مطالعه‌ای در کنترل پذیری و رؤیت شوندگی سیستم‌های کاهش‌پذیر

مهندس بهروز اسدی

دانشجوی کارشناسی ارشد دانشکده مهندسی برق دانشگاه صنعتی امیرکبیر

چکیده

یکی از موضوعات اساسی در کنترل، مساله کنترل‌پذیری و رویت‌شوندگی سیستم‌هاست. این مقاله به‌بررسی سیستم‌هائی می‌پردازد که بنا به تعریف دارای ریشه‌های کاهش‌پذیر در صورت و مخرج کسر تابع تبدیل بوده و احتمالا" دارای ریشه‌های ناپایدار می‌باشند. سپس با توجه به‌تقسیم‌بندی این نوع سیستم‌ها و بررسی مشخصات آنها، با استفاده از فیدبک خروجی، روشی را برای کنترل‌پذیر نمودن و در نتیجه پایدار کردن این سیستم‌ها ارائه می‌دهد. این روش دارای محدودیت‌ها و مزایائی می‌باشد که در متن مقاله به‌تفضیل ذکر شده است.

A Study in Controllability and Observability of Reducible Systems

B. Asadi, M.Sc.

Elect. Eng. Dept. Amirkabir Univ. of Tech.

ABSTRACT

The stability of reducible system, particularly when the unstable states are also uncontrollable, is a serious problem. The stability problem of uncontrollable, reducible system is considered in this paper, and different cases are studied. The limitations of stabilization method are also presented.

مقدمه

به‌طور کلی مطالعه و بررسی سیستم‌ها می‌تواند از دو جنبه مورد توجه قرار گیرد، مطالعه کمی و بررسی کیفی. در مطالعه کمی، پاسخ یک سیستم $Y_{[to,t]}$ به‌ورودی مشخص $U_{[to,t]}$ با شرایط اولیه معلوم $X(to)$ برای ما حائز اهمیت است اما در مطالعه کیفی آنچه که نظر ما را جلب می‌کند خواص کلی یک سیستم می‌باشد. آنچه در ذیل بحث خواهد شد دو خصوصیت مهم معادلات دینامیکی سیستمهای خطی غیرمتغیر با زمان یعنی کنترل‌پذیری و رویت‌شوندگی [1] است.

هدف از این بحث تشریح اصول کنترل‌پذیری و رویت‌شوندگی نیست بلکه موضوع موردنظر ما بررسی کلیت این اصول درمورد سیستمهای خطی غیرمتغیر با زمانی است که بنا به‌تعریف کاهش‌پذیر [2] بوده و می‌توان تابع تبدیل آنها را با تابع تبدیل معادلی با درجه کمتر که از حذف ریشه‌های مساوی صورت و مخرج به‌دست می‌آید، جایگزین نمود.

در اکثر اوقات کنترل‌پذیری و رویت‌شوندگی این نوع سیستمهای کاهش‌پذیر زیر سوال رفته و مساله‌ساز می‌شود. آنچه که نظر ما را اینک جلب نموده است تعمیم اصل کنترل‌پذیری و رویت‌شوندگی درمورد سیستمهای کاهش‌پذیر می‌باشد.

بحث خود را با مثال زیر شروع می‌کنیم، تابع تبدیل زیر را در نظر بگیرید.

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{(s+\alpha)}{(s+\beta)(s+\gamma)} \qquad (1)$$

فرض کنید که در تابع تبدیل فوق یکی از ریشه‌های مخرج با صفر صورت برابر باشد، یعنی:

$$\alpha = \beta \qquad (۲)$$

مساوی فرض کردن ریشه صورت و مخرج چندان دور از واقعیت نیست زیرا در یک سیستم خطی غیرمتغیر با زمان با انتخاب مناسب فیدبک حالت می‌توان به‌سادگی شرط فوق را برآورده ساخته و ریشه‌های مخرج تابع تبدیل را به‌گونه‌ای برگزید که با صفر صورت حذف گردد. دراین‌صورت خواهیم داشت:

$$G(s) = \frac{(s+\alpha)}{(s+\alpha)(s+\gamma)} \qquad (۳)$$

سوالی را که مطرح می‌کنیم این است: آیا سیستم کنترل‌پذیر است؟ آیا سیستم رویت‌شونده است؟

ممکن است کسی مایل باشد قبل از پاسخ به‌سوالات فوق، ریشه‌های مساوی صورت و مخرج کسر را با یکدیگر حذف کند، آیا مجاز به‌چنین کاری هستیم؟

بهتر است قبل از هرگونه پیش‌داوری سیستم فوق را مورد بررسی بیشتری قرار دهیم. ابتدا تابع تبدیل فوق را به‌صورت معادلات حالت یا معادلات دینامیکی به‌فرم زیر نمایش می‌دهیم:

$$\begin{aligned} x &= Ax + Bu \\ y &= cx + eu \end{aligned} \qquad (۴)$$

به‌سادگی می‌توان ماتریسهای A, B, C و e را از روی تابع تبدیل به‌دست آورد. از این‌رو خواهیم داشت:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(\beta+\gamma) & 1 \\ -\beta\gamma & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix} u \qquad (۵)$$

$$y = (1\,,0) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad (۶)$$

بلوک دیاگرام این سیستم با تعریف معادلات دینامیکی به‌صورت فوق در شکل (۱)، نشان داده شده است.

