محاسبهٔ توابع توزیع چگالی و جمعی زمان تکمیل یک پروژه

دکتر محمدتقی فاطمی‌قمی

استادیار دانشکده مهندسی صنایع دانشگاه صنعتی امیرکبیر

مهندس سعید حاجی‌ابراهیم زرگر

فارغ‌التحصیل کارشناسی ارشد دانشکده مهندسی صنایع
دانشگاه صنعتی امیرکبیر

چکیده :

در این مقاله روشی برای محاسبه دقیق توزیع زمان تکمیل یک پروژه براساس مسیر بحرانی از یک منبع s به یک مقصد t در یک شبکه جهت‌دا طرح شده که در آن زمان شاخه‌ها ، متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع نمائی هستند. برمبنای شبکه اولیه یک زنجیرمارکوفی با زمان پیوسته و حالت منفرد جذب‌کننده بنا می‌شود به‌طوری که زمان جذب به‌این حالت جذب‌کننده از حالت اولیه برابر زمان مسیر بحرانی در شبکه اولیه است. نشار داده شده که فضای حالت این زنجیر مارکوفی مجموعه کلیه برشهای می‌نیمم(t و s) در شبکه است و ماتریس تولیدکننده آن ، یک ماتریس مثلثی است. برمبنای تعبیر زنجیر مارکوفی ، آلگوریتمی برای محاسبه توزیع زمان مسیر بحرانی معرفی شده که در یک مثال تشریح شده است.

در توسعهٔ آلگوریتم ، از مقاله Kulkarni کمک گرفته شده است. در اصل مقاله Kulkarni به‌کوتاهترین مسیر در شبکه می‌پردازد. لیکن د این مقاله با معرفی یک اپراتور جدید ، مساله کوتاهترین مسیر به‌مساله طولانی‌ترین مسیر تبدیل شده است.

سایر روشهای مطروحه قبلی در زمینه توزیع زمان تکمیل پروژه به‌محاسبات ریاضی پیچیده‌ای که عموما" وقت‌گیر بوده نیاز دارند. محاسبات ایر روش نه‌تنها به‌وقت کمتری نیاز داشته بلکه ساده‌تر نیز اجرا خواهند شد.

Project Completion Time Distribution (PDF & CDF)

M.T. Fatemi Ghomi, Ph.D.

Indust. Eng. Dept. Amirkabir Univ. of Tech.

&

S. Hadji Ebrahim Zargar, M.Sc.

Indust. Eng. Dept. Amirkabir Univ. of Tech.

ABSTRACT

In this paper, an exact method is developed for computing project completion time distribution based on critical path from a source S to the destination t in a directed acyclic network, in which activity times are independent random variables with exponential distribution. Based on original network, one Markov chain with continuous time and single absorbing state is constructed, so that absorption time to this absorbing state from initial state is the critical path time in the original network. It is shown that the state space of this Markov chain is the set of all minimal cuts (s,t) in the network and its generating matrix is the upper trainglular matrix. Based on Markov chain interpretation, an algorithm is developed to compute critical path time distribution. The algorithm is better described by an example.

In the development of algorithm, Kulkarni's paper is studied. In principle, Kulkarni's discusses shortest route problem in the network, but this paper converts shortest route peroblem into the longest path problem by introduction a new operator(U).

Ohter methods previously developed in project completion time distribution need generally tedious, complex and time consuming computations.

Computations related to this method not only need much time to execute, but also they are more tractable and easier.

۱ ــ مقدمه :

در خلال سالهای اخیر، وقت و کوشش زیادی صرف توسعه تکنیکهای مدیریت شده است. مدل شبکه پایه و اساس موفق‌ترین تکنیک‌های مزبور می‌باشد. وقتی زمان تکمیل هر شاخه در چنین شبکه‌هائی قطعی باشد، الگوریتم‌های موثری برای یافتن زمان تکمیل شبکه به‌صورت محاسباتی به‌کار می‌رود. لیکن وقتی زمانهای تکمیل احتمالی باشند، آنالیزشبکه به‌طور قابل ملاحظه‌ای حتی برای شبکه‌های نسبتا" کوچک مشکل‌خواهد شد. در این حالت اغلب هدف محاسبه توابع توزیع و میانگین زمان تکمیل شبکه برحسب انواع توابع توزیع زمانهای تکمیل شاخه‌های منفرد مستقل خواهد بود.

