تعیین تابع تبدیل متعادل کنندهٔ ژیروسکپی
در حالت سه محوره و حل آن برای حالت دو محوره

مهندس کریم موسوی نسب

مربی دانشکده مهندسی مکانیک دانشگاه صنعتی شریف

دکتر حسن ظهور

دانشیار دانشکدهٔ مهندسی مکانیک دانشگاه صنعتی شریف

چکیده

در این مقاله روابط دینامیکی حاکم بر یک متعادل‌کننده ژیروسکپی [1] از نوع سه‌درجه آزادی مورد بررسی قرار گرفته است. برای این‌کار باید توابع عملگرد تمامی اجزاء به کار رفته در این‌مکانیزم را به دست آوریم. سیستمهای به کار رفته در این مکانیزم عبارتند از:

الف. سیستم حس‌کننده سرعت زاویه‌ای و ارائه پاسخ مناسب با آن به عنوان خروجی (ژیروها).

ب. سیستم تقویت‌کننده پاسخهای ارسالی از ژیروها (تقویت‌کننده‌ها).

ج. سیستم تولید گشتاور محرکه متناسب با خروجی تقویت‌کننده‌ها (سروموتورهای محرکه).

د. سیستم انتقال گشتاور تولید شده به‌عضو تحت‌کنترل [2] به‌گونه‌ای که به موقعیت از پیش تعیین شده خود برسد.

در ابتدا تابع تبدیل هریک‌از این سیستم‌ها را تعیین کرده و باتوجه به ارتباط آنها با هم و تعیین دیاگرام جعبه‌ای کل متعادل‌کننده ژیروسکپی، تابع تبدیل آن را به دست می‌آوریم.

Determination of Transfer Function of Gyroscopic Stabilizer (Space Integrator) in Three Axes Mode and Its Solution for the Two Axes Mode

K.Mousavi Nasab, M.Sc. & H. Zohoor, Ph.D.

Mech. Eng Dept. Sharif Univ. of Tech.

ABSTRACT

This paper tried to sutdy the relationships governing a gyroscopic stabilizer with three degrees fo freedom. In order to do this, the transfer functions of all components used in the mechanism should be first obtained. The systems empolyed with in this mechanism are:

1– Angular Speed Sensing system, and presenting an appropriate response output (Gyros).

2– Amplifying system for signals transmitted from Gyros (Amplifiers).

3– Drive Torque Generating System, proportional to amplifiers' output (Drive servo – motor).

4– Generated Torque transmission system to the controlled member so as to reach its pre-determined position.

Results showed that, by using the transfer function for the whole system, and varying of different parameters of the system, desirable outcome can be reached. Obviously if we are limited to use a particular component in the system, e.g. an already existing gyro system, changes must be made in the gains of the rest of the system's components., such as servo - motors or drivers, or the gain for the amplifiers should be changed in a way that ultimately the required system is precisely controlled.

فهرست علائم بکار رفته

$\bar{\omega}$	بردار سرعت زاویه‌ای
$\bar{M}_{ij}$	بردار گشتاور (اعمال شده از طرف قاب 1 به قاب 2
ω_{ij}	مولفه‌های بردار سرعت زاویه‌ای دستگاه i نسبت به دستگاه درمختصات دستگاه j
$\bar{H}$	بردار ممنتوم زاویه‌ای
Q	ماتریس انتقال از محورهای سکو به محورهای موتور بردار ریاضی
e	ولتاژهای خروجی از ژیروها
S	ضریب حساسیت اسکالر ژیروها
J	ماتریس ممان اینرسی موثر
G	ماتریس حساسیت ژیرو به سرعت زاویه‌ای محور خروجی آن
PF	تابع عملکرد (تابع تبدیل)
i	سیستم مختصات اینرسی
cm	سیستم مختصات عضو کنترلی
Si	متعادل کننده یا انتگرالگیر فضا
b	سیستم مختصات بدنه یا پایه
θ	زاویه پیچ
ϕ	زاویه رول
ψ	زاویه یاو

مقدمه

توسط متعادل‌کننده ژیروسکپی و یا انتگرالگیر فضا[3] می‌توانیم متناسب با یک فرمان اعمال شده، و عضو تحت کنترل را با سرعت زاویه‌ای مشخصی نسبت به فضای اینرسی، علیرغم اغتشاشات موجود به گردش و یا نسبت به فضای اینرسی به‌حالت سکون درآوریم.

