حل عددی لایهٔ مرزی هیدرودینامیکی و حرارتی

دکتر مجید ملکی

دانشیار دانشکدهٔ مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی اصفهان

مهندس امیرحسین شیروی

فارغ التحصیل کارشناسی ارشد دانشکده مهندسی مکانیک دانشگاه‌صنعتی اصفهان

چکیده

با استفاده از یک روش عددی، لایه‌های مرزی هیدرودینامیکی و حرارتی در جریان آرام و مغشوش مورد بررسی قرار گرفت. روش حل و برنامهٔ کامپیوتری به‌نحوی است که می‌توان به‌کمک آن جریان لایهٔ مرزی در اطراف اجسام متقارن محوری را حل کرد. روش حاضر درمورد جریان آرام و مغشوش روی صفحهٔ تخت به‌کار برده شد و اثر گرادیان فشار بر نتایج بدست‌آمده بررسی شد. مقایسهٔ نتایج بدست‌آمده با حلهای موجود دقت روش محاسباتی حاضر را مورد تائید قرار داد.

A Numerical Solution for the Hydrodynamic and Thermal Boundary Layer

M. Molki, Ph.D.

and

A.H. Shiravi, M.Sc.

Mech. Eng. Dept., Esfahan Univ. of Tech.

ABSTRACT

A numerical method is employed to solve the hydrodynamic and thermal boundary layer in laminar and turbulent flows. The numerical procedure and computer program used in this study are also able to solve the boundary layer flows over axisymmetric bodies. The numerical procedure is applied to the laminar and turbulent flows over a flat plate and the effect of pressure gradient on the results is investigated. Comparison of the results with the existing solutions confirm the precission of the numerical method.

فهرست علائم

A^+ ثابت تجربی

A یکی از ضرائب معادلهٔ کلی تفاضل

a یکی‌از ضرائب شکل کلی معادلات بقاء

B یکی از ضرائب معادلهٔ کلی تفاضل

b یکی از ضرائب شکل کلی معادلات بقاء

C یکی از ضرائب معادلهٔ کلی تفاضل

c یکی از ضرائب شکل کلی معادلات بقاء

d یکی از ضرائب شکل کلی معادلات بقاء

f' پارامتر بدون بعد در حل دقیق بلازیوس

f'' پارامتر بدون بعد در حل دقیق بلازیوس

h انتالپی ویژه (بر واحد جرم)

$\tilde{h}$ انتالپی سکون ویژه

J_h انتشار دیفیوزن انتالپی در واحد سطح در جهت y

K ثابت طول اختلاط

ℓ طول اختلاط

m''_I دبی جرمی عبوری از سطح I

m''_E دبی جرمی عبوری از سطح E

P فشار

r فاصلهٔ هر نقطه از محور تقارن جسم	η پارامتر بدون بعد در حل دقیق بلازیوس	Ψ تابع جریان
u سرعت	λ ثابت طول اختلاط	ω تابع جریان بدون بعد
u' سرعت اغتشاشات	μ ضریب ویسکوزیتهٔ آرام	
$\bar{u}$ سرعت متوسط زمانی	μ_{eff} ضریب ویسکوزیتهٔ موٴثر	**شاخص‌های پائین**
U_∞ سرعت جریان آزاد	ν ضریب ویسکوزیتهٔ سینماتیک	D معرف مقدار در پائین دست
y_I یک ضخامت مشخصهٔ لایه	ρ دانسیتهٔ سیال	D^+, D^- معرف مقدار در پائین‌دست در دو خط ω ثابت مجاور
	$\sigma_{h,eff}$ عدد پرانتل موٴثر	E معرف مقدار در مرز E
علائم یونانی	τ تنش برشی سیال	I معرف مقدار در مرز I
δ ضخامت لایهٔ مرزی	ϕ متغیر کلی	U معرف مقدار در بالادست

مقدمه

در علم مکانیک سیالات، انتقال حرارت و انتقال جرم در لایهٔ مرزی از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. تمامی انتقال ممنتم و حرارتی که در اثر عبور یک سیال از روی یک جسم جامد انجام می‌گیرد در محدودهٔ این لایه اتفاق می‌افتد. وجود ویسکوزیته در سیال حقیقی نخستین عامل بوجودآمدن این لایه است. با افزایش سرعت سیال و بطور کلی ناپایداری در جریان آرام، کم‌کم اغتشاشات ذرات سیال (ادیها) نیز در رشد این لایه موٴثر می‌شوند. تا جائی که گاهی اثر ویسکوزیته در مقایسه با اثر اغتشاشات ذرات سیال ناچیز می‌شود. معادلات بقای ممنتم و انرژی برای یک لایهٔ مرزی آرام از نوع معادلات دیفرانسیل پاره‌ای است، ولی به‌دلیل این که تعداد مجهولات با تعداد معادلات برابر است، حلهای دقیقی برای این نوع جریان بدست‌آمده است که نمونهٔ آن حل دقیق بلازیوس برای جریان آرام روی صفحهٔ تخت است (۷ ص ۲۰۱ – ۲۰۶). در جریان مغشوش، معمول این است که متغیرهای مختلف به‌صورت یک مقدار متوسط‌زمانی به‌اضافهٔ یک مقدار مربوط به‌اغتشاشات نوشته شود، که این کار نخستین‌بار توسط رینولدز انجام شده است (۳ ص ۳۹). به‌طور مثال سرعت جریان مغشوش به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$u = \bar{u} + u' \qquad (1)$$

