برنامه ریزی تولید دسته‌ای با منابع محدود و زمان آماده سازی صفر

دکتر رسول حجی

دانشیار دانشکده مهندسی صنایع دانشگاه صنعتی شریف

چکیده

در این مقاله، برای حالتی که زمان آماده‌سازی صفر و مقدار منابع محدود است، قاعده‌ای برای مسالهٔ برنامه‌ریزی تولید یک سیستم تولیدی، یک ماشین یا خط تولید، که چند محصول را از یک دور به‌دور دیگر تولید با یک توالی ثابت بطور مکرر تولید می‌کند بدست آمده است. این قاعده برنامه بهینه تولید را، که حداکثر موجودی جمعی تمام محصولات را کمینه می‌سازد، برای هر دور تولید اختیاری بدست می‌دهد.

Lot Size Scheduling with Limited Resources and Zero Set - upTime

R. Haji, Ph.D.

Indust. Eng. Dept. Sharif Univ.

ABSTRACT:

In this paper,for the case of zero set-up time and limited resources a rule has been obtained for scheduling problem in which a number of products are manufactured on a single machine in a fixed sequence repeatedly from cycle to cycle. The rule gives the optimal production schedule which minimizes the maximum aggregate inventory of all products for any given cycle time.

مقدمه

در نشریات موجود درمورد کنترل تولید چند محصول روش‌های مختلفی برای به‌دست آوردن برنامه تولید بهینه (یا نزدیک بهینه) برای سیستم‌های که در آنها تعدادی محصول با دستگاه مشترکی به‌طور مکرر تولید می‌شوند ارائه شده است. برای شرح این روشها می‌توان به (۲)، (۳)، (۴)، (۵)، (۶)، (۷)، (۸)، (۹) مراجعه کرد. در یکی از روشهای معروف که در آن هر محصول در طی هر دور تولید فقط یک بار تولید می‌شود و تمام محصولات با توالی ثابتی از دوری به دور دیگر تولید می‌شوند، دور تولید بهینه بدون هیچگونه محدودیتی درمورد سرمایه کل درگیر در موجودی تمام اقلام به‌دست آمده است (۶)، (۸). واضح است که در بیشتر کاربردهای عملی در شرایط تولید مقدار منابع بخصوص سرمایه موجود نامحدود نیست. بنابراین مساله کمینه‌سازی مقدار سرمایه کل درگیر در موجودی اقلام برای هر دور تولید، که به‌توالی تولید محصولات بستگی دارد، اهمیت فراوانی دارد.

در این مقاله، برای هر دور اختیاری T برنامه توالی بهینه تولید، که حداکثر سرمایه درگیر در کل موجودیها را کمینه می‌سازد، برای سیستم تولیدی که n محصول مختلف را با یک دستگاه مشترک تولید می‌کند با فرضیات زیر مورد بررسی قرار گرفته است.

(۱) زمان آماده‌سازی ماشین برای تولید هریک از محصولات صفر است.

(۲) در هر زمان فقط یک محصول را می‌توان تولید کرد.

(۳) نرخ تولید دستگاه برای هر محصول معلوم و ثابت است.

(۴) نرخ تقاضا برای هر محصول معلوم و ثابت است.

(۵) کمبود موجودی جایز نیست، تقاضاها باید به‌موقع برآورده شوند.

(۶) در هر دور تولید T، به‌مجردی که تولید شروع می‌شود آنگاه، تمام n محصول به‌صورت دسته‌ای بدون هیچگونه زمان بیکاری در بین تولید محصولات تا ختم تولید n امین محصول تولید خواهند

شد .

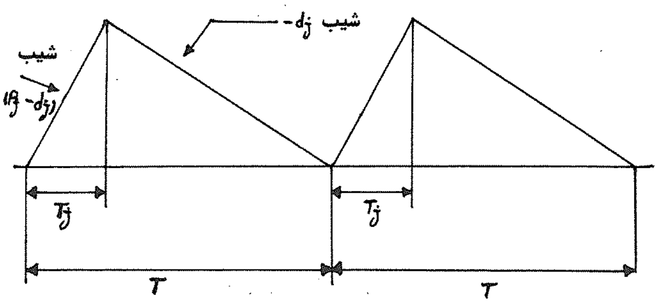
ماشینی را در نظر بگیرید که n محصول را به‌صورت دسته‌ای تولید می‌کند . نرخ‌تولید ماشین برای محصول j ($j=1,2,...,n$) را با p_j ، و نرخ تقاضا بـرای همین محصـول را با d_j نشان دهیـد . در هر دور تولید اختیاری ، T ، محصول j ($j=1,2,...,n$) فقط برای یک بار و به‌مدت زمان T_j ($T_j < T$) تولید خواهد شـد . از آنجا کـه فرض شده است کمبود موجودی هیچیک از اقلام جایز نیست ، مقدار هر بار تولید محصول j باید برابر تقاضای این محصول در طی دورتولید T باشد . یعنی ،

