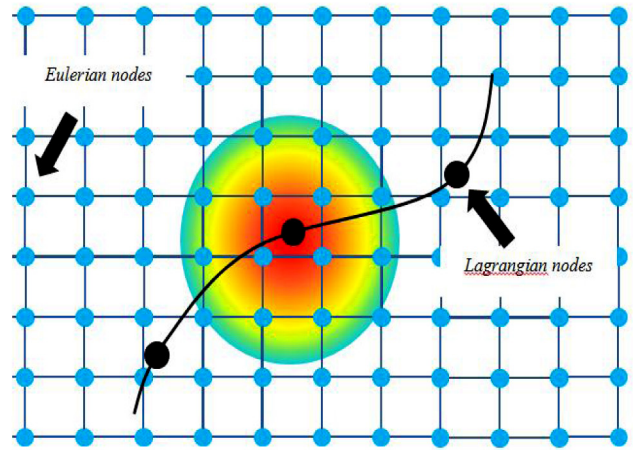
$$r_c^{ij} = \frac{r_i + r_j}{2} \quad (18)$$

$$n_{ij} = \frac{r_j - r_i}{|r_j - r_i|} \quad (19)$$

که r_i و r_j به ترتیب مرکز ذرات i و j را نشان می‌دهد.

• نیروی عمودی مستهلک کننده

این نیرو تابعی خطی از سرعت نسبی عمودی بین دو ذره برخوردکننده بوده که انرژی ذرات را در حین برخورد تلف می‌کند. در واقع انرژی جنبشی



شکل ۱: شماتیک ناحیه محاسباتی در نزدیکی مرز در روش مرز غوطه‌ور
Fig. 1. Schematic of computational domain in the vicinity of the immersed body

$$\vec{F}_{ij} = \sum_b F_b D(\vec{r}_{ij} - \vec{r}_b) \Delta S_b \quad (14)$$

در مطالعه حاضر از روش دیفیوز برای حل مسائل استفاده شده است. در الگوریتم واسط دیفیوز، مرز توسط نقاط پیوسته لاگرانژی تقسیم‌بندی شده است و دامنه جریان توسط نقاط اوپلری منطبق بر شبکه کارتیزین نمایش داده می‌شوند. از این‌رو میانجیابی توسط الگوریتم‌های واسط از گره‌های مجاور روی نقاط مرزی برای به دست آوردن نیرو و توزیع مجدد آن روی گره‌های اوپلری مجاور موردنیاز می‌باشد. در کار حاضر از تابع دلتای گسسته D چهار نقطه‌ای معرفی شده توسط پسکین [۳۱] برای تبادل نیروها و سرعت‌ها بین گره‌های اوپلری و لاگرانژی استفاده شده است.

$$D(\vec{x}_{ij} - \vec{x}_b) = \frac{1}{h^2} d_h \left(\frac{x_i - x_b}{h} \right) d_h \left(\frac{y_i - y_b}{h} \right) \quad (15)$$

با در نظر گرفتن $h=1$ و الگوریتم واسط چهار نقطه‌ای می‌توان نوشت:

$$d(r) = \begin{cases} \frac{1}{8} \left(3 - 2|\vec{r}| + \sqrt{1 + 4|\vec{r}| - 4|\vec{r}|^2} \right), 0 \leq |\vec{r}| < 1 \\ \frac{1}{8} \left(5 - 2|\vec{r}| - \sqrt{-7 + 12|\vec{r}| - 4|\vec{r}|^2} \right), 1 \leq |\vec{r}| < 2 \\ 0, |\vec{r}| \geq 2 \end{cases} \quad (16)$$

لغزشی است، بنابراین نیروی مماسی به صورت نیروی چسبندگی اعمال می شود. سپس با افزایش پیشروی و افزایش نیروی چسبندگی، نیروی اصطکاکی دارای مقداری کمتر شده و بنابراین نیروی مماسی به صورت نیروی اصطکاکی نمود پیدا می کند.

بنابراین نیروی کلی وارده به جسم i که از برخورد با ذرات مجاور خود در یک گام زمانی ایجاد می شود برابر است با:

$$F_{c,p-p}^i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n F_{res,n}^{j \rightarrow i} + F_{(damp,n)}^{j \rightarrow i} \quad (27)$$

$$+ \min(|F_{st}^{j \rightarrow i}|, |F_{sl}^{j \rightarrow i}|)$$

لازم به ذکر است در برخورد دو کره با یکدیگر، یک گشتاور بر اثر وجود نیروی مماسی به جسم وارد می شود که مقدار آن برابر است با:

$$M_{c,p-p}^i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n r_c^{ij} \times F_t^{j \rightarrow i} \quad (28)$$

۲-۴- کنترل پارامترهای روش اجزا گسسته

تاکنون روابط مربوط به نیروهای وارده به ذرات ارائه گردید که هر کدام شامل پارامترهایی است که تنها هویت آن ها شناخته شده است و بنابراین لازم است که رابطه ای بین خواص فیزیکی ماده و این پارامترها بیان شود. طبق قانون هوک و نظریه هرتز [۲۷] و با در نظر گرفتن برخورد دو کره هم جنس با شعاع R به یکدیگر، خواهیم داشت:

$$k_n = \frac{E_Y R}{3(1-\nu^2)} \quad (29)$$

که E_Y و ν برابر مدول یانگ و ضریب پواسون ذره می باشد. اگر معادله دیفرانسیل تغییرات میزان فرورفتگی دو ذره به جرم M را با صرف نظر کردن از جاذبه برحسب زمان بنویسیم، خواهیم داشت:

$$\frac{d^2 \delta}{dt^2} + 2\gamma_n \frac{d\delta}{dt} + \omega_0^2 \delta = 0 \quad (30)$$

که در این معادله $\omega_0^2 = k_n / m_{ij}$ تعریف می شود و فرض $(d\delta/dt = U_0)$ و $(t=0)$ و $(\delta=0)$ بر مسأله حاکم می باشد. U_0 نیز سرعت نسبی نرمال دو ذره می باشد. همین طور ذکر این نکته مهم است که در این معادله فرض شده است که در مرحله بعد از برخورد نیز ترم ویسکوز نیرو بر ذرات اعمال می شود. چون اساساً برخورد یک ذره دارای مرحله رفت و برگشت می باشد یا به عبارت دیگر فرض شده است که ذرات در مرحله رفت به طور کامل مستهلک نمی شوند؛ بنابراین شرط $\omega_0 > \lambda_n$ حاکم است. ما در اینجا با نوعی ارتعاشات میرا روبرو هستیم که حل تحلیلی آن به صورت زیر است:

$$\delta(t) = \frac{U_0}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma_n^2}} e^{-\gamma_n t} \sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma_n^2} t\right) \quad (31)$$

قبل از برخورد کمتر از انرژی جنبشی بعد از برخورد می شود.

$$F_{damp,n}^{j \rightarrow i} = -2\lambda_n m_{ij} U_{ij}^n \quad (20)$$

که λ_n ضریب استهلاک دینامیکی نرمال تعریف می شود. $m_{ij} = (m_i m_j) / (m_i + m_j)$ برابر جرم کاهش یافته ذرات i و j و U_{ij}^n که سرعت نسبی نرمال بین دو ذره بوده به شکل زیر قابل محاسبه است:

$$U_{ij}^n = \left[(U_i - U_j) \cdot n_{ij} \right] n_{ij} \quad (21)$$

که U_i و U_j به ترتیب سرعت مرکز ذرات i و j را نشان می دهد.

• نیروی مماسی

نیروی مماسی برخورد بین دو ذره می تواند به دو رژیم مختلف دسته بندی شود: (۱) نیروی چسبندگی که در آن هیچ گونه جابه جایی نسبی بین دو ذره در محل نقطه برخورد وجود ندارد و دو ذره در جهت خلاف یکدیگر به صورت قفل شده در نقطه برخورد به یکدیگر نیروی مماسی وارد می کنند. (۲) نیروی لغزشی که در آن دو جسم بر روی یکدیگر می لغزند. ذکر این نکته در مورد نیروی برخورد چسبنده مهم است که این نیرو به دلیل نیروی مقاوم حاصل از فرورفتگی عرضی دو جسم در یکدیگر ایجاد شده و مانند نیروی عمودی از مجموع دو نیروی مماسی بازگرداننده و مستهلک کننده به وجود می آید. در واقع می توان نوشت:

$$F_{st}^{j \rightarrow i} = -k_t \varepsilon t_{ij} - 2\gamma_t m_{ij} U_{ij}^t \quad (22)$$

