



بررسی رشد دو ترک پادمتقارن در ورق بر اثر کشش لبه‌ها با سرعت‌های مختلف با استفاده از تئوری پری دینامیک

میثم شکوری^{۱*}، سید روح‌الله کاظمی^۲

۱- دانشکده مهندسی هوافضا، دانشگاه سمنان، سمنان، ایران

۲- دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه گیلان، رشت، ایران

تاریخچه داوری:

دریافت: ۱۴ بهمن ۱۳۹۵
بازنگری: ۱۲ فروردین ۱۳۹۶
پذیرش: ۳۱ اردیبهشت ۱۳۹۶
ارائه آنلاین: ۱۷ خرداد ۱۳۹۶

کلمات کلیدی:

تئوری پری دینامیک
ترک پادمتقارن
چند شاخه شدن
سرعت بارگذاری

چکیده: با وجود توسعه مدل‌های پیش‌بینی شروع و رشد ترک، این موضوع هنوز یکی از چالش‌های عمده در مکانیک محیط‌های پیوسته است. مشکل اصلی در فرمول‌بندی ریاضی این موضوع به این علت به وجود می‌آید که فرض می‌شود جسم پس از تغییر شکل هنوز محیط پیوسته باقی می‌ماند. بنابراین، ساختار ریاضیاتی مساله با به وجود آمدن یک ناپیوستگی (مانند ترک و شکست) دچار مشکل می‌شود. این اتفاق بدین دلیل رخ می‌دهد که تئوری کلاسیک از معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی برای تشریح فضای مادی استفاده می‌کند و این مشتقات جزئی در محل ناپیوستگی تعریف نشده است. برای غلبه بر این محدودیت، روش پری دینامیک برای مدل‌سازی مسائل شامل ناپیوستگی معرفی شده که در آن ناپیوستگی‌هایی مانند ترک و شکست در سازه به‌عنوان نوعی دیگر از تغییر شکل در نظر گرفته می‌شود. در این مقاله مساله رشد ترک در ورق‌ها با دو ترک پادمتقارن تحت کشش بررسی شده و پس از صحنه‌گذاری نتایج با مطالعات موجود، اثر سرعت اعمال بار کششی بر نحوه رشد ترک مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج این تحقیق نشان می‌دهد که روش پری دینامیک توانایی بالایی در شبیه‌سازی رفتار سازه با هر سرعت بارگذاری را دارد و سرعت اعمال بار تاثیر مستقیمی بر نحوه رشد ترک و ایجاد پدیده چند شاخه شدن ترک دارد.

۱- مقدمه

تحلیل رشد ترک در مواد ترد با بارگذاری استاتیکی و دینامیکی یکی از موضوعات بسیار جذاب و پرکاربرد در علوم مختلف مهندسی مکانیک، هوافضا، عمران و ... بوده است. رشد ترک دینامیکی می‌تواند به‌خاطر مسائل مختلفی مانند ضربه و یا اعمال بار دینامیکی بر جسم حاوی ترک بوجود آید. این پدیده باعث رشد ترک در جسم شده و بسته به میزان و سرعت بار وارده، شکل‌های مختلفی از رشد ترک را خواهیم داشت. همین موضع باعث شده است تا مطالعات زیادی بر روی این پدیده صورت گیرد.

در حال حاضر، روش‌های تحلیلی و عددی متنوعی برای پیش‌بینی رفتار سازه‌ها در برابر بارگذاری‌های مختلف توسعه داده شده و مورد استفاده قرار می‌گیرد. روش‌های مرسوم در تحلیل تغییرشکل در سازه‌ها عموماً سعی در حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی دارد که از تئوری‌های کلاسیک مکانیک محیط پیوسته به دست آمده‌اند. از آن‌جا که در این معادلات نیازمند دانستن مشتقات جابه‌جایی در دامنه حل هستیم، معمولاً نمی‌توان از آن‌ها در مدل‌سازی ناپیوستگی‌های حاصل از خرابی در سازه استفاده کرد، زیرا در این مناطق معادلات دیفرانسیل یادشده حاکم نیستند. این مشکل در تمام کدهای حل عددی بر مبنای مکانیک محیط پیوسته مانند روش اجزا محدود و ... نیز وجود دارد. در این روش‌ها نیازمند استفاده از تئوری‌های مکانیک شکست

در محل ناپیوستگی هستیم تا این معادلات به طور مستقیم در محل ترک اعمال نشوند. این موضوع محدودیت‌هایی را در به‌کارگیری این معادلات کل سازه ایجاد می‌کند.

حل معادلات در نوک ترک در تئوری محیط‌های پیوسته کلاسیک، منجر به تنش‌های بی‌نهایت (منفرد) می‌شود. این موضوع برای اولین بار در مطالعه‌ای که توسط گریفیث [۱] انجام گرفت اثبات شد و این موضوع منجر به معرفی تئوری مکانیک خطی الاستیک شکست^۲ در محیط پیوسته شد.

برخی فرضیات و محدودیت‌های روش تئوری مکانیک خطی الاستیک شکست عبارتند از:

- ۱- لازم است که یک ترک پیش‌ساخته در جسم وجود داشته باشد.
- ۲- تنش در نوک ترک بی‌نهایت است.
- ۳- شروع ترک و رشد آن به طور جداگانه بررسی می‌شود (با معرفی معیارهای کمکی مانند سرعت بحرانی آزادشدن انرژی^۳).
- ۴- برای تشخیص جهت رشد ترک نیز نیاز به معیاری جداگانه است. با وجود تمام این تمهیدات، مساله شروع ترک در تئوری مکانیک خطی الاستیک شکست هنوز هم یک مسئله حل نشده باقی مانده است. با توجه

1 Singular

2 Linear Elastic Fracture Mechanics (LEFM)

3 Critical energy release rate

به وجود تنش منفرد، محاسبه دقیق شدت تنش یا سرعت آزادشدن انرژی کاری مشکل بوده و به پارامترهای مختلفی مانند نوع بارگذاری، هندسه، و روش حل عددی وابسته است. در نتیجه، درک و پیش‌بینی روند شکست مواد در مکانیک کلاسیک پیچیدگی‌های فراوانی دارد. این موضوع به دلیل وجود انواع مکانیسم‌های مرتبط با مرز دانه، نابجایی‌ها، میکروترک‌ها، ناهمسانگردی، و غیره است که هر کدام از آن‌ها در مقیاسی مشخص دارای نقش مهمی می‌شود.

یکی دیگر از معضلاتی که در مدل‌سازی ترک در مکانیک کلاسیک وجود دارد این است که بسیاری از آزمایشات نشان می‌دهد که مواد با ترک‌های کوچک‌تر دارای مقاومت به شکست بالاتری نسبت به همان مواد با ترک‌های بزرگ‌تر هستند. در حالی که تئوری محیط پیوسته کلاسیک هنوز هم مستقل از اندازه ترک است [۲]. علاوه بر این، مکانیک کلاسیک پیش‌بینی هیچ‌گونه پراکندگی را در انتشار امواج الاستیک در ماده نمی‌کند، در صورتی که نتایج آزمایش‌ها حاکی از پراکندگی قابل توجه در امواج الاستیک با طول موج کوتاه است [۳].