$$p_j T_j = d_j T \qquad (۱)$$

پس $T_j = T d_j / p_j$ یا $T_j = Y_j T$ که در آن

$$Y_j = d_j / p_j \qquad (۲)$$

در هر دور تولید T ، موجودی محصول j با نرخ $p_j - d_j$ در طی فاصله زمانی T_j ، مدت تولید محصول j ، انباشته می‌شود و با نرخ d_j در طی فاصله زمانی $T - T_j$ کاهش می‌یابد (شکل ۱) .



شکل ۱

اگر هزینه آماده‌سازی ماشین برای هـر بار تولید محصول j برابر A_j ، هزینه تولید هر واحد همین محصول C_j ($j=1,2,...,n$) و نرخ هزینه نگهداری h باشد ، آنگـاه دور تولیـد بهینه ، T_0 ، به‌صورت زیر پیدا شده است (۶) ، (۸)

$$T_o = \sqrt{\frac{2\sum_{j=1}^{n} A_j}{\sum_{j=1}^{n} hc_j d_j (1 - d_j / p_j)}}$$

اگر نرخ تولیـد و تقاضـا برای محصول j را برحسـب واحد پول به‌ترتیب با $c_j p_j = P_j$ و $c_j d_j = D_j$ نشان دهیم آنگاه رابطه فوق به‌صورت زیر درمی‌آید .

$$T_o = \sqrt{\frac{2\sum_{j=1}^{n} A_j}{h\sum_{j=1}^{n} D_j (1 - D_j / P_j)}}$$

این دور تولید بهینه بدون در نظر گرفتن محدودیت سرمایه به‌دست آمده است .

فرض کنید :

I_{jt} = موجودی قلم j در زمان t برحسب واحد مشترک پول

در اینصورت موجودی کل اقلام در زمان t ، I_t ، برحسب پول برابر است با مقدار

$$I_t = \sum_{j=1}^{n} I_{jt}$$

بنابراین برای یک برنـامه تولید معین ، و مقـدار مشخص T ، حداکثر موجودی کل اقلام به‌حسب واحد مشترک پول برابر است با :

$$Z = \max_{0 \leq t \leq T} I_t$$

در زیر نشان داده می‌شود که Z بستگی به‌توالی تولید محصولات دارد . از آنجا که عموماً" در عمل منابع از جمله سرمایه نامحدود نیستند و صرفه‌جوئی در سرمایه درگیر در موجودی‌ها مورد توجه فراوان است در نتیجه کمینه‌سازی Z برای هر مقدار مشخص T (شامل T_o) یا به‌عبارت دیگر تعیین مقدار f ،

$$f = \min \left[\max_{0 \leq t \leq T} \sum_{j=1}^{n} I_{jt} \right]$$

اهمیتی اساسی در تولید دارد . تعداد کل برنامه‌های ممکن تولید برابر n! ، یعنی پرموتاسیون‌های مختلف n عنصر است ،ومساله کمینه‌سازی z یک مساله بهینه‌سازی ترکیبی(Combinatorial optimization) است .

در این مقاله مقدار کمینه Z، و در نتیجـه برنامه تولید بهینه ، برنامه‌ای که حداکثر سرمایه درگیر در موجودیهای تمام محصولات را برای یک دور تولید معین T کمینه می‌کند ، به‌دست آمده است . در بخش‌های زیر فرض می‌شود وقتی ماشین به‌تولید مشغول است مقدار تولید از مصرف بیشتر بوده و موجودی کل افزایش می‌یابد ، بعبارت دیگر نرخ تولید ماشین از نرخ جمعی تقاضا برای تمام محصولات بیشتر است ، یعنی

$$P_j > D \ , \quad j = 1, 2, ..., n$$

که در آن

$$D = \sum_{j=1}^{n} D_j$$

برای تعیین برنامه تولید بهینه، ابتدا کمینه موجودی جمعی و سپس بیشینه موجودی جمعی را برای هر توالی اختیاری بدست می‌آوریم .