برای بررسی کنترل‌پذیری کافیست که ماتریس $(B:AB)$ را تشکیل دهیم:

$$(B:AB) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha-\beta-\gamma \\ \alpha & -\beta\gamma \end{pmatrix} \qquad (۷)$$

و برای بررسی رویت‌شوندگی ماتریس $\begin{pmatrix} C \\ \cdots \\ CA \end{pmatrix}$ را تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{pmatrix} C \\ \cdots\cdots \\ CA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\beta-\gamma & 1 \end{pmatrix} \qquad (۸)$$

شاید در نظر اول هرکسی گمان کند که چون صفر صورت $(s=-\alpha)$ با ریشه مخرج $(s=-\beta)$ حذف می‌شود درنتیجه در خروجی هرگز نخواهیم توانست عبارت $e^{-\beta t}$ را مشاهده کنیم. به‌عبارت دیگر از ابتدا می‌شد حدس زد که سیستم رویت‌پذیر نیست زیرا در خروجی عبارت $e^{-\beta t}$ ظاهر نخواهد شد، یعنی، (با فرض $\alpha=\beta$):

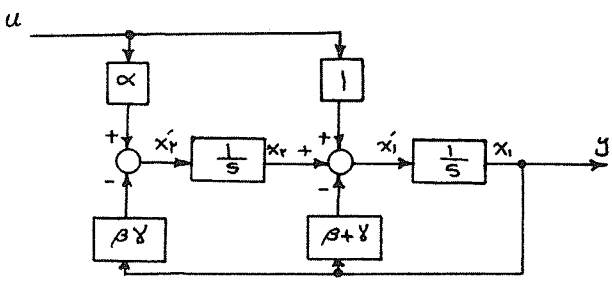
$$G(s) = \frac{(s+\alpha)}{(s+\alpha)(s+\gamma)}\, u(s) = \frac{1}{(s+\gamma)}\, u(s) \qquad (۹)$$

اما برخلاف انتظار فوق به‌ازاء کلیه مقادیر α (حتی $\alpha=\beta$) سیستم فوق رویت‌پذیر است، زیرا:

$$\operatorname{rank} \begin{pmatrix} C \\ \cdots\cdots \\ CA \end{pmatrix} = \operatorname{rank} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\beta-\gamma & 1 \end{pmatrix} = 2 \qquad (۱۰)$$

توجیه این تناقض ظاهری را در ادامه مطالب بحث خواهیم نمود.

حال بهتر است کنترل‌پذیری سیستم فوق را نیز مورد توجه قرار دهیم، برای کنترل‌پذیری خواهیم داشت:



شکل ۱ــ بلوک دیاگرام معادلات دینامیکی روابط (۵) و (۶)

$$\operatorname{rank}(B:AB) = \operatorname{rank} \begin{pmatrix} 1 & : & \alpha-\beta-\gamma \\ \alpha & : & -\beta\gamma \end{pmatrix} \qquad (۱۱)$$

به‌ازاء کلیه مقادیر $(\alpha\neq\beta),(\alpha\neq\gamma)$ سیستم کنترل‌پذیر است. اما به‌ازاء $(\alpha=\beta)$ یا $(\alpha=\gamma)$ سیستم کنترل‌پذیر نخواهد بود. سوال دیگری در اینجا خودنمایی خواهد کرد، فرض کنید سیستمی را با تابع تبدیل:

$$G(s) = \frac{(s+\alpha)}{(s+\beta)(s+\gamma)} \qquad (۱۲)$$

با ریشه‌های متمایز صورت و مخرج، توسط فیدبک حالت $U(t)=r(t)+kx(t)$ به‌گونه‌ای تغییر دهیم که یکی از ریشه‌های مخرج با صفر صورت حذف شود. به‌خوبی از مثال فوق روشن است که کنترل‌پذیری به‌سادگی از دست رفته و بعضی از stateهای سیستم غیرقابل کنترل خواهند شد و به‌یاد داریم که یکی از قضایای معتبر در تئوری کنترل این است که کنترل‌پذیری یک سیستم با فیدبک حالت از بین نمی‌رود.

سوال این است که این تناقض دوم از کجا ریشه گرفته است؟

بهتر است قبل از پاسخ دادن به‌سوالات فوق مساله را از جنبه دیگری مورد مطالعه قرار دهیم. هر فرد آشنا با مقدمات درس کنترل می‌داند که برای یک سیستم با معادلات دیفرانسیل خطی غیرمتغیر با زمان به‌فرم ذیل می‌توان تابع تبدیل لاپلاس یا تابع انتقال بین ورودی و خروجی را با فرض شرایط اولیه صفر به‌دست آورد.