اساساً "این وسیله یک سرومکانیزم است که سرعت زاویه‌ای اینرسی عضو تحت کنترل را با سرعت زاویه‌ای اینرسی فرمان داده شده یا دستوری، هماهنگ می‌کند. عضو تحت کنترل می‌تواند یک توپ جنگی بزرگ یا جسم متحرک و یا سیستم مرجعی که به دستگاههای اندازه‌گیری مجهز است، باشد. اگر خروجی دستگاه موقعیت عضو کنترلی نسبت به مرجع اینرسی و ورودی آن نیز سرعت زاویه‌ای دستوری نسبت به مرجع اینرسی باشد، در آن صورت دستگاه نامبرده شده ازورودی نسبت به فضای اینرسی انتگرال می‌گیرد. تعاریف بالا را به صورت ریاضی بر حسب سرعت زاویه‌ای عضو کنترلی و به صورت برداری بیان می‌کنیم.

$$\bar{\omega}_{i(Cm)} = (PF)_{si}\ \bar{\omega}_{(Cmd)} \qquad (1)$$

که در آن:

$\bar{\omega}_{i(Cm)}$ = بردار سرعت زاویه‌ای عضو کنترلی نسبت به‌فضای اینرسی

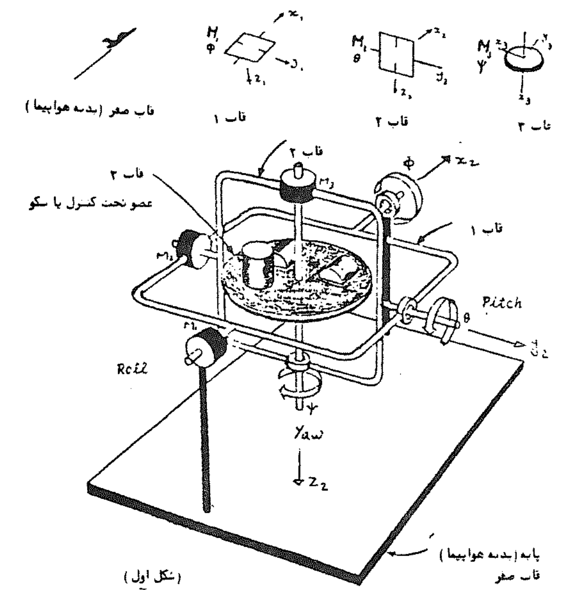
$(PF)_{si}$ = تابع عملکرد[4] متعادل‌کننده یا انتگرالگیر فضا

$\bar{\omega}_{(cmd)}$ = بردار سرعت زاویه‌ای دستوری به عضو کنترلی نسبت به فضای اینرسی می‌باشد. هدف یافتن تابع عملگرد متعادل‌کننده $(PF)_{si}$ می‌باشد.

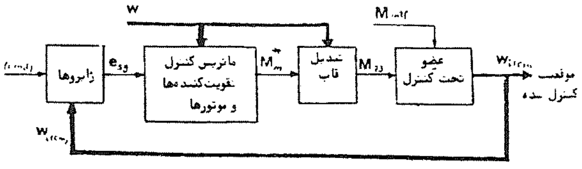
در این زمینه آقایان والتر ریلگی[5] و ویلیام جی‌دنهارد[6] در دانشگاه ام ـ آی ـ تی فعالیت چشمگیری داشته‌اند. دراین مقاله از نتایج آنها برای خالت دو درجه آزادی (دومحوره) استفاده شده است. بدیهی است برای عملکرد یک متعادل‌کننده دینامیکی، مطالعه تمامی تئوی‌های حاکم بر انواع ژیروها ضروری است که از منابع [4], [3], [2] بهره جست به گونه‌ای که بتوانیم ماتریس‌های تبدیل هرسیستم را محاسبه کنیم.

تعیین معادلات حرکت برای حالت سه درجه آزادی (سه محوره)

سیستم زیر را درنظر می‌گیریم:



(شکل اول)



در دیاگرام کنترلی حالت سه محوره، تمامی متغیرها به‌صورت بردار می‌باشد و معادلات بیان شده شکل ماتریسی دارند و هرجعبه در واقع ماتریسی است که بردار ورودی را به بردار خروجی مرتبط می‌کند.

