



اصلاح رفتار ارتعاشی آزاد در تیر تیموشنکوی دوار دارای ترک با استفاده از اتصالات پیزوالکتریک و به کارگیری روش تبدیل دیفرانسیل

محمد مهدی نادری، علیرضا آریایی*

دانشکده فنی و مهندسی، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه اصفهان، اصفهان، ایران

تاریخچه داوری:

دریافت: ۲۵ بهمن ۱۳۹۵

بازنگری: ۱۴ اردیبهشت ۱۳۹۶

پذیرش: ۲۵ تیر ۱۳۹۶

ارائه آنلاین: ۲۸ تیر ۱۳۹۶

کلمات کلیدی:

اصلاح فعال
عملگر پیزوالکتریک
تیر تیموشنکوی ترک دار
تیر دوار
روش تبدیل دیفرانسیل

چکیده: در این مقاله یک روش تحلیلی جهت استفاده از اتصالات پیزوالکتریک برای اصلاح رفتار ارتعاشی آزاد در یک تیر دورانی ترک دار ارائه می‌شود. معادلات تیر بر مبنای تئوری تیموشنکو و با در نظر گرفتن اثر تغییر شکل برشی و اینرسی دورانی به دست می‌آیند. معیار مورد استفاده جهت اصلاح ترک افزایش فرکانس اول تیر دارای ترک و منطبق کردن آن بر فرکانس تیر سالم است. بدین منظور یک ولتاژ خارجی به وصله پیزوالکتریک متصل به تیر اعمال می‌شود که از میزان نقش ترک بر تغییر ویژگی‌های ارتعاشی تیر می‌کاهد. ابتدا معادلات دیفرانسیلی کوپل تیر تیموشنکو با روش مودهای فرضی از هم جدا می‌شوند. سپس تیر ترک دار به صورت بخش‌هایی بدون ترک مدل می‌شود که در محل ترک با دو فنر خطی، یکی کششی و دیگری پیچشی، به هم متصل شده‌اند. در نهایت با استفاده از روش نیمه تحلیلی تبدیل دیفرانسیل، فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای سیستم به دست می‌آیند. با انجام یک شبیه‌سازی عددی، تأثیر پارامترهای مختلف بر ضریب اصلاح ترک مطالعه می‌گردد. اعتبار روش ارائه شده با مقایسه نتایج آن با مقادیر موجود در سایر مقالات مورد بررسی قرار می‌گیرد که تطابق قابل قبولی بین نتایج مشاهده می‌شود.

۱- مقدمه

تیرهای دورانی اهمیت فراوانی در مسائل مهندسی نظیر پره‌های توربین، ملخ هلی‌کوپترها و هواپیماها و کنترل‌رهای رباتیک دارند و مدت‌های مدیدی است که مورد بررسی قرار می‌گیرند [۱ و ۲]. کار و نتوگی [۳] با کمک روش ریتز به مطالعه‌ی پایداری تیر یک سرگیردار دورانی پرداختند. به طور عمده دو تئوری اویلر-برنولی و تیموشنکو برای تحلیل تیرها مورد استفاده قرار می‌گیرد که تفاوت آن‌ها در تأثیر تغییر شکل برشی و اینرسی دورانی بر روی ارتعاشات جانبی تیرها است؛ به عبارت دیگر در تئوری اویلر-برنولی این دو مؤلفه در نظر گرفته نمی‌شود ولی در تئوری تیموشنکو با در نظر گرفتن آن‌ها دقت نتایج افزایش می‌یابد. لی و لین [۴] ارتعاشات و ویژگی‌های همگرایی در پایداری تیرهای تیموشنکوی دوار را بررسی نمودند. کاسماتکا [۵] به کمک اصل همیلتون، ماتریس‌های جرم و سختی را برای یک المان دو گره‌ای تیر تیموشنکو استخراج نمود و به کمک آن، نیروی کماتش و فرکانس‌های طبیعی را به دست آورد. راتو و گوپتا [۶] ارتعاشات تیر تیموشنکوی دوار را با استفاده از روش المان محدود تحلیل نمودند. لین [۷] با بررسی ارتعاشات خمشی تیر تیموشنکوی دوار یک حل تحلیلی از این سیستم ارائه نمود و اثر پارامترهای مختلف بر روی فرکانس‌های طبیعی و ویژگی‌های واگرایی آن را مورد مطالعه قرار داد. وینود و همکاران [۸] به کمک طیف تقریبی

اجزاء محدود، همراه با دو تابع داخلی، ارتعاش و انتشار موج در یک تیر تیموشنکوی دوار را تحلیل نمودند. گوندا و گانگیولی [۹] توابع شکل جدیدی به دست آوردند که قسمت استاتیکی معادلات دیفرانسیل همگن حاکم بر تیر دوار را ارضاء می‌نمود. گوندا و همکاران [۱۰ و ۱۱] یک روش المان محدود جدید عملی را برای تحلیل ارتعاش آزاد تیرهای با سرعت بالا با استفاده از توابع شکلی که ترکیبی خطی از معادلات دیفرانسیل استاتیکی حاکم بر تیر دورانی است پیشنهاد نمودند. کیم و همکاران [۱۲] با اعمال اصل همیلتون و به کارگیری کرنش غیر خطی ون کارمن، روابط حاکم بر ارتعاش محوری، عرضی و جانبی تیرهای دورانی را استخراج نمودند. هانز و همکاران [۱۳] فرکانس طبیعی تیرهای دوار بسیار باریک در سرعت‌های دورانی بالا را با استفاده از روش سری‌های توانی مورد تحلیل قرار دادند. لیو و شو [۱۴] ارتعاشات آزاد و اجباری تیر دوار چندلایه را براساس فرضیات تیر تیموشنکو تحلیل نمودند. هین و اورلیکوسکی [۱۵] با بررسی مدل دینامیکی ساده‌ی تیر دوار ویژگی‌های ارتعاشی آن را به دست آوردند. بانجری و کندی [۱۶] معادلات دیفرانسیلی حاکم بر حرکت تیرهای دورانی را با استفاده از اصل همیلتون استخراج و به کمک روش فریبینوس حل نمودند و فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای آن را محاسبه کردند.

ترک در تیر منجر به تغییرات موضعی در سختی و در نتیجه تغییر در ویژگی‌های ارتعاشی آن نظیر فرکانس‌های طبیعی، دامنه‌ی ارتعاشات و

پیشنهادی ایشان منطبق بر نتایج حاصل از آزمایش و روش‌های دیگر بود. چزن و پزرات [۳۰] یک شکل جدید از حس‌گرهای پیزوالکتریک توزیع شده را پیشنهاد دادند که بر اساس تئوری چندلایه‌ای و شکل ضعیف معادلات دینامیکی حرکت تیر است.

کاربرد روش تبدیل دیفرانسیل برای حل بسیاری از مسائل مهندسی سودمند است. روش تبدیل دیفرانسیل یک تکنیک تبدیل نیمه تحلیلی بر پایه بسط تیلور و یک ابزار مفید برای به دست آوردن جواب‌های تحلیلی معادلات دیفرانسیل به شمار می‌رود. این روش ابتدا توسط زهو [۳۱] ارائه گردید و در تحلیل مدار الکتریکی به کار رفت. می [۳۲] روش تبدیل دیفرانسیل را برای تیرهای دورانی به کار برد. سودمندی این روش در حل مسائل غیر خطی بیشتر مشهود و سادگی و دقت آن در محاسبه‌ی فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای سیستم‌های ارتعاشی حائز اهمیت است. از آن جا که این روش ابزاری کارآمد برای حل مسائل غیرخطی یا سیستم‌های با پارامترهای متنوع است، توسط محققان مختلف به کار گرفته شده است که از آن جمله می‌توان به کارهای انجام شده توسط چن و ژو [۳۳] آریکوگلو و اوزکول [۳۴] و برت و زنگ [۳۵] اشاره کرد. برت و زنگ [۳۵] این روش را برای بررسی ارتعاش محوری میله‌های مرکب استفاده نمودند. ایاز [۳۶] با استفاده از روش تبدیل دیفرانسیل به حل مسائل معادلات دیفرانسیل خطی پرداخت. اوزموس و کایا [۳۷] به کمک این روش فرکانس‌های طبیعی تیر را استخراج کردند. مائو [۳۸] تیر اویلر-برنولی را با استفاده از روش تبدیل دیفرانسیل مورد بررسی قرار داد. واتاناسولپونگ و آنباکون [۳۹] از روش تبدیل دیفرانسیل برای حل پاسخ ارتعاشی خطی و غیرخطی تیر با انواع مختلف تکیه‌گاه‌های الاستیک استفاده کردند.