که به k_t و γ_t به ترتیب برابر ضریب سختی مماسی و ضریب استهلاک دینامیکی مماسی هستند. میزان جابه جایی نسبی بین مرکز دو ذره را نشان می دهد که طبق رابطه زیر قابل محاسبه است:

$$\varepsilon = \int_0^{T_c} U_{ij}^t dt \quad (23)$$

که T_c مدت زمان برخورد را نشان می دهد. در واقع این انتگرال از زمان شروع برخورد ($t=0$) تا پایان برخورد ($t=T_c$) را شامل می شود. U_{ij}^t نیز به شکل زیر قابل بیان می باشد:

$$U_{ij}^t = U_{ij} - U_{ij}^n \quad (24)$$

t_{ij} برابر بردار یکه مماسی است که می توان به صورت U_{ij}^t / U_{ij} تعریف کرد. برای نیروی لغزشی که همان نیروی اصطکاک دو ذره بر روی یکدیگر است، می توان این گونه نوشت:

$$F_{sl}^{j \rightarrow i} = -\mu \left| F_{res,n}^{j \rightarrow i} \right| t_{ij} \quad (25)$$

باید بدانیم که نیروی مماسی حاصل از برخورد یا برابر نیروی چسبندگی است یا برابر نیروی لغزشی و نه هر دو. در واقع می توان نوشت:

$$F_t^{j \rightarrow i} = \min\left(\left|F_{st}^{j \rightarrow i}\right|, \left|F_{sl}^{j \rightarrow i}\right|\right) \quad (26)$$

معمولاً در ابتدای برخورد نیروی چسبنده دارای مقدار کمتر از نیروی

توجه به معادله (۳۶) می‌توان نوشت:

$$\gamma_n = -\frac{\omega_0 \ln e_n}{\sqrt{\pi^2 + (\ln e_n)^2}} \quad (38)$$

همان‌طور که می‌دانیم در برخورد ذرات مختلف صلب با یکدیگر، مدول یانگ و ضریب پواسون که خواص فیزیکی ذرات هستند، نباید تأثیری چشمگیری در نتایج محاسبات داشته باشند. از طرفی تعیین ضریب سختی نرمال k_n با استفاده از معادله نیازمند داشتن اطلاعاتی از جنس ماده صلب می‌باشد. واضح است که در مطالعه شبیه‌سازی جریان‌های حاوی ذرات صلب بحثی از جنس ذرات نمی‌شود و بنابراین باید به‌گونه‌ای دیگر ضریب k_n را استخراج کرد.

راه‌حل مفیدتری و غیر وابسته به خواص فیزیکی ذرات پیشنهاد می‌شود که قبلاً هم به‌گونه‌ای توسط نویسندگان مختلف نظیر کلری و همکاران [۳۳ و ۳۴] و واپس و همکاران [۲۴] پیشنهاد شده است:

۱. ابتدا نسبت δ_{\max}/R را تعیین می‌کنیم که برابر مقدار بی‌بعد بیشینه میزان نفوذ ذرات در یکدیگر است. مقدار R در هندسه‌های غیر دایروی برابر شعاع معادل است.

۲. پارامترهای فیزیکی e_n و μ را مقداردهی می‌کنیم. توجه شود که محدوده این پارامترها برابر $0 < e_n < 1$ و $0 < \mu < 1$ لحاظ می‌شود.

۳. با استفاده از پارامترهای بالا و معادلات (۳۳)، (۳۴) و (۳۸) مقادیر k_n و γ_n محاسبه می‌شود.

۴. $k_t = \alpha k_n$ و $\gamma_t = -\sqrt{\frac{k_t}{m_{ij}} \ln e_n / \sqrt{\pi^2 + (\ln e_n)^2}}$ که در مورد مسأله برخورد رو سیلندر با یکدیگر α برابر ۱ در نظر گرفته می‌شود [۳۵].

در مورد تعیین مقدار δ_{\max}/R این نکته اهمیت دارد که باید مقدار نفوذ بیشینه تا حدی انتخاب شود که نتایج برخورد مستقل از مقدار k_n شوند. به‌طور تقریبی این نسبت باید بین ۰/۰۱ تا ۰/۰۵ باشد.

۲-۵ روش ترکیبی مرز غوطه‌ور- روش اجزا گسسته

جهت استفاده از روش اجزا گسسته در شبیه‌سازی برخورد دو ذره صلب در بستر سیال، الگوریتم ترکیبی مرز غوطه‌ور - اجزا گسسته به ترتیب زیر نوشته می‌شود:

۱. محاسبه نیروی اندرکنش سیال و جامد در نقطه‌های لاگرانژی با استفاده از روش مرز غوطه‌ور. توجه شود که آن نقاط لاگرانژی که در فصل مشترک دو ذره هستند، در محاسبه نیروی مرزی استفاده نمی‌شوند.

۲. تعیین مقدار $\delta_{\max}/R < 0/05$ و e_n و μ و بنابراین یافتن پارامترهای برخورد، مقدار U_0 که برای یافتن این پارامترها نیاز است، در مسائل مختلف مقادیر متفاوتی فرض می‌شود. به‌طور مثال در مسئله سقوط این سرعت برای سرعت حدی دو ذره در نظر گرفته می‌شود.

۳. محاسبه نیرو و گشتاور حاصل از برخورد با اطلاع از میزان فرورفتگی، سرعت و مکان ذرات با استفاده از معادلات (۲۷) و (۲۸).

با استفاده از این رابطه می‌توان مدت‌زمان برخورد T_c را با فرض $\delta=0$ و $t=0$ محاسبه کرد:

$$T_c = \frac{\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma_n^2}} \quad (32)$$

همین‌طور مدت‌زمان لازم تا صفر شدن سرعت ذرات با فرض $d\delta/dt=0$ و $t=T_{\max}$ قابل اندازه‌گیری می‌باشد:

$$T_{\max} = \frac{1}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma_n^2}} \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma_n^2}}{\gamma_n} \right) \quad (33)$$

حداکثر میزان فرورفتگی دو جسم در یکدیگر با قرار دادن $t=T_{\max}$ در معادله (۳۱) حاصل می‌شود:

$$\delta_{\max} = \frac{U_0}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma_n^2}} e^{-\gamma_n T_{\max}} \sin \left(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma_n^2} T_{\max} \right) \quad (34)$$

یکی از خواص مهم مواد ضریب بازگشت نرمال (e_n) است که به‌واسطه ترم مستهلک کننده نیرو ایجاد می‌شود. در واقع e_n برابر است با نسبت سرعت نسبی نرمال ذرات بعد از برخورد به سرعت نسبی ذرات قبل از برخورد که به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$e_n = \left| \frac{U'_{i,n} - U'_{j,n}}{U_{i,n} - U_{j,n}} \right| \quad (35)$$

اگر بخواهیم معادله (۳۵) را در خصوص مسأله رفت و برگشتی ذکرشده در قسمت بالا به کار ببریم، خواهیم داشت:

$$e_n = \left| \frac{d\delta}{dt}(t=T_c) \right| = e^{-\gamma_n T_c} = e^{-\gamma_n \frac{\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma_n^2}}} \quad (36)$$

همان‌طور که واضح است، زمانی که ضریب بازگشت برابر ۱ می‌شود. در واقع برخورد در راستای عمود الاستیک شده و سرعت نسبی قبل و بعد از برخورد یکی می‌شود؛ به عبارت دیگر انرژی جنبشی ثابت می‌ماند.

برای پایداری حل و دقت روش اجزا گسسته، گام‌های زمانی در طی برخورد باید به‌اندازه کافی کوچک‌تر از مدت‌زمان برخورد باشد [۲۴]. در مقالات مختلف توصیه شده است که مدت‌زمان برخورد بین ۱۰ تا ۵۰ برابر گام زمانی باشد. این بدان معنی است که بین ۱۰ تا ۵۰ گام زمانی نیاز است تا برخورد واقعی و با دقت بالا رخ دهد [۳۱ و ۳۲]. بنابراین با فرض $\gamma_n=0$ می‌توان نوشت:

$$\Delta t = \frac{T_c}{25} = \frac{\pi}{25} \sqrt{\frac{2\pi R^2 \rho (1-\nu^2)}{E_Y}} \quad (37)$$

بدیهی است با اضافه شدن ترم γ_n و کاهش e_n ، مدت زمان برخورد افزایش یافته و بنابراین گام‌های زمانی نیز افزایش پیدا می‌کنند. بنابراین با

۳-۲- مقایسه حل تحلیلی و عددی رفتار دو ذره دایروی در هنگام برخورد و بعدازآن

در این بخش جهت معتبر سازی الگوریتم برخورد روش اجزا گسسته، برخورد دو ذره صلب دایروی را مورد مطالعه قرار خواهیم داد. بدین منظور همانند شکل ۴ دو ذره به جرم‌های $M_1=M_2$ را در نظر بگیرید. V_1 و V_2 به ترتیب سرعت اولیه ذرات ۱ و ۲ هستند. اگر فرض کنیم مسیر حرکت ذرات بر روی سطح افقی صورت گرفته و اصطکاک ناچیز باشد، با استفاده حل تحلیلی می‌توان دو حالت برای سرعت‌های بعد از برخورد یافت:

۴. به‌روزرسانی مکان و سرعت ذرات با استفاده از معادلات زیر:

$$\vec{U}_c^{n+1} = \vec{U}_c^n + \frac{1}{M_s} \left[-\sum_b \vec{F}_b^n \Delta V_b + (M_s - M_f) \vec{g} + \vec{F}_{c,p-p} + \vec{F}_{c,p-w} \right] \delta t \quad (39)$$

$$+ \frac{M_f}{M_s} (\vec{U}_c^n - \vec{U}_c^{n-1})$$

$$\vec{\Omega}_c^{n+1} = \vec{\Omega}_c^n + \frac{1}{I_s} \left[-\sum_b (\vec{r}_b - \vec{r}_c) \times \vec{F}_b^n \Delta V_b + \vec{M}_{c,p-p} + \vec{M}_{c,p-w} \right] \delta t \quad (40)$$

$$+ \frac{I_f}{I_s} (\vec{\Omega}_c^n - \vec{\Omega}_c^{n-1})$$

۳- صحت سنجی

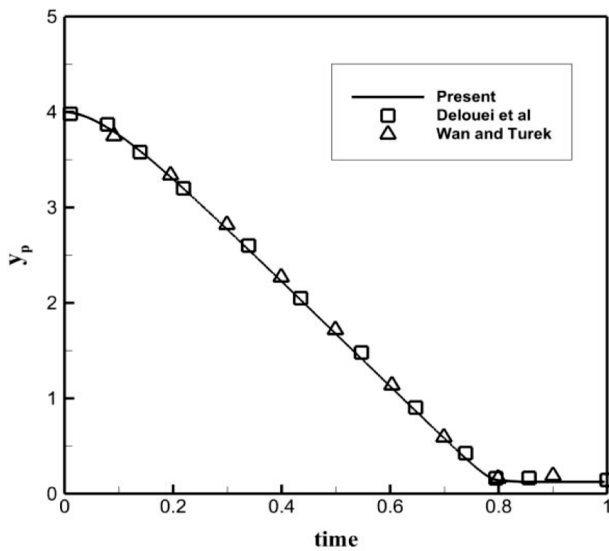
در این قسمت از مقایسه نتایج در دو مسأله شامل سقوط تک ذره دایروی در کانال عمودی و بررسی دینامیک برخورد دو ذره صلب دایروی به ترتیب جهت سنجی روش مرغوطه‌ور- شبکه بولتزمن و روش اجزا گسسته استفاده کرده‌ایم.

۳-۱- سقوط یک‌ذره صلب دایروی در کانال عمودی

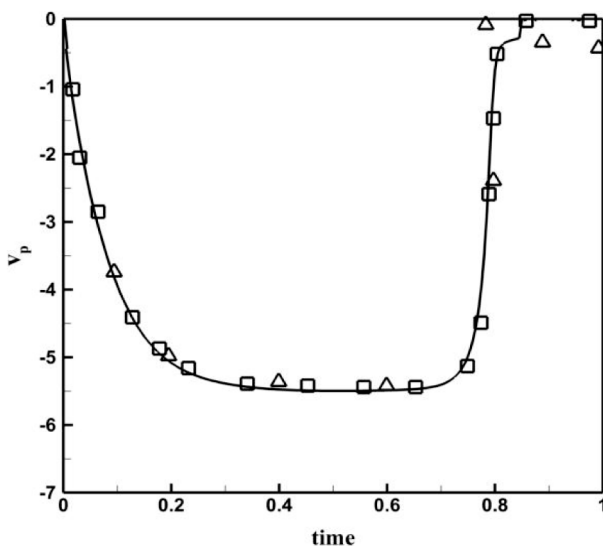
مسأله سقوط ذره صلب درون کانال توسط افراد مختلفی مورد مطالعه و قسمتی از صحت سنجی کارهای بسیاری از نویسندگان است. در این قسمت ما از نتایج دلویی و همکاران [۳۶] و ون و تورک [۳۷] جهت صحت سنجی کد نوشته‌شده مرز غوطه‌ور- شبکه بولتزمن استفاده می‌کنیم. ناحیه محاسباتی شامل یک کانال محدود به عرض $W=2$ سانتی‌متر و ارتفاع $L=6$ سانتی‌متر است. قطر ذره صلب برابر $D_p=0.25$ سانتی‌متر که از نقطه از $(4 \text{ cm}$ و $1 \text{ cm})$ حالت سکون تحت شتاب جاذبه $g=-981 \text{ cm/s}^2$ رها می‌شود.

چگالی ذره و سیال به ترتیب برابر $\rho_p=1 \text{ gr/cm}^3$ و $\rho_f=1/25 \text{ gr/cm}^3$ بوده و ویسکوزیته دینامیکی سیال $\mu_f=0.1 \text{ cm}^2/\text{s}$ در نظر گرفته می‌شود. شبکه منظم 201×601 برای ایجاد ناحیه محاسباتی شبکه بولتزمن ایجاد می‌شود. زمان آسایش $\tau=0.65$ برای این شبیه‌سازی در نظر گرفته شده که متناسب با گام زمانی $\Delta t=5 \times 10^{-5}$ در مقیاس فیزیکی است. محیط دایره نیز شامل ۶۰ نقطه لاگرانژی می‌باشد. شکل‌های ۲ (الف) و ۲ (ب) به ترتیب تغییرات زمانی برخی کمیت‌ها نظیر موقعیت عمودی (y_p) ، سرعت عمودی (v_p) را نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌کنید، نتایج حاضر دقت قابل قبولی را نسبت کارهای قبلی نشان می‌دهد.

شکل ۳ سرعت نهایی ذره صلب را در کانال به ازای تعداد نقاط لاگرانژی رو مرز جامد نشان می‌دهد. همان‌طور که واضح است تعداد ۵۰ نقطه عدم وابستگی نتایج به نقاط لاگرانژی را نتیجه می‌دهد.



(الف)



(ب)

شکل ۲: تغییرات زمانی (الف) موقعیت عمودی و (ب) سرعت عمودی ذره و مقایسه آن با کارهای قبلی

Fig. 2. Time evolution of (a) vertical position and (b) vertical velocity

$$e_n = \left| \frac{V_2' - V_1'}{V_2 - V_1} \right| \quad (43)$$

همان‌طور که مشخص است $0 < e_n \leq 1$ و مقدار صفر به معنای برخورد کاملاً الاستیک و مقدار ۱ به معنای برخورد کاملاً پلاستیک بوده که در این برخورد $V_2' = V_1'$ و دو ذره باهم حرکت خواهند کرد.

در این قسمت با استفاده از اعمال الگوریتم اجزا گسسته این دو نوع حرکت را مدل کرده و با داده‌های تحلیلی مقایسه خواهیم کرد. در این

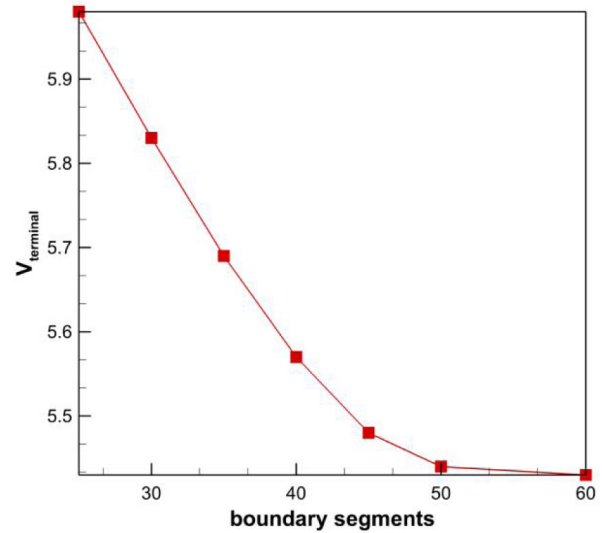
موارد $\delta_{\max}/R = 0.03$ و $\Delta t = \frac{\pi}{f} \sqrt{\frac{2MR}{3k_n}}$ که f در اینجا برابر ۱۰۰ در نظر گرفته می‌شود.

بدین منظور دو دایره صلب به جرم‌های ۲۰ و شعاع ۱۰ واحد بولتزمن را در نظر می‌گیریم. مقدار سرعت‌های اولیه آن‌ها را متفاوت در نظر گرفته و بنابراین نتایج به‌صورت زیر خواهد بود:

الف) ذره سمت چپ دارای سرعت اولیه V_{1x} ، ذره سمت راست ساکن و برخورد الاستیک ($e=1$) می‌باشد. بنابراین در جدول ۱ نتایج حاصل از تحلیل المان گسسته با معادلات (۴۱) و (۴۲) مقایسه می‌شود. K_{E1} و K_{E2} به ترتیب مجموع انرژی جنبشی قبل و بعد از برخورد هستند و $|K_{E1} - K_{E2}|/K_{E1}$ خطای نسبی روش اجزا گسسته را نشان می‌دهد. از لحاظ تئوری سرعت ذره سمت راست بعد از برخورد برابر است با $V_{2x}' = (2M_1/(M_1 + M_2))V_{1x}$. همان‌طور که مشاهده می‌کنید، ضریب بازگشت و درصد اختلاف انرژی جنبشی که در دو ستون آخر نمایش داده شده‌اند، به مقادیر پیش‌بینی شده که به ترتیب برابر ۱ و صفر هست، نزدیک می‌باشد.