به کمک یک معادله ماتریسی می‌توان ارتباط ω_{icm}^{cm} (مولفه‌های $\bar{\omega}_{i(cm)}$ درمختصات cm) را با $\bar{M}_m$ (برداری که عضوهای آن مقادیر گشتاورهای سه موتور سوارشده روی قاب‌ها) بیان نمود. برای سادگی فرض می‌شود که ممان اینرسی هرقاب به‌صورت بیضی ـ کروی باشد. دراین صورت اثرات ممان اینرسی کوپله قاب‌ها حذف می‌شود و ممان اینرسی‌های اصلی را درنظر می‌گیریم.

حرکت محورهای چرخش ژیرو نسبت به محورهای عضو کنترلی ، [...]یزی است که به‌صورت فیزیکی برای خروجی‌های ژیرو محسوب می‌شود برحسب ساختمان ژیروها به ولتاژهای معادل تبدیل می‌شود .
[د]رحالت استاتیکی داریم :

$$\begin{bmatrix} M_{(23)x2} \\ M_{(23)y2} \\ M_{(23)z2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{Sec}\theta & 0 & \mathrm{Tan}\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} \quad (2$$

با انتقال M_{23} به مختصات سکو (یا عضو تحت‌کنترل) داریم :

$$\begin{bmatrix} M_{(23)x3} \\ M_{(23)y3} \\ M_{(23)z3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{Cos}\,\psi & \mathrm{Sin}\,\psi & 0 \\ \mathrm{Sin}\,\psi & \mathrm{Cos}\,\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{23(x2)} \\ M_{23(y2)} \\ M_{23(z2)} \end{bmatrix} \quad ($$

[و] با ترکیب آنها

$$\begin{bmatrix} M_{(23)x3} \\ M_{(23)y3} \\ M_{(23)z3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{Cos}\,\psi\ \mathrm{Sec}\,\theta & -\mathrm{Sin}\,\psi & \mathrm{Cos}\,\psi\ \tan\theta \\ \mathrm{Sin}\,\psi\ \mathrm{Sec}\,\theta & \mathrm{Cos}\,\psi & \mathrm{Sin}\,\psi\ \tan\theta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} \quad (4)$$

اما درحالت استاتیکی داریم :

$$M_{intf} + M_{23} = 0 \quad (5)$$

که در آن M^{cm}_{intf} مولفه‌های گشتاور اغتشاشی در دستگاه مختصات عضو کنترلی می‌باشد . جایگزینی معادله (4) درمعادله(5) و معکوس نمودن آن خواهیم داشت :

$$M_m^* + QM^{cm}_{intf} = 0 \quad (6)$$

که در آن

$$Q = \begin{bmatrix} \mathrm{Cos}\,\psi\ \mathrm{Cos}\,\theta & \mathrm{Sin}\,\psi\ \mathrm{Cos}\,\theta & -\mathrm{Sin}\,\theta \\ -\mathrm{Sin}\,\psi & \mathrm{Cos}\,\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ماتریس Q انتقال از محورهای سکو به محورهای موتور را انجام می‌دهد .
در حالت دینامیکی ، گشتاور عکس‌العملی سیستم ژیروها یعنی $\bar{H}_g X \bar{\omega}_{i(cm)}$ نیز علاوه بر $\bar{M}_{intf}$ به سکو اعمال می‌گردد . گشتاور خالص در روی هر محور ، شتاب زاویه‌ای قاب به حرکت درآمده را نسبت به فضای اینرسی نتیجه می‌دهد . با مساوی قراردادن گشتاور خالص با نرخ تغییرات زمانی ممنتوم زاویه‌ای خواهیم داشت :

$$M_m^* + Q\,[M_{intf} + H^k \omega_{i(cm)}]^{cm} = Jd \qquad = JD\,\omega_m^* \quad (7)$$

H^k ماتریسی است که وقتی در $\bar{\omega}_{i(cm)}$ ضرب می‌شود ، ضرب خارجی $\bar{H}_g X \bar{\omega}_{i(cm)}$ را نتیجه می‌دهد . مولفه‌های H_z, H_y, H_x ممنتوم زاویه‌ای ژیرو درمختصات سکو می‌باشد . ω_m نیز بردار ریاضی بوده‌که مولفه‌های آن اندازه سرعت‌های زاویه‌ای هریک از موتورها است .