برای غلبه بر این محدودیت، در سال‌های اخیر، روش پری‌دینامیک برای مدل‌سازی مسایلی که شامل ناپیوستگی هستند معرفی شده است. هدف از این روش - که جزء روش‌های مکانیک غیر محلی^۱ دسته‌بندی می‌شود- این است که ناپیوستگی‌هایی مانند ترک و شکست در سازه را به عنوان نوعی دیگر از تغییر شکل در نظر بگیرد تا نیازی به تمهیدات ریاضیاتی جدید در این حالت‌ها نباشد. این روش اولین بار در سال ۲۰۰۰ توسط سیلینگ [۴] و پس از آن به طور کامل‌تر در سال ۲۰۰۵ توسط سیلینگ و عسکری [۵] برای مدل‌سازی ناپیوستگی‌ها ارائه شده است. در این روش، فرض مشتق‌پذیر بودن جابه‌جایی‌ها در سازه وجود ندارد و در عوض، ذرات در سازه به خاطر وجود نیروهای بین ذرات در فاصله معینی از یکدیگر قرار دارند. به این فاصله در روش پری‌دینامیک باند^۲ می‌گویند. از آنجا که این روش بر مبنای معادلات انتگرالی بسط یافته است، می‌توان آن را به طور مستقیم در ناپیوستگی‌ها اعمال کرد. خرابی در سازه در مدل پری‌دینامیک به صورت از بین رفتن باندها به شکل برگشت ناپذیر تعریف می‌شود. این خرابی وقتی اتفاق می‌افتد که یک باند در کشش یا فشار بیش از مقدار بحرانی کشیده یا فشرده شود. در این حالت نیروی بین ذرات نیز از بین خواهد رفت. یکی از مهم‌ترین قابلیت‌های این روش، این است که می‌تواند شروع ترک و شکست را در نقاط مختلف سازه به همراه پیشروی و اثرات آن‌ها بر یکدیگر و بر دینامیک کل سازه نشان دهد. این روش نیازمند اعمال قانون رشد ترک به طور جداگانه برای مدل‌سازی شروع ترک^۳، رشد^۴، چند شاخه شدن^۵، ناپایداری^۶، سرعت و جهت ترک نیست و تمام این پدیده‌ها در

- 1 Non-local
- 2 Bond
- 3 Initiation
- 4 Growth
- 5 Branching
- 6 Instability

معادلات حرکت و معادلات ساختاری سازه آمده است. همچنین، مزیت دیگر این روش، که در مدل‌سازی مواد مرکب لایه‌ای مورد توجه است، این است که مواد در لایه‌های مختلف می‌توانند به صورت جداگانه دچار خرابی و تغییر شکل شوند و نیازی به در نظر گرفتن فرضیات هموار بودن^۷- مانند آنچه در مکانیک کلاسیک وجود دارد- نیست [۶].

آنچه در این مقاله مورد مطالعه قرار گرفته، توانایی روش پری‌دینامیک در پیش‌بینی مسیر رشد ترک در مواد ترد در سرعت‌های بارگذاری مختلف است. در حال حاضر در شبیه‌سازی رشد ترک در مواد ترد معمولاً از روش‌های مبتنی بر اجزا محدود استفاده می‌شود. یکی از مشکلاتی که در این روش‌ها وجود دارد امکان واگرایی پاسخ در سرعت‌های بارگذاری بالاست [۷]. در این موارد نیاز است تا تمهیداتی برای جلوگیری از واگرایی پاسخ در سرعت‌های بارگذاری مختلف اندیشیده شود. از آنجا که مبنای روابط در روش پری‌دینامیک بر معادلات دینامیکی حرکت است واگرایی در سرعت‌های بارگذاری بالا به وجود نخواهد آمد. در مجموع در این تحقیق دو موضوع زیر نشان داده شده است:

- استفاده از روش پری‌دینامیک در تحلیل رشد ترک در مواد ترد
 - عدم ایجاد واگرایی در جواب‌ها در سرعت‌های بارگذاری بالا
- در این مقاله پس از ارائه مقدمات، در بخش بعد اصول تئوری پری‌دینامیک توضیح داده شده است. در بخش سوم مساله مورد بررسی معرفی شده و در بخش چهارم نتایج به دست آمده ارائه گردیده و در نهایت جمع‌بندی مربوطه آورده شده است.

۲- تئوری پری‌دینامیک

تئوری پری‌دینامیک، فرمول‌بندی مجدد معادلات حرکت در مکانیک جامد با استفاده از معادلات انتگرالی در مکان است که استفاده از آن را در حضور ناپیوستگی‌هایی مانند ترک و ... امکان‌پذیر می‌کند. همچنین شکست در ماده نیز به عنوان نوعی از جابه‌جایی در روابط پری‌دینامیک وجود دارد. بنابراین امکان مدل‌سازی شروع و گسترش ترک در هر جهت دلخواهی در این روابط بدون نیاز به به کارگیری معادلات اضافی فراهم است.

در تئوری پری‌دینامیک، نقاط مختلف به طور مستقیم توسط توابع پاسخ با یکدیگر در ارتباط هستند. این توابع پاسخ تمامی اطلاعات مربوط به ساختار ماده را در خود دارد. یکی از بخش‌های این تابع پارامتری از طول است که به آن شعاع همسایگی^۸ گفته می‌شود و با δ نمایش داده می‌شود. ارتباط بین نقاط مختلف با تغییر ابعاد این پارامتر قابل تغییر است (شکل ۱). با کاهش این فاصله اثر نقاط مختلف بر روی یکدیگر کاهش پیدا می‌کند. در واقع، مکانیک محیط پیوسته کلاسیک را می‌توان حالت خاصی از این مدل دانست که در آن شعاع همسایگی برابر صفر است. به عنوان مثال، این موضوع نشان داده شده است که با انتخاب تابع پاسخ مناسب، نظریه

7 Smoothness
8 Horizon

به منظور غلبه بر محدودیت خواص مواد، گرستل و همکاران [۱۱] مدل پری‌دینامیک میکرو قطبی را پیشنهاد کردند که علاوه بر نیروهای بین دو ذره در مدل مبتنی بر باند، گشتاورهای بین آن دو ذره نیز در نظر گرفته می‌شد. با این کار، می‌توان تمامی مقادیر واقعی ضریب پواسون را برای مواد مختلف با استفاده از مدل مبتنی بر باند تحلیل کرد. اگر چه این مدل برای رفع مشکل ضریب پواسون مناسب بود اما همچنان نمی‌توانست مشکل تراکم پذیری پلاستیک را مرتفع کند. بنابراین، سیلینگ و همکاران [۱۲] فرمول عمومی‌تری را به نام مدل حالت پایه معرفی کردند که محدودیت‌های مدل مبتنی بر باند را نداشت. مدل مبتنی بر حالت بر مفهوم حالت در پری‌دینامیک استوار است که متشکل از آرایه‌های بی‌نهایت بعدی است که تمام اطلاعات اثرات پری‌دینامیک را در بر دارد. در این مدل، در صورتی که نیروی پری‌دینامیکی موازی با جهت اتصال دو نقطه به هم باشد به آن پری‌دینامیک معمول حالت پایه^۱ و در غیر این صورت به آن پری‌دینامیک غیرمعمول حالت پایه^۲ گفته می‌شود.

