

بهینه دور شده و انتقال گرما تنزل می‌کند.

چنانچه به مقادیر بسیار کوچک l^+ توجه کنیم، ملاحظه می‌گردد که با افزایش l^+ ابتدا مقادیر q_{w}^* کاهش می‌یابد و پس از رسیدن به یک مقدار کمینه شروع به افزایش کرده و رفتار عمومی که در بالا به آن اشاره شد، دیده می‌شود. باید متذکر شد که روابط پره از تحلیل یک بعدی انتقال گرما حاصل شده‌اند. لذا هرگاه طول پره بسیار کوتاه باشد، منحنیهای شکل (۳) از واقعیت فاصله گرفته و رفتار حقیقی پره را پیش‌بینی نمی‌کنند. در نتیجه از مقادیر q_{w}^* مربوط به l^+ های بسیار کوچک صرف نظر کرده و در تعیین پره بهینه آنها را دخالت نمی‌دهیم.

نتیجه‌گیری

روابط تحلیلی انتقال گرما از پره‌های سوزنی به منظور تعیین شرایط مؤثر بودن پره مورد بررسی قرار گرفت. معلوم گردید که نصب پره روی سطحهای داغ هنگامی انتقال گرما را افزایش می‌دهد که مقدار $\frac{h}{mk}$ کوچکتر از یک باشد. در این صورت پره را به اصطلاح پره مؤثر می‌نامند. در این حالت هر قدر طول پره بزرگتر باشد، انتقال گرما از آن نیز بیشتر است. از طرفی اگر کمیت فوق بزرگتر از یک باشد، افزایش طول پره انتقال گرما را کاهش می‌دهد. لذا در این حالت بیشترین انتقال گرما از سطح لخت صورت می‌گیرد و نیاز به نصب پره نیست. در صورتی که

مقدار $\frac{h}{mk}$ برابر یک باشد، بودن یا نبودن پره هیچ تاثیری بر انتقال گرما ندارد. با توجه به این که نصب پره هزینه‌ای دربردارد، استفاده از پره در این حالت اقتصادی نیست.

پس از تشخیص این که برای افزایش انتقال گرما از یک سطح در شرایط داده شده می‌توان از پره استفاده کرده این سؤال مطرح می‌شود که پره بهینه کدام است. نظر به این که جرم پره مقدار فلز مصرفی را مشخص می‌کند و با قیمت آن در ارتباط است، طبیعی است اگر سؤال شود ابعاد بهینه پره به ازای جرم پره M داده شده کدام است. در پاسخ به این سؤال دو پره سوزنی با مقطع دایره مورد بررسی قرار گرفت. (۱) انتقال گرما در نوک پره به صورت همرفت انجام می‌شود، و (۲) نوک پره عایق است. در حالت (۲) نشان داده شد که شرایط بهینه مقدار ثابتی است و به پارامتری نظیر عدد $Bi_{2\delta}$ بستگی ندارد. در این حالت طول بی‌بعد بهینه پره l_{opt}^+ بیشترین مقدار ممکن را دارد. در حالت (۱) طول بی‌بعد بهینه l_{opt}^+ به عدد $Bi_{2\delta}$ بستگی دارد (رابطه (۱۹)) و با افزایش $Bi_{2\delta}$ کاهش می‌یابد.

همچنین نشان دادیم که با افزایش $Bi_{2\delta}$ نسبت طول به شعاع پره $\frac{l}{\delta}$ کاهش یافته (رابطه (۲۲)) و برای داشتن شرایط بهینه وزنی باید پره را کوتاهتر و ضخیمتر انتخاب کرد.