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots\cdots + a_n y = b_0 U^{(n)} + b_1 U^{(n-1)} + \cdots\cdots + b_n U \qquad (۱۳)$$

این تابع انتقال را با $G(s)$ نشان داده و می‌دانیم که یگانه و

منحصر به‌فرد است :

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{b_o s^n + b_1 s^{n-1} + ... + bn\text{-}1\ s + bn}{s^n + a_1 s^{n-1} + ... + an\text{-}1\ s + an} \qquad (۱۴)$$

اما برای تشریح و توضیح یک سیستم می‌توان معادله دیفرانسیل خطی درجه n را با n معادله دیفرانسیل خطی درجه ۱ جایگزین نمود. به‌عبارت دیگر برای یک سیستم معادلات حالتی را می‌توان تعریف نمود که لزوما" این معـادلات حالت منحصر به‌فرد نیستند اما تمامی این معادلات مشخص‌کننده یک سیستم بوده و پاسخ منحصر به‌فردی خواهند داشت.

با این توضیـح مختصـر، مجـددا" به‌تابع تبدیل (۱) مراجعه می‌کنیم. این‌بار معادلات حالت یا معادلات دینامیکی را به‌صورت دیگری تعریف می‌کنیم، با این انتظار که این معادلات دینامیکی در تبیین سیستم همـان پاسخهای قبلی را نتیجه دهـد، فرم معادلات به‌همان صورت قبلی بوده‌اما متغیرهای حالت را با تعریف دیگری بیان می‌کنیم، یعنی :

$$\begin{aligned} x &= Ax + Bu \\ y &= Cx + eu \end{aligned} \qquad (۱۵)$$

با تعریف جدید ماتریس‌های C , B , A و e را به‌صورت زیر به‌دست خواهیم آورد :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\beta\gamma & -(\beta+\gamma) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (۱۶)$$

$$y(t) = (\alpha \ , \ 1) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad (۱۷)$$

بلوک دیاگرام معادلات حالت سیستم مذکور در شکل (۲) نشان داده شده است.

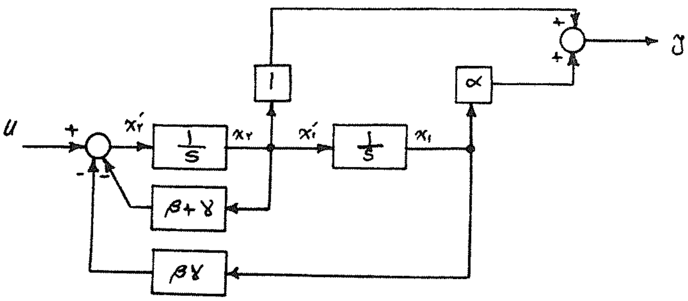
با توجه به‌این‌که هـر دو معادلات حالت ذکر شده متعلق به‌یک سیستم بوده، به‌نظر می‌رسد که داشتن یک پاسخ مشابه امری بدیهی و انتظاری معقول باشد. با این طرز فکر کنترل‌پذیری و رویت‌شوندگی معادلات فوق را بررسی می‌کنیم :

$$\text{rank}\ (B\!:\!AB) = \text{rank} \begin{pmatrix} 0 & : & 1 \\ 1 & : & -\beta-\gamma \end{pmatrix} = 2 \qquad (۱۸)$$

$$\text{rank} \begin{pmatrix} C \\ \cdots\cdots \\ CA \end{pmatrix} = \text{rank} \begin{pmatrix} \alpha & , & 1 \\ -\beta\gamma & , & \alpha-\beta-\gamma \end{pmatrix} \qquad (۱۹)$$

می‌بینیم برخلاف انتظار معادله دینامیکی فوق تحت کلیه شرایط و به‌ازاء کلیـه مقـادیر α (حتی $\alpha=\beta$ یا $\alpha=\gamma$) کنترل‌پذیر است ولی به‌ازاء ($\alpha=\beta$) یا ($\alpha=\gamma$) نمی‌تواند رویت‌شونده باشد، یعنی پاسخی دقیقا" متناقض با پاسخ قبلی!

آیا سیستمی که بررسی شد می‌تواند ۲ پاسخ متناقض داشته باشد، یعنی هم کنترل‌پذیر باشد و هم غیرقابل کنترل، هم رویت‌شونده باشد و هم غیرقابل رؤیت؟ یک سیستم که نمی‌تواند ۲ پاسخ متناقض داشته



شکل ۲ـ بلوک دیاگرام معادلات دینامیکی روابط (۱۶) و (۱۷)

باشد زیرا هر دو روش در تشریح یک سیستم کوشش کرده‌اند.

ریشه این تناقض کجاست؟ آیا می‌توان از روی تابع تبدیل و یا معادلات دینامیکی این‌گونه عنوان کرد که یک سیستم کنترل‌پذیر یا رویت‌شونده است؟

آیا اصلا" بحث راجع به‌کنترل‌پذیری و رویت‌شوندگی یک سیستم بدون توجه به‌این‌که‌آن را با چه فرم معادلات دینامیکی نشان داده‌ایم صحیح است؟

آیا یک سیستم می‌تواند با معادله حالتی‌کنترل‌پذیر باشد ولی همان سیستم و با همان معادله دیفرانسیل در معادلات حالت دیگری کنترل‌پذیر نباشد و بالعکس؟

سعی خواهیم نمود پاسخ تمام سوءالات مطرح شده را در خاتمه بحث تحت عنوان نتیجه بیان نمائیم. قبل از ادامه بحث بهتر است در رویت‌پذیری سیستم فوق تحت تعاریف مختلفی که توسط دو سری معادله حالت عنوان شد تعمق بیشتری بکنیم. با فرض شرایط اولیه صفر پاسخ سیستم برای کلیه معادلات حالت به‌صورت ذیل خواهد بود :