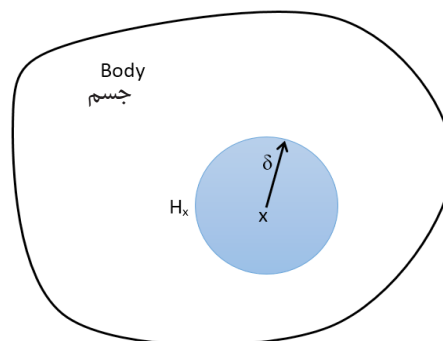


Fig. 1. Peridynamic point and Horizon

شکل ۱: نقطه و همسایگی آن در تئوری پری‌دینامیک

پری‌دینامیک تبدیل به تئوری خطی الاستیک خواهد شد [۹ و ۸]. همچنین در حالتی که طول داخلی در ابعاد اتمی در نظر گرفته شود، سیلینگ و بوبارو [۱۰] نشان دادند که نیروهای وان‌دروالس می‌توانند به عنوان بخشی از تابع پاسخ برای مدل‌سازی سازه‌های نانو ساختار مورد استفاده قرار گیرند. بنابراین، این روش توانایی عملکرد در مقیاس‌های مختلف را نشان داده است. با استفاده از این روش همچنین می‌توان ترک را با روشی بسیار واقعی‌تر از مدل مکانیک محیط پیوسته کلاسیک شبیه‌سازی کرد.

تفاوت اصلی بین تئوری پری‌دینامیک و مکانیک کلاسیک، استفاده از روابط انتگرالی به جای به کارگیری مشتقات مکانی است. این قابلیت، اجازه می‌دهد تا شروع تخریب و انتشار آن در هر جهت دل‌خواه بدون نیاز به افزودن معیارهای رشد ترک امکان‌پذیر شود.

سیلینگ [۴] انتشار امواج تنش در نوک ترک را برای اولین بار با استفاده از تئوری پری‌دینامیک بررسی کرد. نتایج این بررسی برای امواج با طول موج بالا تطابق بسیار خوبی با نتایج تئوری کلاسیک داشت. در مقیاس‌های کوچک نیز تئوری پری‌دینامیک قادر به پیش‌بینی منحنی پراکندگی غیرخطی است که در مواد واقعی به وجود می‌آید اما در مکانیک کلاسیک قابل مشاهده نیست. در مطالعه نوک ترک نیز روش پری‌دینامیک نوک ترک را به شکل نوک تیز پیش‌بینی می‌کند اما در تئوری مکانیک خطی الاستیک شکست نوک ترک به شکل سهموی پیش‌بینی می‌شود. نوک ترک سهموی در تئوری مکانیک خطی الاستیک شکست باعث ایجاد تنش بی‌نهایت در نوک ترک می‌شود.

روابط اولیه پری‌دینامیک توسط سیلینگ [۴] بعدها به نام تئوری پری‌دینامیک باندی معرفی شد. این روابط بر مبنای اثرگذاری نیروی بین دو ذره به اندازه مساوی بر روی هم بود. این فرض باعث ایجاد محدودیت در خواص مواد به کار گرفته شده می‌شود. بر این مبنای ضریب پواسون برای مواد همسانگرد می‌تواند تنها برابر ۱/۴ در حالت دو بعدی و ۱/۳ در حالت سه بعدی باشد. همچنین در روابط نهایی آن، تغییر شکل‌های حجمی و اعوجاجی از یک‌دیگر جدا نمی‌شدند. بنابراین استفاده از این روابط مدل‌سازی شرایط تراکم‌ناپذیری پلاستیک و یا استفاده از مواد واقعی را امکان‌پذیر نمی‌ساخت.

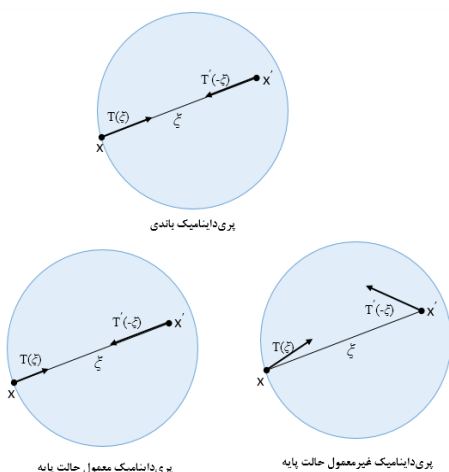


Fig. 2. Bond and State-based peridynamic

شکل ۲ تفاوت پری‌دینامیک باندی و حالت پایه (معمولی و غیرمعمولی).

سیلینگ [۱۳] مفهوم مبتنی بر حالت را گسترش داد تا تاثیرات غیرمستقیم بین نقاط مادی بر دیگر نقاط را نیز در نظر بگیرد. این مدل به نام مدل حالت دوگانه معرفی شده است. پس از آن، لهوک و سیرز [۱۴] قوانین پایستگی انرژی و مومنتوم را با استفاده از اصول مکانیک آماری کلاسیک برای تئوری پری‌دینامیک معرفی کردند. آن‌ها نشان دادند که تاثیرات غیرمحل مبنایی برای قوانین پایستگی کلاسیک هستند. همچنین سیلینگ [۱۵] استفاده از این تئوری را برای حل مسائل چند مقیاسی گسترش داد. او این کار را با معرفی روش دانه‌بندی درشت^۳ انجام داد که برطبق آن، خواص سازه در مقیاس پایین‌تر با کمک روابط سازگاری قابل انتقال به مقیاس بالاتر است. هر چند به دلیل عدم استفاده از مشتقات جابه‌جایی، تئوری پری‌دینامیک

- 1 Ordinary state-based peridynamics
- 2 Non-ordinary state-based peridynamics
- 3 Coarse grading

$$\rho \ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}_k, t) = \int_{H_{x(k)}} \mathbf{t}(\mathbf{u}(\mathbf{x}_j, t) - \mathbf{u}(\mathbf{x}_k, t), \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k) dV_{x_k} + \mathbf{b}(\mathbf{x}_k, t) \quad (1)$$

که در آن H_x یک همسایگی از \mathbf{x}_k بردار میدان جابجایی، \mathbf{b} میدان چگالی نیروی حجمی، ρ چگالی جرمی در پیکربندی مرجع، و t تابع نیروی جفتی است که مقدار آن بردار نیرویی است که ذره \mathbf{x}_k بر ذره \mathbf{x}_j اعمال می‌کند (شکل ۲). اندرکنش فیزیکی مستقیم موجود بین دو ذره \mathbf{x}_j و \mathbf{x}_k باند نامیده می‌شود. موقعیت نسبی این دو ذره با ξ_{kj} و جابجایی نسبی آن‌ها با η_{kj} نشان داده می‌شود، یعنی:

$$\xi_{kj} = \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k \quad (2)$$

$$\eta_{kj} = \mathbf{u}(\mathbf{x}_j, t) - \mathbf{u}(\mathbf{x}_k, t) \quad (3)$$