کمینه موجودی جمعی

از آنجـا که تقاضا برای هـریک از اقلام موجودی باید به‌موقع برآورده شود ، پس برای هر توالی معین تولید $i1, i2, ..., in$ (ij نماینده محصولی است کـه در توالی تولید داده شـده محل j ام را دارد) با توجه به‌شکل۲ ملاحظه می‌شود که موجودی محصول ij ، $j > ۱$ ، در ابتدای تولید محصول $i1$ برابراست با تقاضا برای محصول ij در فاصله زمانی u_j ، فاصـله زمانی از موقع شـروع تولید محصـول $i1$ (اولین محصول) تا شروع زمان تولید محصول ij ، یعنی ،

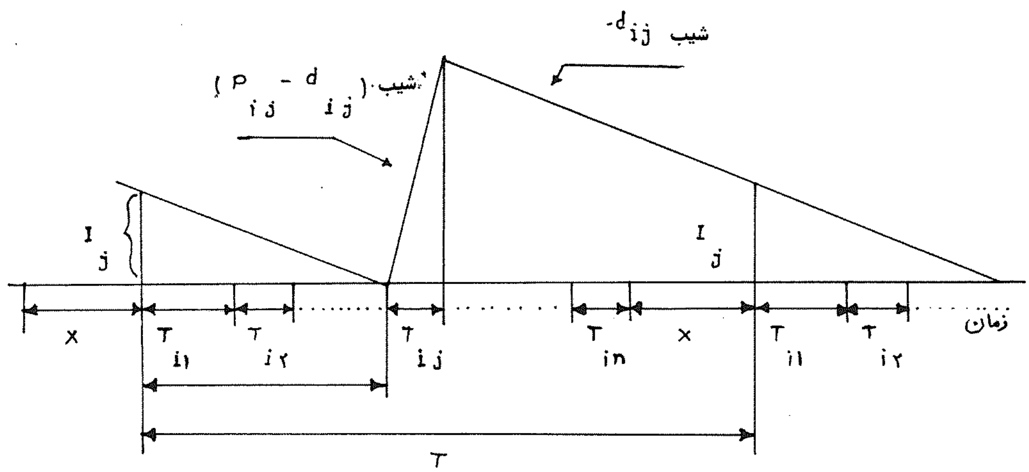
$$u_j = \sum_{l=1}^{j-1} T_{il}$$

که با توجه به (۲)