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} G(t,\tau)u(\tau)\, d\tau \qquad (۲۰)$$

با فرض حذف ریشه صورت و مخرج کسر داریم :

$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{1}{(s+\gamma)} \qquad (۲۱)$$

یا :

$$y(t) = L^{-1}\left(\frac{u(s)}{s+\gamma}\right) \qquad (۲۲)$$

می‌بینیم که در پاسخ سیستم فقط عبارت $e^{-\gamma t}$ ظاهر خواهد شد. با آن‌که عبارت $e^{-\beta t}$ در پاسخ خروجی ظاهر نشده است هنوز نمی‌توان برای مطالعه رویت‌پذیری سریعا" قضاوت نمود. همان‌طور که به‌خاطر داریم ماتریس رویت‌شوندگی رابطه (۱۰) سیستم فوق را رویت‌پذیر عنوان نمود. آیا واقعا" سیستم فوق رویت‌پذیر است؟ بهتر است با استفاده از تعـریف رویت‌پذیری مساله را بررسی کنیـم. چون در رویت‌پذیری state ها از دید خروجی مورد توجه هستند، پاسخ خروجی را با در نظـر گرفتن شـرایط اولیه مخالف صفـر بررسی می‌کنیم، دراین‌صورت با گرفتن تبدیل لاپلاس از روابط (۴) و (۱۵) خواهیم

داشت :

$$x(s) = (SI - A)^{-1}x(o) + (SI-A)^{-1}Bu(s) \qquad (۲۳)$$

$$y(s) = C(SI-A)^{-1}x(o) + [C(SI-A)^{-1}B+e]\,u(s) \qquad (۲۴)$$

با فرض $U(s)=\frac{U}{s}$ و $\alpha = \beta$ خواهیم داشت :

$$y(t) = L^{-1}y(s) = \frac{1}{\gamma-\beta}\left(\gamma e^{-\gamma t}-\beta e^{-\beta t}\right)x_1(o)+\left(e^{-\beta t} - e^{-\gamma t}\right)x_2(o)+\frac{\gamma-\beta}{\gamma}\left(1-e^{-\gamma t}\right)u$$

(۲۵)

برخلاف انتظار مشاهده می‌شود که عبارت $e^{-\beta t}$ همراه با $e^{-\gamma t}$ در خروجی ظاهر شده است پس می‌توان با اندازه‌گیری خروجی در لحظات مختلف با فرض شرایط اولیه مخالف صفر *state* های سیستم را در تعریف فوق رویت و اندازه‌گیری نمود. با تکرار عملیات مشابه برای معادلات دینامیکی به‌فرم روابط (۱۶) و (۱۷) خواهیم داشت :

$$y(t) = L^{-1}y(s) = \frac{1}{\gamma-\beta}\;\beta(\gamma-\beta)e^{-\gamma t}x_1(o)+(\gamma-\beta)e^{-\gamma t}x_2(o)+\frac{\gamma-\beta}{\gamma}\left(1-e^{-\gamma t}\right)u$$

(۲۶)

کمی عجیب به‌نظر می‌رسد. این‌طور می‌توان استنباط کرد که رویت‌شوندگی یک سیستم بستگی به‌این دارد که آن سیستم را در چه مختصاتی تعریف کرده باشیم. لذا عاقلانه است بعد از عنوان کردن رویت‌پذیری یک سیستم، فورا" سوال کنیم در چه مختصات و با چه فرم از معادلات دینامیکی رویت‌پذیر است؟ و همین‌طور برای کنترل‌پذیری.

به‌نظر می‌رسد که پاسخ تمام سوالاتی که به‌عنوان تناقض مطرح شدند کم‌کم روشن می‌شود. به‌سادگی می‌توان نتیجه‌گرفت اگر سیستمی رویت‌پذیر نباشد (با شرط کنترل‌پذیری) می‌توان با تغییر معادلات دینامیکی به‌فرم مناسب که ذیلا" شرح داده خواهد شد آن‌را رویت‌پذیر نمود (با از دست دادن کنترل‌پذیری) و بالعکس، یعنی در توابع تبدیلی که دارای یک یا چند ریشه مشابه صورت و مخرج می‌باشد باید از بین رویت‌شوندگی و کنترل‌پذیری یکی را انتخاب نمود، وجود توام هر دو غیرممکن خواهد بود.

نمایش یک سیستم با معادلات دینامیکی متفاوت

اکنون آمادگی آنرا داریم که مساله را به‌صورت کلی‌تری مورد بررسی قرار دهیم، سیستمی را با تابع تبدیل زیر در نظر بگیرید. می‌خواهیم نشان دهیم که یک سیستم مستقل از آن‌که ریشه‌های صورت و مخرج آن چه باشد همواره می‌تواند به‌فرم کنترل‌پذیر کامل یا رویت‌پذیر کامل نشان داده شود.