J ماتریس ممان اینرسی موثر است که سه موتور گشتاور آن را حس می‌کنند . درحالت کلی J با زمان تغییر می‌کند زیرا تابعی از موقعیت قاب می‌باشد . به‌طور فیزیکی موتورهای ۲ ، ۳ فقط همان اینرسی قاب‌هائی را که نسبت به موقعیتشان می‌توان آنها را داخلی فرض نمود ، حس می‌کنند و موتور 1 نیز فقط درحالتی که θ صفر نباشد ، ممان اینرسی سکو را حس می‌کند . (که این مساله توسط ضریب $\cos^2\theta$ درماتریس J بیان شده است .) زیرا قاب ۳ شتاب زاویه‌ای کل قاب را تحمل نمی‌کند .

$$H^k = \begin{bmatrix} 0 & -H_z & H_y \\ H_z & 0 & -H_x \\ -H_y & H_x & 0 \end{bmatrix}, \quad \omega_m^* = \begin{bmatrix} \omega_{(i1)x1} \\ \omega_{(i2)y2} \\ \omega_{(i3)z3} \end{bmatrix}$$

$$J = \begin{bmatrix} I_1+I_2+I_3\cos^2\theta & 0 & -I_3\mathrm{Sin}\,\theta \\ 0 & I_2+I_3 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix}$$

موتور ۳ نیز وقتی سکو شتاب می‌گیرد باید عکس‌العمل از خود نشان دهد . اگر θ صفر نباشد ، موتور باید مؤلفه‌ای از گشتاوری که موتور 1 به‌سکو اعمال می‌کند را به کار ببرد . بنابراین شتاب زاویه‌ای سکو حول محور موتور ۳ به‌عنوان گشتاوری ازموتور1 نام برده می‌شود . این مساله وجود ترم $-I_3\mathrm{Sin}\,\theta$ را درماتریس توجیه می‌کند .
حال باید ω_m^* رابه مولفه‌های سرعت زاویه‌ای سکو تبدیل کنیم . سرعت زاویه‌ای اینرسی هرقاب با سرعت زاویه‌ای اینرسی قاب قبلی فقط درنرخ زاویه‌ای قاب مربوط متفاوت است .

$$\begin{bmatrix} \omega_{(i1)x1} \\ \omega_{(i1)y1} \\ \omega_{(i1)z1} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} D\phi \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin\phi & \mathrm{Sin}\phi \\ 0 & \mathrm{Sin}\phi & \mathrm{Cos}\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{(ib)x0} \\ \omega_{(ib)y0} \\ \omega_{(ib)z0} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \omega_{(i2)x2} \\ \omega_{(i2)y2} \\ \omega_{(i2)z2} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 \\ D\theta \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathrm{Cos}\,\theta & 0 & \mathrm{Sin}\,\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\mathrm{Sin}\theta & 0 & \mathrm{Cos}\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{(i1)x1} \\ \omega_{(i1)y1} \\ \omega_{(i1)z1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \omega_{(i3)x3} \\ \omega_{(i3)y3} \\ \omega_{(i3)z3} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ D\psi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathrm{Cos}\,\psi & -\mathrm{Sin}\,\psi & 0 \\ \mathrm{Sin}\,\psi & \mathrm{Cos}\,\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{(i2)x2} \\ \omega_{(i2)y2} \\ \omega_{(i2)z2} \end{bmatrix}$$

(8)

اما داریم :

$$\omega^{cm}_{i(cm)} = \begin{bmatrix} \omega_{(i3)x3} \\ \omega_{(i3)y3} \\ \omega_{(i3)z3} \end{bmatrix} \quad \omega^{b}_{ib} = \begin{bmatrix} \omega_{(ib)x0} \\ \omega_{(ib)y0} \\ \omega_{(ib)z0} \end{bmatrix} \quad \omega^{*}_{m} = \begin{bmatrix} \omega_{(i1)x1} \\ \omega_{(i2)y2} \\ \omega_{(i3)z3} \end{bmatrix}$$

می‌توان معادلات(8)رابه صورت زیرساده نمود .

$$\omega^{cm}_{i(cm)} = A\ \omega^{*}_{m} + B\ \omega^{b}_{ib} \qquad (9)$$

که در آن

$$A = \begin{bmatrix} \cos\psi \cos\theta & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi \cos\theta & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & \cos\psi \sin\theta \sin\phi & \cos\psi \sin\theta \cos\phi \\ 0 & \sin\psi \sin\theta \sin\phi & \sin\psi \sin\theta \cos\phi \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