باید توجه داشت که $\xi + \eta$ نشان دهنده بردار مکان نسبی بین ذرات (پس از تغییر وضعیت) است [۵]. برای ماده داده شده شعاع مثبتی به اندازه δ در نظر گرفته می‌شود که معین کننده محدود همسایگی مؤثر در اندرکنش نیروها است. همچنین میزان نسبت تغییر طول بین دو نقطه مادی، که از این پس در این متن کشیدگی نامیده می‌شود، مطابق رابطه زیر معرفی می‌شود [۶]:

$$S_{kj} = \frac{|\mathbf{y}_j - \mathbf{y}_k| - |\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k|}{|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k|} \quad (4)$$

ذره مادی \mathbf{x}_k با نقاط داخل همسایگی اش (H_{x_k}) اندرکنش دارد و از تغییر شکل جمعی این مواد تأثیر می‌پذیرد، به این ترتیب بردار چگالی نیرویی \mathbf{t}_{kj} ایجاد می‌شود که بر ذره مادی \mathbf{x}_k اثر می‌کند. این نیرو، نیرویی است که از سوی ذره مادی \mathbf{x}_j اعمال می‌شود.

یادآور می‌شود در این مقاله از تئوری پری‌دینامیک باندی استفاده شده و برای مطالعه بیشتر در مورد سایر تئوری‌ها می‌توان به برخی تحقیقات انجام شده دیگر مراجعه نمود [۶، ۲۴، ۳۴-۳۹].

با توجه به این که مسأله‌های مورد بررسی در این پژوهش به رشد ترک در یک ورق می‌پردازد و دارای ماهیت دوبعدی هستند بنابراین در ادامه به بررسی روابط تئوری پری‌دینامیک باندی در حالت دوبعدی پرداخته شده است [۶].

برای حل مسأله ترک دو بعدی، کل صفحه‌ی ورق به صورت نقاط مادی در نظر گرفته می‌شود. همسایگی هر یک از این نقاط به صورت دایره‌ای (استوان‌های با ارتفاع برابر ضخامت ورق) به شعاع δ در نظر گرفته می‌شود که تعدادی از نقاط اطراف نقطه مورد نظر را در بر گرفته است. انتگرال‌گیری نسبت به زمان از معادلات پری‌دینامیک به صورت صریح و با استفاده از روش تفاضل پس‌رو یا پیش‌رو انجام می‌گیرد. بنابراین معادله (۱) را می‌توان به شکل زیر نوشت [۶]:

در ذات خود حاوی مفهوم تنش و کرنش نیست، اما، تعریف تانسور تنش نیز در چارچوب این تئوری قابل انجام است. لهوک و سیلینگ [۱۶] تانسور تنش را با استفاده از تأثیرات غیرمحملی معرفی کردند. در واقع، تنش از مقادیر نیروهای پری‌دینامیکی وارد شده بر حجم هر نقطه مادی استخراج می‌شود. هنگامی که تغییرات تنش به آرامی اتفاق بیفتد، آن‌ها نشان دادند که با صفر کردن شعاع همسایگی، تانسور تنش پری‌دینامیکی به تانسور تنش پیولا-کیرشهوف تبدیل خواهد شد.

در تئوری پری‌دینامیک نه تنها رفتار الاستیک ماده قابل اعمال است بلکه رفتار غیرخطی مواد [۱۰]، رفتار پلاستیک [۱۲ و ۱۷]، رفتار ویسکوالاستیک [۲۰-۱۸] و رفتار ویسکوپلاستیک [۲۰ و ۲۱] نیز تاکنون در این روش اعمال شده است. دایال و بهاتاچاریا [۲۲] سینتیک تغییر فاز در مواد جامد را با استفاده از پری‌دینامیک بررسی کرده‌اند. آن‌ها با مشخص کردن محل شروع ناپایداری دینامیکی، محدوده‌ای را به عنوان هسته شروع تغییر فاز مشخص کرده‌اند.

این تئوری همچنین قابلیت تشخیص شروع و رشد ترک را دارد. سیلینگ و همکاران [۲۳] شرطی برای ظهور یک ناپیوستگی (شروع ترک) در جسم الاستیک ارائه کردند. برای رشد ترک نیز تنها نیاز به داشتن پارامتر شکست بحرانی در ماده هستیم. این پارامتر در مواد ترد، طولی با نام کشیدگی بحرانی است که می‌توان آن را مربوط به سرعت بحرانی آزاد شدن انرژی مرتبط دانست [۵] و وارن و همکاران [۲۴] توانایی تئوری پری‌دینامیک غیرمعمول حالت پایه را در مشاهده شکست هم بر مبنای کرنش بحرانی معادل (اندازه‌گیری کرنش برشی) و هم بر مبنای کرنش حجمی (انبساط) نشان دادند. پس از آن، فاستر و همکاران [۲۵] پارامتری به عنوان چگالی انرژی بحرانی به عنوان یک پارامتر بحرانی جایگزین پیشنهاد کردند و همچنین ارتباط آن را با سرعت بحرانی آزاد شدن انرژی مشخص کردند. تئوری پری‌دینامیک همچنین توانایی محاسبه انتگرال \mathcal{J} را داراست که پارامتری مهم در مکانیک شکست است. سیلینگ [۲۶] آزمایش کالتوف-وینکلر را با استفاده از روش پری‌دینامیک مطالعه کرد و نشان داد این روش به خوبی می‌تواند مسیر رشد ترک را مطابق با آزمایش پیش‌بینی کند. آزمایش کالتوف-وینکلر شامل برخورد یک ضربه زننده با صفحه‌ای است که دارای دو ترک موازی پیش‌ساخته است. همچنین سیلینگ و عسکری [۲۷] شبیه‌سازی ضربه ناشی از آزمون شارپی را بر روی ترک V شکل انجام دادند. همچنین ها و بوبارو [۲۸] با موفقیت توانستند مشخصات مختلف تخریب سازه، شامل شاخه‌ای شدن ترک، ناپایداری مسیر ترک و ... را همان‌طور که در آزمایش‌ها مشخص شده بود مشاهده کنند.