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{\beta_1 s^{n-1}+ \dots\dots + \beta_{n-1}s + \beta_n}{s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \dots\dots + \alpha_{n-1}s + \alpha_n} + e \qquad (۲۷)$$

برای این منظور باید معادلات دینامیکی سیستم را به‌گونه‌ای تعریف کنیم که هدف فوق را تامین کند. جهت به‌دست آوردن فرم کنترل‌پذیر کامل یک سیستم کافی است آن‌را به‌صورت معادلات حالت ذیل تعریف کنیم :

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots\dots\dots\dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \\ & & & & o \\ 0 & \dots\dots\dots\dots & & 0 & 1 \\ -\alpha_n & \dots\dots\dots\dots & & & -\alpha_1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ c \\ 1 \end{pmatrix} u$$

(۲۸)

$$y = (\beta_n, \dots\dots\dots, \beta_1)\, x + eu$$

با کمی دقت ملاحظه می‌شود که ماتریس A و B مستقل از ریشه‌های صورت بوده و صفرهای صورت نمی‌توانند در کنترل‌پذیری آن خللی ایجاد کنند. ماتریس کنترل‌پذیری معادلات فوق عبارت است از :

$$\mathrm{rank}\,(B : AB : \dots\dots\; AB^{n-1}) = \mathrm{rank}\begin{pmatrix} 0 & \dots & 1 & e_1 \\ 1 & e_1 & \dots & e_{n-2} \\ 1 & e_1 e_2 & \dots & e_{n-1} \end{pmatrix} \qquad (۲۹)$$

به‌طوری‌که:

$$e_k = -\sum_{i=o}^{k-1}\alpha_{i+1}\, e_{k-i-1} \quad , \quad k = 1, 2, \dots\dots, n-1 \,,\; e_{.} = 1 \qquad (۳۰)$$

rank ماتریس فوق همواره برابر با n است خواه سیستم دارای ریشه‌های مساوی صورت و مخرج باشد خواه نباشد. دراینصورت سیستم تعریف‌شده با معادلات دینامیکی فوق همواره کنترل‌پذیر است. البته اگر کسر تابع تبدیل دارای یک یا چند ریشه مساوی صورت و مخرج باشد رویت‌پذیری سیستم زیر سوءال خواهد رفت. اکنون قصد داریم معادلات دینامیکی سیستم فوق را به‌گونه‌ای تعریف کنیم که سیستم همواره رویت‌پذیر باشد. با تعریف معادلات حالت به‌صورت ذیل این هدف تامین خواهد شد :

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} o & o & \dots\dots\dots\dots & o & -\alpha_n \\ 1 & o & \dots\dots\dots\dots & o & -\alpha_{n-1} \\ o & 1 & \dots\dots\dots\dots & o & -\alpha_{n-2} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ o & \dots\dots\dots\dots & & 1 & -\alpha_1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \beta_n \\ \beta_{n-1} \\ \vdots \\ \beta_1 \end{pmatrix} u$$

$$y = (0, \dots, o, 1)\, x + eu \qquad (۳۱)$$

ماتریس رویت‌شوندگی این معادلات دینامیکی عبارت است از :

$$\mathrm{rank}\begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} = \mathrm{rank}\begin{pmatrix} 0 & & \dots & 1 \\ & & & e_1 \\ 1 & e_1 & \dots & e_{n-2} \\ 1 & e_1 & e_2 \dots & e_{n-1} \end{pmatrix} = n$$

(۳۲)

rank ماتریس رویت‌شوندگی فوق مستقل از ریشه‌های صورت و مخرج کسر تابع تبدیل بوده و همواره برابر با n می‌باشد. دراین‌صورت سیستم را به‌گونه‌ای تعریف کرده‌ایم که همواره رویت‌پذیر کامل است. البته درصورتی‌که یک یا چند ریشه صورت و مخرج مساوی باشد کنترل‌پذیری سیستم زیر سوءال خواهد رفت. روش فوق نشان می‌دهد هر سیستمی که توسط تابع تبدیل G(s) تعریف شده باشد بدون توجه به‌ریشه‌های صورت و مخرج کسر تابع تبدیل همواره می‌تواند به‌گونه‌ای تعریف شود که کنترل‌پذیر کامل یا رویت‌پذیر کامل باشد. اکنون می‌توانیم ماحصل را به‌شکل نتیجه‌ای بیان نمائیم.

نتیجه الف: کنترل‌پذیری و رویت‌شوندگی در سیستمهای خطی غیرمتغیر با زمان درصورتی‌که کسر تابع تبدیل آن سیستم دارای یک یا چند ریشه مساوی صورت و مخرج باشد به‌طور مطلق کلیت نداشته و بستگی به‌این دارد که سیستم را توسط چه نوع معادلات حالت تعریف کرده باشیم.

تبصره ۱ — با فرض مساوی بودن یک یا چند ریشه صورت و مخرج کسر تابع تبدیل سیستم، درصورت کنترل‌پذیر بودن سیستم (رویت‌پذیر بودن) در فرمی از معادلات حالت، لزوما" رویت‌پذیری (کنترل‌پذیری) آن سیستم در همان فرم از معادلات حالت یا معادلات حالت مشابه خدشه‌دار می‌شود.