ب) ذره سمت چپ دارای سرعت اولیه V_{1x} ، ذره سمت راست ساکن و برخورد غیرالاستیک $e_n = 0.75$ می‌باشد، بنابراین انرژی جنبشی اولیه تلف خواهد شد. از لحاظ تئوری سرعت ذره سمت راست بعد از برخورد و همچنین اختلاف انرژی جنبشی نسبی به ترتیب برابر است با رابطه (۴۳) و مقدار 0.218 . بنابراین در جدول ۲ نتایج حاصل از تحلیل اجزا گسسته با نتایج تحلیلی مقایسه می‌شود.

با توجه به ستون دوم و سوم واضح است که سرعت ذره سمت راست بعد از برخورد بسیار به مقادیر تحلیلی نزدیک است. همین‌طور ستون چهارم e_n و اختلاف نسبی قبل و بعد از برخورد را نشان می‌دهد که در هر دو حالت نتایج قابل قبولی را در مقایسه با مقادیر تحلیلی 0.75 و 0.218 ارائه می‌دهد. همان‌طور که واضح است، ضریب بازگشت e_n باعث افزایش مدت‌زمان برخورد T_c شده که رابطه آن در معادله (۳۲) قابل مشاهده است. شکل ۵ زمان برخورد حاصل از روش اجزا گسسته را با مقادیر تحلیلی در ضرایب بازگشت مختلف مقایسه می‌کند. جرم‌های دو ذره برابر ۲۰ و $V_{1x} = 0.5$ و بقیه شرایط اولیه ذرات همانند شرایط بالا است. شکل ۶ نیز میزان فرورفتگی δ را برحسب زمان نشان می‌دهد که مدت‌زمان برخورد هم از همین نمودار محاسبه می‌شود. در این شکل واضح است که با کاهش e_n ، مقدار فرورفتگی نیز کاهش می‌یابد.



شکل ۳: نمایش استقلال نتایج از تعداد نقاط لاگرانژی

Fig. 3. Grid study of Lagrangian nodes

• برخورد الاستیک باشد

در این حالت اگر مجموع دو ذره را یک سامانه بگیریم، تکانه قبل و بعد از برخورد و همچنین انرژی جنبشی ذرات ثابت می‌ماند؛ بنابراین داریم:

$$M_1 V_1 + M_2 V_2 = M_1 V_1' + M_2 V_2' \quad (41)$$

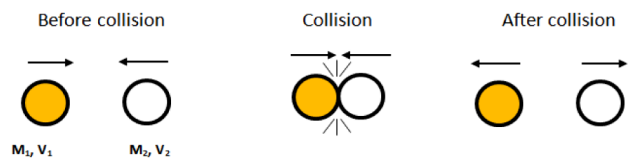
برای انرژی جنبشی نیز داریم:

$$\frac{1}{2} M_1 V_1^2 + \frac{1}{2} M_2 V_2^2 = \frac{1}{2} M_1 V_1'^2 + \frac{1}{2} M_2 V_2'^2 \quad (42)$$

در این حالت ذرات بعد از برخورد متناسب با جرم خود و سرعت قبل از برخورد پراکنده می‌شوند. در این حالت هیچ‌گونه نیروی تلف‌کننده یا غیر پایستاری وجود ندارد.

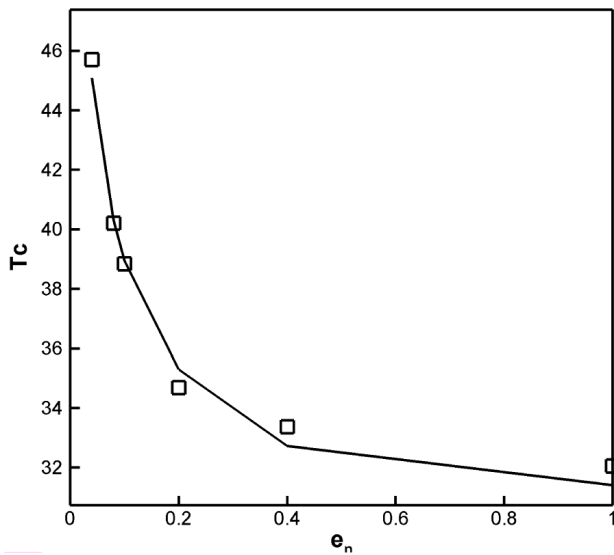
• برخورد غیر الاستیک باشد

اگر یکی از نیروهای متقابل بین ذرات برخوردکننده، غیر پایستار باشد، در این صورت انرژی جنبشی قبل از برخورد و بعد از برخورد یکسان نخواهد بود و با توجه به علامت تفاضل انرژی جنبشی قبل از برخورد و بعد از برخورد، برخورد انرژی‌گیر یا انرژی‌زا خواهد بود.



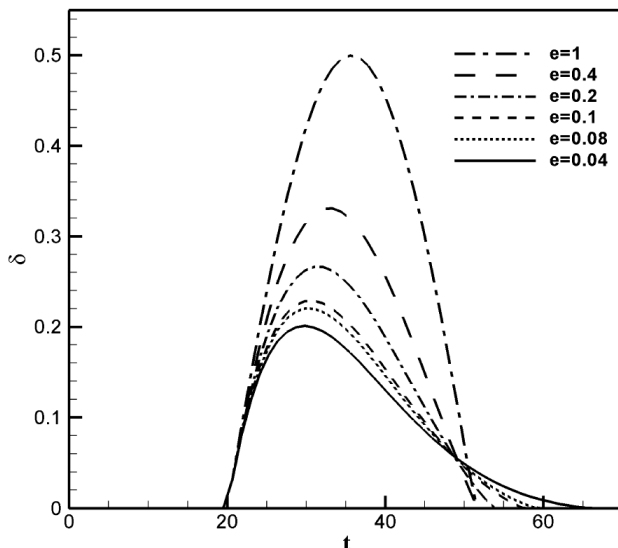
شکل ۴: شماتیک ناحیه محاسباتی برخورد دو ضرب صلب دایروی
Fig. 4. Schematic of computational domain for collision of two particles

چگالی و قطر ذره نیز به ترتیب برابر $\rho_p = 1/0.1 \text{ gr/cm}^3$ و $D_p = 0.2 \text{ cm}$ است. دو ذره با شتاب اولیه $g = -981 \text{ cm/s}^2$ از حالت سکون رها شده و در لحظه اولیه، روی خط مرکزی کانال و در ارتفاع $7/2$ و $6/8$ سانتی‌متر قرار دارند و شرط مرزی عدم لغزش بر روی دیواره‌های کانال حاکم می‌باشد. زمان آسایش برابر $\tau = 0.65$ تنظیم شده که معادل $\Delta t = 5 \times 10^{-6}$ در هر گام زمانی است. جهت شبیه‌سازی برخورد، نیاز به تعیین پارامترهای برخورد است.



شکل ۵- زمان برخورد دو ذره صلب برحسب ضریب بازگشت. قبل از برخورد ذره سمت راست ساکن و ذره سمت چپ دارای سرعت $V_{1x} = 0.05$ است.

Fig. 5. Collision time for two particles as a function of restitution coefficient. Before collision, right particle velocity is zero and another particle has velocity of 0.05



شکل ۶: نمودار میزان فرورفتگی دو ذره در یکدیگر برحسب زمان به ازای ضرایب بازگشت متفاوت

Fig. 6. Figure of penetration size as a function of restitution coefficient

جدول ۱- مقایسه نتایج تحلیلی با نتایج حاصل از تحلیل عددی روش المان گسسته برای برخورد الاستیک

Table 1. Comparison of analytical and numerical results in collision of two elastic particles

| $\frac{K_{E1}-K_{E2}}{K_{E1}}$ (DEM) | $\frac{ V'_{2x}-V'_{1x} }{ V_{2x}-V_{x1} }$ (DEM) | V'_{2x} (DEM) | V'_{2x} (Analytical) | V'_{1x} (DEM) |
|---|--|--------------------|---------------------------|--------------------|
| 2×10^{-3} | 1/0.054 | 0/1.005 | 0/1 | 0/1 |
| 1×10^{-3} | 1/0.071 | 0/5.005 | 0/5 | 0/5 |
| 4×10^{-3} | 1/0.027 | 1/0.01 | 1 | 1 |
| 3×10^{-3} | 1/0.006 | 9/9.884 | 10 | 10 |

جدول ۲- مقایسه نتایج تحلیلی با نتایج حاصل از تحلیل عددی روش اجزا گسسته برای برخورد الاستیک

Table 2. Comparison of analytical and DEM results in collision of two elastic particles