که در آن $\bar{u}$ سرعت متوسط زمانی و u' نوسانات سرعت را نشان می‌دهد. به‌این ترتیب معادلاتی را که از جایگزینی روابطی نظیر معادلهٔ (۱) در معادلات بقاء به‌دست می‌آیند، معادلات بقاء با مقادیر متوسط زمانی می‌نامند. در این جایگزینی، معادلهٔ بقای جرم تغییر نمی‌کند، ولی معادلات بقای ممنتم و انرژی تغییر کرده و عباراتی که معرف اغتشاش جریان هستند وارد معادلات می‌شوند. برای مثال، معادلهٔ بقای ممنتم پس از جایگزینی فوق‌الذکر و اعمال فرضیات ساده‌کنندهٔ لایهٔ مرزی به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\bar{U}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\nu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \overline{u'v'}\right) - \frac{1}{\rho}\frac{d\bar{p}}{dx} \qquad (2)$$

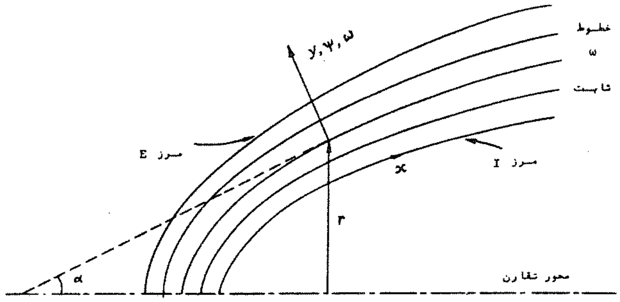
ملاحظه می‌شود که عبارت $\overline{u'v'}$، که به‌تنش رینولدز معروف است، به صورت یک مجهول اضافی در معادله ظاهر شده است. در حلهائی که تاکنون برای لایه‌های مرزی مغشوش ارائه شده است، سعی شده است که به‌طریقی با استفاده از داده‌های تجربی، این عبارت را به‌صورت یک عبارت تنش برشی مدل کرده و با عبارت تنش آرام (تنش مولکولی) جمع کنند. یکی از معروف‌ترین مدلها برای این مقصود فرضیهٔ طول اختلاط پرانتل است (۳ ص ۱۶۶).

هدف پروژهٔ حاضر، حل معادلات بقاء به‌کمک یک برنامهٔ جامع کامپیوتری است. روش حل به‌نحوی است که می‌تواند لایه‌های مرزی هیدرودینامیکی، حرارتی و جرم را حل کند و توزیع سرعت، دما و غلظت جرمی را به‌دست آورد. در این‌جا برای سهولت بیشتر لایه‌های مرزی هیدرودینامیکی و حرارتی مورد توجه قرار داده می‌شوند، ولی باید توجه داشت که لایهٔ مرزی جرم نیز با این روش به‌آسانی قابل حل است. در مسالهٔ حاضر، جریان سیال حول یک جسم متقارن محوری درنظر گرفته می‌شود به‌طوری که جریان روی صفحهٔ تخت یک حالت خاص از این جریان است. محدودیتهای دیگر مسئله حاضر عبارتند از: جریان دائم است، برگشت جریان وجود ندارد، نیروهای جسمی و تشعشع حرارتی و واکنش شیمیائی وجود ندارد و زاویهٔ حملهٔ خطوط جریان نسبت به‌محور تقارن به‌کندی تغییر می‌کند. بعلاوه، روش حل مورد بحث، همانطور که برای جریان مغشوش به‌کار می‌رود، برای جریان آرام نیز قابل استفاده است. زیرا در جریان مغشوش از مقادیر متوسط زمانی متغیرها استفاده شده و اغتشاش حاصل از اجزای نوسانی جریان به‌صورت تنشهای برشی موٴثر و فلوهای موٴثر بیان شده است.