براساس این تئوری، شتاب هر ذره \mathbf{x} در پیکربندی مرجع، در زمان t را می‌توان از رابطه زیر تعیین کرد [۵]:

$$\mu(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k, t) = \begin{cases} 1 & \text{if } s_{kj}(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k, t) < s_c \text{ for all } 0 < i \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (8)$$

در طول روند حل جابه‌جایی هریک از نقاط ماده و به دنبال آن کشیدگی بین دو ذره k و j یعنی s_{kj} ، محاسبه و با مقدار بحرانی مقایسه می‌شود که اگر از این مقدار تجاوز کند، تابع μ برابر صفر قرار گرفته و اندرکنش بین

دو ذره از بین می‌رود. براساس تابع μ می‌توان معیار آسیب موضعی را به صورت زیر تعریف کرد:

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = 1 - \frac{\int_H \mu(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t) dV'}{\int_H dV} \quad (9)$$

مقدار φ می‌تواند از صفر تا ۱ تغییر کند که مقدار صفر به معنای سالم بودن همه پیوندها با ذره x و مقدار ۱ به معنای از بین رفتن همه پیوندها با این ذره خواهد بود. می‌توان مقدار مناسبی را به عنوان معیار تشخیص بروز جدایش یا ترک در نقاط مختلف ماده در نظر گرفت و با محاسبه مقدار φ در هر گام از حل تعیین کرد که آیا جدایش در آن قسمت از ماده رخ داده است یا خیر. در این مقاله مقدار φ در هنگام جدایش برابر 0.38 در نظر گرفته شده است [۶].

۴- ورق تحت کشش لبه‌ها

در این پژوهش با اعمال سرعت‌های مختلف کشش بر لبه‌های بالا و پایین یک ورق مستطیل شکل، نحوه رشد دو ترک که از قبل در ورق وجود داشته است، مورد بررسی قرار گرفته است. به این منظور یک ورق مستطیل شکل با ابعاد 140 در $24/5$ میلی‌متر با دو ترک در لبه‌های چپ و راست و به طول $(2a)$ برابر با 8 میلی‌متر، به صورت متقارن نسبت به مرکز ورق در نظر گرفته شده است. جنس ورق اپوکسی-رزین در نظر گرفته شده و مشخصات مکانیکی استفاده شده در این تحلیل با توجه به [۳۵ و ۳۶] مطابق جدول ۱ است (شکل ۳).

جدول ۱ مشخصات مکانیکی ماده مورد بررسی

Table 1. Mechanical properties of studied material

مقدار	واحد	مشخصات مکانیکی
۳/۳	GPa	E
۰/۳۳	-	ν
۰/۹	MPa.m ^{-۱/۵}	k_{Ic}

$$\rho \mathbf{u}_k = \sum_{j=1}^N (\bar{\mathbf{t}}_{kj}^n - \bar{\mathbf{t}}_{jk}^n) (\nu_j V_j) + \mathbf{b}_k^n \quad (5)$$

که در آن ν_j ضریب اصلاح حجم بوده و $\bar{\mathbf{t}}_{kj}^n$ نیز معرف نیروی اندرکنش اصلاح شده پری‌دینامیک در گام زمانی شماره n است که برای مساله مورد بررسی به شکل زیر در می‌آید [۶]:

$$\bar{\mathbf{t}}_{kj}^n = \frac{\xi_{kj}^n + \eta_{kj}^n}{|\xi_{kj}^n + \eta_{kj}^n|} \times 2b\delta G_{kj} s_{kj} \quad (6)$$

$$\bar{\mathbf{t}}_{jk}^n = -\bar{\mathbf{t}}_{kj}^n$$

در رابطه بالا، G_{kj} معرف ضریب اصلاح سطح^۱ است که در ادامه معرفی شده است. همچنین b یک پارامتر پری‌دینامیک است که عبارت است از [۶]:

$$b = \frac{6\mu}{\pi h \delta^4} \quad (7)$$

که در آن μ مدول برشی است.

همان طور که مشاهده می‌شود پارامتر پری‌دینامیک b به δ و در نتیجه به محدوده همسایگی مؤثر هر ذره وابسته است. مقدار بیان شده در بالا برای حالتی است که تمام محدوده همسایگی در داخل جسم قرار گرفته باشد. مقدار این ضریب برای ذراتی که در نزدیک سطوح آزاد قرار دارند باید اصلاح شود. مقدار این ضریب اصلاح سطح (G_{kj}) را می‌توان با انتگرال‌گیری عددی از چگالی انرژی کرنشی و انبساط در هر نقطه مادی داخل جسم در شرایط یک بارگذاری ساده و مقایسه مقدار حاصل با مقدار معادل به دست آمده از روابط کلاسیک مکانیک محیط پیوسته تعیین کرد [۶].

با توجه به مطالعات انجام شده مقدار مناسب برای δ کمی بیش از D_3 در نظر گرفته شده است که Δ معرف فاصله طولی یا عرضی بین نقاط مادی می‌باشد. باید توجه داشت که اگر برای افزایش دقت، میزان Δ کاهش داده شود، مقدار طول گام‌های زمانی نیز متناسب با آن باید کاهش داده شود که این منجر به طولانی‌تر شدن زمان حل خواهد شد [۶].

۳- ایجاد و رشد ترک

در تئوری پری‌دینامیک، ترکی که از قبل در ماده وجود دارد را می‌توان با حذف اندرکنش بین ذرات ماده در محدوده‌ی ترک مدل کرد. برای مدل کردن ایجاد یا رشد ترک هم می‌توان به این صورت عمل نمود که وقتی کشیدگی بین دو ذره k و j یعنی s_{kj} ، از مقداری بحرانی مثل s_c تجاوز کند، اندرکنش بین این دو ذره از بین می‌رود. مقدار s_c را می‌توان برحسب مقدار بحرانی نرخ آزادسازی انرژی (G_c) بیان کرد [۶]. به این ترتیب می‌توان تابع μ را به صورت زیر تعریف کرد:

1 Surface correction factor

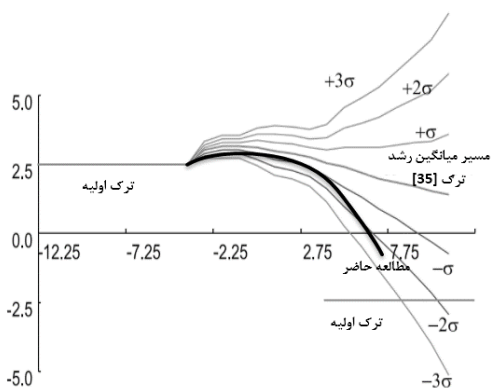


Fig. 4. Comparison of crack growth paths with [35]

شکل ۴: مقایسه مسیر رشد ترک در جسم (خط پر رنگ) و مقایسه با [۳۵] (خطوط کم رنگ)

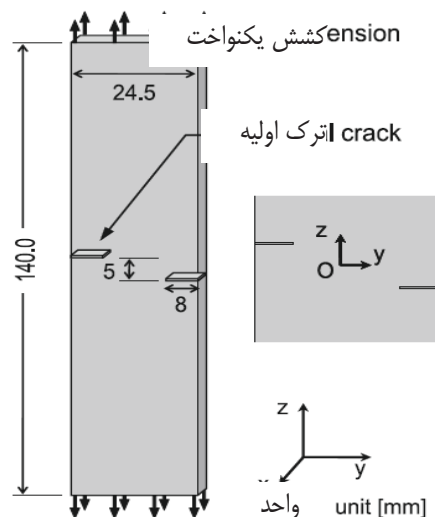


Fig. 3. Plate with an inclined crack under tension with various velocities [35]

شکل ۳: نمایی از ورق دارای ترک مورب تحت سرعت اعمالی در لبه‌ها [۳۵].