از معادله(9) با این فرض که ماتریس توابع زوایای قاب تقریبا "ثابت هستند ، (ماتریس‌های A و B) مشتق می‌گیریم تا به $D\omega_m^*$ موردنظر دررابطه (7) برسیم . فرض بالا به این مفهوم است که حرکت قاب‌ها همه استاتیکی است یعنی قاب‌ها از موقعیت میانگین خود خیلی دور نمی‌شوند و یا از مشتق توابع مثلثاتی زوایای قاب صرف‌نظر می‌کنیم تا به معادله خطی زیر برسیم :

$$D\omega^{*}_{m} = A^{-1} D\omega^{cm}_{i(cm)} - A^{-1} B\, D\omega^{b}_{ib} \qquad (10)$$

دترمینان ماتریس A برابر با $\cos\theta$ است . بنابراین A^{-1} تا زمانی که $\cos\theta$ صفر نشود ، معین است . وقتی $\theta = 90°$ گردد ، ω^{*}_{m} نامعین می‌شود . با جایگزینی معادله (10) درمعادله (7) ، معادله ماتریسی برای تابع تبدیل مربوط به قاب‌ها به دست می‌آید .

$$(JA^{-1} D - QH^{k})\ \omega^{cm}_{i(cm)} = M^{*}_{m} + JA^{-1} BD\omega^{b}_{ib} + QM^{cm}_{intf} \qquad (11)$$

تابع تبدیل سیستم ژیرو

به‌علت پاسخ زمانی سریع ژیروها (سه ژیروی انتگرالی یک درجه آزادی) نسبت به پاسخ زمانی انتگرالگیر فضا ، از بیان دینامیک مربوط به آن صرف نظر می‌کنیم . بردار ستونی ولتاژهای خروجی از سیستم ژیروها به کمک رابطه زیر بیان می‌گردد .

$$Deg^{cm} = S_g\ [\omega^{cm}_{(cmd)} - (I+GD)\ \omega^{cm}_{i(cm)} + (u)\omega g^{cm})] \qquad (12)$$

که در آن

$$eg^{cm} = \begin{bmatrix} e_{(sg)x} \\ e_{(sg)y} \\ e_{(sg)z} \end{bmatrix} \quad (u)\omega g^{cm} = \begin{bmatrix} (u)\omega x \\ (u)\omega y \\ (u)\omega z \end{bmatrix} \quad Sg = \frac{S_{sg} H_g}{C_g}$$

$$G = \frac{I_g}{H_g} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad I = \text{ماتریس واحد}$$

ترمهای غیرقطری ماتریس G مبین حساسیت ژیرو به سرعت زاویه‌ای محور خروجی آن می‌باشد . مکان عضوهای غیر صفر در این ماتریس بیانگر موقعیت خاص فرض شده برای تمامی محورهای هرژیرو است . با تغییر موقعیت انتخابی ، محل عضوهای غیرقطری ماتریس که عامل کوپله شدن می‌باشد ، تغییر می‌کند . S_g نیز حساسیت اسکالر ژیرو است و $e_g^{cm}, (u)\ \omega_g^{cm}$ بردارهای ریاضی هستند که به ترتیب مولفه‌های آنها معرف ولتاژ شناوری (۷) و خروجی سه ژیرو می‌باشند .

یافتن ماتریس محاسبه‌ای گشتاور

ماتریس محاسبه‌ای گشتاور ، بردار ستونی ولتاژ حاصله از سه تولیدکننده سیگنال ژیروها را به بردار ستونی‌گشتاورهای سه موتورمرتبط می‌کند و آن را با C نشان می‌دهیم .

$$M^{*}_{m} = \frac{C}{sg}\ e^{cm}_{sg} \qquad (13)$$

درفرمول بالا تمامی مشخصه‌های کنترلی را درماتریس C که تابعی از D است ، گنجانده‌ایم .

نتایج آنالیز انتگرالگیر فضایا میز تعادلی با سه محور

باحل معادلات(11) تا (13) درهروهله خواهیم داشت :

$$[JA^{-1}D^{2} + (CG - QH^{k})\ D + C]\ \omega^{cm}_{i(cm)} = C\omega^{cm}_{(cmd)} + QDM^{cm}_{intf} + JA^{-1}BD^{2}\omega^{b}_{ib} + C(u)\ \omega g^{cm} \qquad (14)$$

بافرض $C = 0$ (برای آنکه C^{-1} موجود باشد) :

$$[C^{-1}JA^{-1}D^{2} + (G - C^{-1}QH^{k})\ D + I]\ \omega^{cm}_{i(cm)} \neq \omega^{cm}_{(cmd)} + C^{-1}DM^{cm}_{intf} + C^{-1}JA^{-1}BD^{2}\omega^{b}_{ib} + (u)\omega g^{cm} \qquad (15)$$

که در آن $\omega^{cm}_{i(cm)}$ ، $\omega^{cm}_{(cmd)}$ ، M^{cm}_{intf} ، $(u)\ \omega^{cm}_{g}$ برحسب محورهای سکو ، ω^{b}_{ib} نسبت به محورهای جسم متحرک (هواپیما ، کشتی و . . .) بیان شده‌اند .