منابع :

1. Liu, C.Y., "On Optimum Rectangular Cooling Fins," Quarterly of Applied Mathematics, Vol. 19, 1961, pp. 72-75.
2. Brown, A., "Optimum Dimensions of Uniform Annular Fins," Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 8, 1965, pp. 655-662.
3. Campo, A. and Wolko, H.S., "Optimum Rectangular Radiative Fins Having Temperature - Variant Properties," J. Spacecraft and Rockets, Vol. 10, 1973, pp. 811-812.
4. Razelos, P., "The Optimization of Longitudinal Convective Fins with Internal Heat Generation," Nuclear Engineering and Design, Vol. 54, 1979, pp. 289-299.
5. Netrakanti, M.N. and Huang, C.L.D., "Optimization of Annular Fins with Variable Thermal Parameters by Invariant Imbedding," ASME-JSME Thermal Engineering Conference, Honolulu, 1983.
6. Eckert, E.R.G., and Drake, Jr., R.M., Analysis of Heat and Mass Transfer, McGraw-Hill, New York, 1972, p. 79.
7. Karlekar, B.V., and Desmond, R.M., Heat Transfer, 2nd Edn., West Publishing Co., St. Paul, Minnesota, 1982, p. 96.



حل معادلات انتگرالی سیال غیر لزج

و تراکم ناپذیر باروش مارچینگ

دکتر محسن کهرم

استادیار گروه مکانیک دانشکده مهندسی مکانیک دانشگاه مشهد

مهندس محمود پسندیده فرد

فارغ التحصیل کارشناسی ارشد مهندسی مکانیک دانشگاه مشهد

چکیده

معادلات بقا، ممتوم و پیوستگی برای شبکه‌ای از حجم‌های کنترلی که یک مخزن استوانه‌ای را پر کرده‌اند حل شده است. در این روش، خطای جرمی به دست آمده از حل معادلات پیوستگی در نقطه N برای تصحیح مولفه Z سرعت در حجم کنترلی بالاسر آن به طوری به کار می‌رود که اصل بقا جرم در این نقطه برقرار گردد. یک برنامه کامپیوتری سیستم معادلات را برای یک مخزن استوانه‌ای حاوی سیال تراکم ناپذیر حل می‌کند. در یک آزمایش عددی فرض شده است، سیالی که فقط یک حجم کنترلی در بالاسر سطح آزاد مخزن را پر کرده است سقوط آزاد خود را تحت تاثیر نیروی ثقل آغاز می‌کند. اثر این سقوط در جابجایی سیال داخل مخزن مورد بررسی قرار گرفته است. سقوط حجم همراه با ایجاد موج، گسترش موج به سمت دیواره‌ها، برگشت موج از دیواره‌ها و تداخل امواج با یکدیگر است. خطای محاسبه از مقایسه جرم کل و ممتوم کل سیال درون مخزن در ابتدای محاسبه و پس از یک رفت و برگشت موج تا دیواره مخزن قابل قیاس است. با توجه به خطای قابل قبول محاسباتی کمتر از ۲٪، امکان پیش‌بینی توزیع فشار و میدان برداری سرعت در یک مخزن در نتیجه زلزله و یا تزریق سیال به مخزن، قابل انتظار است.

Application of Time Marching Method to Incompressible Inviscid Fluid Flow

M. Kahrom, Ph.D.

&

M. Pasandideh Fard, M.Sc.

Mech. Eng. Dept. of Uni. of Mashhad

ABSTRACT

The integral form of the time dependent conservation equations of momentum and continuity are solved for a non-steady 3-D inviscid and incompressible fluid flow in a tank. Stability of the method is maintained using velocity correction for grid point on top of the control volume. In an auxiliary loop, the component of velocity normal to the top surface of the control volume is corrected so that to satisfy the continuity, in each iteration. The method is stable and its application to unsteady wave propagation in a tank of liquid shows only a small amount of error on total momentum change of initially given to the liquid.