قسمت به بررسی اثر سرعت اعمال بار بر نحوه رشد ترک در جسم پرداخته می‌شود. برای این منظور، دو سرعت ۲ و ۱۰ متر بر ثانیه به عنوان نماینده سرعت متوسط و زیاد برای اعمال بار انتخاب شده و مسیر رشد ترک در سازه با دو ترک پادمقارن بررسی شده است. در شکل ۵ مسیر رشد ترک به ازای سرعت کشش ۲ متر بر ثانیه آورده شده است. همان گونه که دیده می‌شود با گذشت زمان ترک در یک مسیر تک شاخه رشد کرده و این روند تا جدایش کامل ادامه پیدا می‌کند.

در هریک از این حالات لبه‌های بالایی و پایینی ورق با دو سرعت ۲ و ۱۰ متر بر ثانیه تحت کشش قرار گرفته و با اعمال تغییراتی در کد موجود برای اعمال روش پری‌دینامیک [۶]، وضعیت ترک در گام‌های متعددی تعیین و مراحل رشد ترک به دست می‌آید. برای جلوگیری از وقوع ترک در نزدیکی لبه‌ها از بروز و رشد ترک در یک چهارم بالایی و پایینی ورق جلوگیری شده است.

هنگامی که سرعت کشش لبه‌ها به طور قابل ملاحظه‌ای افزایش می‌یابد، نحوه رشد ترک تغییرات قابل ملاحظه‌ای پیدا می‌کند. در شکل ۶ نحوه رشد ترک در جسم در حالتی که نیروی کششی با سرعت ۱۰ متر بر ثانیه اعمال می‌شود نمایش داده شده است. همان طور که در شکل دیده می‌شود، پس از یک رشد کوتاه به شکل خطی (شکل ۶ الف))، نوک ترک به صورت دمبلی شکل در می‌آید (شکل ۶ ب)) و به دنبال آن مسیر تک شاخه رشد ترک به صورت چند شاخه درآمده (شکل ۶ ج)) و در نهایت با گستردگی شاخه‌ها، جدایش کامل می‌شود (شکل ۶ د)). پیش‌بینی چندشاخگی رشد ترک بدون تغییر در معیارها و فقط با افزایش سرعت کشش را می‌توان یکی از نقاط قوت تئوری پری‌دینامیک دانست. همچنین مشاهده می‌شود که تغییر در سرعت بارگذاری باعث واگرایی نتایج نشده و رسیدن به جواب نهایی نیازمند تمهیدات جدید در اعمال روش پری‌دینامیک نیست.

۵- اعتبارسنجی

برای مقایسه و بررسی صحت نتایج به دست آمده از نتایج تحقیق [۳۵] استفاده شده است. با توجه به این که در این کار بارگذاری به صورت شبه‌استاتیکی انجام شده است در ابتدا نمونه‌ای با خواص نزدیک به نمونه‌ی بررسی شده در مقاله مذکور، تحت بارگذاری کششی با سرعت پایین قرار گرفته است. در شکل ۴ مسیر رشد ترک به دست آمده در تحلیل حاضر (خط پر رنگ) با میانگین نتایج به دست آمده در [۳۵] و انحراف از معیار آن (خطوط کم رنگ) مورد مقایسه گرفته است. لازم به ذکر است محدود مشخص شده با $\pm\sigma$ ، $\pm 2\sigma$ و $\pm 3\sigma$ مناطقی هستند که احتمال رشد ترک در این مناطق به ترتیب برابر ۶۸، ۹۵، ۴ و ۹۹، ۷ درصد است.

با توجه به شکل‌های ۵ و ۶ می‌توان نتیجه گرفت که با افزایش سرعت اعمال بار، ترک به سمت چندشاخه شدن حرکت می‌کند که باعث می‌شود شکست قطعه به شکل خرد شدن باشد. در صورتی که هنگامی که سرعت اعمال بار کم است ترک به شکل یکنواخت رشد کرده و شکست قطعه بیشتر به شکل جدا شدن از محل ترک است. این موضوع توسط نتایج آزمایش و روش‌های عددی دیگر نیز نشان داده شده است [۷]

همانگونه که مشاهده می‌شود مسیر ترک ایجاد شده از لحاظ کیفی مشابه مسیری است که در تحقیق [۳۵] به دست آمده است. این نتایج با استفاده از آزمایش نیز صحه‌گذاری شده است. به این ترتیب می‌توان نتیجه گرفت که روش پری‌دینامیک به خوبی قادر به تعیین مسیر رشد ترک در جسم بوده است.