در کارهای گذشته تنها یکی از فرضیات استفاده شده در این پژوهش مانند تیر دورانی بدون ترک، تیر غیردوار و دوار ترک‌دار و یا تیر ثابت با لایه پیزوالکتریک مورد مطالعه قرار گرفته است. در این مقاله ضمن مطالعه تیر دورانی ترک‌دار تیموشنکو، اثرات ترک بر روی ویژگی‌های ارتعاشی تیر دورانی با استفاده از لایه پیزوالکتریک اصلاح می‌گردد. روند کار بدین ترتیب است که با استفاده از روش سعی و خطا، ضریب اصلاح پیزوالکتریک به گونه‌ای تعیین می‌شود که فرکانس اول تیر ترک‌دار دارای اتصال پیزوالکتریک بر فرکانس اول تیر سالم به طور کامل منطبق شود که در این حالت سایر فرکانس‌ها نیز به مقادیر نظیر خود در تیر سالم نزدیک می‌شوند. همچنین در این مقاله به دلیل دورانی در نظر گرفتن تیر و عدم کارایی روش ماتریس انتقال به کار رفته در مرجع [۲۶] به واسطه عبارت مربوط به نیروی مرکزگرا در معادلات حاکم و قابل تعیین نبودن شکل مود تیر به طور تحلیلی، از روش تبدیل دیفرانسیل جهت تحلیل رفتار ارتعاشی آن استفاده شده است و کارایی و دقت آن در مطالعه این نوع تیرها مورد بررسی قرار گرفته است. مقادیر به دست آمده با نتایج موجود در مقالات دیگر مقایسه می‌شود که این مقایسه، دقت قابل قبول نتایج ارائه شده در این مقاله در اصلاح رفتار ارتعاشی آزاد تیر تیموشنکوی دورانی را به کمک لایه پیزوالکتریک نشان می‌دهد.

پایداری می‌گردد. داتا و گانگیولی [۱۷] ویژگی‌های ارتعاشی تیغه‌های دوار با آسیب موضعی شامل اثرات تغییر شکل برشی و اینرسی دورانی را بررسی نمودند. ایشان دریافتند که آسیبی در نزدیکی ریشه‌ی تیر، اثرات اساسی بر روی فرکانس‌های طبیعی در سرعت‌های دورانی بالا می‌گذارد. مسعود و السعید [۱۸] با استفاده از رابطه‌ی لاگرانژ معادلات حاکم بر تیر تیموشنکوی ترک‌دار دورانی را استخراج و روشی جهت تعیین ترک در آن ارائه نمودند. لویا و فرناندز [۱۹] تیر ترک‌دار را به شکل دو بخش در نظر گرفتند که به وسیله‌ی دو فنر بدون جرم (یک فنر کششی و یک فنر پیچشی) به هم متصل‌اند و می‌تواند ناپیوستگی در جابه‌جایی عرضی و پیچشی در طول خمش را که به ترتیب ناشی از نیروی برشی و گشتاور خمشی است مدل کند. ترابی و همکاران [۲۰] با استفاده از روش مربع سازی دیفرانسیلی، فرکانس‌های طبیعی تیر تیموشنکو با سطح مقطع متغیر همراه با ترک‌های متعدد را به ازای شرایط مرزی گوناگون به دست آوردند. رضائی و همکاران [۲۱] رفتار ارتعاشی تیر کوتاه یک سرگیردار ترک‌دار تحت نیروی محوری را بررسی و بر اساس آنالیز ارتعاشی آن، روشی جهت تعیین ترک ارائه نمودند. پیزوالکتریک‌ها دسته‌ای از سرامیک‌ها هستند که کاربردهای وسیعی در صنایع الکترونیک، مصرفی، پزشکی و نظامی دارند. همچنین مواد پیزوالکتریک کاربردهای وسیعی به عنوان حس‌گر و عملگرهای ذاتی دارند که خواص الکتریکی و مکانیکی آن کوپل شده است. رحمانی و غلامی [۲۲] ارتعاشات عرضی تیر یک سرگیردار ساخته شده از مواد مدرج تابعی دارای ترک عرضی و تحت تأثیر بار حرارتی را مورد بررسی قرار دادند و آن را کنترل نمودند. بدین منظور ایشان از صفحات پیزوالکتریک جهت اندازه‌گیری میزان ارتعاشات و همچنین اعمال نیروهای کنترلی استفاده کردند. وانگ و همکاران [۲۳] با استفاده از پوشش خارجی لایه پیزوالکتریک بر روی تیر ترک‌دار نسبت به اصلاح ویژگی‌های ارتعاشی آن اقدام نمودند. وانگ و کوئک [۲۴] اثر ترک را بر روی کمانش ستون بررسی کردند و با استفاده از لایه پیزوالکتریک نسبت به ترمیم آن اقدام نمودند. الایمو و همکاران [۲۵] تحلیلی از اتصالات پیزوالکتریک فعال بر روی ساختارهای ترک‌دار را به وسیله‌ی روش المان مرزی ارائه نمودند. آریایی و همکاران [۲۶] با استفاده از اتصال لایه‌های پیزوالکتریک بر روی تیر ترک‌داری که جرمی از روی آن عبور می‌نماید نسبت به اصلاح ارتعاشی تیر ترک‌دار اقدام نمودند. معیار استفاده شده توسط ایشان برای اصلاح ترک تغییر فرکانس طبیعی اول تیر ترک‌دار و رساندن آن به فرکانس طبیعی اول تیر سالم با استفاده از یک لایه پیزوالکتریک بود. پارک [۲۷] تیرهای دارای المان‌های پیزوالکتریک منحرف شده را بررسی نمود. او به این نتیجه رسید که می‌توان با استفاده از خاصیت حس‌گر و عمل‌گرهای پیزوالکتریک، ویژگی‌های تشدید در تیر را مستهلک و از آن جلوگیری کرد. سان و تانگ [۲۸] مدل یک تیر هوشمند را با استفاده از پوشش قطعه‌ای از اتصالات پیزوالکتریک (حس‌گر و عمل‌گر) بر روی تیر معمولی ارائه نمودند. کانگ و همکاران [۲۹] المان‌های پیزوالکتریک را بر روی تیر ترک‌دار در نظر گرفتند که فرکانس‌های محاسبه شده توسط روش

۲- فرمول بندی

۲-۱- معادلات حرکت

همچنین ρ چگالی تیر، R شعاع استوانه‌ی دوار، E مدول الاستیسیته، G مدول برشی، A سطح مقطع، I ممان اینرسی مقطع نسبت به تار خشی و K ضریب تصحیح برش می‌باشد که به شکل سطح مقطع و نسبت پواسون ν بستگی دارد و برای سطح مقطع مستطیلی عبارت است از [۲۶]:

$$\kappa = \frac{10(1+\nu)}{12+11\nu} \quad (۴)$$

شرایط مرزی حاکم بر تیر عبارتند از [۱۸ و ۳۷]:

تیر یک سرگیردار:

$$w_1(0,t) = 0 \quad (۵ \text{ الف})$$

$$\theta_1(0,t) = 0 \quad (۵ \text{ ب})$$

$$EI \frac{d\bar{\theta}_4(L,t)}{dx} = 0 \quad (۵ \text{ ج})$$

$$\kappa AG \left(\frac{d\bar{w}_4(L,t)}{dx} - \bar{\theta}_4(L,t) \right) = 0 \quad (۵ \text{ د})$$

تیر دو سر مفصل [۲۶]:

$$w_1(0,t) = \frac{\partial \theta_1(0,t)}{\partial x} = 0 \quad (۶ \text{ الف})$$

$$w_4(L,t) = \frac{\partial \theta_4(L,t)}{\partial x} = 0 \quad (۶ \text{ ب})$$

همان‌گونه که در شکل ۳ نشان داده شده است ترک با دو فنر کششی و پیچشی مدل می‌شود. x_c نشان دهنده مکان ترک بر روی تیر است. ضرایب k_θ و k_t به ترتیب توابع مربوط به سفتی فنرهای کششی و پیچشی و تابعی از عمق بدون بعد ترک است که از روابط (۷) تعیین می‌گردد [۲۶]:

$$k_t = \frac{1}{C_v} \frac{EA}{H} \quad (۷ \text{ الف})$$

$$k_\theta = \frac{1}{C_\theta} \frac{EI}{H} \quad (۷ \text{ ب})$$

$$C_v = \left(\frac{\gamma}{1-\gamma} \right)^2 \times (-0.22 + 3.82\gamma + 1.54\gamma^2 - 14.64\gamma^3 + 9.60\gamma^4) \quad (۷ \text{ ج})$$

$$C_\theta = 2 \left(\frac{\gamma}{1-\gamma} \right)^2 \times (5.93 - 19.69\gamma + 37.14\gamma^2 - 35.84\gamma^3 + 13.12\gamma^4) \quad (۷ \text{ د})$$

γ عمق بی‌بعد ترک است که با رابطه‌ی زیر بیان می‌شود:

$$\gamma = \frac{a_c}{H} \quad (۸)$$

در رابطه فوق a_c عمق ترک و H ضخامت تیر است. روابط پیوستگی در ترک با معادلات (۹) بیان می‌شود [۲۶]:

$$EI \frac{\partial \theta_3(x_c^+, t)}{\partial x} = EI \frac{\partial \theta_2(x_c^-, t)}{\partial x} \quad (۹ \text{ الف})$$

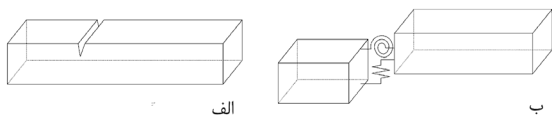


Fig. 3. Beam with transverse crack: (a) Original model of the cracked beam and (b) replaced model for the cracked beam

شکل ۳: تیر با ترک عرضی: (الف) شکل اصلی ترک (ب) مدل فنر کششی و پیچشی معادل ترک

تیر تیموشنکو به طول L با یک ترک باز در $x_c = x_p$ و یک اتصال پیزوالکتریک به طول $x_1 - x_2$ در زیر ترک به شکل متقارن نسبت به ترک در نظر گرفته می‌شود (شکل‌های ۱ و ۲). x_1 و x_2 به ترتیب فاصله سمت چپ و راست لایه پیزوالکتریک از انتهای سمت چپ تیر می‌باشد. همچنین در این مقاله دو نوع شرط مرزی برای تیر مورد بررسی قرار می‌گیرد: شرط مرزی یک‌سرگیردار که در این حالت تیر به یک تویی صلب به شعاع R متصل است و با سرعت Ω دوران می‌نماید و شرط مرزی دو سر مفصل که جهت مقایسه نتایج با مقادیر ارائه شده در کارهای گذشته ارائه شده است و در این حالت تیر ثابت است.

