کاربرد روش کانترویچ توسعه یافته در حل خمش صفحات رایسنر

دکتر محمود شاکری

استاد یار دانشکده مهندسی مکانیک دانشگاه صنعتی امیرکبیر

دکتر شهریار فریبرز

استاد یار دانشکده مهندسی مکانیک دانشگاه صنعتی امیرکبیر

مهندس محمد محمدی اقدم

آزمایشگاه مقاومت مصالح دانشکده مهندسی مکانیک دانشگاه صنعتی امیرکبیر

چکیده

روش کانترویچ توسعه یافته[1] جهت آنالیز خمش صفحات مستطیل شکل (با شرط مرزی گیردار)، با درنظر گرفتن اثرات تغییر فرمهای برشی[2] مورد استفاده قرار گرفته و حل تقریبی به شکل بسته[3] برای این صفحات ارائه شده است. همچنین همگرائی سریع و نیز مستقل بودن جوابهای نهایی از حدس اولیه که از مشخصات عمده این متد است، نشان داده شده است. با کوچک گرفتن ضخامت ورق (حذف تقریبی اثرات تغییر فرمهای برشی) جوابهای مسأله با جوابهای تئوری صفحات کلاسیک[4] مقایسه گردیده است.

Application of Extended Kantorovich Method to the Bending of Reissner's Plates

M.Shakeri Ph.D

Assis.Prof.of Mech.Eng.Dept.Amirkabir university of Technology

Sh. Fariborz Ph.D.

Assis.Prof. of Mech.Eng.Dept. Amirkabir University of Technology

M.Mohammadi Aghdam M.Sc.

Lecturer of Mech.Eng. Dept.Amirkabir university of Technology

Abstract:

The extended Kantorovich method has been used to analyze the bending of rectangular plates (with clamped boundry Conditions) with the effect of shear deformation, and an approximate closed form solution has been presented.

Also, the rapid convergence and independence of final results from initial guesses which are the main characteristics of this method have been shown.

By selecting thin plates, (ignoring the effect of shear deformation) the results of the problem have been compared with those of classical plate theory.

مقدمه

تا کنون روشهای متنوعی برای حل معادلات دیفرانسیل حاکم بر صفحات با تئوریهای مختلف ارائه شده است. این روشها عمدتاً برمبنای فرمولبندی المانهای محدود [5] استوار می باشند. در اینجا تکنیک تقریبی دیگری تحت عنوان «روش کانترویچ توسعه یافته» *'EKM'* برای حل معادلات صفحات مستطیل شکل درنظر گرفته شده است. این روش به صورت تکرار [6] و با استفاده از متد باقیمانده های وزن‌دار به حل مسأله می پردازد. در این روش برخلاف روشهای دیگر، مثل روش گالرکین، جوابهای نهایی کاملاً مستقل از حدس اولیه بوده و نیازی به ارضاء شرایط مرزی توسط توابع اولیه نمی باشد، و لیکن به دلیل آن که در اینجا نیاز به حل سیستم معادلات دیفرانسیل معمولی بجای سیستم معادلات جبری است، روش حل مشکلتر از روش گالرکین خواهد بود. از این روش تا کنون جهت حل پیچش مقاطع مستطیل شکل *[1]*، آنالیز تنش صفحات کلاسیک گیردار *[2]*، مسایل مقدار ویژه نظیر ارتعاشات و آنالیز کمانش صفحات مستطیل شکل *[3]*، و نیز آنالیز صفحات کلاسیک با ضخامت متغیر *[4]*، استفاده شده است. باید توجه داشت که در تمامی این موارد از این روش جهت حل یک معادله دیفرانسیل پاره‌ای استفاده شده و حال آنکه در این مقاله این روش جهت حل سیستم معادلات پاره‌ای بکار رفته است.