$$u_j = T \sum_{l=1}^{j-1} Y_{il}$$

بعبارت دیگر ، اگر

I_j = موجودی محصول ij در موقع شروع تولید محصول $i1$ به‌حسب



شکل ۲ــ موجودی محصول

واحد مشترک پول ، باشدآنگاه

$$I_j = D_{ij}\, u_j$$

$$= T\, D_{ij} \sum_{l=1}^{j-1} Y_{il} \qquad (۳)$$

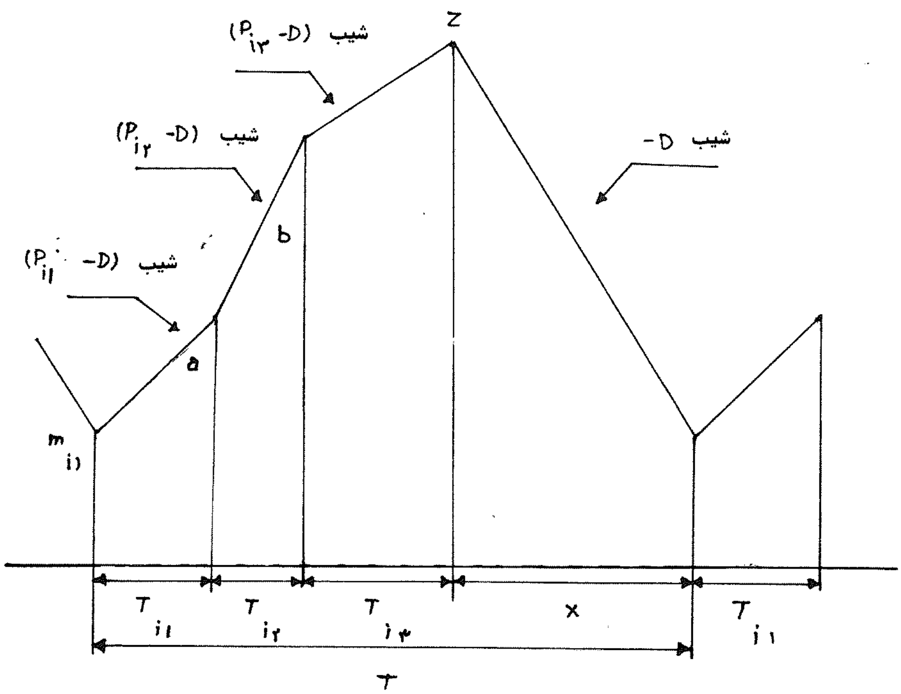
در هـر دور تولید در طـی مدت تولید محصول ij ، یعنی در T_{ij} ، موجودی جمعی تمام محصولات با نرخ $P_{ij} - D$ افزایش و در طی دوره بیکاری ماشین ، X ، موجودی جمعی با نرخ D کاهش می‌یابد (شکل ۳، برای حالت $n = ۳$) . بنابراین برای یک توالی معین تولیــد موجودی جمعی تمام محصولات در ابتدای تولید محصول $i1$ به‌مقدار کمینه خود و در انتهای تولید محصول in ($n=۳$ در شکل ۳) به‌مقدار بیشینه خود می‌رسد . پس

$m_{i1} =$ کمینه موجودی جمعی برای توالی تولید داده شده $=$ موجودی جمعی در ابتدای تولید محصول $i1 =$

یا

$$m_{i1} = \sum_{j=2}^{n} I_j$$

بدیهی است که موجودی محصــول $i1$ ، در ابتــدای تولید در هر



شکل ۳ــ موجودی جمعی برای یک توالی معین تولید ($n = ۳$)

دور تولید T برابر صفر است. با توجه به (۳)

$$m_{i1} = T \sum_{j=2}^{n} D_{ij} \sum_{l=1}^{j-1} Y_{i1} \qquad (۴)$$

بیشینه موجودی جمعی

از آنجا که موجودی جمعی تمام محصولات طی زمان T_{ij} ، $(j=1, 2,..., n)$ ، با نرخ $P_{ij} - D$ افزایش می‌یابد و در انتهای مدت تولید محصول in (۳ = n در شکل ۳) به‌مقدار بیشینه خود می‌رسد نتیجه می‌شود که

بیشینه موجودی جمعی برای توالی تولید داده شده = Z

$$= m_{i1} + \sum_{j=1}^{n} (P_{ij} - D) T_{ij}$$

یا

$$Z = m_{i1} + c_1 \qquad (۵)$$

که در آن $C_1 = \sum_{j=1}^{n} (P_j - D) T_j$ مقداری ثابت و مستقل از توالی تولید داده شده است.

برنامه تولید بهینه

با توجه به‌رابطه (۵)، کمینه‌کردن مقدار Z معادل با کمینه کردن مقدار m_{i1} است. حال نشان می‌دهیم که اگر توالی تولید محصولات برحسب مقادیر غیرصعودی P_{ij} ، یعنی

$$P_{i1} \geqslant P_{i2} \geqslant \cdots \geqslant P_{in} \qquad (۶)$$

باشد آنگاه مقدار m_{i1} کمینه خواهد شد.

برای اینکه نشان دهیم برای برنامه تولید بهینه باید رابطه (۶) صادق باشد ابتدا به‌دومین جمع طرف راست رابطه (۴) مقدار Y_{ij} را اضافه و کم می‌کنیم یعنی

$$mi1 = T \sum_{j=2}^{n} D_{ij} \left(\sum_{l=1}^{j-1} Y_{i1} + Y_{ij} - Y_{ij} \right)$$

$$= T \sum_{j=2}^{n} D_{ij} \sum_{l=1}^{j} Y_{il} - T \sum_{j=2}^{n} D_{ij} Y_{ij}$$