دامنه‌ی ارتعاش عرضی و زاویه چرخش مقطع تیر در بازه‌ی $x_{i-1} \leq x \leq x_i$ به ترتیب با $w_i(x,t)$ و $\theta_i(x,t)$ نشان داده می‌شود که $i = 1, 2, 3, 4$ است (شکل‌های ۱ و ۲) و به وسیله‌ی ترک و دو انتهای لایه‌ی پیزوالکتریک تفکیک می‌گردد. مطابق با روابط حاکم بر تئوری تیر تیموشنکو، معادلات دیفرانسیلی ارتعاشی عرضی حاکم بر هر قسمت تیر عبارت است از [۳۷]:

$$-\rho A \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial w_i}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa AG \left(\frac{\partial w_i}{\partial x} - \theta_i \right) \right) = 0 \quad (۱)$$

$$-\rho I \frac{\partial^2 \theta_i}{\partial t^2} + \rho I \Omega^2 \theta_i + \frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial \theta_i}{\partial x} \right) + \kappa AG \left(\frac{\partial w_i}{\partial x} - \theta_i \right) = 0 \quad (۲)$$

در معادله‌ی (۱) نیروی مرکزگرایی $T(x)$ از رابطه‌ی (۳) محاسبه می‌گردد:

$$T(x) = \int_x^L \rho A \Omega^2 (R+u) du \quad (۳)$$

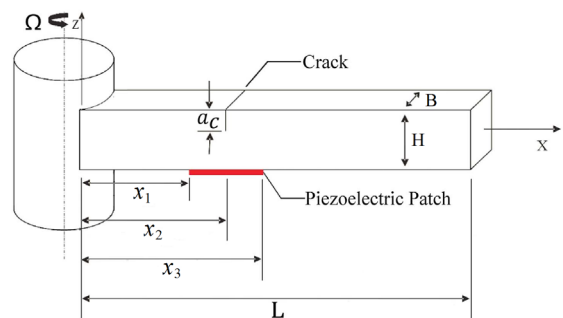


Fig. 1. A cracked rotating beam with a piezoelectric patch
شکل ۱: تیر یک‌سرگیردار دوار دارای ترک با اتصال پیزوالکتریک

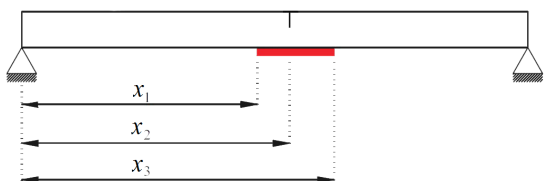


Fig. 2. A simply supported cracked beam with a piezoelectric patch
شکل ۲: تیر دوسر مفصل ترک‌دار با اتصال پیزوالکتریک

با سعی و خطا تعیین می‌شود، بر فرکانس اول تیر سالم منطبق می‌گردد. به عبارت دیگر مقادیر مختلف این ضریب مورد آزمون قرار می‌گیرد و مقداری انتخاب می‌شود که به ازای آن فرکانس اول تیر ترک‌دار و تیر سالم منطبق می‌گردند. همان‌گونه که در مقدمه نیز ذکر شد با انطباق فرکانس اول، سایر فرکانس‌های طبیعی تیر دارای ترک نیز به فرکانس‌های نظیر خود در تیر سالم نزدیک می‌شوند.

۲-۲- روش تبدیل دیفرانسیل

در روش تبدیل دیفرانسیل، قوانین تبدیل معینی به کار می‌رود و معادلات دیفرانسیل و شرایط مرزی و پیوستگی سیستم به دست‌های از معادلات جبری که تبدیل دیفرانسیل توابع اصلی است تبدیل می‌گردد. جواب‌های این معادلات جبری، جواب مطلوب مسئله است [۳۶]. در این روش تابع $f(x)$ که در دامنه تعریف D تحلیلی است در نظر گرفته می‌شود که $x = X$ نشان دهنده نقطه‌ای در این دامنه است. تابع $f(x)$ به وسیله یک سری توانی که مرکز آن در x قرار دارد تعریف می‌شود. تبدیل دیفرانسیلی تابع $f(x)$ به صورت زیر داده می‌شود [۳۶]:

$$F[k] = \frac{1}{k!} \left(\frac{d^k f(x)}{dx^k} \right)_{x=x_0} \quad (14)$$

در رابطه فوق، $f(x)$ تابع اصلی و $F[k]$ تابع تبدیل یافته است. تابع تبدیل معکوس با معادله (۱۵) بیان می‌شود:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (x-x_0)^k F[k] \quad (15)$$

با ترکیب دو معادله‌ی اخیر می‌توان نوشت:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^k}{k!} \left(\frac{d^k f(x)}{dx^k} \right)_{x=x_0} \quad (16)$$

از معادله (۱۶) می‌توان دریافت که مفهوم تبدیل دیفرانسیل از بسط سری تیلور به دست آمده است. در کاربردهای واقعی، تابع $f(x)$ به وسیله یک سری معین نشان داده می‌شود و معادله (۱۶) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$f(x) = \sum_{k=0}^m \frac{(x-x_0)^k}{k!} \left(\frac{d^k f(x)}{dx^k} \right)_{x=x_0} \quad (17)$$

در معادله‌ی (۱۷) مقدار m بستگی به میزان همگرایی فرکانس‌های طبیعی دارد. قوانین حاکم بر روش تبدیل دیفرانسیل و شرایط مرزی در جدول‌های ۱ و ۲ معرفی شده‌اند.

جدول ۱: قوانین حاکم بر روش تبدیل دیفرانسیل [۳۶]
Table 1. DTM theorems used for equations of motion [36]

تابع تبدیل یافته	تابع اصلی
$F(k) = G[k] \pm H[k]$	$f(x) = g(x) \pm h(x)$
$F(k) = \mu G[k]$	$f(x) = \mu g(x)$
$F(k) = \sum_{l=0}^{\infty} G[k-l] H[l]$	$f(x) = g(x) h(x)$
$F(k) = \frac{(k+n)!}{k!} G[k+n]$	$f(x) = \frac{d^n g(x)}{dx^n}$
$F(k) = \delta(k-n) = \begin{cases} 1 & \text{if } k \neq n \\ 0 & \text{if } k = n \end{cases}$	$f(x) = x^n$

$$T(x_c) \frac{\partial w_3(x_c^+, t)}{\partial x} + \kappa AG \left(\frac{\partial w_3(x_c^+, t)}{\partial x} - \theta_3(x_c^+, t) \right) = \quad (9 \text{ ب})$$

$$T(x_c) \frac{\partial w_2(x_c^-, t)}{\partial x} + \kappa AG \left(\frac{\partial w_2(x_c^-, t)}{\partial x} - \theta_2(x_c^-, t) \right)$$

$$w_3(x_c^+, t) - w_2(x_c^-, t) = \frac{1}{k_i} \left(T(x_c) \frac{\partial w_3(x_c^+, t)}{\partial x} + \kappa AG \left(\frac{\partial w_3(x_c^+, t)}{\partial x} - \theta_3(x_c^+, t) \right) \right) \quad (9 \text{ ج})$$

$$\theta_3(x_c^+, t) - \theta_2(x_c^-, t) = \frac{1}{k_o} EI \frac{\partial \theta_3(x_c^+, t)}{\partial x} \quad (9 \text{ د})$$

گشتاور خمشی بی‌بعد ایجاد شده در لایه‌ی پیژوالکتریک عبارت است از:

$$M_p = \frac{1}{2} \sigma_x Dh (H+h) \frac{L}{EI} = -J_p (\theta_4(x_3^+) - \theta_2(x_1^+)) \quad (10)$$