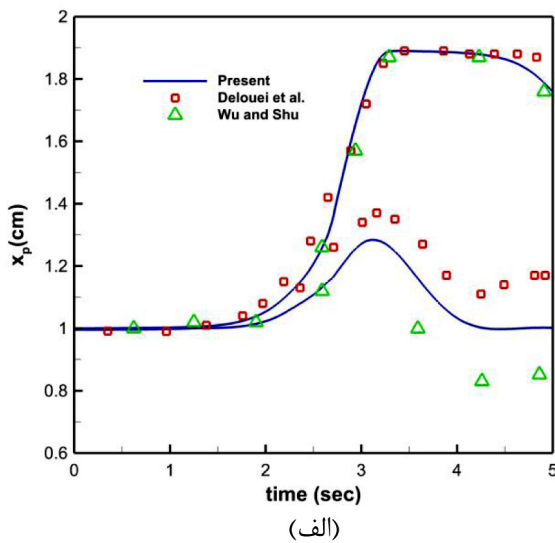
| $\frac{K_{E1}-K_{E2}}{K_{E1}}$ (DEM) | $\frac{ V'_{2x}-V'_{1x} }{ V_{2x}-V_{x1} }$ (DEM) | V'_{2x} (DEM) | V'_{2x} (Analytical) | V'_{1x} (DEM) |
|---|--|--------------------|---------------------------|--------------------|
| 0/212 | 0/758 | 0/0.879 | 0/0.875 | 0/1 |
| 0/235 | 0/729 | 0/4317 | 0/4375 | 0/5 |
| 0/234 | 0/736 | 0/8643 | 0/8750 | 1 |
| 0/213 | 0/756 | 8/7832 | 8/75 | 10 |

۴- نتایج و بحث

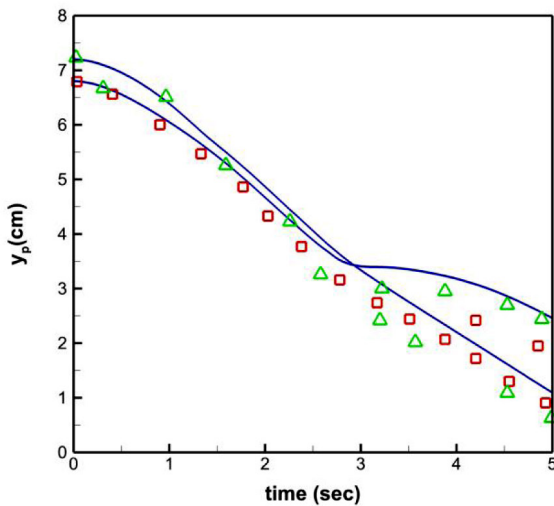
مسأله سوم شامل سقوط دو ذره صلب در سیال نیوتونی در کانال عمودی و مطالعه اثر پارامترهای فیزیکی بر آن می‌باشد. این مسأله با روش‌های مختلفی توسط نویسندگان مختلفی انجام گرفته است که شرایط هندسی ذکر شده در این قسمت همانند کار ون و تورک [۳۷] و دلویی و همکاران [۳۶] است. همانند شکل ۷ ناحیه محاسباتی برابر عرض $W=2$ سانتی‌متر و ارتفاع $L=6$ سانتی‌متر بوده که شامل 801×201 گره محاسباتی است. چگالی و ویسکوزیته سیال به ترتیب برابر $\rho_f = 1 \text{ gr/cm}^3$ و $\mu_f = 0.1 \text{ cm}^2/\text{s}$ است.

دلیل افزایش سرعت ذره بالایی، فاصله بین دو ذره کاهش پیدا کرده و دو ذره یکدیگر را لمس می‌کنند (کیسینگ). دو ذره مدتی به یکدیگر چسبیده و در پایان از یکدیگر جدا شده و به‌طور آرام به انتهای کانال سقوط می‌کنند (تامبلینگ). در شکل ۹ نیز خطوط جریان ایجاد شده به واسطه حرکت دو ذره در کانال در زمان‌های مختلف رسم شده است.

همان‌طور که در بالا ذکر شد، برای شبیه‌سازی برخورد دو ذره صلب به یکدیگر با استفاده از مدل اجزا گسسته، ضرایب متفاوتی تأثیر دارد. همان‌طور که می‌دانیم با فرض آگاهی از مقدار e_n ، با تغییر مقدار δ_{max}/R ، ضرایب k_n متفاوت ایجاد می‌شود. در واقع با افزایش مقدار δ_{max}/R ، ضرایب k_n کاهش و با کاهش آن، ضرایب k_n افزایش می‌یابد. تغییر در این ضرایب، نتایج



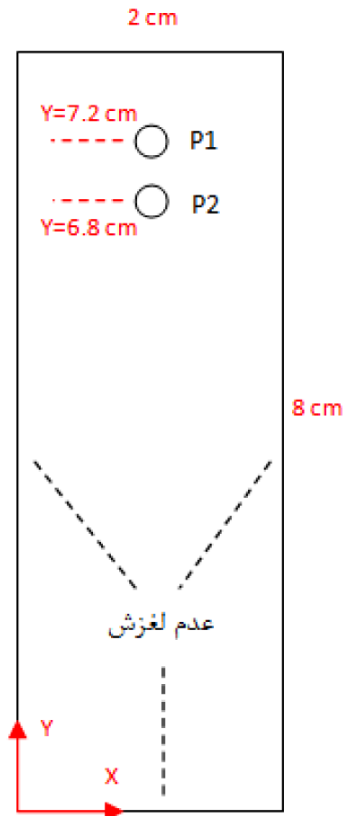
(الف)



(ب)

شکل ۸: تغییرات طولی و عرضی مرکز ذرات صلب دایروی و مقایسه آن با کارهای قبلی

Fig. 8. Longitudinal and lateral variations in position of solid particles and comparison with previous results.



شکل ۷: ناحیه محاسباتی سقوط دو ذره دایروی در کانال عمودی

Fig. 7. Computational domain for sedimentation of two particles in a vertical channel

پارامترهای فیزیکی برخورد که شامل δ_{max}/R و e_n و μ است باید تعیین شود. ضرایب δ_{max}/R و μ به ترتیب برابر 0.02 و 0.3 در نظر گرفته می‌شود که این ضرایب با سعی و خطا جهت تطبیق با نتایج قبلی انتخاب شده است. ضریب بازگشت e_n در این مسأله تأثیری در نتایج ندارد که در ادامه در مورد آن بحث خواهیم کرد. همچنین $\gamma_i=0$ و $k_i=k_n$ در نظر گرفته می‌شود. شکل ۸ تغییرات طولی و عرضی مرکز ذرات صلب دایروی را با کار دلویی و همکاران [۳۶] و و شو و وو [۳۸] مقایسه می‌کند. در کارهای قبلی جهت اعمال نیروی برخورد بین دو ذره از تابع پتانسیل لنارد-جونز [۶] استفاده شده است که در این روش، دو ذره یکدیگر را لمس نخواهند کرد. این مدل ساده گرچه پایداری خوبی دارد، اما از اثرات اصطکاک، ضریب بازگشت صرف‌نظر می‌شود و همچنین تنها برای برخورد ذرات دایروی کاربرد دارد. همان‌طور که در شکل‌های زیر مشاهده می‌کنید، با تنظیم پارامترهای اجزا گسسته، نتایج کارهای قبلی حاصل می‌شود.

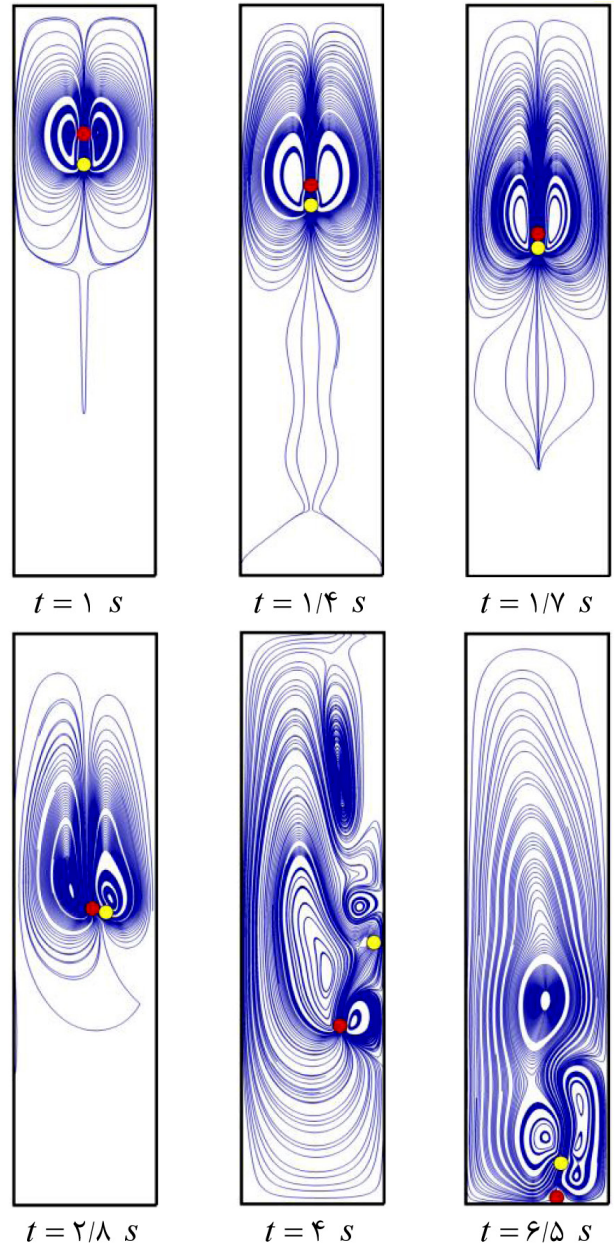
پدیده‌های درفتینگ، کیسینگ و تامبلینگ نیز در این نتایج قابل مشاهده است. همان‌طور که در شکل ۸ (الف) مشاهده می‌کنید، ذره ۱ که در موقعیت بالاتری نسبت به ذره ۲ قرار دارد، با حرکت خود به سمت پایین در پشت خود ناحیه چرخشی و کم‌فشار ایجاد می‌کند. بنابراین ذره ۲ در این ناحیه به دام افتاده و سرعت آن نسبت به ذره پایین‌تر افزایش می‌یابد (درفتینگ). به