مبنای تئوری

معادلات حاکم بر صفحات ضخیم را می توان برمبنای تئوری رایسنر *[5]*، به صورت زیر درنظر گرفت:

$$\Phi x+W,x=B^*Qx$$
$$\Phi y+W,y=B^*Qy$$
$$Mxx=D^*(\Phi x,x+\nu^*\Phi y,y+C^*q)$$
$$Myy=D^*(\Phi y,y+\nu^*\Phi x,x+C^*q) \qquad (1)$$
$$Mxy=D^*(\Phi x,y+\Phi y,x)/(2^*(1-\nu))$$
$$Mxx,x+Mxy,y=Qx$$
$$Mxy,x+Myy,y=Qy$$
$$Qx,x+Qy,y=-q$$

در این روابط Φ_x و Φ_y و W شیبها و خیز ورق، Q و M نیروهای برشی عرضی و ممانهای خمشی در ورق، h ضخامت، E مدول الاستیسیته و ν نسبت پواسون و q بار خارجی می‌باشد. اندیس کاما نشانگر مشتق جزیی بوده و ثابتهای C و B و D مقادیر زیر را دارا هستند:

$$D=E^*h^3/(12^*(1-\nu^2))$$
$$B=12^*(1+\nu)/(5^*E^*h)$$
$$C=6^*\nu^*(1+\nu)/(5^*E^*h)$$

روش حل

برای یک صفحه مستطیل شکل به ابعاد $L_x^*L_y^*h$ و با شرایط مرزی چهار طرف گیردار مقادیر W و Φ_x و Φ_y در روی مرزها صفر می باشد. در این صورت با حذف ممانها و نیروهای برشی عرضی در روابط (۱) سه رابطه شامل سه مجهول W و Φ_x و

Φ_y به صورت زیر نتیجه می‌شود:

$$\Phi_{x,x}+W_{,xx}+\Phi_{y,y}+w_{,yy}=B^*q$$

$$\Phi_{x,xx}+(1+\nu)^*\Phi_{y,xy}/2+(1-\nu)/2$$

$$^*\Phi_{x,yy}-(\Phi_x+W_{,x})/(B^*D)=-C^*q_{,x}$$

(۲)

$$\Phi_{y,yy}+(1+\nu)^*\Phi_{x,xy}/2+(1-\nu)/2$$

$$^*\Phi_{y,xx}-(\Phi_y+W_{,y})/(B^*D)=-C^*q_{,y}$$

باتوجه به روش کانترویچ، توابع خیز و شیبها را می‌توان به صورت توابع جدایی پذیر و بدون بعد زیر درنظر گرفت:

$$W(x,y)=\sqrt{(L_x^*L_y)}\ \delta_1(x)\psi_1(y)$$

(۳)

$$\Phi_x(x,y) = \delta_2(x)\ \psi_2(y)$$

$$\Phi_y(x,y) = \delta_3(x)\ \psi_3(y)$$

با جاگذاری روابط (۳) در روابط (۲) نتیجه می‌شود:

$$C_1(\psi_1 d^2\ \delta_1/dx^2+\delta_1 d^2\ \psi_2/dy^2)$$

$$+\ \psi_2 d\delta_2/dx+\delta_3 d\psi_3/dy=-B^*q$$

$$\psi_2(d^2\delta_2/dx^2)\ +$$

$$C_3 d\delta_3/dxd\psi_3/dy+C_4\delta_2 d^2\psi_2/dy^2$$

$$-C_2(\delta_2\psi_2+C_1\psi_1 d\delta_1/dx)=-C^*dq/dx \qquad (٤)$$

$$\delta_3(d^2\psi_3/dy^2)+C_3 d\delta_2/dxd\psi_2/dy+C_4\psi_3 d^2\ \delta_3/dx^2$$

$$-C_2(\delta_3\psi_3+C_1\delta_1 d\psi_1/dy)=\ -C^*dq/dy$$

حال اگر روابط فوق به ترتیب در ψ_1 و ψ_2 و ψ_3 ضرب شده و در طول صفر تا L_y انتگرال گیری شوند، نتیجه خواهد شد:

$$C_1(F_1 d_1^{\ 2}\ +\ F_7)\ \delta_1+F_4 d_1(\delta_2)+F_5=K_1$$

$$-C_1C_2F_4d_1(\delta_1)\ +\ (F_2d_1^{\ 2}+C_5)\delta_2+C_3F_6d_1(\delta_3)=K_2$$