حال با اضافه و کم کردن مقدار $TD_{i1} Y_{i1}$ در طرف راست معادله فوق نتیجه می‌شود که:

$$m_{i1} = T \sum_{j=1}^{n} D_{ij} \sum_{l=1}^{j} Y_{i1} - T \sum_{j=1}^{n} D_{ij} Y_{ij}$$

$$= T \sum_{j=1}^{n} D_{ij} \sum_{l=1}^{j} Y_{i1} - C_2$$

$$= vT - C_2 \qquad (۷)$$

که در آن $C_2 = T \sum_{j=1}^{n} D_j Y_j$ مقداریست ثابت و مستقل از توالی داده شده است. در نتیجه برای هر T اختیاری کمینه کردن m_{i1} معادل است با کمینه کردن v ،

$$v = \sum_{j=1}^{n} D_{ij} \sum_{l=1}^{j} Y_{i1} \qquad (۸)$$

اما، v شبیه مقدار کل زمانهای گردش وزن داده شده (Weighted Flowtime)n کار در سیستم یک ماشین و n کار در مبحث برنامه‌ریزی زمان‌بندی است، که در آن $\sum_{l=1}^{n} Y_{i1}$ همانند زمان گردش (زمان انتظار از موقع ورود به‌سیستم تا خروج از آن) برای‌کار ij و نیز D_{ij} وزن آن است (۱). در نتیجه کمینه‌سازی v معادل کمینه‌سازی میانگین زمان گردش وزن داده شده در سیستم یک ماشین و n کار است. در آن سیستم خط مشی کوتاهترین زمان ساخت وزن داده شده (wspt) یعنی

$$Y_{i1} / D_{i1} \leqslant Y_{i2} / D_{i2} \leqslant \cdots \leqslant Y_{in} / D_{in} \qquad (۹)$$

میانگین زمان گردش‌وزن داده شده را کمینه می‌سازد. با توجه به‌رابطه (۲) خط مشی فوق به‌صورت زیر درمی‌آید.

$$\frac{D_{i1} / P_{i1}}{D_{i1}} \leqslant \frac{D_{i2} / P_{i2}}{D_{i2}} \leqslant \cdots \leqslant \frac{D_{in} / P_{in}}{D_{in}}$$

یا

$$P_{i1} \geqslant P_{i2} \geqslant \cdots \geqslant P_{in} \qquad (۶)$$

که همان رابطه (۶) قبلی است.

اثبات بهینه بودن خط‌مشی wspt با روش تبادل جفت مجاور (adjacent pairwise interchange) صورت می‌گیرد. در ضمیمه این مقاله با استفاده از روش تبادل جفت مجاور اثبات اینکه توالی متناظر با رابطه (۶) کمینه m_{i1} را می‌دهد ارائه شده است.

نتیجه‌گیری

عموماً" در عمل منابع از جمله مقدار سرمایه نامحدود نیستند و کاهش حداکثر سرمایه موردنیاز مورد توجه فراوان است. با توجه به رابطه (۶) برای اینکه حداکثر سرمایه درگیر در موجودیها در دور تولید اختیاری T (از جمله T_o) به‌حداقل خود برسد باید از قاعده سرراست و ساده "محصولات را برحسب نرخ تولید آنها به‌ترتیب غیرصعودی مرتب و در هر دور تولید T آنها را به‌ترتیب این رتبه‌بندی تولید کنید" استفاده شود. نتیجه فوق را می‌توان درمورد منابع دیگر، از قبیل فضا، نیروی انسانی، و غیره (به‌جای سرمایه)، نیز به‌کار برد.

ضمیمه

اثبات بهینه‌بودن رابطه (۶)

با توجه به‌رابطه (۵) کمینه کردن Z معادل با کمینه کردن m_{i1} است که با توجه به‌روابط (۷) و (۸) کمینه کردن m_{i1} نیز معادل با کمینه کردن v ،

$$v = \sum_{j=1}^{n} D_{ij} \sum_{l=1}^{j} Y_{i1} \qquad (۱۰)$$

است.