شبیه‌سازی مسأله بالا گزینش می‌شود، زیرا افزایش این مقدار تغییری در نتایج اتفاق نمی‌افتد.

در ادامه ضریب بازگشت و ضریب اصطکاک را بر تغییر مسیر ذرات مورد مطالعه قرار می‌دهیم. بدین منظور، مسأله بالا را در سه مقدار مختلف ۱ و ۰/۵ و ۰/۱ برای ضریب بازگشت شبیه‌سازی می‌کنیم.

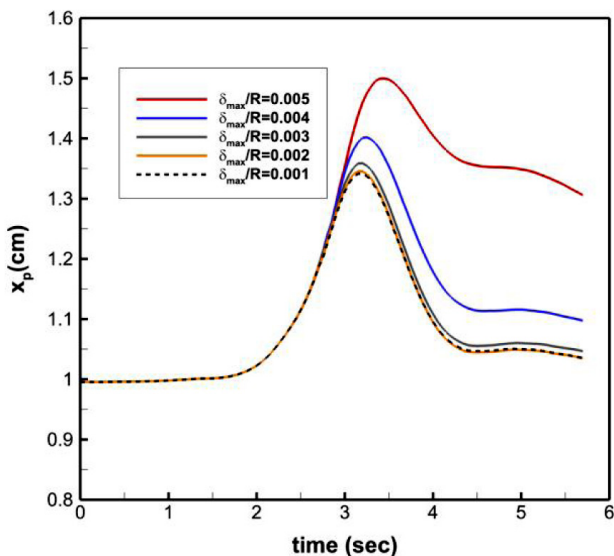
همان‌طور که در شکل ۱۱ (الف) مشاهده می‌کنید، در این مسأله، افزایش ضریب بازگشت یا به عبارت دیگر افزایش الاستیک بودن برخورد، تأثیری در مسیر حرکت ذره اول ایجاد نخواهد کرد. این جمله بدین معنی است که سهم نیروی غیر الاستیک ناچیز است. علت این موضوع را این‌طور می‌توان بیان کرد که زمانی که دو ذره از حالت اولیه رها شده و در مرحله درفتینگ به یکدیگر نزدیک می‌شوند، سرعت نسبی بین دو ذره از مقدار بیشینه به مقدار کمینه کاهش پیدا می‌کند. این روند کاهشی تا زمان برخورد دو ذره به یکدیگر ادامه دارد. علت کاهش شدید سرعت نسبی بین دو ذره، وجود نیروی لوبریکاسیون بین ذرات است که قبل از برخورد باعث ایجاد نیروی دافعه شدیدی خواهد شد؛ بنابراین به خاطر پایین بودن مقدار سرعت نسبی، نیروی غیر الاستیک سهم بسیار کمتری در نیروی برخورد کلی خواهد داشت. از طرفی انتظار ما این است که تغییر ضریب بازگشت در این مسأله تأثیری در مدت زمان کیسینگ نخواهد داشت. همان‌طور که در شکل ۱۱ (ب) واضح است، با کاهش بسیار زیاد ضریب بازگشت، مدت زمانی که دو ذره با یکدیگر در تماس هستند، تفاوتی نخواهد کرد. اگرچه مطابق با انتظار ما با کاهش ضریب بازگشت، میزان فرورفتگی دو ذره در هم اندکی کاهش می‌یابد، اما این مسأله تغییری در نتایج ایجاد نخواهد کرد.

در قسمت بعد، تأثیر ضریب اصطکاک بر نتایج مورد مطالعه قرار خواهیم



شکل ۹- خطوط جریان حاصل از سقوط دو ذره صلب دایروی در کانال عمودی طی زمان‌های مختلف

Fig. 9. Demonstration of Streamlines in the case that two rigid body sediment in a vertical channel as a function of time



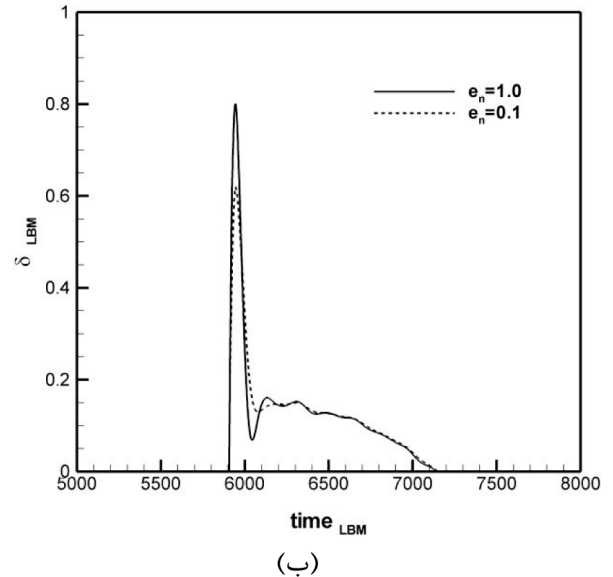
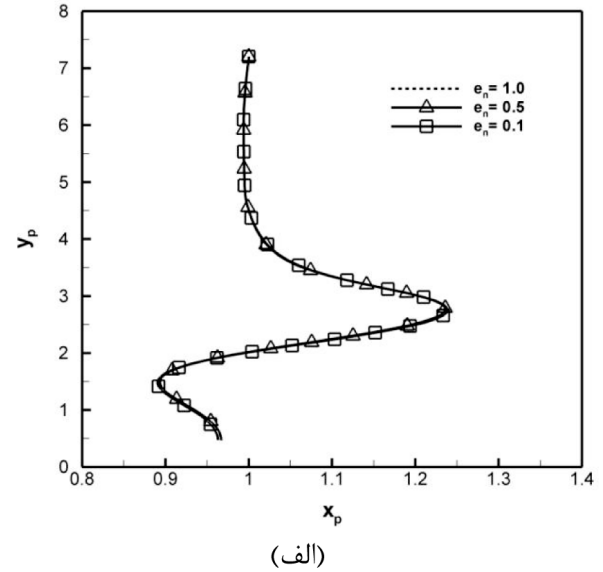
شکل ۱۰: سقوط ذره صلب بالایی در مسئله سقوط دو ذره، برحسب تغییرات پارامتر δ_{max}/R

Fig. 10. Lateral variation of the upper particle while it sediments in a vertical channel as a function of time for different parameters of δ_{max}/R

مختلفی را ایجاد می‌کند و بنابراین برای یافتن محدوده مناسب‌تر (در هر نوع مسئله‌ای) نسبت به محدوده ذکر شده در بالا $(0/001 < \delta_{max}/R < 0/005)$ می‌توان بر روی این پارامتر به شکل زیر مطالعه کرد. نکته قابل ذکر این است که حد پایینی این پارامتر همان $0/001$ مناسب بوده و کمتر از این مقدار باعث کاهش گام زمانی و ایجاد مقادیر زیاد در نیروی برخورد می‌شود [۲۴]. بنابراین در این قسمت، هدف یافتن حد بالایی پارامتر δ_{max}/R است. همان‌طور که در شکل ۱۰ مشاهده می‌کنید، مسیر حرکت ذره بالایی برای مقادیر مختلف رسم شده است؛ بنابراین مقدار $\delta_{max}/R = 0/003$ برای

۵- نتیجه گیری

در این مطالعه، یک مدل جدید از ترکیب روش مرزغوطه‌ور با اعمال نیروی مستقیم، شبکه بولتزمن و روش اجزا گسسته، برای شبیه‌سازی جریان‌های ذره‌ای توسعه داده شده است. روش شبکه بولتزمن به عنوان حلگر ناحیه سیال با الگوریتم اعمال نیروی چند مرحله‌ای ادغام شده و دقت محاسبات را تا دو برابر افزایش می‌دهد. بر مبنای روش مرز غوطه‌ور، نیروی مرزی بر روی نقاط اویلری اطراف مرز با استفاده از تابع توزیع دلتای گسسته میانمایی می‌شود. در نتیجه شرط مرزی عدم لغزش بر روی مرز جسم جامد ارضا خواهد شد. در روش اجزا گسسته ارایه شده در این مطالعه، نیروی