معادله (۲) دارای سه مؤلفه است. برای سیال تراکم ناپذیر، جرم مخصوص ثابت است لذا جمله اول معادله (۱) صفر است و چون تغییرات درجه حرارت ناچیز است معادله انرژی برای این مساله صادق بوده و از حل آن صرفنظر می‌کنیم. سه مؤلفه سرعت و مقدار فشار از حل سه مؤلفه معادله منتوم و باقی مانده معادله پیوستگی که از آن در محاسبه فشار استاتیکی استفاده خواهد شد، قابل محاسبه‌اند.

شبکه بندی مخزن:

مخزن را به صورت استوانه در نظر می‌گیریم که دستگاه مختصات با سه محور X, Y, Z در مرکز سطح قاعده آن قرار دارد. هر مقطع قائم بر Z در امتداد r, θ را به ترتیب به i, j قسمت می‌کنیم. شکل (۱). این تقسیم بندی را در امتداد Z و به فاصله ΔZ تکرار می‌کنیم تا K طبقه از شبکه به وجود آید. به این ترتیب شبکه سه بعدی از حجم های کنترلی مخزن را پیر می‌کنند. حجم های کنترلی را با سه زیر نویس i, j, k شماره گذاری می‌کنیم. هر حجم کنترلی دارای شش سطح و هر سطح با مؤلفه های بردار مساحت خود مشخص می‌شود. برای هر حجم کنترلی باید معادلات (۱) و (۲) صادق باشند.

بسط معادلات انتگرالی بقاء:

روی حجم های کنترلی معادلات انتگرالی بقاء جرم و منتوم به صورت زیر بسط داده می‌شوند:

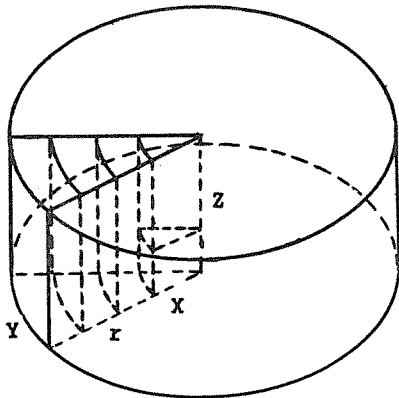
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{1}{v} \sum_{i=1}^6 \rho_i (S_i \cdot V_i) \quad (4)$$

$$\frac{\partial \rho v}{\partial t} = -\frac{1}{v} \sum_{i=1}^6 [\rho_i \cdot V_i (V_i \cdot S_i) + P_i \cdot S_i] \quad (5)$$

این معادلات را به صورت تفاضل محدود می‌نویسیم:

$$\rho^{n+1} = \rho^n - \frac{\sum_{i=1}^6 \rho_i (S_i \cdot V_{upwind})}{v} \cdot \Delta t \quad (6)$$

$$v^{n+1} = v^n - \frac{\sum_{i=1}^6 [\rho_i (V_i \cdot S_i) \cdot V_{i, upwind} + P_i \cdot S_i]}{\rho^N \cdot v} \cdot \Delta t \quad (7)$$



شکل ۱- نمایش یک ردیف از حجم های کنترلی در فاصله ΔZ از قاعده استوانه

معادلات حرکتی جریانی ترکیبی از شیب تغییر متغیرهای سیال هستند. این معادلات که معمولاً "غیرخطی هستند، شکل های پیچیده ای از معادلات دیفرانسیل را به دست می‌دهند که حل آنالیتیک آنها عموماً غیرممکن است. برای پیش بینی یک تحول سیالی باید گروهی از معادلات دیفرانسیل که به طور کامل تغییر تمام خصوصیات جریان سیال را به دست می‌دهند با هم حل شوند. دستیابی به روش حل عددی این دستگاه معادلات مهمترین گام برای یافتن پاسخ ریاضی به حل مساله است.