Martin (۱۰) روشی برای محاسبه تابع چگالی زمان تکمیل‌شبکه ارائه داده که در آن فرض شده توابع چگالی فعالیتها، چند جملـه‌ای هستند. وی آلگوریتمی برای تبدیل یک شبکه شامل زیر شبکه‌هائی از چند فعالیت سری وموازی به‌یک فعالیت منفرد تشریح نموده‌که تابـع چگالــی آن فعالیت مربوط بــه‌زمان تکمیل شبکــه است. Wortham و Hartley (۶) طبقه‌بندی جدیدی از انواع شبکه‌ها تحت عنوان شبکه‌های متقاطع، غیرمتقاطع و متقاطع چندگانه ارائه کردند و با تعریف زیـر شبکه‌های پل Wheatstone و Criss - Cross (شکل ۱) و نحـوه محاسبه تابع توزیع پل Wheatstone، مدل Martin را اصلاح‌نمودند Ringer (۱۳) انواع زیر شبکه‌های پل Wheatstone دوگانه (شکل ۲) و Criss - Cross را براساس جهت شاخه‌ها تعریف و نحوهٔ محاسبه توابع توزیع مربوطه را نشان داد. وی همچنین مدل وابستگی بین زمانهای تکمیل فعالیتها را مطرح و روش محاسبه توزیع زمان‌تکمیل پروژه را براساس زیرشبکه‌های سری و موازی ارائه کرد، (۱۲). هریک از مقالات مزبور مقادیر احتمالی مورد نیاز را در قالب انتگرالهـای چندگانه بیان کرده‌اند که ارزیابی عددی آنها حتی برای شبکه‌هـای کوچک به‌صورت دستی بسیار وقت‌گیر و یا غیرممکن است. به همیـن دلیل‌مقالاتی در زمینه یافتن توزیعات حدی(۸ و ۷) و شبیه‌سازی مونت‌کارلو(۵ و ۲) انتشار یافته است. تعدادی‌نیز به‌یافتن تخمین‌های ناأریب از زمان تکمیل پروژه(۴ و ۳ و ۱) در مقایسه با PERT کلاسیک و نقاط ضعف آن اختصاص پیدا کرده است.

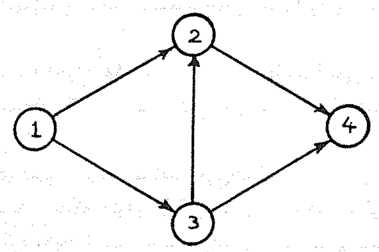
در کنار اینها، مقالاتی‌نیز در زمینه سایر مباحث مربوط به‌شبکه‌ها و آنالیز آنها به‌ویژه کوتاهترین مسیر در شبکه منتشر شده که در این میان Kulkarni (۹) و Mirchandani (۱۱) با دو روش کامـلا" متفاوت تابع توزیع زمان کوتاهرین مسیر در شبکه را به‌دست آورده‌اند. روشی که در اینجا مورد بحث قرار گرفته برمبنای مدل Kulkarni و تطبیق واصلاح آن جهت محاسبه تابع توزیع زمان‌تکمیل پروژه برحسب مسیر بحرانی در شبکه، استوار است.

۲ ــ تعاریف :

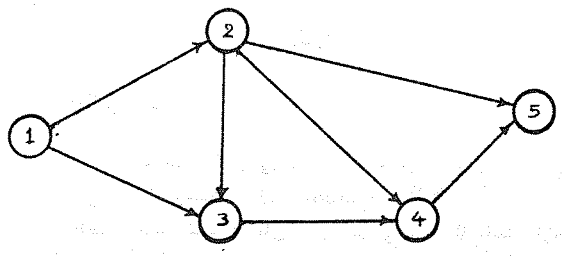
فرض کنید $G = (V, A)$ یک شبکه جهت‌دار با مجموعه گره‌هـای V و مجموعه شاخه‌های A باشد. s و t دو گره مشخص شده در V به ترتیب منبع و مقصد و $L(u,v)$ زمان شاخه $(u,v) \in A$ است. فرض کنید $X \subset V$ به‌طوری که $s \in X$ و $t \in \overline{X} = V - X$ باشد.