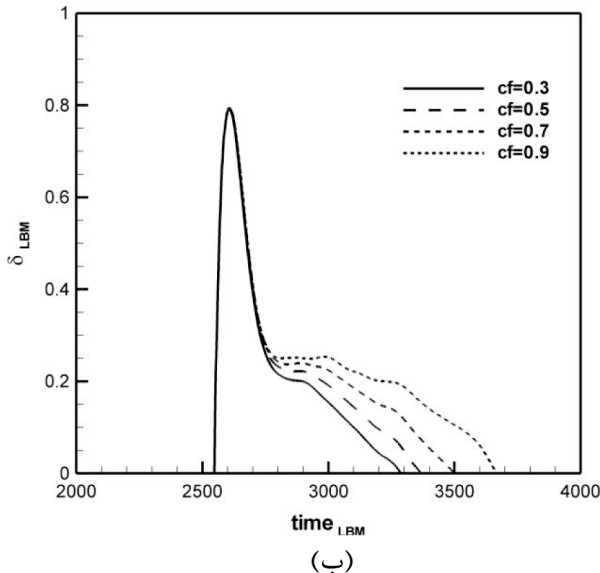
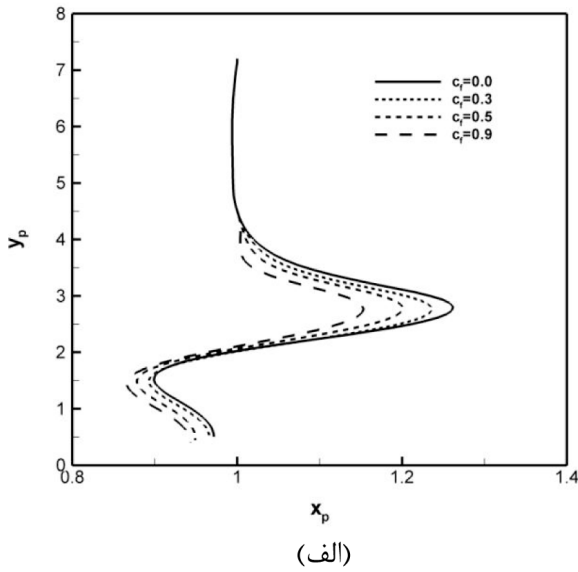


شکل ۱۱: بررسی اثر ضریب بازگشت بر (الف) مسیر سقوط ذره بالایی و (ب) زمان کیسینگ (مدت زمان برخورد) در مسئله سقوط دو ذره در کانال

Fig. 11. Investigation of effect of restitution coefficient on (a) upper particle's path and (b) kissing time in sedimentation of two rigid particles in a vertical channel

داد. بدین منظور مسیر حرکت ذره اول با تغییر ضریب اصطکاک در شکل ۱۲ (الف) نمایش داده شده است. علاوه بر این، در شکل ۱۲ (ب) میزان فرورفتگی برحسب زمان رسم شده است. این شکل نشان می‌دهد که با افزایش ضریب اصطکاک مدت زمان کیسینگ نیز افزایش پیدا می‌کند. علت این موضوع واضح است؛ زیرا ضریب اصطکاک باعث چسبندگی بیشتر دو ذره به هم خواهد شد.

نکته دیگری که در شکل دیده می‌شود، ثابت بودن مقدار بیشینه میزان فرورفتگی با تغییر ضریب اصطکاک است. زیرا نیروی اصطکاک مماسی بوده و تأثیری بر مقدار نفوذ عمودی دو ذره در هم نخواهد داشت.



شکل ۱۲: بررسی اثر ضریب اصطکاک بر (الف) مسیر سقوط ذره بالایی و (ب) زمان کیسینگ (مدت زمان برخورد) در مسئله سقوط دو ذره در کانال

Fig. 12. Investigation of effect of friction coefficient on (a) upper particle's path and (b) kissing time in sedimentation of two rigid particles in a vertical channel

| | | |
|------------------------------------|----------------|---|
| شتاب گرانش | \vec{g} | برخورد به دو شکل کلی الاستیک و مستهلک کننده تقسیم می‌شود. این نیروی برخورد رابطه مستقیم با میزان فرورفتگی و سرعت نسبی دو ذره نسبت به یکدیگر دارد. به کارگیری این روش باعث ایجاد یک مدل واقعی تری از برخورد خواهد شد. جهت صحت سنجی مدل عددی حاضر، هریک از اجزای این روش ترکیبی به‌طور جداگانه مورد صحت‌سنجی قرار خواهد گرفت. بدین منظور برخورد دو ذره صلب دایروی برای معتبرسازی روش اجزا گسسته و سقوط تک‌ذره صلب دایروی داخل کانال عمودی حاوی سیال نیوتونی برای معتبرسازی روش مرز غوطه‌ور- شبکه بولتزن استفاده شده است. در نهایت سقوط دو ذره صلب دایروی در کانال عمودی و رفتار درفتینگ، کیسینگ و تامبلینگ مورد مطالعه قرار گرفته شده است. نتایج نشان می‌دهد که نحوه حرکت ذرات داخل کانال به راحتی و با دقت قابل قبولی توسط این روش قابل شبیه‌سازی است. همین‌طور اثر پارامترهای فیزیکی نظیر ضریب بازگشت و اصطکاک بر رفتار ذرات هنگام سقوط بررسی شده است. نتایج نشان می‌دهد که ضریب بازگشت ذرات تغییر چندانی در مسیر حرکت ذرات ایجاد نخواهد کرد. همچنین اصطکاک باعث افزایش زمان کیسینگ می‌شود. |
| طول واحد شبکه محاسباتی | h | |
| عرض کانال | W | |
| ممان سطح | I | |
| ممان اینرسی سیال حول مرکز جسم جامد | I_f | |
| ممان اینرسی ذره حول مرکز | I_s | |
| ضریب سختی عمودی | k_n | |
| ضریب سختی مماسی | k_t | |
| جرم ذره | M | |
| جرم کاهش یافته | m_{ij} | |
| جرم سیال | M_f | |
| جرم جسم | M_s | |
| گشتاور کلی حاصل از برخورد دو ذره | $M_{c,p-p}^i$ | |
| بردار یکه | n_{ij} | |
| فشار نقاط اویلری | p_i | |
| موقعیت ذره در شبکه بولتزن | \vec{r} | |
| مکان نقاط لاگرانژی | \vec{r}_b | |
| مکان مرکز جرم | \vec{r}_c | |
| مختصات محل برخورد دو ذره به هم | r_c^{ij} | |
| مکان نقاط شبکه فنر | \vec{r}_i | |
| بردار مکان نقاط اویلری | \vec{r}_{ij} | |
| زمان | t | |
| بردار مماس در محل برخورد | t_{ij} | |
| زمان برخورد | T_c | |
| | | معرفی نمادها |
| | | E_Y مدول الاستیسیته |
| | | \vec{e}_i بردار سرعت ذره |
| | | e_n ضریب بازگشت پذیری |
| | | $F_{c,p-p}^i$ نیروی کلی حاصل از برخورد دو ذره |
| | | f_i تابع توزیع چگالی ذره |
| | | f_i^{eq} تابع توزیع تعادلی چگالی ذره |
| | | F_i تابع توزیع گسسته نیروی خارجی |
| | | \vec{F}_{ij} چگالی نیروی خارجی بر روی نقاط اویلری |
| | | $\vec{F}_{ij}^{boundary}$ نیروی اندرکنش سیال و سازه |
| | | $F_{damp,n}^{j \rightarrow i}$ نیروی مستهلک شونده عمودی بین دو ذره |
| | | \vec{F}_{ij}^{ext} نیروی خارجی |
| | | $F_{res,n}^{j \rightarrow i}$ نیروی الاستیک عمودی بین دو ذره |
| | | $F_{st}^{j \rightarrow i}$ نیروی چسبندگی بین دو ذره |