تمامی ماتریس‌ها مشخص هستند . ماتریس J بیانگر همان اینرسی موثر قاب‌ها است‌که توسط موتورها حس می‌شوند . ماتریس G ، حساسیت ژیرو را نسبت به شتاب زاویه‌ای حول محورهای خروجی آنها بیان می‌کند و ماتریس H^k نیز گشتاور عکس‌العمل ناشی از ممنتوم زاویه‌ای رتورهای ژیرو را نشان می‌دهد . درحالت کلی تمامی این سه ماتریس دارای عضوهای غیرقطری بوده که عامل کوپله شدن پارامترها می‌باشد .

به صورت تئوری ماتریس C شامل عضوهای غیرقطری است که

عضوهای غیرقطری J و G و H^k را جبران می‌کند. درعمل از عضوهای غیرقطری این ماتریسها صرف‌نظر می‌شود و C متناسب با A^{-1} به‌منظور حذف اثر عضوهای A (که توابع مثلثاتی زوایای قاب‌ها می‌باشند) ساخته می‌شود.

A ماتریس است که سرعت زاویه‌ای اینرسی موتور محرک گشتاور را به سرعت زاویه‌ای سکو در زمانی که حرکت بدنه نداریم، تبدیل می‌کند. توجه داریم که AJA^{-1} بیانگر ماتریس ممان اینرسی برحسب محورهای سکو می‌باشد.

نسبت‌های فرکانس‌های طبیعی و استهلاک سیستم سه محوره را می‌توان از دترمینان ماتریس ضریب $\omega^{cm}_{i(cm)}$ به دست آورد. درحالت کوپله بودن تعیین و ترمینان فوق حداقل نیاز به حل یک معادله درجه شش ازعملگر D دارد.

ماتریس Q فقط مولفه‌های گشتاور را از محورهای سکو به مولفه‌های حس شده در محور موتورهای منتقل می‌کند.

ماتریس B مولفه‌های حرکت بدنه را در محورهای جسم متحرک به مولفه‌های حرکت سکو در محورهای آن، (درزمانی که موتورهای محرک گشتاور سرعت زاویه‌ای اینرسی ندارند)، تبدیل می‌کند.

چون B عضوهای غیر صفر دارد، هروقت که θ غیر صفر باشد، در حالتی که قاب‌ها نسبت به هم متعامد نباشند، حرکت‌های مزاحم بدنه می‌تواند وجود داشته باشد، بطوری که گشتاور مورد نیاز برای شتاب دادن قاب‌ها توسط سکو حس می‌شود. اثر حرکت بدنه افزایش نامطلوب زاویه θ را به‌دنبال خواهد داشت تا وقتی که $\theta=90^\circ$ گردد و معادلات غیرتحلیلی شوند. در این شرایط محورهای دو قاب هم‌راستا می‌گردند و قاب‌ها عملگرد و درجه آزادی برای سکو به وجود می‌آورند و درواقع قابها قفل می‌شوند.

این مشکل را می‌توان با اضافه نمودن یک قاب دیگر برطرف نمود. تابع کنترلی برای یک سیستم چهار قاب می‌تواند به گونه‌ای باشد که حالت تعامد دو قاب داخلی را تضمین نماید.

حل معادلات بدست آمده در حالت دو محوره

دراین قسمت گشتاورهای مورد نیاز سروموتورها را برای یک متعادل‌کننده در حالتی که محدود به سیستم ژیروی مشخصی باشیم، تعیین می‌کنیم.