تبصره ۲— با انتخاب معادلات دینامیکی مناسب برای سیستمهای خطی غیرمتغیر با زمان که دارای یک یا چند ریشه مساوی صورت و مخرج هستند می‌توان به‌دلخواه یکی از دو خصوصیت کنترل‌پذیری یا رویت‌شوندگی را برای سیستم انتخاب کرد. وجود توام کنترل‌پذیری و رویت‌شوندگی در این نوع سیستمها غیرممکن است.

در فیدبک حالت باید توجه نمود که با تعریف ورودی به‌صورت u(t) = r(t)+kx(t) تنها ریشه‌های مخرج کسر تابع تبدیل G(s) یعنی مقادیر ویژه معادله مشخصه قابل تغییر هستند و صفرهای صورت را نمی‌توان توسط فیدبک حالت تغییر داد. دراین‌صورت ممکن است در سیستمی که رویت‌پذیر و کنترل‌پذیر (توام) می‌باشد، با اعمال فیدبک حالت رویت‌پذیری سیستم در همان فرم از معادلات حالت خدشه‌دار شود، درحالی‌که مطمئن هستیم که کنترل‌پذیری‌اش در آن فرم از معادلات دینامیکی هیچگونه لطمه‌ای نخواهد دید.

به‌سادگی روشن است که درصورت اعمال فیدبک حالت اگر تعدادی از ریشه‌های مخرج به‌صورتی تغییر کند که با صفرهای صورت حذف گردند تنها رویت‌شوندگی و نه کنترل‌پذیری صدمه خواهد دید. درصورتیکه معادلات حالت را به‌فرم دیگری بنویسیم می‌توانیم رویت‌شوندگی را حفظ و کنترل‌پذیری را از دست بدهیم.

پایدار کردن معادلات دینامیکی کنترل‌ناپذیر:

درصورتیکه تعدادی از ریشه‌های مخرج تابع تبدیل G(s) نمایش داده شده به‌فرم ذیل مثبت بوده و موجب ناپایداری سیستم گردند لازم است توسط فیدبک حالت آنها را پایدار نمود.

$$G(s) = \frac{b_o s^{n} + b_1 s^{n-1} + \dots\dots + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots\dots + a_n} \qquad (۳۳)$$

مساله این است درصورتی‌که معادلات دینامیکی سیستم موردنظر کنترل‌پذیر نباشد چگونه می‌توان آن‌را پایدار نمود، زیرا طبق قضایای کنترل فقط با شرط کنترل‌پذیری stateها می‌توان مقادیر ویژه (A+BK) را به‌دلخواه برگزید.

ممکن است ریشه‌ای ناپایدار باشد که state مربوط به‌آن ریشه کنترل‌پذیر باشد. دراین‌صورت به‌سادگی می‌توان با فیدبک آن حالت کنترل‌پذیر، سیستم را پایدار نمود. اما اگر ریشه ناپایدار (ریشه مثبت) مربوط به‌وضعیتی از سیستم باشد که آن وضعیت کنترل‌پذیر نیست، چه باید کرد؟

اکنون سعی خواهیم نمود که قضایای ذکر شده را در مساله پایداری سیستمهای کاهش‌پذیر مورد استفاده قرار دهیم. همان‌گونه که گفته شد سیستمی که طبق یک‌سری معادلات دینامیکی کنترل‌پذیر نیست، می‌تواند تحت شرایطی به‌فرم معادلات حالتی نوشته شود که تمام وضعیت‌های آن کنترل‌پذیر باشد. دراین‌صورت با فرض در اختیار داشتن تمام وضعیت‌ها می‌توان با انتخاب ورودی به‌صورت u = r+kx مقادیر ویژه سیستم با فیدبک (A+BK) را به‌دلخواه برگزید.

اما مساله‌ای که مانع اعمال فیدبک حالت می‌شود، این است که درصورتی‌که سیستم کاهش‌پذیر باشد و به‌فرم معادلات حالت کنترل‌پذیر نوشته شود، دیگر رویت‌پذیر کامل نیست، دراین‌صورت نمی‌توانیم فیدبک حالت را به‌کار ببریم.

تنها سیگنالی که در اختیار ما قرار دارد سیگنال خروجی سیستم y (t) است و ما از این سیگنال به‌عنوان فیدبک استفاده خواهیم نمود. به‌علت رویت‌پذیر نبودن کامل سیستم در استفاده از فیدبک سیگنال خروجی به‌محدودیتهائی برخورد خواهیم کرد. بحث زیر این مساله را به‌صورتی روشن بیان خواهد نمود.

تابع تبدیل زیر را در نظر بگیرید:

$$G_1(s) = \frac{y_1(s)}{u(s)} = \frac{(s+2)}{(s+1)(s+2)} = \frac{s+2}{s^2+3s+2} \qquad (۳۴)$$

معادلات دینامیکی این سیستم به‌صورت زیر نوشته شده است:

$$x(t) = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -2 & o \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} u(t)$$

$$y_1(t) = (1 \quad , \quad o)\, x(t) \qquad (۳۵)$$

اکنون فرض کنید تابع تبدیل رابطه (۳۴) متعلق به‌سیستمی باشد که دارای دو خروجی $y_1(t)$ و $y_2(t)$ است. تابع تبدیل $G_2(s)$ که تبدیل لاپلاس بین ورودی u و خروجی $y_2(t)$ را بیان می‌کند به‌صورت زیر داده شده است:

$$G_2(s) = \frac{y_2(s)}{u(s)} = \frac{(s+3)}{(s+1)(s+2)} \qquad (۳۶)$$

آیا می‌توانیم خروجی $y_2(s)$ را برحسب متغیرهای حالت رابطه (۳۵) بیان کنیم؟ برای این منظور خواهیم داشت:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & b \end{pmatrix} x \qquad (۳۷)$$