روش های متنوعی برای حل سیستم معادلات منتوم، پیوستگی و انرژی سیال، تراکم ناپذیر ارائه شده است. (ref. 1,7). بخش عمده این روشها حل مساله برای وضعیت پایدار حرکت جریان است. برای جریان گذرا روش تایم مارچینگ مورد استفاده قرار می‌گیرد. در این روش تابع زمانی تغییرات خصوصیات جریان از معادلات حذف نمی‌شوند. (ref. 8) برای حذف مشتق زمانی دانسته در معادله پیوستگی، گاه فرض می‌شود سیال دارای تراکم پذیری مصنوعی است (ref. 1). در این صورت ابتدا مؤلفه های بردار سرعت به وسیله معادله منتوم به دست می‌آیند و سپس مقادیر مؤلفه های سرعت و مقدار فشار به گونه ای تصحیح می‌شوند که معادله پیوستگی برقرار باشد.

در هر روشی اولین گام، تامین پایداری روش محاسباتی است. برای دستیابی به این هدف ابتدا باید مساله به ساده ترین شکل خود طرح شود. پس از برقراری پایداری، خطاهای موجود در مساله بررسی و در صورت قابل قبول بودن شرایط دیگر را برای تکمیل مدل محاسباتی یک به یک به سیستم معادلات اضافه نماییم. در مقاله حاضر مساله حرکت جریان سیال تراکم ناپذیر با سطح آزاد برای رسیدن به حل گذرا (تابع زمانی) مورد بررسی قرار گرفته است. منظور از حل این مساله طرح یک برنامه کامپیوتری است که توزیع فشار و میدان برداری سرعت را در داخل یک مخزن سه بعدی به دست دهد. تحت تاثیر یک تحول ناگهانی، جریان داخل مخزن از حالت پایدار خود خارج می‌شود. برنامه کامپیوتری باید توزیع میدان فشار و سرعت را در تمام نقاط مخزن پیش بینی کند. این برنامه می‌تواند برای مهندسين محاسب مخازن جمع آوری سیال، مخازن رآکتورهای شیمیایی و اتمی مورد استفاده قرار گیرد تا بتوانند فشارهای ناشی از ورود و خروج جریان به مخزن و تاثیر نوسانات ناشی از زلزله را پیش بینی کنند. برنامه پاسخ کیفی به تحول را برای سیال بی لزجت داده است. آزمایش برنامه برای حالات طبیعی از جابجایی سیال در دست بررسی است.

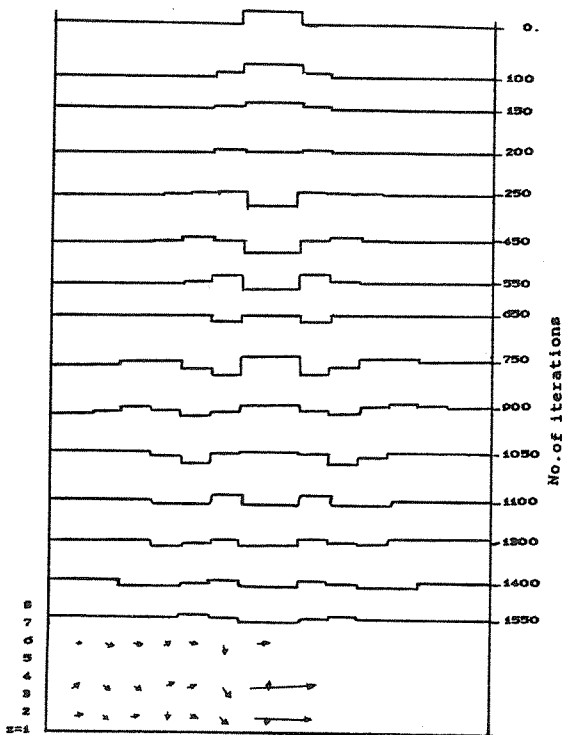
معادلات بقاء:

معادلات بقاء را به صورت های کلی زیر در نظر می‌گیریم:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho V) = 0. \quad (1) \text{ معادله بقاء جرم}$$

$$\frac{\partial (\rho V)}{\partial t} + \text{div}(\rho V V) = -\text{grad } P \quad (2) \text{ معادله منتوم}$$

$$\frac{\partial (\rho E)}{\partial t} + \text{div}(\rho V H) = 0. \quad (3) \text{ معادله انرژی}$$



شکل ۲- نمایش گسترش اغتشاش در سطح آزاد مخزن و ترکیب موجهای رفت و برگشتی سیال. در قسمت پایین شکل یک مقطع قائم از سیال داخل مخزن، سطح آزاد سیال و میدان برداری سرعت نمایش داده شده است. در مطالعه شکل به شماره گذاری در امتداد ارتفاع مخزن، سطح مبناء و مقدار زمان توجه فرمائید.

محاسبات تواتری خود پس از هر صد دور محاسبه ($\Delta t = 0.1^{sec}$) وضعیت میدان برداری سرعت جریان داخل مخزن را در یک مقطع $x-z$ و همچنین وضعیت سطح آزاد مایع را گزارش می کند. در شکل های (۲) و (۳) وضعیت سطح آزاد سیال پس از هر صد تواتر محاسباتی رسم شده است.

در شکل (۲) اغتشاش در مرکز مخزن ایجاد شده است و گسترش اثر متقارن بر اطراف دارد. و در شکل (۳) اغتشاش نامتقارن و چگونگی انتشار آن نمایش داده شده است.

در شکل (۲) مایع در حال سقوط اطراف خود را برای انتشار موج تحریک می کند. ($iter = 100$) حجم در حال سقوط در امتداد سقوط خود، به زیر سطح آزاد سقوط می کند و پس از فرو رفتن به عمق $-\Delta z$ مجدداً حرکت نوسانی تکرار می شود، ($iter = 550$) و ($iter = 900$) در ($iter = 1050$) موج به دیواره استخر رسیده و در تواترهای بعدی

محاسبه، ترکیب موج در سطح مخزن نشان داده شده است. توزیع میدان برداری سرعت در ($iter = 1600$) در پایین شکل (۲) رسم شده است. شکل (۳) همین گسترش موج را برای حالتی که اغتشاش به

حل این معادلات برای تمام حجم های کنترلی، گذر جریان را از یک حجم کنترلی به حجم کنترلی دیگر و بالاخره در نهایت وضعیت پایدار جریان را به دست می دهد.

پایداری دستگاه معادلات:

کورانت و همکاران (ref. 3, 4) نشان دادند که در هر گام از پیشرفت محاسبه، برای سیال تراکم پذیر، نباید حل معادلات بقاء، انتشار موج فشاری را بیش از فاصله دو گره متوالی به پیش برانند در غیر این صورت دستگاه معادلات ناپایدار است و ثابت نمودند که اگر Δx فاصله دو نقطه در امتداد انتشار موج باشد باید:

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{C}$$

می توان نشان داد که در عمل وجود برخی از تقریبها و خطاهای ناشی از آنها، مقدار Δt را گاه تا چند برابر کوچکتر از شرایط کورانت و همکاران کاهش می دهد. این خطاها که ناشی از فرض های دیگری برای پایداری دستگاه معادلات و یا فرض شرایط مرزی هستند، اجتناب ناپذیرند.

برای حفظ پایداری دستگاه معادلات باید متغیر حامل کمیت جابه جاشونده را در گره بالادست جریان مورد استفاده قرار داد تا از جمع خطاها که عامل ناپایداری است، در یک گره جلوگیری شود.