برای اینکه نشان داده شود که برای کمینه v باید رابطه (۶) صادق باشد، فرض کنید که یک توالی بهینه وجود دارد که در آن محصولات برطبق مقادیر غیرصعودی P_{ij} تولید نمی‌شوند. یعنی، برای این توالی داده شده حداقل دو موقعیت مجاور، مثلاً" ik و ik+1، وجود دارند که برای آنها رابطه زیر برقرار است.

$$P_{ik} < P_{ik+1} \qquad (۱۱)$$

محصولی را که در این توالی داده شده در موقعیت ik است با a و محصولی را که در موقعیت ik+1 است با b نشان دهید. واضح است که با توجه به (۱۱) رابطه زیر برای توالی داده شده صادق است.

$$P_a < P_b$$

حال با تبادل موقعیت محصولات a و b نشان می‌دهیم که مقدار v کاهش می‌یابد و این کاهش مقداری مثبت و برابر است با $(P_b - P_a) D_a D_b / P_a P_b$، یعنی توالی داده شده نمی‌تواند بهینه باشد، که با فرض بهینه بودن توالی داده شده تناقض دارد.

برای اثبات این مطلب فرض کنید

مقدار v برای توالی‌داده‌شده (a قبل از b تولید می‌شود) = v(a,b)

و

مقدار v برای توالی جدید (b قبل از a تولید شود) = v(b, a)

بنابراین از رابطه (۱۰)

$$v(a,b) = \sum_{j=1}^{k-1} D_{ij} \sum_{l=1}^{j} Y_{i1} + D_{ik}\left(\sum_{l=1}^{k} Y_{i1}\right) + D_{ik+1}\left(\sum_{l=1}^{k+1} Y_{i1}\right) + \sum_{j=k+2}^{n} D_{ij} \sum_{l=1}^{j} Y_{i1}$$

یا

$$v(a,b) = \sum_{j=1}^{k-1} D_{ij} \sum_{l=1}^{j} Y_{i1} + D_a\left(\sum_{l=1}^{k-1} Y_{i1} + Y_a\right) + D_b\left(\sum_{l=1}^{k-1} Y_{i1} + Y_a + Y_b\right) + \sum_{j=k+2}^{n} D_{ij} \sum_{l=1}^{j} Y_{i1}$$

و بهمین ترتیب ازرابطه (۱۰)

$$v(b,a) = \sum_{j=1}^{k-1} D_{ij} \sum_{l=1}^{j} Y_{i1} + D_b\left(\sum_{l=1}^{k-1} Y_{i1} + Y_b\right) + D_a\left(\sum_{l=1}^{k-1} Y_{i1} + Y_b + Y_a\right) + \sum_{j=k+2}^{n} D_{ij} \sum_{l=1}^{j} Y_{i1}$$

با کم کردن v(b,a) از v(a,b) نتیجه می‌شود که

$$v(a,b) - v(b,a) = D_b Y_a - D_a Y_b$$

که با توجه به (۲) جانشین کردن مقادیر Y_a و Y_b در طرف راست رابطه فوق

$$v(a,b) - v(b,a) = (D_b D_a / P_a) - (D_a D_b / P_b) = (P_b - P_a) D_a D_b / (P_a P_b)$$

که مقداریست مثبت و نشان می‌دهد توالی داده شده بهینه نیست که با فرض بهینه بودن آن تناقض دارد. بنابراین برای توالی بهینه تولید باید رابطه (۶) صادق باشد.

منابع:

1. Baker, K.R., 1974, **Introduction to Sequencing and Scheduling,** John Wiley, New York.
2. Bomberger, E.E., 1966, **A Dynamic Programming Approach to a Lot Size Scheduling Problem,** Mgmt. Sci., 12, 778.
3. Doll, C.L., and Whybark, D.C., 1973, **An Iterative Procedure for the Single Machine Multi-Product Lot Scheduling Problem,** Mgmt. Sci., 20, 50.
4. Goyal, S.K., 1973, **Scheduling a Multi-Product Single Machine System,** Opl. Res. Q., 24, 261.
5. Goyal, S.K., 1975, **Scheduling a Multi-Product Single Machine System - A New Approach,** Int. J. Prod. Res., 13, 487.
6. Love, S.F., 1979, **Inventory Control,** Mc Graw-Hill, New York.
7. Madigan, J.G., 1968, **Scheduling a Multi-Product Single Machine System for Infinite Planning Period,** mgmt. Sci., 14, 713.
8. Magee, J.F., and Boadman, D.M., 1967, **Production Planning and Inventory Control,** Mc Graw-Hill, New York.
9. Rodgers, J., 1958, **A Computational Approach to Economic Lot Scheduling** Mgmt. Sci., 4, 264.