برای این‌کار روابط بدست آمده درحالت کلی (سه محوره) را به‌حالت مورد نظر (دومحوره با حرکت‌های سمت و برد[8]) تبدیل می‌کنیم. یعنی باید ارتباط بین مولفه‌های مختلف بکار رفته در روابط بیان گردد. باتوجه به رابطه (7) و صرف نظر کردن از M_{intf} که مربوط به‌گشتاور اغتشاشات است، داریم:

$$M^*_m + Q[H^k\cdot\omega_{i(cm)}]^{cm} = JD\omega^*_m \qquad (16)$$

که درآن ماتریس Q انتقال ازمحورهای عضو تحت‌کنترل (X_2, X_2, Z_2) را به محور موتورها (با علامت *) انجام می‌دهد. قاب بیرونی که حرکت Roll را کنترل می‌کند قاب 1، و قاب داخلی که عضو تحت کنترل می‌باشد (می‌تواند یک اسلحه باشد) و حرکت Pitch راکنترل می‌کند قاب ۲ می‌نامیم. درحالت عادی دستگاه مختصات این دوقاب برهم منطبق می‌باشند.

$$M^*_m = QM^{cm}_{12} \qquad (17)$$

M^{cm}_{12} مولفه‌های گشتاوری است که قاب ۱ به قاب ۲ برحسب مختصات عضو کنترلی که همان قاب ۲ است، وارد می‌کند.

چون‌کنترلی روی‌حرکت Azimuth یا Yaw سیستم صورت نمی‌گیرد، بنابراین $\Psi=0$ بوده و ماتریس Q از رابطه (6) برابر خواهد بود با

$$Q=\begin{bmatrix}\cos\theta & 0 & -\sin\theta\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

به همین ترتیب ماتریس‌های دیگر برابر خواهند بود با:

$$H^k=\begin{bmatrix}0 & -H_{z2} & H_{y2}\\ H_{z2} & 0 & -H_{x2}\\ -H_{y2} & H_{x2} & 0\end{bmatrix},\quad \omega^*_m=\begin{bmatrix}\omega_{(i1)x1}\\ \omega_{(i2)y2}\\ 0\end{bmatrix}$$

$$J=\begin{bmatrix}I_1+I_2 & 0 & 0\\ 0 & I_2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\quad M^*_m=\begin{bmatrix}M_1\\ M_2\\ 0\end{bmatrix}$$

I_1: ممان اینرسی قاب1 حول محور دوران موتور M_1

I_2: ممان اینرسی قاب ۲ حول محور دوران موتور M_2

این ممانها باید دقیقاً محاسبه گردند که با توجه به قاب‌های ساخته شده و ابعاد بکار رفته اینکار صورت می‌گیرد.

باتوجه به روابط (8) داریم:

$$\begin{bmatrix}\omega_{(i1)x1}\\ \omega_{(i1)y1}\\ \omega_{(i1)z1}\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}D\phi\\ 0\\ 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi\\ 0 & \sin\phi & \cos\phi\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\omega_{(ib)x0}\\ \omega_{(ib)y0}\\ \omega_{(ib)z0}\end{bmatrix} \qquad (18)$$

$$\begin{bmatrix}\omega_{(i2)x2}\\ \omega_{(i2)y2}\\ \omega_{(i2)z2}\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}0\\ D\theta\\ 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\cos\theta & 0 & \sin\theta\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\omega_{(i1)x1}\\ \omega_{(i1)y1}\\ \omega_{(i1)z1}\end{bmatrix}$$

که در آن

$$\omega^{cm}_{i(cm)}=\begin{bmatrix}\omega_{(i2)x2}\\ \omega_{(i2)y2}\\ \omega_{(i2)z2}\end{bmatrix},\quad \omega^b_{ib}=\begin{bmatrix}\omega_{(ib)x0}\\ \omega_{(ib)y0}\\ \omega_{(ib)z0}\end{bmatrix},\quad \omega^*_m=\begin{bmatrix}\omega_{(i1)x1}\\ \omega_{(i2)y2}\\ 0\end{bmatrix}$$

از روابط فوق مولفه‌های بردار ω^*_m به‌صورت زیر به دست می‌آید.

$$\omega_{(i1)x1} = D\phi + \omega_{(ib)x0} \qquad (19)$$

$$\omega_{(i2)y2} = -D\theta + \omega_{(i1)y1} = D\theta + \cos\phi\cdot\omega_{(ib)y0} - \sin\phi\,\omega_{(ib)z0}$$

که همان رابطه (9) است :

و در آن :

$$A=\begin{bmatrix} \mathrm{Cos}\theta & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 0 & \mathrm{Sin}\phi\,\mathrm{Sin}\theta & \mathrm{Cos}\phi\,\mathrm{Sin}\,\theta \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