در رابطه (۱۰)، D پهنای تیر، h ضخامت لایه‌ی پیژوالکتریک و J_p ضریب اصلاح پیژوالکتریک است که با رابطه‌ی زیر بیان می‌شود [۲۶]:

$$J_p = \frac{g e_{31}^2 L}{4 C_p EI} D^2 (H+h)^2 \quad (11)$$

در رابطه فوق، e_{31} ثابت پیژوالکتریک، g فاکتور بهره حالت و C_p ظرفیت الکتریکی لایه‌ی پیژوالکتریک است. شرایط پیوستگی در سمت چپ لایه پیژوالکتریک عبارت است از [۲۶]:

$$EI \frac{\partial \theta_2(x_1^+, t)}{\partial x} - EI \frac{\partial \theta_1(x_1^-, t)}{\partial x} = \frac{EI}{L} M_p \quad (12 \text{ الف})$$

$$T(x_1) \frac{\partial w_2(x_1^+, t)}{\partial x} + \kappa AG \left(\frac{\partial w_2(x_1^+, t)}{\partial x} - \theta_2(x_1^+, t) \right) = \quad (12 \text{ ب})$$

$$T(x_1) \frac{\partial w_1(x_1^-, t)}{\partial x} + \kappa AG \left(\frac{\partial w_1(x_1^-, t)}{\partial x} - \theta_1(x_1^-, t) \right)$$

$$w_2(x_1^+, t) = w_1(x_1^-, t) \quad (12 \text{ ج})$$

$$\theta_2(x_1^+, t) = \theta_1(x_1^-, t) \quad (12 \text{ د})$$

به طریق مشابه برای سمت راست لایه پیژوالکتریک به دست می‌آید:

$$EI \frac{\partial \theta_4(x_3^+, t)}{\partial x} - EI \frac{\partial \theta_3(x_3^-, t)}{\partial x} = -\frac{EI}{L} M_p \quad (13 \text{ الف})$$

$$T(x_3) \frac{\partial w_4(x_3^+, t)}{\partial x} + \kappa AG \left(\frac{\partial w_4(x_3^+, t)}{\partial x} - \theta_4(x_3^+, t) \right) = \quad (13 \text{ ب})$$

$$T(x_3) \frac{\partial w_3(x_3^-, t)}{\partial x} + \kappa AG \left(\frac{\partial w_3(x_3^-, t)}{\partial x} - \theta_3(x_3^-, t) \right)$$

$$w_4(x_3^+, t) = w_3(x_3^-, t) \quad (13 \text{ ج})$$

$$\theta_4(x_3^+, t) = \theta_3(x_3^-, t) \quad (13 \text{ د})$$

در روابط (۱۲) و (۱۳) از رابطه (۱۰) جایگزین می‌شود. با نظر گرفتن مقدار صفر برای J_p در معادله (۱۰)، گشتاور اعمالی از طرف لایه پیژوالکتریک حذف می‌گردد و در نتیجه فرکانس اول تیر ترک‌دار دارای لایه پیژوالکتریک همان فرکانس اول تیر ترک‌دار بدون آن خواهد بود. با افزایش مقدار این ضریب که خود تابعی از ولتاژ اعمالی است [۲۶]، فرکانس طبیعی اول تیر دارای ترک افزایش می‌یابد تا این که در مقدار مناسب J_p که

جدول ۲: قوانین تبدیل دیفرانسیل حاکم بر شرایط مرزی [۳۶]
Table 2. DTM theorems used for boundary condition [36]

در $x = 0$	تابع اصلی	تابع تبدیل یافته	در $x = 1$	تابع اصلی	تابع تبدیل یافته
$f(0) = 0$		$F[0] = 0$	$f(1) = 0$		$\sum_{k=0}^{\infty} F[k] = 0$
$\frac{df}{d\xi}(0) = 0$		$F[1] = 0$	$\frac{df}{d\xi}(1) = 0$		$\sum_{k=0}^{\infty} kF[k] = 0$
$\frac{d^2 f}{d\xi^2}(0) = 0$		$F[2] = 0$	$\frac{d^2 f}{d\xi^2}(1) = 0$		$\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)F[k] = 0$
$\frac{d^3 f}{d\xi^3}(0) = 0$		$F[3] = 0$	$\frac{d^3 f}{d\xi^3}(1) = 0$		$\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)(k-2)F[k] = 0$

برای تحلیل ارتعاشات آزاد تیر تیموشنکو پاسخ هارمونیک به شکل زیر در نظر گرفته می‌شود [۲۶]:
(۱۸ الف) $w_i(x, t) = \bar{W}_i(x) e^{i\omega t}$
(۱۸ ب) $\theta_i(x, t) = \bar{\phi}_i(x) e^{i\omega t}$
پارامترهای بدون بعد لازم جهت بی‌بعد سازی معادلات حاکم بر مسأله عبارتند از:

$$\xi_i = \frac{x_i}{L}, \delta = \frac{R}{L}, W = \frac{\bar{W}}{L}, \phi = \bar{\phi}, r^2 = \frac{I}{AL^2}, \quad (۱۹)$$

$$S^2 = \frac{EI}{\kappa AGL^2}, \eta^2 = \frac{\rho A \Omega^2 L^4}{EI}, \mu^2 = \frac{\rho A \omega^2 L^4}{EI}$$

پس از اعمال روابط (۱۸) بر روابط (۱)، (۲)، (۵)، (۶) و (۹) تا (۱۳) و به دست آوردن آن‌ها بر حسب مکان و همچنین استفاده از معادلات (۱۹) و اعمال آن بر روابط مذکور، معادلات بی‌بعد به دست می‌آید که پس از آن قوانین تبدیل دیفرانسیل بر آن‌ها اعمال می‌گردد. تبدیل یافته‌ی رابطه‌ی حاکم بر تیر تیموشنکوی دوار عبارت است از:

$$\left(\delta + \frac{1}{2} + \frac{1}{S^2 \eta^2}\right)(k+2)(k+1)W_i[k+2] - \delta(k+1)^2 W_i[k+1] - \left(\frac{\mu^2}{\eta^2} + \frac{(k+1)k}{2}\right)W_i[k] \quad (۲۰ الف)$$

$$- \frac{1}{S^2 \eta^2}(k+1)\phi_i[k+1] = 0$$

$$(k+2)(k+1)\phi_i[k+2] + \left(r^2(\mu^2 + \eta^2) - \frac{1}{S^2}\right)\phi_i[k] + \frac{1}{S^2}W_i[k+1] = 0 \quad (۲۰ ب)$$

در این معادلات $W_i[k]$ تبدیل یافته (ξ) و $\phi_i[k]$ تبدیل یافته (ξ) است. همچنین شرایط مرزی تبدیل یافته تیر به شکل زیر است:
تیر یک‌سرگیردار:

$$W_i[0] = 0 \quad (۲۱ الف)$$

$$\phi_i[0] = 0 \quad (۲۱ ب)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} k\phi_i[k] = 0 \quad (۲۱ ج)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (kW_4[k] - \phi_i[k]) = 0 \quad (۲۱ د)$$

تیر دو سر مفصل:

$$W_i[0] = 0 \quad (۲۲ الف)$$

$$\phi_i[1] = 0 \quad (۲۲ ب)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} kW_4[k] = 0 \quad (۲۲ ج)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} k\phi_i[k] = 0 \quad (۲۲ د)$$

شرایط پیوستگی تبدیل یافته در محل ترک عبارت است از:

$$\sum_{k=0}^m \xi_c^{k-1} k\phi_3[k] = \sum_{k=0}^m \xi_c^{k-1} k\phi_2[k] \quad (۲۳ الف)$$

$$\eta^2 \left(\left(\delta + \frac{1}{2}\right) - \left(\delta \xi_c + \frac{\xi_c^2}{2}\right) \right) \sum_{k=0}^m \xi_c^{k-1} kW_3[k] + \frac{1}{S^2} \left(\sum_{k=0}^m \xi_c^{k-1} kW_3[k] - \sum_{k=0}^m \xi_c^k \phi_3[k] \right) = \quad (۲۳ ب)$$

$$\eta^2 \left(\left(\delta + \frac{1}{2}\right) - \left(\delta \xi_c + \frac{\xi_c^2}{2}\right) \right) \sum_{k=0}^m \xi_c^{k-1} kW_2[k] + \frac{1}{S^2} \left(\sum_{k=0}^m \xi_c^{k-1} kW_2[k] - \sum_{k=0}^m \xi_c^k \phi_2[k] \right)$$

$$\sum_{k=0}^m \xi_c^k (W_3[k] - W_2[k]) =$$

$$C_v \frac{H}{L_b} \left(\mu^2 r^2 \left(\left(\delta + \frac{1}{2}\right) - \left(\delta \xi_c + \frac{\xi_c^2}{2}\right) \right) \right) \sum_{k=0}^m \xi_c^{k-1} k \times \quad (۲۳ ج)$$

$$W_3[k] + C_v \frac{H}{L_b} \left(\kappa \frac{G}{E} \left(\sum_{k=0}^m \xi_c^{k-1} kW_3[k] - \sum_{k=0}^m \xi_c^k \phi_3[k] \right) \right)$$

$$\sum_{k=0}^m \xi_c^k (\phi_3[k] - \phi_2[k]) = C_\theta \frac{H}{L_b} \sum_{k=0}^m \xi_c^{k-1} k\phi_3[k] \quad (۲۳ د)$$