طبق تعریف یک برش(t و s) یک برش می‌نیمم است، اگر هر زیر مجموعــه صحیحی از آن یک بــرش(t و s) نباشد. ایــن بــرش را با $C(X)$ نشان‌دهید. Kulkarni نشان داده که در هرلحظه t مجموعه شاخه‌های برش می‌نیمم، شبکه G را به‌دو مجموعه X و $\overline{X}$ تقسیم می‌کند، به‌طوری که $X(t)$ مجموعه گره‌های متعلق به‌مجموعه X درلحظه t است و به‌آن حالت شبکه در زمان t گویند. مجموعه‌های زیـر را تعریف می‌کنیم:

$$R(X) = \left\{ v \in V : \text{یک مسیر از } v \text{ به } t \text{ وجود دارد که به‌هیچ‌یک از گره‌های مجموعه } X \text{ برخورد نمی‌کند.} \right\}$$

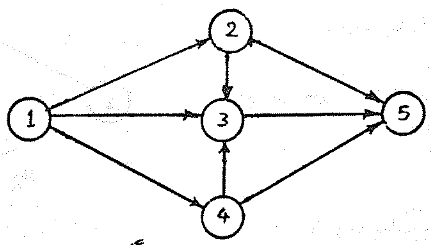


پل Wheatstone



Criss — Cross

شکل ۱



پل Wheatstone دوگانه

شکل ۲

$$S(x) = V - R\ (X)$$
$$\Omega = \left\{x \in V : s \in X,\ t \in \bar{X},\ X = S(x)\right\}$$
$$\Omega^* = \Omega \cup \left\{t\right\}$$

در این صورت $x(t) \in \Omega^*$ است.

اگر $((u \text{ و } v) \in A)$ و $L(u,v)$ متغیرتصادفی مستقل بوده و دارای توزیع نمائی با پارامتر $\mu(u,v) > 0$ باشد در این صورت فرآیند $\{x(t), t \geqslant 0\}$ یک زنجیر مارکوفی با زمان پیوسته و فضای‌حالت Ω^* و ماتریس‌تولیدکننده بی‌نهایت کوچک $Q = [q(D, B)]$, $(D, B \in \Omega^*)$ است، به‌طوری که:

$$q(D,B) = \begin{cases} \mathrm{U}\,\mu(u,v) \\ (u,v) \in C_v(D) & \text{اگر به‌ازاء تعدادی } v \in \bar{D}\quad B = S(D \cup \{v\}) \\ -\mathrm{U}\,\mu(u,v) \\ (u,v) \in C(D) & \text{اگر } B = D \\ 0 & \text{در غیر این‌صورت} \end{cases}$$

که درآن $C_v(D) = \{(u,v) \in C(D)\}$ ، $C(V) = \phi$ است.

رفتار اپراتور (U) براساس احتمال اجتماع دو مجموعه یا بیشتر تعریف می‌شود. می‌دانیم:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

اگر μ_i و μ_j به‌ترتیب میانگین زمانی دو فعالیت i و j باشد داریم:

$$\mathrm{Exp}(\mu_i \,\mathrm{U}\, \mu_j) = \mathrm{Exp}(\mu_i) + \mathrm{Exp}(\mu_j) - \mathrm{Exp}(\mu_i + \mu_j)$$

همچنین برای سه فعالیت i ، j و K می‌توان نوشت:

$$\mathrm{EXP}(u_i \,\mathrm{U}\, u_j \,\mathrm{U}\, u_k) = \mathrm{EXP}(u_i) + \mathrm{EXP}(u_j) + \mathrm{EXP}(u_k) - \mathrm{EXP}(u_i + u_j)$$
$$- \mathrm{EXP}(u_i + u_k) - \mathrm{EXP}(u_j + u_k) + \mathrm{EXP}(u_i + u_j + u_k)$$

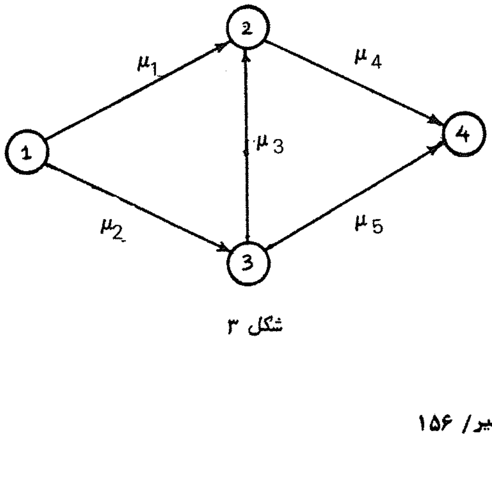
برای سادگی $\mu_i \,\mathrm{U}\, \mu_j$ را به‌صورت $\mathrm{U}_i \mu_k$ نشان می‌دهیم:

اپراتور (U) به‌صورت منفرد همان رفتار اپراتور (Σ) را دارد یعنی:

$$\mu_i \,\mathrm{U}\, \mu_j = \mu_i + \mu_j$$

حال چنانچه اجزاء Ω^* برحسب افزایش مقادیر اصلی مرتب شود ماتریس تولیدکننده Q یک ماتریس مثلثی خواهد بود که اجزاء آن دربالای قطر قرار دارند.