فرمول بندی مساله

شکل ۱ سیستم مختصات مورداستفاده را نشان می‌دهد. معادلات لایهٔ مرزی با استفاده از تابع جریان Ψ به‌عنوان یک متغیر عمود بر جریان بیان می‌شوند. طبق تعریف Ψ در طول یک خط جریان ثابت است، یعنی:

$$x = \text{ثابت} : d\Psi = \rho\, r u\, dy \qquad (3)$$



شکل ۱. سیستم مختصات

معادلات بقاء در دستگاه مختصات $x \sim \Psi$ بصورت زیر درمی‌آید (۴) :

(۴) بقای ممنتم در جهت x

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \Psi}(\tau r) - \frac{1}{\rho u}\frac{dp}{dx}$$

(۵) بقای انرژی در جهت x

$$\frac{\partial \bar{h}}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial \Psi}\left\{(J_h - u\tau)\, r\right\}$$

در این روابط P فشار سیال، τ تنش برشی موضعی، $\bar{h}$ انتالپی سکون و J انتشار دیفیوژن در واحد سطح در جهت y را نشان می‌دهند.

اکنون به‌ارائهٔ مدلی برای ویسکوزیته موٴثر می‌پردازیم. همانطور که ملاحظه می‌شود، کمیاتی مانند تنش برشی و فلوی حرارتی در معادلات بقاء ظاهر شده‌اند. در جریان آرام، این کمیات توسط قانون نیوتون (برای ویسکوزیته) و قانون فوریه (برای هدایت حرارتی) بیان می‌شوند. ولی در جریان مغشوش از مقادیر موٴثر با تعاریف زیر استفاده می‌شود :

$$\tau = \mu_{eff}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) \qquad (۶)$$

$$J_h = -\left(\frac{\mu_{eff}}{\sigma_{h,eff}}\right)\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right) \qquad (۷)$$

در این روابط، μ_{eff} ویسکوزیتهٔ موٴثر و $\sigma_{h,eff}$ عدد پرانتل موٴثر است. مدلی را که برای ویسکوزیتهٔ موٴثر انتخاب می‌کنیم ترکیبی است از فرضیهٔ طول اختلاط پرانتل[1] (۳) و فرضیهٔ وان دریست[2] (۸). برای انجام این کار، لایهٔ مرزی مغشوش به‌دو ناحیه تقسیم می‌شود. در ناحیهٔ کاملا" مغشوش از فرضیهٔ طول اختلاط پرانتل استفاده می‌کنیم.

$$\mu_{eff} = \rho\, \ell^2 \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right| \qquad (۸)$$

که در اینجا ℓ طول اختلاط است. تغییرات ℓ را طبق بررسی هودیموتو و اسکودیر (۴) به‌شکل زیر درنظر می‌گیریم :

$$0 < y < \frac{\lambda y_\ell}{k}\ ,\quad \ell = k y \qquad (۹)$$

$$y > \frac{\lambda y_\ell}{k}\ ,\quad \ell = \lambda y_\ell \qquad (۱۰)$$

λ و k مقادیر ثابت طول اختلاط بوده و y_ℓ یک ضخامت مشخصهٔ لایه است. در ناحیهٔ خیلی نزدیک به‌دیواره از فرضیهٔ وان دریست استفاده می‌کنیم :

$$\mu_{eff} = \mu + \rho k^2 y^2 \left\{1 - \exp\left[-y\sqrt{\tau\rho}\,/\,(\mu A^+)\right]\right\}^2 \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right| \qquad (۱۱)$$

در این رابطه μ ویسکوزیتهٔ جریان آرام و A^+ یک ثابت تجربی است. کلیهٔ مقادیر ثابت در این دو فرضیه از داده‌های تجربی بدست‌می‌آیند.

یکی از فرضیات ساده‌کننده‌ای که در حل معادلات مورد استفاده قرار گرفت، مربوط به‌یک‌بعدی بودن معادلات لایهٔ مرزی در نزدیکی دیوار است. نظر به‌اهمیت زیاد ناحیهٔ نزدیک دیوار به‌علت شدت تغییرات متغیرها و با توجه به‌کاربرد تحلیل کوئت (۷ ص ۱۱۲) که در این ناحیه جریان را یک‌بعدی در نظر گرفته و از ترم جابجائی ممنتم در جهت x صرفنظر می‌کند، می‌توان معادلات دیفرانسیل را از شکل پاره‌ای به‌شکل معمولی درآورده و ساده کرد. در روش حاضر با استفاده از تحلیل کوئت، از فرمولهای ساده شدهٔ ناحیه نزدیک دیوار به‌جای معادلات دیفرانسیل پاره‌ای استفاده شده است (۱ ص ۱۰–۱۹).

روش حل

حال که چهارچوب تئوریکی مساله، چه در میدان یک‌بعدی نزدیک دیوار و چه در ناحیهٔ کاملا" مغشوش، کامل شده است، باید این روابط را بصورت روابط تفاضل محدود درآوریم. ابتدا به‌انتخاب یک سیستم مختصات مناسب می‌پردازیم.