(۵)

$$C_1C_2F_5\delta_1-C_3F_6d_1(\delta_2)+(C_4F_3d_1^{\ 2}+C_6)\delta_3=K_3$$

ضرایب F_i و C_i و K_i در پیوست (۱) مقاله تعریف شده‌اند و d_1 در این معادلات اپراتور دیفرانسیل نسبت به X می‌باشد. با حل روابط (۵) جوابها در جهت X محاسبه خواهند شد. حل عمومی روابط (۵) به صورت زیر است:

$$\delta_1(x)=\Sigma\ A_i^*EXP(\lambda_i^*X)$$

$$\delta_2(x)=\Sigma\ \alpha_i^*A_i^*EXP(\lambda_i^*X) \qquad (٦)$$

$$\delta_3(x)=\Sigma\ \beta_i^*A_i^*EXP(\lambda_i^*X) \qquad i=1,6$$

که در آن ضرایب A_i باتوجه به نوع بارگذاری و یافتن حل خصوصی مسأله و اعمال شرایط مرزی قابل محاسبه خواهند بود. λ_i نیز مقادیر ویژه مسأله بوده و ضرایب α_i و β_i به صورت زیر می‌باشند: (۷)

$$\alpha_i=(C_1(C_3F_6\lambda_i)(F_1\lambda_i^{\ 2}\ +\ F_7)+F_5(C_1C_2F_4\lambda_i))/S_i$$

$$\beta_i=(-(F_4\lambda_i)(C_1c_2F_4\lambda_i)\ -\ C_1(F_1\lambda_i^{\ 2}+F_7)(F_2\lambda_i^{\ 2}+C_5))/S_i$$

که در آن:

$$S_i=F_5(F_2\lambda_i^{\ 2}+C_5)-(F_4\lambda_i)(C_3F_6\lambda_i) \qquad i=1,6$$

برای مثال اگر بارگذاری ثابت q_o درنظر گرفته شود، حل خصوصی مسأله به صورت زیر خواهد شد:

$$\delta_{o1}=C_6^*K_1/(C_1^*(F_7C_6-C_2F_5^{\ 2}))$$

$$\delta_{o2}=0.0 \qquad \delta_{o3}=-C_2F_5K_1/(F_7C_6-C_2F_5^{\ 2}) \qquad (٨)$$

با جمع روابط (٦) و (٨) حل مسأله در جهت X به دست می‌آید. حال با جاگذاری حل به دست آمده در جهت X در روابط (٤) و ضرب طرفین این روابط به ترتیب در توابع وزنی δ_1 و δ_2 و δ_3 انتگرال گیری در طول صفر تا L_x، نتیجه خواهد شد:

$$C_1(G_1d_2^{\ 2}+G_7)\psi_1+G_5\psi_2+G_4d_2(\psi_3)=P_1$$

$$C_1C_2G_5\psi_1+(C_4G_2d_2^{\ 2}+H_5)\psi_2$$

$$+C_3G_6d_2(\psi_3)=P_2 \qquad (٩)$$

$$-C_1C_2G_4d_2(\psi_1)-C_3G_6d_2(\psi_2)$$

$$+(G_3d_2^{\ 2}+H_6)(\psi_3)=P_3$$

ضرایب G_i و H_i و P_i در پیوست (۱) تعریف شده‌اند. و d_2 اپراتور دیفرانسیل نسبت به y می‌باشد. باتوجه به نوع بارگذاری حل کامل روابط (٩) به صورت زیر است:

$$\psi_1(y)=\Sigma\ B_i^*EXP(\sigma_i^*Y)$$

$$+(P_1H_5/(C_1(G_7H_5-C_2G_5^{\ 2})))$$

$$\psi_2(y)=\Sigma\ \gamma_i^*B_i^*EXP(\sigma_i^*Y)$$

$$-(C_2G_5P_1/(G_7H_5-C_2H_5^{\ 2})) \qquad (١٠)$$

$$\psi_3(y)=\Sigma\ \eta_i^*B_i^*EXP(\sigma_i^*Y) \qquad i=1,6$$

در روابط (١٠)، ضرایب B_i مشابه ضرایب A_i با اعمال شرایط مرزی به دست آمده و σ_i مقادیر ویژه مسأله در جهت Y و γ_i و