برای تصویر کردن مطالب فوق‌الذکر شبکه مثالی شکل (۳) را در نظر بگیرید. شبکه دارای ۴ گروه و ۵ شاخه است. گره ۱، گره منبع و گره ۴، گره مقصد است. ما می‌خواهیم توزیع مسیر بحرانی را از گره ۱ به گره ۴ بیابیم.



شکل ۳

Shier و Whited (۱۴) آلگاریتم‌هائی برای به‌دست آوردن مجموعه برشهای می‌نیمم در شبکه‌های جهت‌دار ارائه کرده‌اند. با کاربرد آلگوریتم مزبور، زنجیر مارکوفی $\{X(t), t \geqslant 0\}$ دراین شبکه دارای ۵ حالت است، زیرا ۴ برش می‌نیمم وجود دارد. حالات در جدول (۱) ذکر شده‌اند ستونهای دوم و سوم جدول به‌ترتیب فضای حالت $X(t)$ و مجموعه شاخه‌های برش می‌نیمم هستند. در این مثال فرض شده u_i پارامتر توزیع نمائی مربوط به‌شاخه iام است. ماتریس مثلثی Q در جدول (۲) نشان داده شده است.

حالت i	$X(t)$	شاخه
1	1	1, 2
2	1, 2	2, 4
3	1, 3	1, 3, 5
4	1, 2, 3	4, 5
5	1, 2, 3, 4	ϕ

جدول ۱

i	1	2	3	4	5
1	$-\mathrm{U}\mu_{i}$ 1,2	μ_1	μ_2	0	0
2	0	$-\mathrm{U}\mu_i$ 2,4	0	μ_2	μ_4
3	0	0	$-\mathrm{U}\mu_i$ 1,3,5	$\mathrm{U}\mu_i$ 1,3	μ_5
4	0	0	0	$-\mathrm{U}\mu_i$ 4,5	$\mathrm{U}\mu_i$ 4,5
5	0	0	0	0	0

جدول ۲

۳ــ آنالیز شبکه

در این قسمت آلگاریتمی برای محاسبه توزیع زمان مسیر بحرانی ارائه می‌شود که برمبنای مدل Kulkarni استوار است.

الف ــ فرض کنید T زمان مسیر بحرانی در شبکه باشد. ازساختار فرآیند $\{X(t), t \geqslant 0\}$ واضح است که:

$$T = \mathrm{Max}\left\{t \geqslant 0, X(t) = N \mid X(0) = 1\right\}$$

و $F(t) = \Pr\left\{T \leqslant t\right\}$ می‌باشد.

ب ــ عبارت زیر را برای $P_i(t)$ تعریف می‌کنیم:

$$P_i(t) = \mathrm{pr}\left\{X(t) = N \mid X(0) = i\right\}$$

در این صورت $F(t) = P_1(t)$ است.

ج ــ معادلات دیفرانسیل برای محاسبه $P_i(t)$ عبارتند از:

$$\left.\begin{aligned} P_i'(t) &= \Sigma q_{ij} P_j(t) \\ P_i(0) &= \delta_i N \end{aligned}\right\} \quad 1 \leqslant i \leqslant N$$

دــ با توجه به‌این که می‌دانیم $P_N(t) = 1$ است، می‌توان معادلات دیفرانسیل $P_i(t)$ را به‌صورت رو به‌عقب (Back ward) حل کرد.

در مورد شبکه مثالی شکل (۳) معادلات عبارتند از:

$$P_5'(t) = 0$$

$$P_4'(t) = (-\bigcup_{4,5} u_i)\, P_4(t) + (\bigcup_{4,5} u_i)\, P_5(t)$$

$$P_3'(t) = (-\bigcup_{1,3,5} u_i)\, P_3(t) + (\bigcup_{1,3} u_i)\, P_4(t) + p_5(t)$$

$$P_2'(t) = (-\bigcup_{2,4} u_i)\, P_2(t) + u_2 P_4(t) + u_4 P_5(t)$$

$$P_1'(t) = (-\bigcup_{1,2} u_i)\, P_1(t) + u_1 P_2(t) + u_2 P_3(t)$$

واضح است که در اینجا با معادلات دیفرانسیل خطی معمولی سر وکار داریم. جواب یک معادله دیفرانسیل به‌فرم

$$\frac{dy(x)}{dx} + \phi(x)\, y(x) = \varphi(x))$$

به‌صورت زیر است:

$$y(x) = c\, e^{-\int \phi(x)dx} + e^{-\int \phi(x)dx} \int e^{\int \phi(x)dx}\, \varphi(x)dx$$

برای به‌دست آوردن ضریب ثابت C مقدار $P_i(0)$ را محاسبه می‌کنیم که به‌ازاء $i=N$ برابر یک و در غیر این صورت صفر می‌باشد.