رعایت دو نکته فوق برای حفظ پایداری عمومی سیستم معادلات لازم است با وجود این حل مسائل خاص ممکن است خود عوامل ناپایدارکننده دیگری را برای سیستم به همراه داشته باشد. از جمله این مسائل حرکت جریان تراکم ناپذیری است که در آنها سرعت صوت بی نهایت است و لذا زمان لازم برای انتشار موج (شرایط کورانت) باید صفر فرض شود. در غیر این صورت دستگاه معادلات ناپایدار می شوند. برای حفظ پایداری این نوع جریانات، (ref. 5) و (ref. 7) روشهایی را مورد استفاده قرار داده اند. در این مقاله روش دیگری به کار گرفته شده است. برای هر لایه از حجم های کنترلی و برای هر حجم کنترلی مقدار مولفه سرعت در ردیف بالاسر آن طوری تصحیح می شود که پیوستگی در حجم کنترلی زیر آن حجم برقرار گردد.

$$V_{z_{ij,k+1}} = \frac{\sum \dot{m}_{i,j,k}}{S_{top} \rho_{i,j,k}} * 2 - V_{z_{ij,k}}$$

سپس معادلات مومنوم، بقاء مقدار مومنوم را کنترل و سرعت را تصحیح می کنند. در دور بعدی محاسبه، جرم هدایت شده به حجم کنترلی بالاتر، $K+1$ ، برای محاسبه فشار هیدرواستاتیکی مورد استفاده قرار می گیرد. سیستم معادلات (۶ تا ۴) با برقراری سه شرط فوق پایدار است.

نتایج:

یک مخزن استوانه ای در امتداد های r, θ, z به ترتیب به $8 \times 11 \times 8$ قسمت تقسیم شده است. فرض شده است که سیال، مخزن را تا ارتفاع $\Delta z = (k-1)$ پر کرده باشد.

یک حجم کنترلی از لایه z مخزن، در لحظه $t=0$ پر از مایع فرض می شود، و در $t=0$ سیال داخل این حجم تحت تاثیر نیروی ثقل سقوط آزاد خود را به سمت پایین شروع می کند برنامه کامپیوتری ضمن انجام

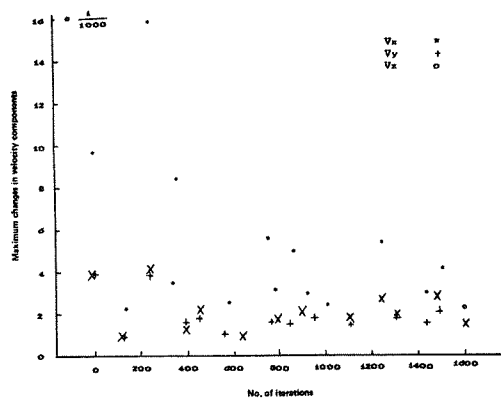
C
E
H
I
J
K
N
n
m
P
r
S
t
V
v
x
y
z
 Δx
 Δy
 Δz

حروف ، علائم و اختصارات

سرعت صوت
انرژی داخلی
انتالپی
شمارش گره‌ها در امتداد
شمارش گره‌ها در امتداد
شمارش گره‌ها در امتداد
شمارش حجم کنترل
شمارش گام‌های زمانی
دبی جرمی ورودی به حجم کنترل
فشار
شعاع
بردار سطح
زمان
بردار سرعت
حجم حجم کنترلی
محور مختصات
محور مختصات
محور مختصات
طول حجم کنترلی در امتداد شعاع
طول حجم کنترلی در امتداد θ
ارتفاع حجم کنترلی

تشکر و قدردانی

به‌این وسیله از مسئولین و کارکنان مرکز ریز کامپیوتر دانشکده مهندسی دانشگاه مشهد که تهیه این مقاله را عملی ساختند سپاسگزار می‌نمایم .