تبدیل یافته شرایط پیوستگی سمت چپ و راست اتصال پیژوالکتریک نیز به ترتیب با معادلات (۲۴) و (۲۵) بیان می‌شود:

$$\sum_{k=0}^m \xi_1^{k-1} k(\phi_2[k] - \phi_1[k]) =$$

$$-J_p \left(\sum_{k=0}^m \xi_3^k \phi_4[k] - \sum_{k=0}^m \xi_1^k \phi_2[k] \right) \quad (۲۴ الف)$$

$$\eta^2 \left(\left(\delta + \frac{1}{2}\right) - \left(\delta \xi_1 + \frac{\xi_1^2}{2}\right) \right) \sum_{k=0}^m \xi_1^{k-1} kW_2[k] +$$

$$+ \frac{1}{S^2} \left(\sum_{k=0}^m \xi_1^{k-1} kW_2[k] - \sum_{k=0}^m \xi_1^k \phi_2[k] \right) =$$

$$W_4[1] = C_{24} \quad (۳۰ ج)$$

$$\phi_4[1] = C_{34} \quad (۳۰ د)$$

بنابراین برای قسمت اول تیر، اگر تیر یک سرگیردار باشد، معادلات (۲۶) و اگر دو سر مفصل ساده باشد معادلات (۲۷) و برای سایر قسمت‌های تیر باید به طور مجزا معادلات (۲۸) الی (۳۰) را اعمال نمود تا متغیرهای مسأله مشخص شود. با جایگذاری مقادیر بالا در شرایط مرزی و پیوستگی (۲۱) و (۲۳) تا (۲۵) برای تیر یک سرگیردار و (۲۲) و (۲۳) تا (۲۵) برای تیر دو سر مفصل ساده، معادلات بر حسب پارامترهای فیزیکی مسأله به دست می‌آید که با صفر قرار دادن درمیان ضرایب آن، یک معادله بر حسب فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد و پارامترهای فیزیکی بی‌بعد تیر حاصل می‌شود. حال می‌توان برای مقادیر مختلف این پارامترها فرکانس‌های بی‌بعد را محاسبه کرد.

۳- نتایج عددی

در ابتدا برای اعتبارسنجی روابط، به ذکر دو مثال عددی پرداخته می‌شود. در مثال اول یک تیر دو سر ساده‌ی ترک‌دار همراه اتصال پیزوالکتریک و در نمونه‌ی دوم یک تیر یک سرگیردار دورانی ترک‌دار همراه لایه‌ی پیزوالکتریک در نظر گرفته می‌شود. معیار تعیین ضریب اصلاح پیزوالکتریک، اصلاح فرکانس طبیعی اول است [۲۶]. به عبارت دیگر ضریب اصلاح پیزوالکتریک به گونه‌ای تعیین می‌شود که فرکانس اول تیر ترک‌دار با لایه پیزوالکتریک برابر فرکانس اول تیر سالم گردد. همان‌طور که ملاحظه خواهد شد هر گونه تغییر در هر مشخصه‌ی فیزیکی تیر باعث تغییر در ضریب مذکور می‌گردد.

۳-۱- مثال عددی ۱

تیر دو سر ساده شکل ۲ با مشخصات ارائه شده در جدول ۳ و ۴ در نظر گرفته می‌شود [۲۶].

جدول ۳: مشخصات عددی تیر و ترک در مثال ۱
Table 3. Characteristics of the beam and the crack in numerical example 1

مشخصات عددی	تیر
$L = 1.00$ m	طول
$H = 0.02$ m	ضخامت
$B = 0.02$ m	پهنا
$E = 210$ GPa	ضریب کشسانی
$\rho = 7860 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$	چگالی
$\nu = 0.3$	نسبت پواسون
$\xi_c = 0.5$	محل ترک
$\gamma = 0.5$	عمق ترک

$$\eta^2 \left(\left(\delta + \frac{1}{2} \right) - \left(\delta \xi_1 + \frac{\xi_1^2}{2} \right) \right) \sum_{k=0}^m \xi_1^{k-1} k W_1[k] + \frac{1}{S^2} \left(\sum_{k=0}^m \xi_1^{k-1} k W_1[k] - \sum_{k=0}^m \xi_1^k \phi_1[k] \right) \quad (۲۴ ب)$$

$$\sum_{k=0}^m \xi_1^k W_2[k] = \sum_{k=0}^m \xi_1^k W_1[k] \quad (۲۴ ج)$$

$$\sum_{k=0}^m \xi_1^k \phi_2[k] = \sum_{k=0}^m \xi_1^k \phi_1[k] \quad (۲۴ د)$$

$$\sum_{k=0}^m \xi_3^{k-1} k (\phi_4[k] - \phi_3[k]) = J_p \left(\sum_{k=0}^m \xi_3^k \phi_4[k] - \sum_{k=0}^m \xi_3^k \phi_2[k] \right) \quad (۲۵ الف)$$

$$\eta^2 \left(\left(\delta + \frac{1}{2} \right) - \left(\delta \xi_3 + \frac{\xi_3^2}{2} \right) \right) \sum_{k=0}^m \xi_3^{k-1} k W_4[k] + \frac{1}{S^2} \left(\sum_{k=0}^m \xi_3^{k-1} k W_4[k] - \sum_{k=0}^m \xi_3^k \phi_4[k] \right) = \quad (۲۵ ب)$$

$$\eta^2 \left(\left(\delta + \frac{1}{2} \right) - \left(\delta \xi_3 + \frac{\xi_3^2}{2} \right) \right) \sum_{k=0}^m \xi_3^{k-1} k W_3[k] + \frac{1}{S^2} \left(\sum_{k=0}^m \xi_3^{k-1} k W_3[k] - \sum_{k=0}^m \xi_3^k \phi_3[k] \right) \quad (۲۵ ج)$$

$$\sum_{k=0}^m \xi_3^k W_4[k] = \sum_{k=0}^m \xi_3^k W_3[k] \quad (۲۵ د)$$

$$\sum_{k=0}^m \xi_3^k \phi_4[k] = \sum_{k=0}^m \xi_3^k \phi_3[k] \quad (۲۵ د)$$

برای قسمت اول تیر روابط (۲۶) و (۲۷) به ترتیب برای تیر یک سرگیردار و تیر دو سر مفصل وجود دارد:

$$W_1[0] = \phi_1[0] = 0 \quad (۲۶ الف)$$

$$W_1[1] = C_{21} \quad (۲۶ ب)$$

$$\phi_1[1] = C_{31} \quad (۲۶ ج)$$

$$W_1[0] = \phi_1[1] = 0 \quad (۲۷ الف)$$

$$W_1[1] = C_{21} \quad (۲۷ ب)$$

$$\phi_1[0] = C_{31} \quad (۲۷ ج)$$

همچنین برای سایر قسمت‌های تیر می‌توان نوشت:

$$W_2[0] = C_{02} \quad (۲۸ الف)$$

$$\phi_2[0] = C_{12} \quad (۲۸ ب)$$

$$W_2[1] = C_{22} \quad (۲۸ ج)$$

$$\phi_2[1] = C_{32} \quad (۲۸ د)$$

$$W_3[0] = C_{03} \quad (۲۹ الف)$$

$$\phi_3[0] = C_{13} \quad (۲۹ ب)$$

$$W_3[1] = C_{23} \quad (۲۹ ج)$$

$$\phi_3[1] = C_{33} \quad (۲۹ د)$$

$$W_4[0] = C_{04} \quad (۳۰ الف)$$

$$\phi_4[0] = C_{14} \quad (۳۰ ب)$$

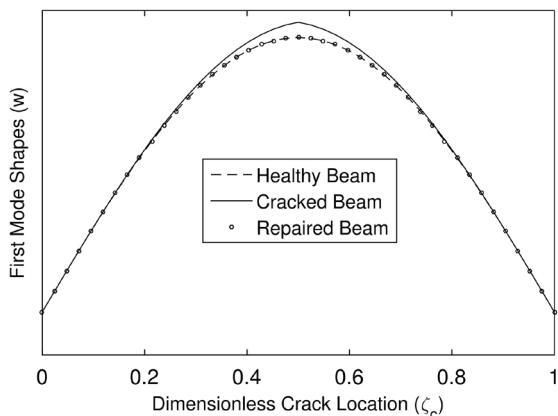


Fig. 4. First mode shape of a simply supported beam (healthy, cracked and repaired beams)

شکل ۴: شکل مود اول تیر دو سر مفصل ساده (بدون ترک، ترک‌دار، اصلاح شده)

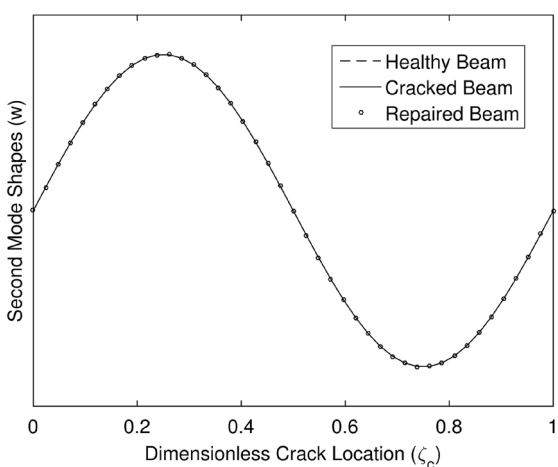


Fig. 5. Second mode shape of a simply supported beam (healthy, cracked and repaired beams)

شکل ۵: شکل مود دوم تیر دو سر مفصل ساده (بدون ترک، ترک‌دار، اصلاح شده)