۴ــ نتایج:

در این مقاله از زنجیر مارکوفی با زمان پیوسته برای مدل‌بندی شبکه‌های جهت‌دار با شاخه‌هائی که زمان آنها متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع نمائی بوده، استفاده شده است. فضای حالت زنجیرمارکوفی به‌وسیله مجموعه برشهای می‌نیمم در شبکه معین می‌گردد. ساختار خاص این زنجیر مارکوفی، موجب طرح آلگاریتم ساده‌ای برای محاسبه دقیق توزیع مسیر بحرانی می‌باشد.

یکی از محدودیتهای این روش آن است که فضای حالت زنجیر مارکوفی با افزایش تعداد فعالیتها در شبکه به‌صورت نمائی افزایش می‌یابد، که در این حالت کاربرد سایر روشها نیز برای به‌دست آوردن جواب دقیق پرهزینه خواهد بود. از سوی دیگر، در مورد شبکه‌هائی با اندازه‌های معقول از طریق روش پیشنهادی جواب در کسری از زمان مورد نیاز سایر روشها (دستی و یا کامپیوتری) به‌دست می‌آید.

همانطوری که ذکر شد روش پیشنهادی برمبنای مدل Kulkarni برای فعالیتهائی که زمان آنها دارای نمائی است تنظیم شده، لیکن می‌توان آن را برای سایر توزیعات پس از آنالیز روش برحسب توزیع مربوطه و تعریف اپراتور مناسب به‌کار برد.

ادغام این روش با روشهای انتگرال‌گیری مذکور در مقدمه مطلوب به‌نظر می‌رسد، بدین‌ترتیب که در الگوریتم خلاصه‌سازی شبکه به‌عناصر اولیه ساختار آن، در هر مرحله به‌جای استفاده از روشهای انتگرال‌گیری از روش پیشنهادی استفاده شود. بنابراین سرعت محاسبات بیشتر و حجم آن کمتر خواهد شد.

سایر تکنیک‌های ریاضی در زمینه موضوع مورد بحث نظیرمدلهای مطروحه در مقاله Mirchandani (۱۱) بایستی مورد مطالعه وبررسی قرار گرفته و پس ازمقایسه کارآئی، سرعت ودقت‌محاسبات، روش بهینه در هر مورد معین گردد.

منابع:

1. Britney, Bayesian Point estimation and the PERT scheduling of stochastic activities. Manage. Sci. Vol 22. No. 9.(1976).
2. Burt, Gaver, Perlas, Simple stochastic networks: Some problems and procedures (1967 – 1968).
3. Drezner, A multivariate approach to estimating the completion time for PERT networks. J. Opl. Res. Soc. Vol 37. No. 8. (1986).
4. Elmaghraby, on the expected duration of PERT type networks. J. Opl. Res. Soc. (1966).
5. Fishman, Estimating network characteristics in stochastic activity networks. Manage. Sci. Vol 31. No. 5. (1985).
6. Hartley, Wortham, A statistical theory for PERT critical path analysis. (1966).
7. Kamburoski, Normally distributed activity durations in PERT networks. J. Opl. Res. Soc. Vol 36. No. 11. (1985).
8. Kleindorfer, Bounding distributions for stochastic logic networks. Opl . Res. Quarterly. Vol 23. No. 3. (1971).
9. Kulkarni, shortest paths in networks with exponentially distri– buted arc lengths. Networks. Vol 16. (1986).
10. Martin, Distribution of the time through a directed acyclic network. J. Opl. Res. (1964).
11. Mirchandani, shortest distance and reliability of probabilistic networks. Comput. Ops. Res. Vol 3. (1976).
12. Ringer, A statistical theory for PERT in which completion times for activities are inter – dependent. Manage. Sci. Vol 17. No. 11. (1971).
13. Ringer, Numerical operators for statistical PERT critical path analysis. Manage. Sci. Vol 16. No. 2.(1969).
14. Shier, Whited, Iterative algorithms for generating minimal cut sets in directed graphs. Networks. Vol 16. (1986).