η_i به صورت زیر خواهند بود:

(۱۱)

$$\gamma_i=(C_1(G_1\sigma_i^2+G_7)(C_3G_6\sigma_i)-(G_4\sigma_i)(C_1C_2G_5)/U_i$$
$$\eta_i=((C_1C_2G_5^2)-(C_1(G_1\sigma_i^2+G_7)(C_4G_2\sigma_i^2+H_5)))/U_i$$

که در آن:

$$U_i=(G_4\sigma_i)(C_4G_2\sigma_i^2+H_5)-C_3G_5G_6\sigma_i \quad i=1,6$$

حال می توان مجدداً مانند روش فوق جوابهای بدست آمده در جهت Y را برای بهتر نمودن تقریب جوابهای جهت X بکار برده و جوابهای تقریب دوم X را برای به دست آوردن تقریب بعدی در جهت Y استفاده نمود. پس از چند بار تکرار (در اینجا سه بار) این عمل، ضرایب بدست آمده به سمت مقادیر ثابتی میل می کنند. در نهایت با جاگذاری آخرین جوابهای $\delta_i(x)$ و $\psi_i(y)$ در روابط (۳) مقادیر خیز و شیبها برای ورق به صورت توابع به شکل بسته محاسبه خواهند شد. با مشخص شدن خیز و شیبها و به کمک روابط (۱) می توان ممانها و نیروهای برشی عرضی را نیز به فرم بسته محاسبه نمود.

نتایج عددی

جل معادلات (٤) با حدس اولیه زیر برای توابع ψ_i شروع می‌شود:

$$\psi_1(y) = Sin\ (\pi y/L_y)$$
$$\psi_2(y) = L_y-y \qquad (۱۲)$$
$$\psi_3(y) = Cos\ (\pi y/L_y)$$

باتوجه به شکل توابع دیده می‌شود که، توابع ψ_2 و ψ_3 شرایط مرزی مسأله را ارضاء نمی کنند، عدم ارضاء شرط مرزی توسط حدس اولیه و نیز همگرایی سریع جوابها برای تابع ψ_2 در منحنیهای شکل (۱) نشان داده شده است.

از عوامل عمده تحلیل ورق، محاسبه خیز ماکزیمم و تنشها یا ممانهای ماکزیمم در آن است. این مقادیر برای ورق مربع شکل به ابعاد (5in * 40 * 40) و با مشخصات $\nu=0/3$، E=30 * 10e + 6Psi و q_o=10.0Psi محاسبه شده، و نتایج به دست آمده برای حالات زیر رسم گردیده است:

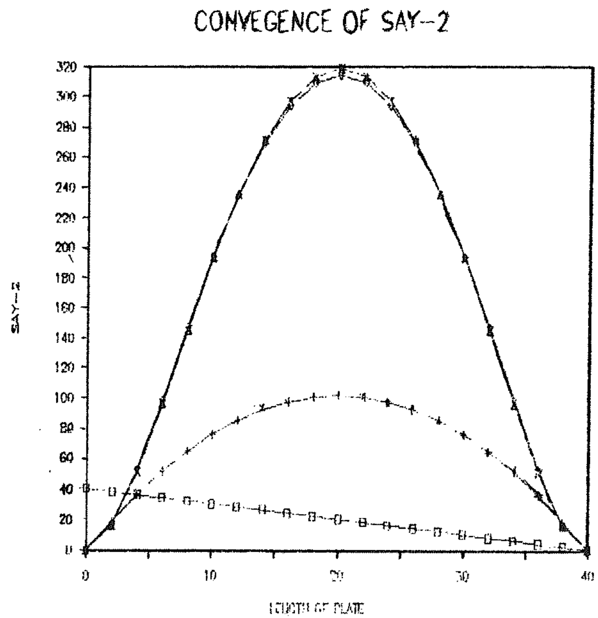
- خیز ورق در راستای $y=L_{y/2}$، در شکل (۲) نشان داده شده است.