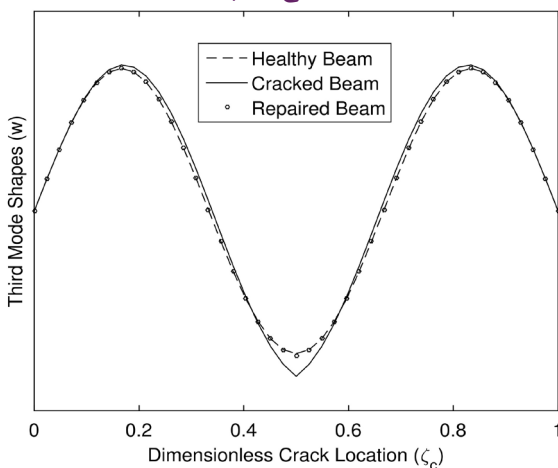


Fig. 6. Third mode shape of a simply supported beam (healthy, cracked and repaired beams)

شکل ۶: شکل مود سوم تیر دو سر مفصل ساده (بدون ترک، ترک‌دار، اصلاح شده)

۳-۲- مثال عددی ۲

در این مثال تیر دورانی طره‌ای نشان داده شده در شکل ۱ بررسی

جدول ۴: مشخصات عددی اتصال پیزوالکتریک در مثال ۱
Table 4. Characteristics of the piezoelectric patch in numerical example 1

مشخصات عددی	اتصال پیزوالکتریک
$\xi_1 = 0.475$	موقعیت سمت چپ
$\xi_3 = 0.525$	موقعیت سمت راست
$h = 0.15H$ m	ضخامت
$e_{31} = -4.1 \frac{C}{m^2}$	ثابت پیزوالکتریک

در کار انجام شده توسط آریایی و همکاران [۲۶] تیر دو سر مفصل بدون دوران با روش ماتریس انتقال بررسی شده است که نتایج حاصل از روش تبدیل دیفرانسیل در این مقاله با آن مقایسه و دقت روش اخیر بررسی می‌گردد. ضریب اصلاح گشتاور خمشی اتصال پیزوالکتریک $J_p = 11/58$ به دست می‌آید که به ازای آن فرکانس طبیعی اول تیر ترک‌دار اصلاح می‌شود. همان‌گونه که در جدول ۵ آمده است نتایج حاصل از روش تبدیل دیفرانسیل بر نتایج به دست آمده از روش ماتریس انتقال [۲۶] انطباق بالایی دارد. برای فرکانس‌های طبیعی ارائه شده در جدول بالا شکل مودهای جابه‌جایی عرضی در شکل‌های ۴، ۵، ۶ قابل مشاهده است.

در شکل ۴ مشاهده می‌گردد که شکل مود اول تیر سالم و تیر اصلاح شده بر هم منطبق گردیده است که دلیل آن، انطباق فرکانس طبیعی اول تیر اصلاح شده و تیر سالم است. همچنین در شکل ۵ برای فرکانس دوم به دلیل برابری فرکانس‌ها در هر سه حالت، شکل مودها منطبق هستند. شکل مود سوم حالت اصلاح شده هم تا حد زیادی برابر شکل مود تیر سالم است (شکل ۶). در شکل‌های ۴ و ۵، در مکان $\xi_c = 0.5$ ، شکستگی در شیب ناشی از وجود ترک به خوبی مشهود است.

جدول ۵: فرکانس‌های طبیعی تیر بدون ترک، ترک‌دار و اصلاح شده
Table 5. Natural frequencies of healthy, cracked and repaired beams

شماره مود	حالت تیر	روش محاسبه	فرکانس طبیعی (هرتز)
۱	تیر بدون ترک	تبدیل دیفرانسیل	۴۶/۸۵
		ماتریس انتقال [۲۶]	۴۶/۸۵
		تبدیل دیفرانسیل	۴۳/۹۴
	تیر اصلاح شده	ماتریس انتقال [۲۶]	۴۳/۹۴
		تبدیل دیفرانسیل	۴۶/۸۵
		ماتریس انتقال [۲۶]	۴۶/۸۵
۲	تیر بدون ترک	تبدیل دیفرانسیل	۱۸۷/۰۰
		ماتریس انتقال [۲۶]	۱۸۷/۰۱
		تبدیل دیفرانسیل	۱۸۷/۰۰
	تیر ترک‌دار	ماتریس انتقال [۲۶]	۱۸۷/۰۱
		تبدیل دیفرانسیل	۱۸۷/۰۰
		ماتریس انتقال [۲۶]	۱۸۷/۰۱
۳	تیر بدون ترک	تبدیل دیفرانسیل	۴۱۹/۳۸
		ماتریس انتقال [۲۶]	۴۱۹/۳۹
		تبدیل دیفرانسیل	۳۹۵/۹۶
	تیر ترک‌دار	ماتریس انتقال [۲۶]	۳۹۵/۹۶
		تبدیل دیفرانسیل	۳۹۵/۹۶
		ماتریس انتقال [۲۶]	۴۱۹/۱۹
تیر اصلاح شده	تبدیل دیفرانسیل	۴۱۹/۱۹	
	ماتریس انتقال [۲۶]	۴۱۹/۱۸	

همان گونه که در شکل های ۸، تا ۱۰ مشهود است فرکانس های به دست آمده از هر دو روش در حالت تیر بدون ترک و ترک دار با دقت زیادی بر هم منطبق شده اند؛ بنابراین روش تبدیل دیفرانسیل برای تیر دورانی ترک دار نتایج دقیقی ارائه می نماید.

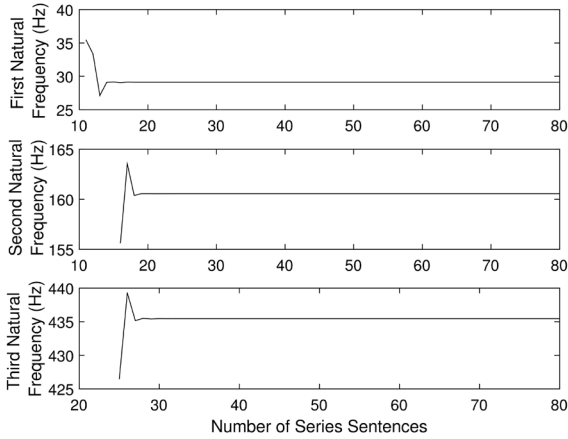


Fig. 7. Convergence of the first three natural frequencies
شکل ۷: همگرایی سه فرکانس طبیعی اول

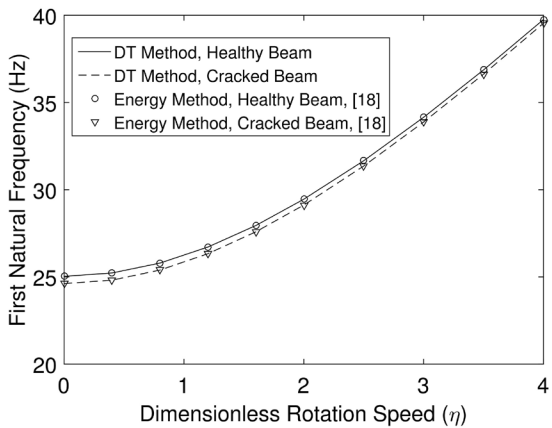


Fig. 8. Effect of the rotation speed on the fundamental natural frequency of the healthy and cracked beams

شکل ۸: فرکانس طبیعی اول تیر بدون ترک و ترک دار در سرعت های دورانی مختلف

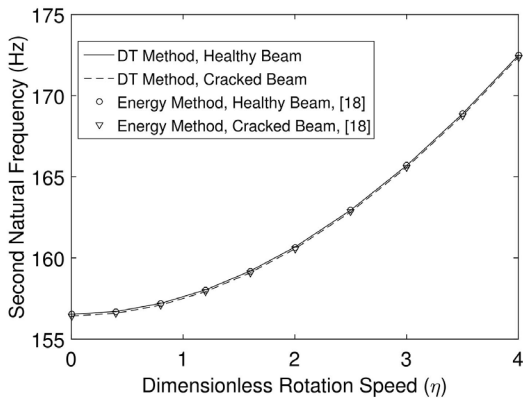


Fig. 9. Effect of the rotation speed on the second natural frequency of the healthy and cracked beams

شکل ۹: فرکانس طبیعی دوم تیر بدون ترک و ترک دار در سرعت های دورانی مختلف

جدول ۶: مشخصات عددی تیر مثال ۲
Table 6. Characteristics of the beam and the crack in numerical example 2

مشخصات عددی	تیر
$L = 0.7$ m	طول
$H = 0.015$ m	ضخامت
$B = 0.03$ m	پهنا
$E = 200$ GPa	ضریب کشسانی
$\rho = 7800 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$	چگالی
$\nu = 0.3$	نسبت پواسون
$\xi_c = 0.25$	محل ترک
$\gamma = 0.3$	عمق ترک
$\eta = 2$	سرعت دورانی
$\delta = 0$	شعاع هاب

جدول ۷: مشخصات عددی اتصال پیزوالکتریک مثال ۲
Table 7. Characteristics of the piezoelectric patch in numerical example 2

مشخصات عددی	اتصال پیزوالکتریک
$\xi_1 = 0.235$	موقعیت سمت چپ
$\xi_3 = 0.265$	موقعیت سمت راست
$h = 0.15H$ m	ضخامت
$e_{31} = -4.1 \frac{\text{C}}{\text{m}^2}$	ثابت پیزوالکتریک

می گردد. ویژگی های ارائه شده در جدول ۶ و ۷ مطابق مرجع [۱۸] در نظر گرفته می شود و فرکانس های طبیعی تیر ترک دار اصلاح می گردد. کلیه نتایج عددی بر مبنای اطلاعات ارائه شده در جداول ۶ و ۷ به دست آمده اند مگر آنکه خلاف آن ذکر شده باشد.