از طرفی داریم :

$$(JA^{-b}-2H^{k})\,\omega_{i\,(cm)}^{cm}=M_{m}^{*}+JA^{-1}BD\omega_{ib}^{b}$$

که در آن

$$D=\frac{d}{dt}\qquad ,JA^{-1}=\frac{1}{\mathrm{Cos}\theta}\begin{bmatrix} I_1+I_2 & 0 & 0 \\ 0 & I_2\mathrm{Cos}\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Omega H^{k}=\begin{bmatrix} \mathrm{Sin}\theta\, H_{y2} & -H_{z2}\mathrm{Cos}\theta-H_{x2}\mathrm{Sin}\theta & H_{y2}\mathrm{Cos}\theta \\ H_{z2} & 0 & -H_{x2} \\ -H_{y2} & H_{x2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$JA^{-1}B=\frac{1}{\mathrm{Cos}\theta}\begin{bmatrix} 0 & (I_1+I_2)\,\mathrm{Sin}\phi\,\mathrm{Sin}\theta & (I_1+I_2)\,\mathrm{Cos}\,\phi\,\mathrm{Sin}\theta \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

با جایگزینی در رابطه اصلی داریم :

$$M_1=\frac{I_1+I_2}{\mathrm{Cos}\theta}\frac{d}{dt}\omega_{(i2)x2}-\mathrm{Sin}\theta\, H_{y2}\,\omega_{(i2)x2}+(H_{z2}\mathrm{Cos}\theta+H_{y2}\mathrm{Sin}\theta).\,\omega_{(i2)y2}-(I_1+I_2)\,\mathrm{Sin}\,\phi\mathrm{Tan}\theta\frac{d}{dt}\omega_{(ib)y0}-(I_1+I_2)\,\mathrm{Tan}\theta\,\mathrm{Cos}\phi\frac{d}{dt}\omega_{(ib)\,z0} \tag{20a}$$

$$M_2=I_2\frac{d}{dt}\omega(i2)\,X\dagger\quad x2-H_z\omega_{(i2)x2} \tag{20b}$$

$$O=H_{y2}\omega_{(i2)x2}-H_{x2}\omega_{(i2)y2} \tag{20c}$$

این سه معادله، معادلات اصلی حرکت برای قاب‌ها بوده و میزان گشتاور لازم برای موتورها را تعیین می‌کند .

به علت وجود موتورهای جبران کننده درسیستم ژیرو ، از ممنتوم زاویه‌ای روتورهای ژیروها یعنی H_{x2} ؛ H_{y2} ، H_{z2} صرف‌نظر می‌کنیم .

$$M_1=-(I_1+I_2)\,\mathrm{Sin}\phi\,\mathrm{Tan}\theta\frac{d}{dt}\omega_{(ib)y0}-(I_1+I_2)\,\mathrm{Tan}\theta\,\mathrm{Cos}\phi.\frac{d}{dt}\omega_{(ib)z0}+\frac{I_1+I_2}{\mathrm{Cos}\theta}\frac{d}{dt}\omega_{(i2)x2} \tag{21a}$$

$$M_2=I_2\frac{d}{dt}\omega_{(i2)x2} \tag{21b}$$

نتایج

باتوجه به نتایج بدست آمده می‌توانیم به کمک تابع تبدیل کل سیستم متعادل‌کننده و با تغییر دادن پارامترهای مختلف سیستم مذکور به نتیجه مطلوب دست یابیم . واضح است اگر محدود به استفاده از جـزء بخصوصی در ایـن سیستم باشیم مثلا" یک ژیروی معین ، باید تغییرات روی ضرایب اجزاء دیگر سیستم مانند در ایو[9] سروموتورها و یا ضریب تقویت‌کننده‌ها صورت گیرد تا درنهایت سیستم مورد نیاز دقیقا" کنترل گردد .

پاورقی :

1– Stabilizer
2– Controlled Member (cm)
3– Space Integrator
4– Performance Function
5– Walter Wrigley
6– William G. Denhard
7– Drift
8– Roll & Pitch
9– Drive

منابع :

1. Wrigley, W., W.M. Hollister, and W.G. Denhard, "Gyroscopic Theory, Design, and Instrumentation." The M.I.T. Press,1969
2. Arnold, R., and I. Maunder, "Gyrodynamics and It's Engineering Applications." Academic Press, 1974.
3. Britting, K.R., "Inertial Navigation System Analysis." Measurement systems Laboratory M.I.T., Wiely, 1975.
4. Broxmeyer, C., "Inertial Navigation systems." New York, Mc Graw – Hill, 1969.
5. Kaplan, R.H., "Modern Space Craft Dynamics and Control." Wiely, 1978.