اکنون باید پارامترهای a و b را به‌گونه‌ای برگزید که خروجی $y_2(t)$ را برحسب متغیرهای حالت تعریف شده به‌فرم فوق نشان دهد. با فرض شرایط اولیه مساوی با صفر خواهیم داشت:

$$x(0) = 0$$

$$x(s) = (SI - A)^{-1} BU = \frac{1}{s^2 + 3s + 2} \begin{pmatrix} s+2 \\ 2s+4 \end{pmatrix} U \qquad (۳۸)$$

به‌ازاء هیچ مقدار a و b نمی‌توان خروجی y_2 را برحسب این متغیرهای حالت نشان داد. این مثال نشان می‌دهد در سیستمهای کاهش‌پذیر همیشه نخواهیم توانست تمامی خروجی‌های سیستم را در معادلات دینامیکی مشخصی نشان دهیم، با تغییر فرم معادلات دینامیکی ممکن است بتوان تعداد دیگری از خروجی‌های قابل دسترس سیستم را در آن نشان داد.

تعریف ۱ــ معادلات دینامیکی (۴) را در نظر بگیرید. فرض کنید ماتریس‌های C ، B ، A و e به‌ترتیب $(n\times n)$، $(n\times p)$، $(q\times n)$ و $(q\times p)$ باشند. دراین‌صورت تابع تبدیل $G_{ij}(s)$ که تبدیل لاپلاس بین ورودی زام و خروجی ‌ا‌ام را بیان می‌کند، به‌صورت زیر خواهد بود:

$$G_{ij}(s) = \frac{y_i(s)}{U_j(s)} = \frac{(s+\beta_1)\,\ldots\ldots\,(s+\beta_{\bar{n}})(s+\alpha_1)\ldots\ldots(s+\alpha_l)}{(s+\beta_1)\,\ldots\ldots\,(s+\beta_{\bar{n}})(s+\gamma_1)\ldots\ldots(s+\gamma_m)} \qquad (۳۹)$$

ریشه‌هایی که در تمام توابع تبدیل رابطه (۳۹) $i=1,\ldots\ldots,p$ و $j=1,\ldots\ldots\ldots,q$ و $G_{ij}(s)$ کاهش‌پذیر هستند را "ریشه‌های کاهش‌پذیر کامل" می‌نامیم. درصورتی‌که تعدادی از ریشه‌ها فقط در بعضی از توابع تبدیل کاهش‌پذیر باشند، "کاهش‌پذیر ناقص" نامیده خواهند شد.

قضیه الف ــ سیستم‌هایی با توابع "تبدیل کاهش‌پذیر ناقص" را می‌توان به‌صورتی نشان داد که نمایانگر تمامی خروجی‌های سیستم نباشد، با تغییر این معادلات دینامیکی می‌توان تعداد دیگری از خروجی‌های سیستم را نیز نشان داد. دراین‌صورت با فرض در اختیار داشتن تمامی خروجیهای تعریف شده در معادلات دینامیکی، ممکن است سیستم رویت‌پذیر باشد.

قضیه ب ــ در سیستم‌های خطی غیرمتغیر با زمان با ریشه‌های "کاهش‌پذیر ناقص" رابطه (۳۹) با فرض فیدبک خروجی فقط و فقط به تعداد خروجی‌های مستقل سیستم می‌توان مکان ریشه‌های معادله مشخصه را به‌دلخواه انتخاب کرد. درصورتی‌که خروجی‌های مستقل، تعریف‌شده در معادلات دینامیکی (۲۸) به‌صورتی باشند که

$$\rho \begin{pmatrix} C \\ \cdots\cdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} = m \leqslant n$$

باشد. در این‌صورت با فیدبک حالت مکان m ریشه را می‌توان به‌دلخواه برگزید.

بدیهی است روی ریشه‌های کاهش‌پذیر کامل کنترلی نخواهیم داشت. حالت خاص این مساله سیستمهای کاهش‌پذیر با یک خروجی است. با ذکر ۲ مثال در این‌مورد مساله را روشنتر بحث خواهیم نمود.