- Fluid Mechanics, 30(1) (1998) 329-364.
- [2] D. Yu, R. Mei, L.-S. Luo, W. Shyy, Viscous flow computations with the method of lattice Boltzmann equation, Progress in Aerospace Sciences, 39(5) (2003) 329-367.
- [3] Z.-G. Feng, E.E. Michaelides, The immersed boundary-lattice Boltzmann method for solving fluid-particles interaction problems, Journal of Computational Physics, 195(2) (2004) 602-628.
- [4] M.-C. Lai, C.S. Peskin, An Immersed Boundary Method with Formal Second-Order Accuracy and Reduced Numerical Viscosity, Journal of Computational Physics, 160(2) (2000) 705-719.
- [5] Z.-G. Feng, E.E. Michaelides, Proteus: a direct forcing method in the simulations of particulate flows, Journal of Computational Physics, 202(1) (2005) 20-51.
- [6] X.D. Niu, C. Shu, Y.T. Chew, Y. Peng, A momentum exchange-based immersed boundary-lattice Boltzmann method for simulating incompressible viscous flows, Physics Letters A, 354(3) (2006) 173-182.
- [7] A. Dupuis, P. Chatelain, P. Koumoutsakos, An immersed boundary-lattice-Boltzmann method for the simulation of the flow past an impulsively started cylinder, Journal of Computational Physics, 227(9) (2008) 4486-4498.
- [8] S.K. Kang, Y.A. Hassan, A comparative study of direct-forcing immersed boundary-lattice Boltzmann methods for stationary complex boundaries, International Journal for Numerical Methods in Fluids, 66(9) (2011) 1132-1158.
- [9] J. Wu, C. Shu, Implicit velocity correction-based immersed boundary-lattice Boltzmann method and its applications, Journal of Computational Physics, 228(6) (2009) 1963-1979.
- [10] Z. Guo, C. Zheng, B. Shi, Discrete lattice effects on the forcing term in the lattice Boltzmann method, Physical Review E, 65(4) (2002) 046308.
- [11] S.-W. Su, M.-C. Lai, C.-A. Lin, An immersed boundary technique for simulating complex flows with rigid boundary, Computers & Fluids, 36(2) (2007) 313-324.
- [12] D.V. Le, B.C. Khoo, K.M. Lim, An implicit-forcing immersed boundary method for simulating viscous flows in irregular domains, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 197(25) (2008) 2119-2130.
- [13] A.M. Ardekani, S. Dabiri, R.H. Rangel, Collision of multi-particle and general shape objects in a viscous fluid, Journal of Computational Physics, 227(24) (2008) 10094-10107.
- [14] R.H. Davis, Effects of surface roughness on a sphere sedimenting through a dilute suspension of neutrally
- زمان نیم سیکل برخورد T_{max}
- سرعت اویلری \vec{u}
- سرعت قبل برخورد U_0
- سرعت مطلوب در نقاط لاگرانژی \vec{U}_b^{desire}
- سرعت میانبایی شده از نقاط اویلری بدون حضور چگالی نیرو \vec{u}_b^{nof}
- سرعت مرکز جرم ذره در گام زمانی \vec{U}_c^n
- اندازه سرعت ورودی U_∞
- تابع وزنی w_i
- میزان فرورفتگی دو ذره در هم δ_{ij}
- گام زمانی δt
- گام مکانی δx
- طول قوس گسسته روی مرز جامد Δs_b
- المان حجم روی مرز جسم ΔV_b
- میزان فرورفتگی مماسی ε
- ضریب استهلاک دینامیکی عمودی λ_n
- ضریب استهلاک دینامیکی مماسی γ_t
- ویسکوزیته دینامیکی μ
- ویسکوزیته سینماتیکی و ضریب پواسون ν
- چگالی سیال ρ
- تنش σ
- زمان آسایش منفرد τ
- سرعت زاویه‌ای ذره در گام زمانی $\vec{\Omega}_c^n$

۶- مراجع

- [1] S. Chen, G.D. Doolen, LATTICE BOLTZMANN METHOD FOR FLUID FLOWS, Annual Review of

- motion of spherical and non-spherical fuel particles in combustion chambers, *Granular Matter*, 3(4) (2001) 231-266.
- [28] M. Kodam, R. Bharadwaj, J. Curtis, B. Hancock, C. Wassgren, Cylindrical object contact detection for use in discrete element method simulations. Part I – Contact detection algorithms, *Chemical Engineering Science*, 65(22) (2010) 5852-5862.
- [29] F.Y. Fraige, P.A. Langston, G.Z. Chen, Distinct element modelling of cubic particle packing and flow, *Powder Technology*, 186(3) (2008) 224-240.
- [30] P.A. Cundall, Formulation of a three-dimensional distinct element model—Part I. A scheme to detect and represent contacts in a system composed of many polyhedral blocks, *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts*, 25(3) (1988) 107-116. P. A. Thompson and G. S. Grest, "Granular flow: friction and the dilatancy transition," *Physical Review Letters*, vol. 67, p. 1751, 1991.
- [31] P.A. Thompson, G.S. Grest, Granular flow: Friction and the dilatancy transition, *Physical Review Letters*, 67(13) (1991) 1751-1754.
- [32] G.H. Ristow, Dynamics of granular materials in a rotating drum, *Europhysics Letters (EPL)*, 34(4) (1996) 263-268.
- [33] P.W. Cleary, DEM prediction of industrial and geophysical particle flows, *Particuology*, 8(2) (2010) 106-118.
- [34] W. Cleary Paul, Large scale industrial DEM modelling, *Engineering Computations*, 21(2/3/4) (2004) 169-204.
- [35] C.-Y. Wu, A.C.F. Cocks, Numerical and experimental investigations of the flow of powder into a confined space, *Mechanics of Materials*, 38(4) (2006) 304-324.
- [36] A. Amiri Delouei, M. Nazari, M.H. Kayhani, S.K. Kang, S. Succi, Non-Newtonian particulate flow simulation: A direct-forcing immersed boundary–lattice Boltzmann approach, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 447 (2016) 1-20.
- [37] D. Wan, S. Turek, Direct numerical simulation of particulate flow via multigrid FEM techniques and the fictitious boundary method, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 51(5) (2006) 531-566.
- [38] J. Wu, C. Shu, Particulate flow simulation via a boundary condition-enforced immersed boundary-lattice Boltzmann scheme, *Communications in Computational Physics*, 7(4) (2010) 793.
- buoyant spheres, *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics*, 4(12) (1992) 2607-2619.
- [15] M.L. Ekiel-Jezewska, F. Feuillebois, N. Lecoq, K. Masmoudi, R. Anthore, F. Bostel, E. Wajnryb, Hydrodynamic interactions between two spheres at contact, *Physical Review E*, 59(3) (1999) 3182-3191.
- [16] M.L. Ekiel-Jezewska, N. Lecoq, R. Anthore, F. Bostel, F. Feuillebois, Rotation due to hydrodynamic interactions between two spheres in contact, *Physical Review E*, 66(5) (2002) 051504.
- [17] J. Zhang, L.-S. Fan, C. Zhu, R. Pfeffer, D. Qi, Dynamic behavior of collision of elastic spheres in viscous fluids, *Powder Technology*, 106(1) (1999) 98-109.
- [18] L. Jian-Zhong, W. Ye-Long, J.A. Olsen, Sedimentation of Rigid Cylindrical Particles with Mechanical Contacts, *Chinese Physics Letters*, 22(3) (2005) 628-631.
- [19] R. Glowinski, T.W. Pan, T.I. Hesla, D.D. Joseph, A distributed Lagrange multiplier/fictitious domain method for particulate flows, *International Journal of Multiphase Flow*, 25(5) (1999) 755-794.
- [20] A.M. Ardekani, R.H. Rangel, Numerical investigation of particle–particle and particle–wall collisions in a viscous fluid, *Journal of Fluid Mechanics*, 596 (2008) 437-466.
- [21] R. Glowinski, Finite element methods for incompressible viscous flow, in: *Handbook of Numerical Analysis*, Elsevier, 2003, pp. 3-1176.
- [22] P.A. Cundall, O.D.L. Strack, A discrete numerical model for granular assemblies, in: *The Essence of Geotechnical Engineering: 60 years of Géotechnique*, pp. 305-329.
- [23] A. Wachs, A DEM-DLM/FD method for direct numerical simulation of particulate flows: Sedimentation of polygonal isometric particles in a Newtonian fluid with collisions, *Computers & Fluids*, 38(8) (2009) 1608-1628.
- [24] A. Wachs, L. Girolami, G. Vinay, G. Ferrer, Grains3D, a flexible DEM approach for particles of arbitrary convex shape — Part I: Numerical model and validations, *Powder Technology*, 224 (2012) 374-389.
- [25] B. Afra, M. Nazari, M.H. Keyhani, Proposing Immersed Boundary-Lattice Boltzmann-Lattice Spring Algorithm for Simulation of 2-D Deformable Plate in Steady Flow, *Amirkabir Journal of Mechanical Engineering*, 50(4) (2018) 683-696 (In Persian).
- [26] Background in Multiphase Flows with Reactions, in: *Fundamentals of Turbulent and Multiphase Combustion*, pp. 509-575.
- [27] A. Džiugys, B. Peters, An approach to simulate the

برای ارجاع به این مقاله از عبارت زیر استفاده کنید:

Please cite this article using:

B. Afra, M. Nazari, M.H. Kayhani, Simulation of Two Circular Particles Falling in Vertical Channel: Combination of Immersed Boundary Lattice Boltzmann Method and Discrete Element Method, *Amirkabir J. Mech. Eng.*, 51(2) (2019) 313-328.

DOI: 10.22060/mej.2017.12532.5359