۶- اثر سرعت بارگذاری

از آنجا که سرعت بارگذاری تأثیر بسیاری بر رفتار ماده دارد، در این

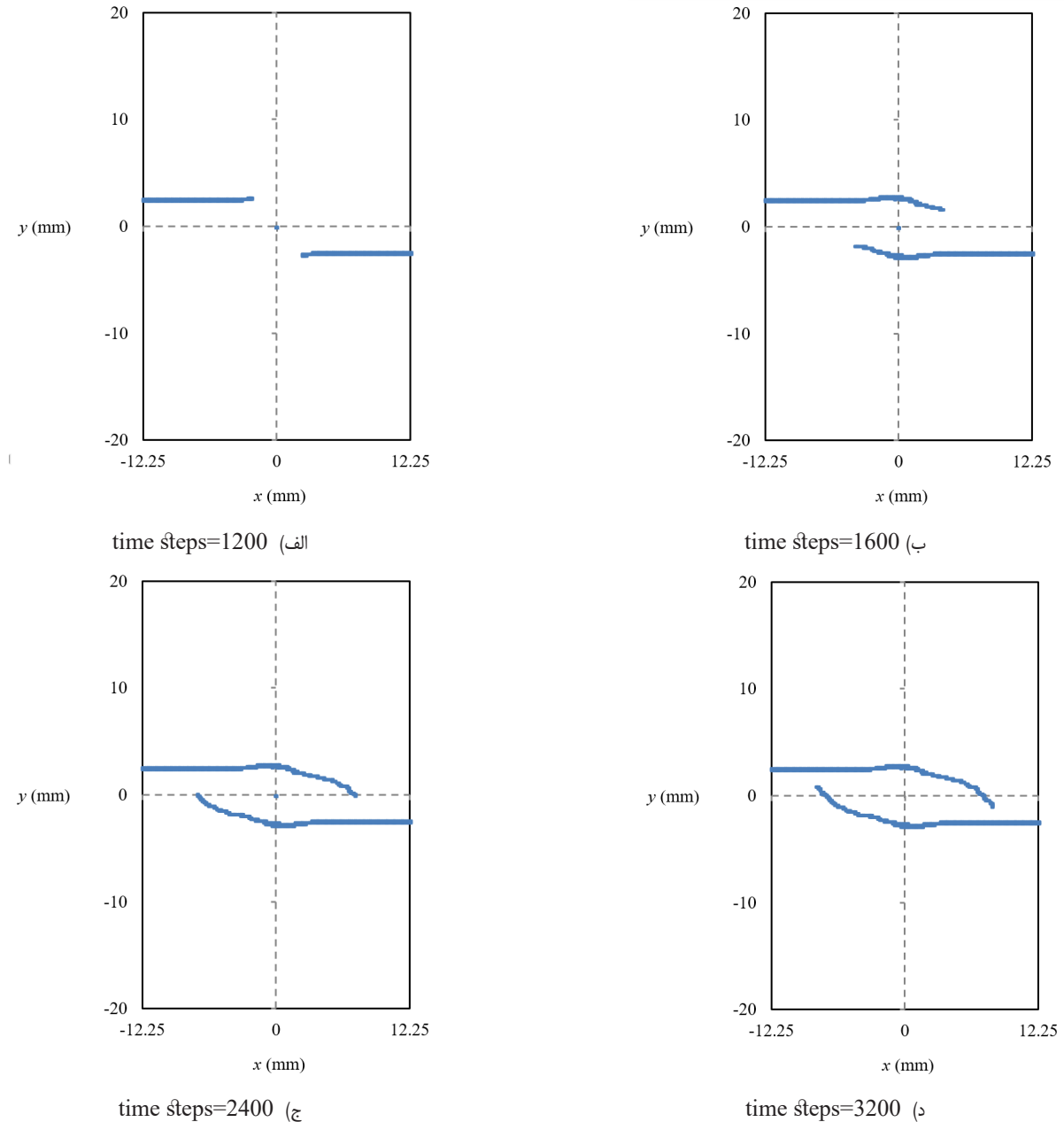


Fig. 5. Crack growth under the tensile load speed of 2 m/s

شکل ۵: رشد ترک تحت کشش لبه با سرعت ۲ متر بر ثانیه.

۷- نتیجه گیری

در این مقاله با استفاده از تئوری پری دینامیک، رشد دو ترک پادمتقارن در ورق تحت سرعت‌های مختلف کشش لبه‌ها مورد مطالعه قرار گرفت. در ابتدا نتایج به دست آمده با نتایج دیگر تحقیقات مقایسه و صحت‌گذاری شد. این موضوع بیانگر این نکته است که روش پری دینامیک از قابلیت بسیار بالایی در مدل‌سازی مسیر رشد ترک برخوردار است. همچنین اثر سرعت‌های مختلف بارگذاری بر روش حل پری دینامیک مورد بررسی قرار گرفت و مشخص شد که این روش به خوبی قادر به شبیه‌سازی سرعت‌های مختلف اعمال بار بدون ایجاد واگرایی در نتایج را داراست.

در انتها اثر سرعت کشش بر نحوه رشد ترک بررسی شد. همان گونه که انتظار می‌رفت، سرعت اعمال بار تأثیر فراوانی بر رفتار جسم دارد و مشاهده شد که نحوه رشد ترک و چند شاخه شدن ترک متأثر از این سرعت است. در حالتی که کشش لبه‌ها با سرعت پایین صورت گرفت، رشد ترک به صورت خطی و بدون چندشاخه شدن بود. اما در هنگام کشش لبه‌ها با سرعت بالا، ترک به شکل دمبلی درآمد و سپس پدیده‌ی چند شاخه شدن در ترک مشاهده شد.

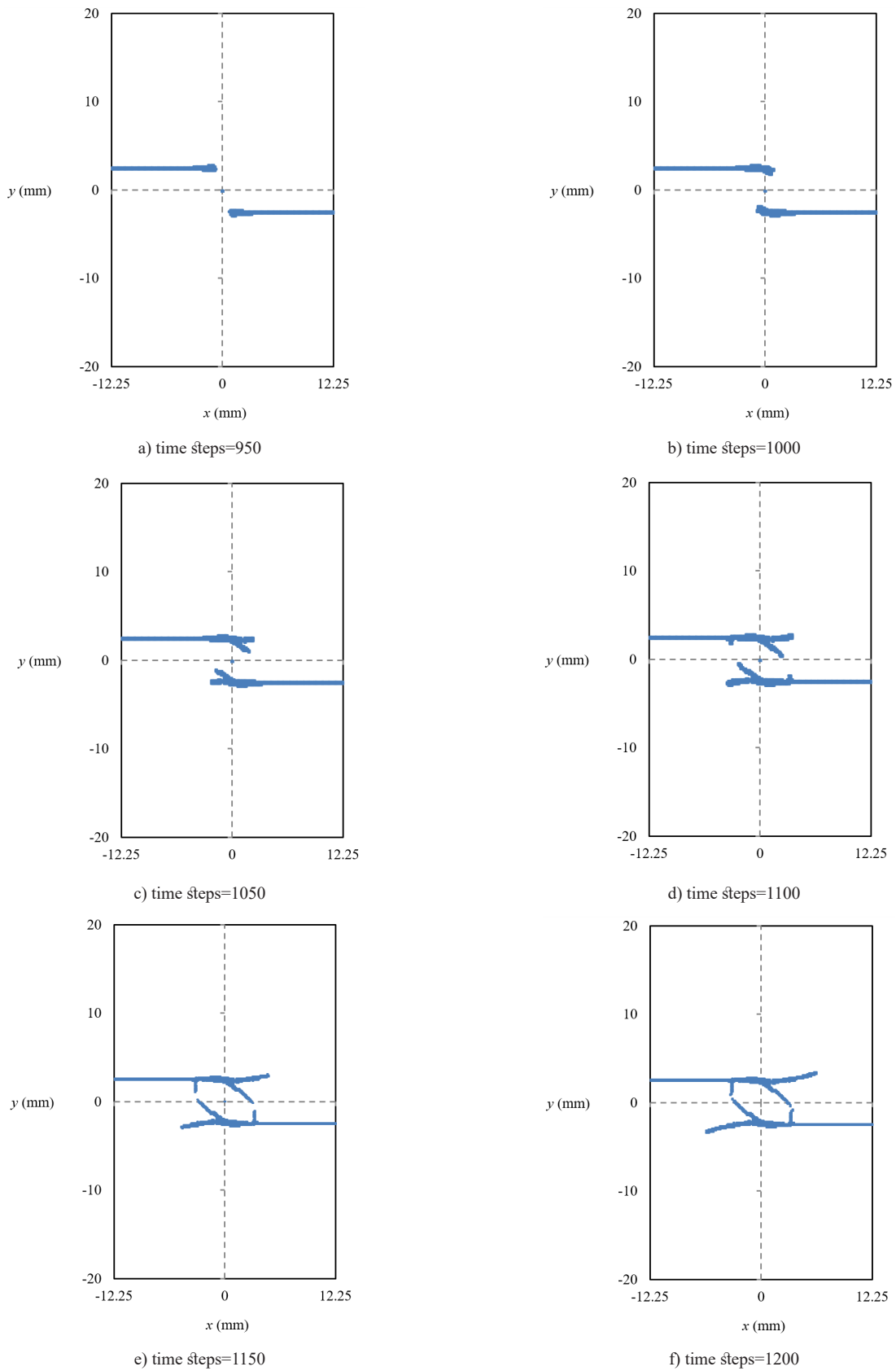


Fig. 6. Crack growth under the tensile load speed of 10 m/s
شکل ۶: رشد ترک تحت کشش لبه با سرعت ۱۰ متر بر ثانیه.