انتخاب سیستم مختصات در روش تفاضل محدود از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. نظر به‌طبیعت لایه‌های مرزی که معمولا" با رشد ضخامت همراه است، استفاده از شبکه‌های چهارگوشه در سیستم مختصات متعامد دارای معایبی است. زیرا انتخاب چنین شبکه‌هائی ایجاب می‌کند که مقدار زیادی از شبکه در خارج لایهٔ مرزی در بالادست جریان بی‌استفاده باقی بماند، و به‌این ترتیب زمان محاسبه توسط کامپیوتر افزایش یابد. لذا وضعیت ایده‌آل وقتی است که همواره شبکه و لایهٔ مرزی بر هم منطبق باشند و یا به‌عبارتی متغیر عمود بر جریان هماهنگ با رشد لایهٔ مرزی رشد کند. در این رابطه از تابع جریان بدون بعد استفاده می‌کنیم :

$$\omega = (\Psi - \Psi_I)\,/\,(\Psi_E - \Psi_I) \qquad (۱۲)$$

در این رابطه Ψ_I و Ψ_E، به‌ترتیب، معرف مقادیر تابع جریان در مرزهای داخلی I و خارجی E لایهٔ مرزی هستند (شکل ۱). ملاحظه می‌شود که مقدار ω همواره بین صفر و یک است. با توجه به‌این انتخاب، معادلات بقاء در سیستم مختصات $x \sim \omega$ به‌صورت زیر درمی‌آیند (۴) :

بقای ممنتم :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{[r_I m_I'' + \omega(r_E m_E'' - r_I m_I'')]}{(\Psi_E - \Psi_I)} \frac{\partial u}{\partial \omega} = \frac{\partial}{\partial \omega}\left[\frac{r^2 \rho u \mu_{eff}}{(\Psi_E - \Psi_I)^2} \frac{\partial u}{\partial \omega}\right] - \frac{1}{\rho u}\frac{dp}{dx} \quad (۱۳)$$

بقای انرژی:

$$\frac{\partial \tilde{h}}{\partial x} + \frac{[r_I m_I'' + \omega(r_E m_E'' - r_I m_I'')]}{(\Psi_E - \Psi_I)} \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \omega} = \frac{\partial}{\partial \omega}\left[\frac{r^2 \rho u \mu_{eff}}{(\Psi_E - \Psi_I)^2 \sigma_{h,eff}} \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \omega}\right] + \frac{\partial}{\partial \omega}\left[\frac{r^2 \rho u \mu_{eff}}{(\Psi_E - \Psi_I)^2}\left(1 - \frac{1}{\sigma_{h,eff}}\right)\frac{\partial\left(\frac{u^2}{2}\right)}{\partial \omega}\right] \quad (۱۴)$$

در این روابط m_I'' و m_E'' دبی جرمی عبوری از سطحهای I و E می‌باشند. معادلات (۱۳) و (۱۴) دارای شکل کلی زیر هستند:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} + (a + b\omega)\frac{\partial \phi}{\partial \omega} = \frac{\partial}{\partial \omega}\left(c\frac{\partial \phi}{\partial \omega}\right) + d \quad (۱۵)$$

در اینجا ϕ یک متغیر کلی است و d عبارتی است که شامل $\frac{\partial \phi}{\partial \omega}$ نیست.

مرحلهٔ بعدی در حل مسئله این است که معادله دیفرانسیل پاره‌ای را به‌شکل تفاضل محدود نوشته و آن را با روش انتگرال‌گیری قدم به‌قدم[۳] حل کنیم. در این روش در هر مرحلهٔ انتگرال‌گیری، مقادیر ϕ در بالادست (X_U) و به‌ازای تمام مقادیر ω معلوم است و باید مقادیر ϕ در قدم بعدی (X_D) محاسبه شوند و به‌این ترتیب، حل معادلات مرحله به‌مرحله پیش‌رفته تا تمام قلمرو حل تحت پوشش قرار گیرد (۱ ص ۲۳ – ۲۹).

بعد از آن که تمام عبارات معادلهٔ دیفرانسیل بطور جداگانه به شکل تفاضل محدود درآمد، معادلهٔ کلی تفاضل را می‌توان به‌شکل سادهٔ زیر نوشت (۴):

$$\phi_D = A\phi_{D^+} + B\phi_{D^-} + C \quad (۱۶)$$

ضرائب A ، B و C در مرجع (۱ص ۲۸) داده شده است.

اکنون یک سری معادلات جبری خطی داریم که باید حل شوند. این معادلات دارای یک مشخصهٔ ویژه هستند و آن این است که در هر معادله فقط سه مجهول ظاهر می‌شود. از اینرو می‌توان به‌جای تکنیک ماتریس‌ و ارون و نظایر آن از روش جانشینی پی‌درپی[۴] استفاده کرد.