مثال ۱ــ سیستمی با تابع تبدیل کاهش‌پذیر و ریشه ناپایدار زیر را در نظر بگیرید. آیا می‌توان این سیستم را با فیدبک مناسب‌خروجی پایدار نمود؟ دراین‌صورت می‌خواهیم مقادیر ویژه جدید را در $S_1 = -1$ و $S_2 = -2$ قرار دهیم:

$$G_1(s) = \frac{y_1(s)}{U(s)} = \frac{s-2}{(s-1)(s-2)} = \frac{s-2}{s^2-3s+2}$$

$$G_2(s) = \frac{y_2(s)}{U(s)} = \frac{s-1}{(s-1)(s-2)} = \frac{s-1}{s^2-3s+2}$$

حل ــ مشخص است که سیستم دارای ۲ ریشه مثبت ناپایدار می‌باشد. در ابتدا معادلات دینامیکی این سیستم را به‌صورت رابطه (۲۸) نشان می‌دهیم، یعنی:

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} x$$

چون سیستم دارای ۲ ریشه کاهش پذیر ناقص بوده و دارای ۲ خروجی مستقل می‌باشد، لذا می‌توانیم مکان ۲ ریشه را با اعمال فیدبک خروجی به‌صورت $u = r+ky$ برگزینیم، دراین‌صورت خواهیم داشت:

$$U = r + (k_1\ ,k_2)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = r + (k_1y_1 + k_2y_2)$$

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2k_1-k_2 & k_1+k_2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} r$$

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2-2k_1-k_2 & 3+k_1+k_2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} U$$

با انتخاب پارامترهای K_1 و K_2 به‌صورت زیر:

$$k_1 = 6 \qquad k_2 = -12$$

خواهیم داشت:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} r$$

$$y = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} x$$

مقادیر ویژه سیستم با فیدبک در این حالت عبارتند از:

$S_1 = -1 \quad , \quad S_2 = -2$

مثال ۲ــ در این مثال سیستمی درجه ۳ با دو ریشه کاهش‌پذیر و دو خروجی موردنظر است ، با اعمال فیدبک خروجی آن‌را پایدار کنید .

$$G_1(s) = \frac{(s+1)(s-1)}{(s+1)(s+2)(s-1)} = \frac{s^2-1}{s^3+2s^2-s-2}$$

$$G_2(s) = \frac{(s+1)}{(s+1)(s+2)(s-1)} = \frac{s+1}{s^3+2s^2-s-2}$$

حل ــ معادلات دینامیکی سیستم را به‌صورت زیر بیان می‌کنیم :

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} U$$

$$y = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} x$$

با اعمال فیدبک خروجی به‌صورت زیر خواهیم داشت :

$$U = r + (k_1, k_2) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$U = r + (k_1 \quad k_2) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} x$$

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2-k_1+k_2 & 1+k_2 & -2+k_1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} r$$

با انتخاب پارامترهای ۴– = K_1 و ۱۲– = K_1 مقادیر ویژه جدید را به‌صورت زیر خواهند بود .

$s_1 =$ ۱–

$s_2 =$ ۲–

$s_3 =$ ۳–

لازم به‌ذکر است چون سیستم دارای یک ریشه کاهش‌پذیر کامل بوده، روی این ریشه تغییری نداشتیم ، همچنین به‌علت در اختیار داشتن ۲ خروجی مستقل توانستیم ریشه ناپایدار سیستم که کاهش‌پذیر ناقص بود را با اعمال فیدبک خروجی پایدار گردانیم .

بحث و نتیجه‌گیری :

مطالب ذکر شده را به‌صورت زیر خلاصه می‌کنیم :

۱ــ کنترل‌پذیری و رویت‌شوندگی یک سیستم خطی غیرمتغیر با زمان مطلق نیست و بستگی به‌این دارد که سیستم توسط چه نوع معادلات حالتی بیان شده باشد .

۲ــ کلیه سیستمهای خطی با تابع تبدیل G(s) به‌فرم رابطه (۲۷) را می‌توان به‌گونه‌ای تعریف کرد که کنترل‌پذیر یا رویت‌شونده کامل باشند . این موضوع مستقل از این است که آیا ریشه‌های صورت و مخرج کسر با یکدیگر مساوی هستند یا خیر .

۳ــ در سیستمهای کاهش‌پذیر با یک یا چند ریشه مساوی صورت و مخرج در کسر تابع تبدیل G(s) هرگز مجاز نیستیم ریشه‌های مساوی صورت و مخرج را با یکدیگر حذف نمائیم ، درغیراین‌صورت دینامیک سیستم قابل بررسی نخواهد بود .

۴ــ سیستمهائی که دارای ریشه‌های مثبت کاهش‌پذیر (ناپایدار) هستند می‌توانند درصورتی پایداری خود را به‌دست آورند که طبق تعریف ۱ ریشه‌های ناپایدار ، کاهش‌پذیر ناقص باشند .

۵ــ دراین‌صورت با اعمال فیدبک خروجی می‌توان به‌تعداد q خروجی مستقل تعریف شده در معادلات (۲۸) یا با اعمال فیدبک حالت m مقدار ویژه را برگزید .

۶ــ روی ریشه کاهش‌پذیر سیستمهای با یک خروجی (مثبت یا منفی) نمی‌توانیم تغییری اعمال نمائیم .

در خاتمه لازم است از آقای دکتر سید کمال‌الدین نیکروش استاد دانشکده برق دانشگاه صنعتی امیرکبیر به‌خاطر زحمات بیدریغشان در ارائه درس کنترل مدرن و راهنمائی‌های ارزنده‌شان صمیمانه تشکر نمایم .

پاورقی

1. Controllability and Observability
2. Reducible System

منابع

۱ــ یادداشتهای درس کنترل مدرن، دکتر نیکروش، دانشکده مهندسی برق دانشگاه صنعتی امیرکبیر.

2. C.T. Chen, Linear System Theory and Design, Mc Growhill – 1982.