جهت بررسی رابطه ی بین تعداد جملات در معادله (۱۷) و همگرایی نتایج، نمودارهای شکل ۷ برای سه فرکانس اول، دوم و سوم تیر ترک دار رسم شده است. همان گونه که مشاهده می شود ابتدای نمودار مربوط به هر فرکانس دارای تغییرات زیاد است که با افزایش تعداد جملات این نمودارها به صورت یک خط مستقیم در می آیند که به معنای همگرایی نتایج است. در مجموع جهت همگرایی هر سه فرکانس کافی است تعداد جملات بیشتر از ۴۰ باشد. تمام نتایج به دست آمده در این مقاله با در نظر گرفتن ۱۰۰ جمله ی اول سری تبدیل دیفرانسیل محاسبه شده است.

پیش از اعمال ضریب اصلاح پیزوالکتریک جهت اعتبارسنجی، نتایج ارائه شده در این مثال با نتایج مرجع [۱۸] مقایسه می شود که در آن از روش انرژی جهت تعیین فرکانس های تیر بدون ترک و دارای آن استفاده شده است.

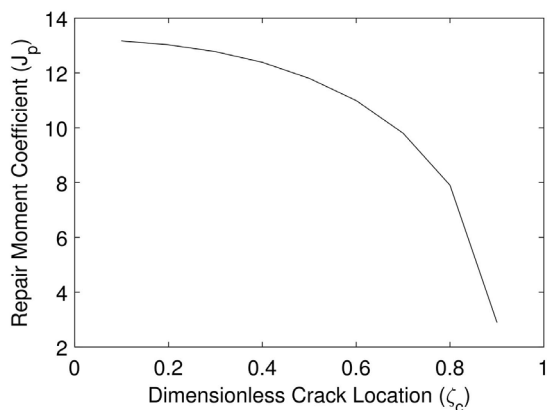


Fig. 12. Effect of the crack location on the repair moment coefficient
 شکل ۱۲: تغییرات ضریب اصلاح پیزوالکتریک بر حسب تغییرات مکان ترک

کاهش می‌یابد و فرکانس طبیعی اول تیر ترک‌دار که معیار اصلاح می‌باشد به فرکانس طبیعی اول تیر بدون ترک نزدیک می‌گردد؛ در نتیجه ضریب اصلاح پیزوالکتریک روندی کاهشی پیدا می‌کند.

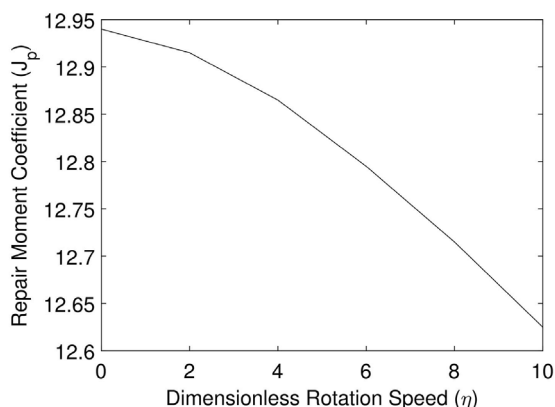


Fig. 13. Effect of the rotation speed on the repair moment coefficient
 شکل ۱۳: تغییرات ضریب اصلاح پیزوالکتریک بر حسب تغییرات سرعت دورانی تیر

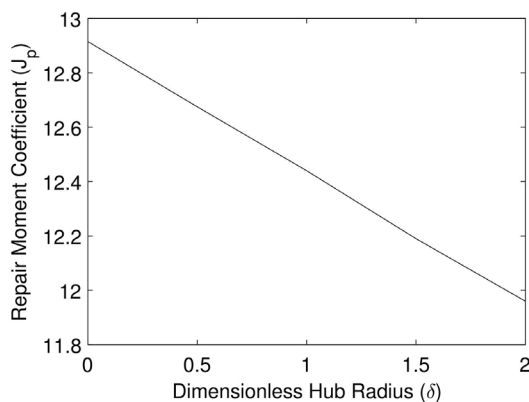


Fig. 14. Effect of the hub radius on the repair moment coefficient
 شکل ۱۴: تغییرات ضریب اصلاح پیزوالکتریک بر حسب تغییرات شعاع استوانه دوار

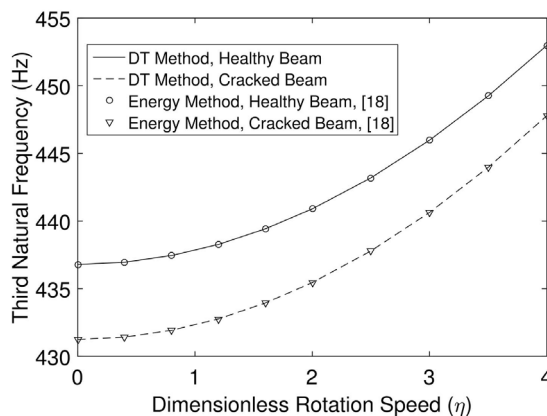


Fig. 10. Effect of the rotation speed on the third natural frequency of the healthy and cracked beams
 شکل ۱۰: فرکانس طبیعی سوم تیر بدون ترک و ترک‌دار در سرعت‌های دورانی مختلف

اینک با اعمال ضریب اصلاح پیزوالکتریک به اصلاح ترک در تیر پرداخته می‌شود. همان‌گونه که قبلاً بیان شد با تغییر در هر یک از پارامترهای سیستم این ضریب تغییر می‌کند.

در شکل ۱۱ تغییرات ضریب اصلاح پیزوالکتریک بر حسب تغییرات عمق ترک ترسیم شده است. همان‌طور که در این شکل ملاحظه می‌گردد با افزایش عمق ترک ضریب اصلاح پیزوالکتریک افزایش می‌یابد و نرخ این افزایش تقریباً به صورت خطی است. این افزایش قابل پیش بینی است زیرا با افزایش عمق ترک نیاز به ولتاژ اعمالی بیشتری به پیزوالکتریک جهت جبران کاهش فرکانس ایجاد شده در اثر ترک است.

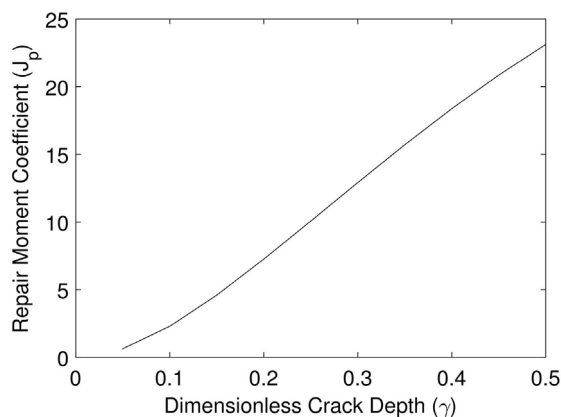


Fig. 11. Effect of the crack depth on the repair moment coefficient
 شکل ۱۱: تغییرات ضریب اصلاح پیزوالکتریک بر حسب تغییرات عمق ترک

تغییرات ضریب اصلاح پیزوالکتریک بر حسب تغییرات مکان ترک در شکل ۱۲ نشان داده شده است. در این شکل مشاهده می‌شود که افزایش فاصله‌ی ترک تا انتهای گیردار سبب کاهش در مقدار ضریب اصلاح پیزوالکتریک می‌گردد؛ به عبارت دیگر، به گشتاور خمشی کمتر و در نتیجه اعمال ولتاژ کمتری به اتصال پیزوالکتریک نیاز است. دلیل این موضوع آن است که هر چه فاصله‌ی ترک از انتهای گیردار تیر بیشتر شود اثر آن