در اینجا ذکر چند نکته درمورد طرز کنترل شبکه لازم به‌نظر می‌رسد. مقادیر M_I'' و m_E'' یعنی دبیهای جذب شده به‌داخل لایهٔ مرزی، از لحاظ فیزیکی ضخامت شبکه را کنترل می‌کنند. درمورد مرز دیوار و مرز خط تقارن مشکلی برای محاسبهٔ m'' وجود ندارد. فقط در مورد مرز آزاد دقت بیشتری لازم است. با توجه به‌فرضیهٔ طول اختلاط پرانتل می‌توان رابطهٔ زیر را برای مرز آزاد نتیجه گرفت (۴):

$$m'' = 2\rho \ell^2 \left|\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right| \quad (۱۷)$$

حال با انتخاب یک پروفیل سرعت در مجاورت مرز آزاد (که معمولاً سهموی در نظر گرفته می‌شود) می‌توان فرمولی عملی برای محاسبهٔ m'' از مرز آزاد به‌دست آورد. اطلاعات بیشتر در این زمینه در مرجع (۴) موجود است.

نکتهٔ دیگر، انتخاب مقدار پیشروی در هر مرحله است. طبیعت ضمنی بودن روش مورد استفاده می‌تواند پایداری حل را تضمین کند، یعنی حتی‌برای قدمهای بزرگ اشکالی پیش نمی‌آورد. ولی به‌هر صورت کوچک گرفتن قدمها در حد معقول می‌تواند دقت حل را افزایش دهد. انتخاب مقدار پیشروی در هر مرحله برای جریان آرام و مغشوش متفاوت است. در جریان مغشوش این مقدار متناسب با m'' از مرز آزاد درنظر گرفته شد، چون با کم‌شدن m'' در هر مرحله می‌توان قدم بعدی را بزرگتر انتخاب کرد:

برای جریان آرام: $X_D - X_U = 0.5\,\delta^2$

و برای جریان مغشوش: $X_D - X_U = 0.05(\Psi_E - \Psi_I)_U/(r_I m_I'' - r_E m_E'')$

همچنین لازم به‌ذکر است که برنامهٔ کامپیوتری مورد استفاده به‌زبان بیسیک نوشته و در کامپیوترهای شخصی آی.بی.ام (IBM PC) و یا هر نوع کامپیوتر سازگار با آن قابل اجرا است. یک اجرای نمونهٔ برنامه حدود ۲۰ دقیقه به‌طول می‌انجامد. برنامهٔ کامل کامپیوتری در مرجع (۱) موجود است.

نتایج

برمبنای روش حلی که شرح آن گذشت، یک برنامهٔ کامپیوتری تهیه شد که قادر است جریانهای لایهٔ مرزی آرام و مغشوش سیال را حول یک جسم متقارن محوری حل نموده و توزیع سرعت و دما را به‌دست‌آورد. برای سهولت، بر جریان روی صفحهٔ تخت تاءکید بیشتری شده است. برای نشان دادن توانائی برنامهٔ حاضر، جریان لایهٔ مرزی آرام و مغشوش در چند مثال نمونه مورد بررسی قرار گرفتند که اکنون جداگانه به‌شرح هرکدام می‌پردازیم.

الف ــ لایهٔ مرزی آرام

با وجوداین‌که حل دقیق لایهٔ مرزی آرام وجود دارد، در اینجا سعی شده است که با استفاده از روش حاضر این مسئله را حل کرده و نتایج را با یکدیگر مقایسه کنیم تا توانائی این‌روش برای حل لایهٔ مرزی آرام نیز آشکار شود. نخست لایهٔ مرزی هیدرودینامیکی آرام روی صفحهٔ تخت موردنظر قرار گرفت. این انتخاب به‌این دلیل انجام

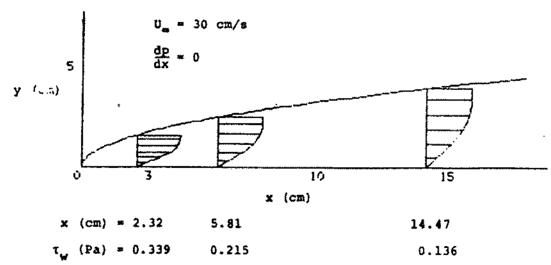
گرفت که حل دقیق بلازیوس در این مورد در دسترس بود. شکل ۲ پروفیل سرعت و رشد لایهٔ مرزی آرام را در این حالت نشان می‌دهد و در چند مقطع دلخواه تنش برشی روی دیوار محاسبه شده است. در این حالت، پروفیل ابتدائی سرعت به‌صورت زیر تقریب زده شد.

$$\frac{u}{U_\infty} = \frac{1}{3}\left(\frac{y}{\delta}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^3 \qquad (۱۸)$$