- stress tensor, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 56(4) (2008) 1566-1577.
- [17] J.A. Mitchell, A nonlocal, ordinary, state-based plasticity model for peridynamics, SAND Report, 7597 (2011).
- [18] J.A. Mitchell, A non-local, ordinary-state-based viscoelasticity model for peridynamics, *Sandia National Lab Report*, 8064 (2011) 1-28.
- [19] B. Kilic, A. Agwai, E. Madenci, Damage prediction in notched composites using peridynamic theory, (2008).
- [20] M.J. Taylor, *Numerical simulation of thermo-elasticity, inelasticity and rupture in membrane theory*, University of California, Berkeley, 2008.
- [21] J.T. Foster, S.A. Silling, W.W. Chen, Viscoplasticity using peridynamics, *International journal for numerical methods in engineering*, 81(10) (2010) 1242-1258.
- [22] K. Dayal, K. Bhattacharya, Kinetics of phase transformations in the peridynamic formulation of continuum mechanics, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 54(9) (2006) 1811-1842.
- [23] S.A. Silling, O. Weckner, E. Askari, F. Bobaru, Crack nucleation in a peridynamic solid, *International Journal of Fracture*, 162(1-2) (2010) 219-227.
- [24] T.L. Warren, S.A. Silling, A. Askari, O. Weckner, M.A. Epton, J. Xu, A non-ordinary state-based peridynamic method to model solid material deformation and fracture, *International Journal of Solids and Structures*, 46(5) (2009) 1186-1195.
- [25] J.T. Foster, S.A. Silling, W. Chen, An energy based failure criterion for use with peridynamic states, *International Journal for Multiscale Computational Engineering*, 9(6) (2011).
- [26] S. Silling, Dynamic fracture modeling with a meshfree peridynamic code, *Computational fluid and solid mechanics*, (2003) 641-644.
- [27] S.A. Silling, E. Askari, Peridynamic modeling of impact damage, in: ASME/JSME 2004 Pressure Vessels and Piping Conference, *American Society of Mechanical Engineers*, 2004, pp. 197-205.
- [28] Y.D. Ha, F. Bobaru, Characteristics of dynamic brittle fracture captured with peridynamics, *Engineering Fracture Mechanics*, 78(6) (2011) 1156-1168.
- [29] M.S. Breitenfeld, P.H. Geubelle, O. Weckner, S.A. Silling, Non-ordinary state-based peridynamic analysis of stationary crack problems, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 272 (2014) 233-250.
- [30] J. O'Grady, J. Foster, Peridynamic beams: A non-ordinary, state-based model, *International Journal of Solids and Structures*, 51(18) (2014) 3177-3183.
- [1] A.A. Griffith, *The phenomena of rupture and flow in solids*, Philosophical transactions of the royal society of london. Series A, containing papers of a mathematical or physical character, (1921) 163-198.
- [2] A.C. Eringen, C. Speziale, B. Kim, Crack-tip problem in non-local elasticity, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 25(5) (1977) 339-355.
- [3] A.C. Eringen, Nonlocal polar elastic continua, *International journal of engineering science*, 10(1) (1972) 1-16.
- [4] S.A. Silling, Reformulation of elasticity theory for discontinuities and long-range forces, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 48(1) (2000) 175-209.
- [5] S.A. Silling, E. Askari, A meshfree method based on the peridynamic model of solid mechanics, *Computers & Structures*, 83(17-18) (2005) 1526-1535.
- [6] E. Madenci, E. Oterkus, *Peridynamic theory and its applications*, Springer, 2014.
- [7] C. Hao, L. Wijerathne, T. ICHIMURA, Stability of dynamic growth of two anti-symmetric cracks using PDS-FEM, *Journal of Japan Society of Civil Engineers, Ser. A2 (Applied Mechanics (AM))*, 68(1) (2012) 10-17.
- [8] O. Weckner, R. Abeyaratne, The effect of long-range forces on the dynamics of a bar, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 53(3) (2005) 705-728.
- [9] S.A. Silling, M. Zimmermann, R. Abeyaratne, Deformation of a peridynamic bar, *Journal of Elasticity*, 73(1-3) (2003) 173-190.
- [10] S.A. Silling, F. Bobaru, Peridynamic modeling of membranes and fibers, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 40(2-3) (2005) 395-409.
- [11] W. Gerstle, N. Sau, S. Silling, Peridynamic modeling of concrete structures, *Nuclear Engineering and Design*, 237(12-13) (2007) 1250-1258.
- [12] S.A. Silling, M. Epton, O. Weckner, J. Xu, E. Askari, Peridynamic States and Constitutive Modeling, *Journal of Elasticity*, 88(2) (2007) 151-184.
- [13] S.A. Silling, Linearized Theory of Peridynamic States, *Journal of Elasticity*, 99(1) (2010) 85-111.
- [14] R.B. Lehoucq, M.P. Sears, Statistical mechanical foundation of the peridynamic nonlocal continuum theory: Energy and momentum conservation laws, *Physical Review E*, 84(3) (2011) 031112.
- [15] S.A. Silling, A coarsening method for linear peridynamics, *International Journal for Multiscale Computational Engineering*, 9(6) (2011).
- [16] R. Lehoucq, S. Silling, Force flux and the peridynamic

- [34] E. Madenci, S. Oterkus, Ordinary state-based peridynamics for plastic deformation according to von Mises yield criteria with isotropic hardening, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 86 (2016) 192-219.
- [35] K. Oguni, M.L.L. Wijerathne, T. Okinaka, M. Hori, Crack propagation analysis using PDS-FEM and comparison with fracture experiment, *Mechanics of Materials*, 41 (2009) 1242-1252.
- [36] G. Sarego, Q. Le, F. Bobaru, M. Zaccariotto, U. Galvanetto, Linearized State-based Peridynamics for 2D problems, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, (2016).
- [31] J. O'Grady, J. Foster, Peridynamic plates and flat shells: A non-ordinary, state-based model, *International Journal of Solids and Structures*, 51(25-26) (2014) 4572-4579.
- [32] C.T. Wu, B. Ren, A stabilized non-ordinary state-based peridynamics for the nonlocal ductile material failure analysis in metal machining process, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 291 (2015) 197-215.
- [33] J. Amani, E. Oterkus, P. Areias, G. Zi, T. Nguyen-Thoi, T. Rabczuk, A non-ordinary state-based peridynamics formulation for thermoplastic fracture, *International Journal of Impact Engineering*, 87 (2016) 83-94.

برای ارجاع به این مقاله از عبارت زیر استفاده کنید:

Please cite this article using:

M. Shakouri, S. R. Kazemi, A Peridynamic Study on crack growth in plates with two anti-symmetric cracks under various tensile velocities, *Amirkabir J. Mech. Eng.*, 51(1) (2018) 43-52.

DOI: 10.22060/mej.2017.12486.5351