- [6] S.S. Rao, R.S. Gupta, Finite element vibration analysis of rotating Timoshenko beams, *Journal of Sound and Vibration*, 242(1) (2001) 103–124.
- [7] S.M. Lin, The instability and vibration of rotating beams with arbitrary pretwist and an elastically restrained root, *Journal of Applied Mechanics*, 68(6) (2000) 844–853.
- [8] K.G. Vinod, S. Gopalakrishnan, R. Ganguli, Free vibration and wave propagation analysis of uniform and tapered rotating beams using spectrally formulated finite elements, *International Journal of Solids and Structures*, 44(18–19) (2007) 5875–5893.
- [9] J.B. Gunda, R. Ganguli, New rational interpolation functions for finite element analysis of rotating beams, *International Journal of Mechanical Sciences*, 50 (2008) 578–588.
- [10] J.B. Gunda, R. Ganguli, Stiff-string basis functions for vibration analysis of high speed rotating beams, *Journal of Applied Mechanics*, 75 (2008) 245021–245025.
- [11] J.B. Gunda, R.K. Gupta, R. Ganguli, Hybrid stiff-string polynomial basis functions for vibration analysis of high speed rotating beams, *Computers and Structures*, 87(3–4) (2009) 254–265.
- [12] H. Kim, H.H. Yoo, J. Chung, Dynamic model for free vibration and response analysis of rotating beams, *Journal of Sound and Vibration*, 332 (2013) 5917–5928.
- [13] C.L. Huang, W.Y. Lin, K.M. Hsiao, Free vibration analysis of rotating Euler beams at high angular velocity, *Computers and Structures*, 88 (2010) 991–1001.
- [14] Y. Liu, D.W. Shu, Free vibration analysis of rotating Timoshenko beams with multiple delaminations, *Composites Part B Engineering*, 44 (2013) 733–739.
- [15] R. Hein, C. Orlikowski, Simplified dynamic model of rotating beam, *Diagnostyka*, 14(2) (2013) 43–48.
- [16] J.R. Banerjee, D. Kennedy, Dynamic stiffness method for inplane free vibration of rotating beams including Coriolis effects, *Journal of Sound and Vibration*, 333 (2014) 7299–7312.
- [17] P.K. Datta, R. Ganguli, Vibration characteristics of a rotating blade with localized damage including the effects of shear deformation and rotary inertia, *Computers and Structures*, 36(6) (1990) 1129–1133.
- [18] A.A. Masoud, S. Al-Said, A new algorithm for crack localization in a rotating Timoshenko beam, *Journal of Vibration and Control*, 15 (2009) 1541–1561.
- [19] J.A. Loya, L. Rubio, J. Ferná'ndez-Sa'e, Natural Frequencies for Bending Vibrations of Timoshenko Cracked Beams, *Journal of Sound and Vibration*, 290 (2006) 640–653.
- [20] K. Torabi, H. Afshari, F. Haji Aboutalebi, A DQEM

همان‌گونه که در شکل ۸ نشان داده شد با افزایش سرعت دورانی تیر، اختلاف بین فرکانس طبیعی اول تیر بدون ترک و تیر ترک‌دار کاهش می‌یابد؛ لذا با افزایش سرعت دورانی باید برای اصلاح فرکانس اول تیر ترک‌دار ولتاژ کمتری از طرف لایه پیزوالکتریک بر تیر وارد شود. این نتیجه در شکل ۱۳ به خوبی قابل مشاهده است؛ همان‌طور که در این شکل نشان داده شده است با افزایش سرعت دورانی تیر، ضریب اصلاح پیزوالکتریک که نسبت مستقیم با ولتاژ اعمالی به لایه پیزوالکتریک دارد کاهش می‌یابد. در نهایت در شکل ۱۴ مشاهده می‌شود که با افزایش شعاع استوانه در یک سرعت دورانی معین ضریب اصلاح پیزوالکتریک روند نزولی دارد و نرخ این کاهش نیز تقریباً خطی است.

۴- نتیجه‌گیری

در این مقاله اصلاح رفتار ارتعاشی آزاد به کمک اتصال پیزوالکتریک در یک تیر تیموشنکوی دورانی مورد بررسی قرار گرفت. روش کار بدین ترتیب است که به کمک لایه پیزوالکتریک متصل به تیر، فرکانس اول تیر ترک‌دار و بدون ترک برابر می‌گردد که این موضوع سایر ویژگی‌های ارتعاشی تیر ترک‌دار را نیز به تیر سالم نزدیک می‌کند. تأثیر لایه پیزوالکتریک و سرعت دورانی بر روی فرکانس‌های طبیعی مورد مطالعه قرار گرفت و مشاهده شد که با افزایش سرعت دورانی، فرکانس‌های طبیعی سیستم افزایش می‌یابد. همچنین نشان داده شد که با افزایش عمق ترک ضریب اصلاح پیزوالکتریک افزایش و با افزایش سرعت دورانی، شعاع استوانه‌ی دوار و فاصله ترک تا انتهای گیردار تیر کاهش می‌یابد. تطابق خوب نتایج نشان‌دهنده دقت بالای روش تبدیل دیفرانسیل در تحلیل ارتعاشی این نوع از سیستم‌ها است.

مراجع

- [1] D. Thakkar, R. Ganguli, Helicopter vibration reduction in forward flight with induced shear based piezoceramic actuation, *Smart Materials and Structures*, 30(3) (2004) 599–608.
- [2] S. Kumar, N. Roy, R. Ganguli, Monitoring low cycle fatigue damage in turbine blades using vibration characteristics, *Mechanical Systems and Signal Processing*, 21(1) (2007) 480–501.
- [3] R.C. Kar, S. Neogy, Stability of a rotating, pretwisted, non-uniform cantilever beam with tip mass and thermal gradient subjected to a non-conservative force, *Computers and Structures*, 33(2) (1989) 499–507.
- [4] S.Y. Lee, S.M. Lin, Bending Vibrations of rotating nonuniform Timoshenko beam with an elastically restrained root, *ASME Journal of Applied Mechanics*, 61(4) (1994) 949–55.
- [5] J.N. Kosmatka, An improved two-node finite element for stability and natural frequencies of axially loaded Timoshenko beams, *Computers and Structures*, 57(1) (1995) 141–149.

- for boundary force measurements in Euler–Bernoulli beams, *Smart Materials and structures*, 20 (2011) 075009 (9pp).
- [31] J.K. Zhou, Differential Transformation and its application for electrical circuits, *Huazhong University Press*, Wuhan, 1986.
- [32] C. Mei, Application of differential transformation technique to free vibration analysis of a centrifugally stiffened beam, *Computers and Structures*, 86 (2008) 1280–1284.
- [33] C.K. Chen, S.P. Ju, Application of differential transformation to transient advective–dispersive transport equation, *Applied Mathematics and Computation*, 155 (2004) 25–38.
- [34] A. Arikoglu, I. Ozkol, Solution of boundary value problems for integro-differential equations by using differential transformation method, *Applied Mathematics and Computation*, 168 (2004) 1145–1158.
- [35] C.W. Bert, H. Zeng, Analysis of axial vibration of compound bars by differential transformation method, *Journal of Sound and Vibration*, 275 (2004) 641–647.
- [36] F. Ayaz, Application of differential transforms method to differential–algebraic equations, *Applied Mathematics and Computation*, 152 (2004) 648–657.
- [37] O.O. Ozgumus, M.O. Kaya, Flap wise bending vibration analysis of a rotating tapered cantilever Bernoulli–Euler beam by differential transform method, *Journal of Sound and Vibration*, 289 (2006) 413–420.
- [38] Q. Mao, Design of piezoelectric modal sensor for non-uniform Euler–Bernoulli beams with rectangular cross-section by using differential transformation method, *Mechanical Systems and Signal Processing*, 33 (2012) 142–154.
- [39] N. Wattanasakulpong, V. Ungbhakorn, Linear and nonlinear vibration analysis of elastically restrained ends FGM beams with porosities, *Aerospace Science and Technology*, 32 (2014) 111–120.
- for transverse vibration analysis of multiple cracked non-uniform Timoshenko beams with general boundary conditions, *Computers and Mathematics with Applications*, 67(3) (2014) 527–541.
- [21] M. Rezaee, H. Javadian, V.A. Maleki, Vibration behavior and crack detection of a cracked short beam under an axial load, *Amirkabir Journal of Mechanical Engineering*, 47(2) (2015) 1–12 (in Persian).
- [22] B. Rahmani, F. Gholami, Robust vibration control of a functionally graded cracked beam, *Journal of Science and Technology of Composites*, 2(1) (2015) 41-52 (in Persian).
- [23] M. Wang, S.T. Quek, K.M. Liew, On the repair of a cracked beam with a piezoelectric patch, *Smart Materials and Structures*, 11 (2002) 404–410.
- [24] Q. Wang, S.T. Quek, Repair of cracked column under axially compressive load via piezoelectric patch, *Computers and Structures*, 83 (2005) 1355–1363.
- [25] A. Alaimo, A. Milazzo, C. Orlando, Boundary elements analysis of adhesively bonded piezoelectric active repair, *Engineering Fracture Mechanics*, 76 (2009) 500-511.
- [26] A. Ariaei, S. Ziaei-Rad, M. Ghayour, Repair of a cracked Timoshenko beam subjected to a moving mass using piezoelectric patches, *International Journal of Mechanical Sciences*, 52 (2010) 1074-1091.
- [27] C.H. Park, Dynamics modeling of beams with shunted piezoelectric elements, *Journal of Sound and Vibration*, 268 (2003) 115–129.
- [28] D. Sun, L. Tong, An equivalent model for smart beams with debonded piezoelectric patches, *Journal of Sound and Vibration*, 276 (2004) 933–956.
- [29] Y.D. Kuang, G.Q. Li, C.Y. Chen, An admittance function of active piezoelectric elements bonded on a cracked beam, *Journal of Sound and Vibration*, 298 (2006) 393–403
- [30] S. Chesne, C. Pezerat, Distributed piezoelectric sensors

برای ارجاع به این مقاله از عبارت زیر استفاده کنید:

Please cite this article using:

M. Naderi, A. Ariaei, Repair of Free Vibration Behavior of a Cracked Rotating Timoshenko Beam Using a Piezoelectric Patch and Applying Differential Transform Method, *Amirkabir J. Mech. Eng.*, 51(1) (2018) 97-108.

DOI: 10.22060/mej.2017.12541.5360