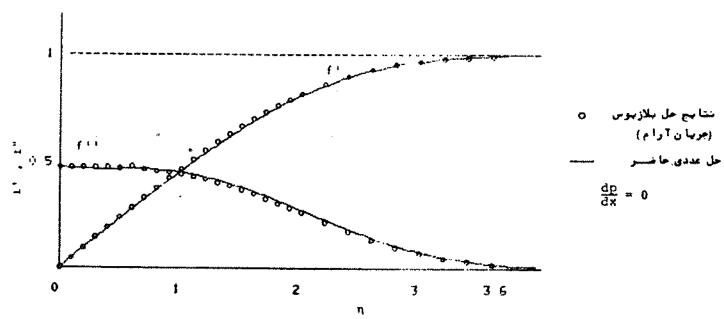
نکتهٔ جالب توجه در این حالت این است که حل مساله به‌انتخاب پروفیل ابتدائی سرعت حساسیت ندارد، یعنی با تغییردادن‌آن به صورت خطی($\frac{u}{U_\infty} = \frac{y}{\delta}$) و یا بی‌نهایت نزدیک‌کردن‌آن به‌لبهٔ ابتدائی صفحه، جوابها در پائین‌دست تقریبا" ثابت می‌مانند. این موضوع باعث شد که در جریانهائی که دارای گرادیان فشار هستند بدون هیچ شک و اضطرابی از همین پروفیل‌ها به‌عنوان پروفیل ابتدائی استفاده کنیم.

در شکل ۳،نتایج حاضر (از شکل ۲) با حل دقیق بلازیوس (۷) مقایسه شده است. پارامترهای بکار رفته در شکل عبارتند از:

$$f' = \frac{u}{U_\infty} \quad ، \quad f'' = \frac{\tau}{\mu U_\infty}\sqrt{\frac{2\nu x}{U_\infty}} \quad ، \quad \eta = y\sqrt{\frac{U_\infty}{2\nu x}} \qquad (۱۹)$$



شکل ۲. پروفیل سرعت در لایهٔ مرزی آرام روی صفحهٔ تخت

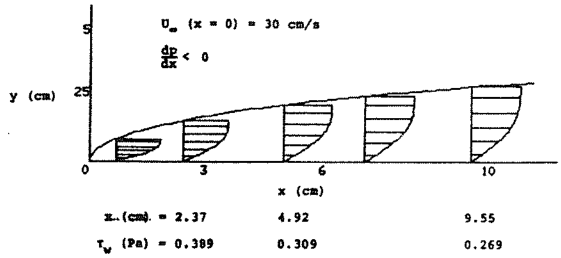


شکل ۳. مقایسهٔ بین حل دقیق بلازیوس و حل عددی حاضر

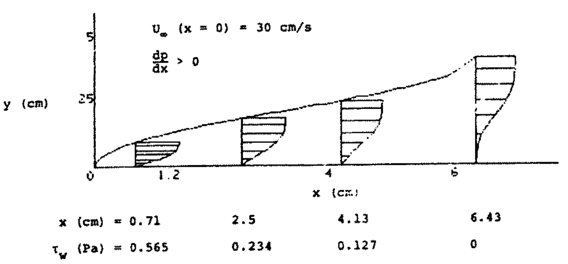
همانطور که ملاحظه می‌شود تطابق حلها بسیار خوب است. باید توجه داشت که روش حل حاضر از نوع تشابهی[5] نبوده است، با این حال مشاهده می‌گردد که در مقاطع مختلف با حل بلازیوس کاملا" موافق است.

اثر گرادیان فشار بر رشد لایهٔ مرزی آرام و تاٌثیر آن بر پروفیلهای سرعت در شکلهای ۴ و ۵ نشان داده شده است. همانطور که انتظار می‌رود، جریان با گرادیان فشار منفی باعث متراکم شدن لایهٔ مرزی و پایداری هر چه بیشتر آن می‌گردد، در حالی که جریان با گرادیان فشار مثبت به‌جدائی جریان منجر می‌شود. در شکل ۵ نقطهٔ جدائی که در آن تنش برشی روی دیواره صفر است به‌وضوح دیده می‌شود. روش حاضر، بعد از نقطهٔ جدائی جریان را پیش‌بینی نمی‌کند، زیرا اصولا" جدائی جریان در تعریف لایهٔ مرزی نمی‌گنجد. نکتهٔ قابل توجه دیگر در این دو شکل روند کاهش تنش برشی روی‌دیواره است. در جریان با گرادیان فشار منفی (شکل ۴) ملاحظه می‌گردد که کاهش تنش برشی دیواره به‌کندی صورت می‌گیرد که این خود نشان‌دهندهٔ تغییرات آهستهٔ پروفیل سرعت در این لایه است. در صورتی که تنش برشی در جریان با گرادیان فشار مثبت به‌سرعت به‌صفر می‌رسد و نشان می‌دهد که تغییرات پروفیل سرعت در مقاطع مختلف سریع است.