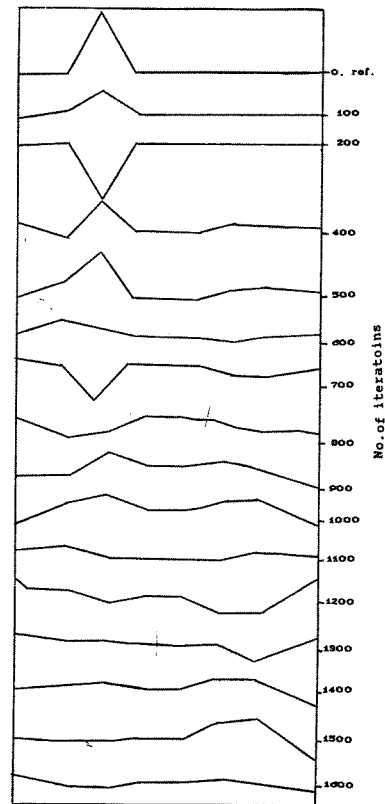
شکل ۴- ماکزیمم تغییرات مولفه‌های سرعت پس از هر گام محاسباتی میل این مقادیر به سمت صفر نشانه پایداری روش محاسباتی است .

نقطه‌ای خارج از مرکز سطح آزاد مایع داده شده است ، نمایش می‌دهد . در بررسی گسترش موج (شکل‌های ۲ و ۳) باید به سطح مبنا که با علامت (-) مشخص شده است توجه شود .

برنامه کامپیوتری در حل دستگاه معادلات کاملاً " پایدار است . شکل (۴) . تغییرات ماکزیمم اختلاف هر متغیر میان دو تواتر متوالی را نشان می‌دهد . پیش‌بینی گسترش موج در سطح مخزن از نظر کیفی قابل مقایسه با یک تحول طبیعی است .

قابلیت و محدودیت‌های روش محاسباتی :

برنامه کامپیوتری تهیه شده بر روی کامپیوترهای شخصی (P.C.) طراحی و مورد استفاده قرار گرفته است . به دلیل کندی و تعداد کم حافظه قابل دسترسی این کامپیوترها ، تعداد نقاط شبکه محاسباتی کوچک انتخاب شده است . مؤلفین مقاله در نظر دارند برنامه کامپیوتری را بر روی کامپیوترهای سریعتر و با گنجایش بیشتر منتقل کنند و تاثیر تزریق ناگهانی جریان آب به داخل یک استخر ، ورود دائمی جریان آب به داخل استخر و تاثیر زلزله بر تشکیل و حرکت امواج سطح استخر و توزیع فشار ناشی از این آزمایشات را مورد مطالعه قرار دهند . محدودیت‌های برنامه در دست بررسی است .



شکل ۳- نمایش گسترش یک اغتشاش نامتقارن روی سطح آزاد مخزن در مطالعه شکل به توضیحات شکل ۲ توجه فرمائید . وجود نوک تیر در حجم اغتشاشی به دلیل استفاده از کامپیوتر در ترسیم شکل بوده است .

- 1- Anderson, d.a.; Tannehill, j.c; Pletcher, r.h. "Computatinal Fluid Mechanics and Heat Transfer" McGRAW-HILL Book company 1984, ISBN 0-7-050328-1,
- 2- Chilukuri, R. "Incompressible Laminar Flow Past a Transversely Vibrating Cylinder" Transaction of The ASME, vol. 109, June 1987, p 166
- 3- Courant, R.; Friedrichs, K.; Lewy, H. "On The Partial Differential Equations of Mathematical Physics" IBM Journal, March. 1967
- 4- Hirt C.W. "Heuristic Stability Theory For Finite-Difference Equations" Journal of Computational Physics 2,p339, 1968
- 5- Leonard, B.P. "A Survey of Finite Difference With Upwinding For Numerical Modeling of The Incompressible Convective Diffusion Equations"
- 6- Mohammad Aslam, et al "Earthquake Sloshing In Annular And Cylindrical Tanks" Journal of Engineering Mechanics Division June 1979, p371
- 7- Roache, P.J. "Computational Fluid Dynamics" HERMOSA Publishers, P.O.Box 8172, Albuquerque, New Mexico 87108
- 8- Smith, G.W. "Numerical Solution of Partial Differential Equations" Oxford University Press Ely House, London W.I., 1975