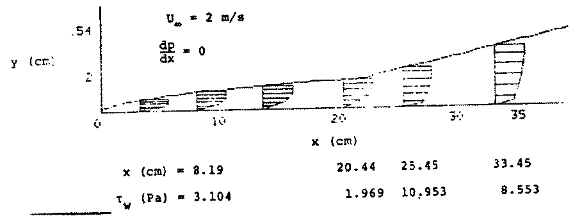
شکل ۶ تبدیل لایهٔ مرزی آرام به‌مغشوش را روی صفحهٔ تخت با گرادیان فشار صفر نشان می‌دهد. لازم به‌توضیح است که در روند تبدیل لایهٔ مرزی آرام به‌مغشوش، جریان باید از یک حالت انتقالی[6]



شکل ۴. لایهٔ مرزی آرام با گرادیان فشار منفی



شکل ۵. لایهٔ مرزی آرام با گرادیان فشار مثبت



شکل ۶. تبدیل لایهٔ مرزی آرام به‌مغشوش

عبور کند. اما پیش‌بینی رفتار جریان در حالت انتقالی بسیار مشکل بوده و از توان روش حاضر خارج است. لـذا از حالت انتقالی کلا" صرفنظر شد و فرض‌کردیم که در یک مقطع معین جریان دفعتا" از حالت آرام به‌مغشوش تبدیل می‌شود.

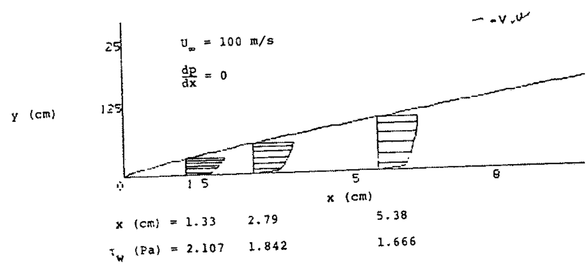
ب ــ لایهٔ مرزی مغشوش

نخست لایهٔ مرزی هیدرودینامیکی مغشوش روی صفحهٔ تخت با گرادیان فشار صفر درنظر گرفته شده است. در این حالت از پروفیل معروف $\frac{1}{7}$ به‌عنوان پروفیل ابتدائی سرعت استفاده شده است و فرض شده است‌که از ابتدای صفحه جریان مغشوش‌است. برای این که این فرض به‌واقعیت نزدیکتر باشد از سیال هوا در سرعت بالا استفاده شده است تا طول لایهٔ مرزی آرام به‌حداقل برسد. شکل ۷ پروفیل سرعت را در این حالت نشان می‌دهد و در چند مقطع دلخواه، تنش برشی روی دیوار نیز محاسبه شده است. در شکل ۸ مقایسه‌ای بین حل حاضر و آنچه در مرجع (۴) بدست‌آمده صورت گرفته است. در این شکل u^* برحسب y^* رسم شده که تعریف آنها به‌صورت زیر است:

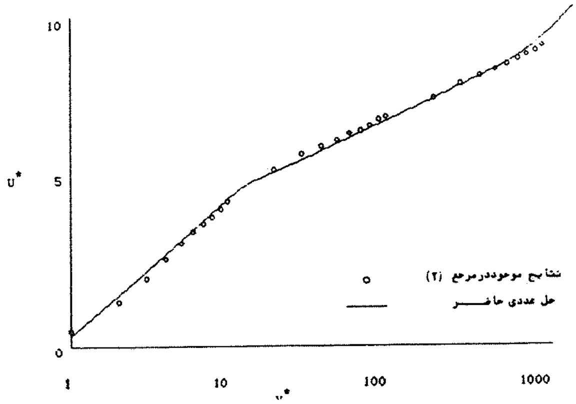
$$u^* = Ku/\sqrt{\frac{\tau_s}{\rho}} \qquad y^* = ky\,\frac{\sqrt{\tau_s \rho}}{\mu} \qquad (۲۰)$$

ملاحظه می‌گردد که در این‌جا نیز تطابق قابل قبول است.

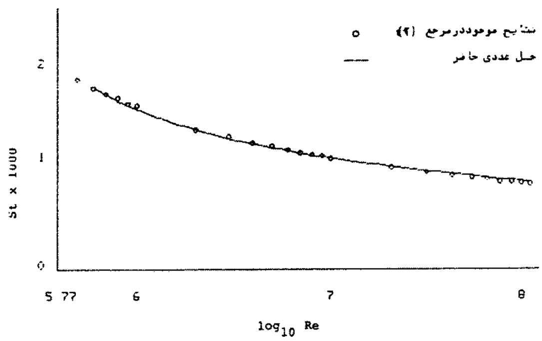
حال همین مسئله را وقتی که از صفحه انتقال حرارت هم صورت می‌گیرد مورد توجه قرار می‌دهیم. در این حالت فرض شده که دمای دیواره ثابت و دوبرابر دمای سیال آزاد است. نتایج بدست‌آمده



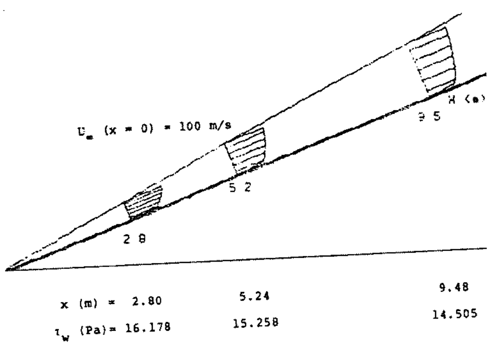
شکل ۷. پروفیل سرعت در لایهٔ مرزی مغشوش



شکل ۸. مقایسه‌ای بین حل عددی حاضر و نتایج موجود در مرجع (۲)



شکل ۹. عدد استانتون روی دیواره برحسب عدد رینولدز



شکل ۱۰. لایهٔ مرزی مغشوش روی جسم متقارن محوری

به‌صورت عدد استانتون $(St = \frac{h}{\rho u C_p})$ برحسب عدد رینولدز $(Re = \frac{\rho u x}{\mu})$ در شکل ۹ رسم شده است. مقایسهٔ نتایج حاضر با نتایج مرجع (۴) دقت محاسبات انجام‌شده را به‌خوبی نشان می‌دهد.

و بالاخره در شکل ۱۰ لایهٔ مرزی مغشوش روی جسم متقارن محوری، که در این‌جا یک مخروط با زاویهٔ راٴس ۴۰° در نظر گرفته شده، بررسی شده است. این قبیل مسائل معمولا" با گرادیان فشار همراه است که از جریان ایده‌آل خارج لایهٔ مرزی حاصل می‌شود. برای جریان ایده‌آل در اطراف یک مخـروط ۴۰ درجـه، $U_\infty = Cx^n$ است که در آن $n = 0.125$ است (۷).

نتیجه‌گیری

روش عددی که شرح آن گذشت قادر است حل لایه‌های مرزی هیدرودینامیکی و حرارتی در جریان آرام و مغشوش در اطراف اجسام متقارن محوری را بدست‌آورد . در حالی که نتایج ارائه شده به‌لایه‌های مرزی هیدرودینامیکی و حرارتی محدود شد ، روش حل حاضر به‌نحوی است که به‌سهولت می‌توان لایه‌ٔ مرزی انتقال جرم را نیز مورد بررسی قرار دهد .

برای نشان‌دادن توان روش حاضر ، حل جریان آرام و مغشوش روی صفحه‌ٔ تخت به‌دست‌آمد و با نتایج دقیق تحلیلی و عددی موجود مقایسه شد . نزدیکی این نتایج به‌یکدیگر ، دقت محاسبات حاضر را مورد تأیید قرار داد .

نظر به‌این که جریان در اطراف اجسام متقارن محوری از تنوع بیشتری برخوردار است ، برای کاهش پارامترها و سهولت در ارائه‌ٔ نتایج ، تنها به ذکر نتایج مربوط به‌جریان لایه‌ٔ مرزی در اطراف یک مخروط ۴۰ درجه پرداختیم . برنامه‌ٔ جامع کامپیوتری به‌طور کامل در مرجع (۱) آمده است و می‌توان به‌کمک آن جریان در اطراف هر نوع دماغه‌ٔ متقارن محوری را محاسبه کرد .

منابع :

۱- پایان‌نامه‌ٔ کارشناسی ارشد ، شیروی - امیرحسین ، "حل لایه‌ٔ مرزی هیدرودینامیکی و حرارتی به‌کمک کامپیوتر" ،شهریورماه ۱۳۶۸ .

2. Fox, R.W., Introduction to Fluid Mechanics (2nd edn.), John Wiley & Sons, 1978.
3. Kays, W.M., Convective Heat and Mass Transfer (2nd edn.), McGraw-Hill, 1980.
4. Patankar, S.V., Heat and Mass Transfer in Boundary Layers (1st edn.), Morgan-Grampian, London, 1967.
5. Patankar, S.V., Computation of Boundary Layer Flows, Class Notes, University of Minnesota, Spring 1981.
6. Schlichting, H., Boundary Layer Theory (7th edn.), McGraw-Hill, 1987.
7. White, F.M., Viscous Fluid Flow (1st edn.), McGraw-Hill, 1974.
8. Van Driest, E.R., J' Aeronautical Sciences, Vol. 23, 1956, p. 1007.

پاورقی :

1. Prandtl mixing - length theory
2. Van Driest hypothesis
3. Marching integration
4. Successive substitution
5. Similarity solution
6. Transition