- ممانهای M_{xx} و M_{yy} در راستای y=0. در شکل (۳) نشان داده شده است.

- توزیع ممانهای خمشی و پیچشی نرمالیزه شده در امتداد قطر ورق در شکل (٤) رسم شده است. در این شکل مقدار Mx_{max} =385/4 lb و My_{max} =385.4 و Mxy_{max}=117.3 lb است. به طوری که از شکلهای (۳) و (٤) مشخص است، مقدار ماکزیمم ممانهای خمشی در وسط اضلاع مربع بوده و مقدار آن 797.7 lb است.

برای بررسی اثرات تغییر فرمهای برشی در ورق و نیز مقدار خطای تئوری کلاسیک دو حالت متفاوت در ورق مورد مطالعه قرار گرفته است. در حالت اول با کم کردن ضخامت نسبی ورق (a/h=50) و در نتیجه حذف تقریبی اثر تغییر فرم برشی، مقدار ماکزیمم خیز و ممانهای خمشی محاسبه شده و همراه با نتایج تئوری کلاسیک [6]، در جدول (۱) ارائه گردیده است. به طوری که از نتایج پیداست، تئوری کلاسیک برای ضخامتهای کم از دقت خوبی برخوردار بوده و حداکثر اختلاف دو تئوری حدود 4.3% می باشد. و در حالت دوم خیز ماکزیمم نرمالیزه شده در ورق مربع شکل براساس دو تئوری کلاسیک و تئوری تغییر فرمهای برشی برحسب نسبت a/h محاسبه و در شکل (۵) رسم شده است. این منحنی، انطباق نتایج دو تئوری در ضخامتهای کم و خطای زیاد تئوری کلاسیک را در ضخامتهای زیاد بخوبی نشان می‌دهد. به طوری که از نتایج دیده می‌شود، تا نسبت a/h=10 تئوری کلاسیک حداکثر خطای 16.6% را نشان می دهد و درنتیجه تا این نسبت در تحلیل ورق قابل استفاده است و برای مقادیر a/h<10. باید نتایج تئوری کلاسیک اصلاح گردد.

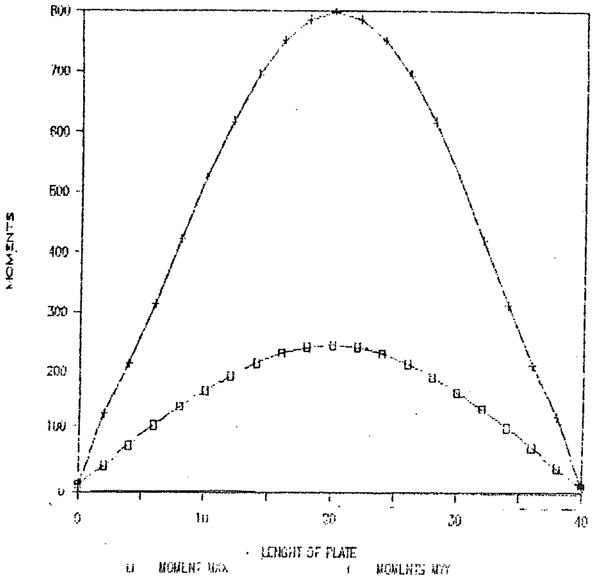
در خاتمه برای نشان دادن دقت این روش، مقدار خیز و تنش محوری نرمالیزه شده برای مرکز ورق مربع شکل با نسبت a/h=10. از این روش محاسبه و همراه با نتیجه روش المانهای محدود [7] در جدول (۲) ارائه شده است.



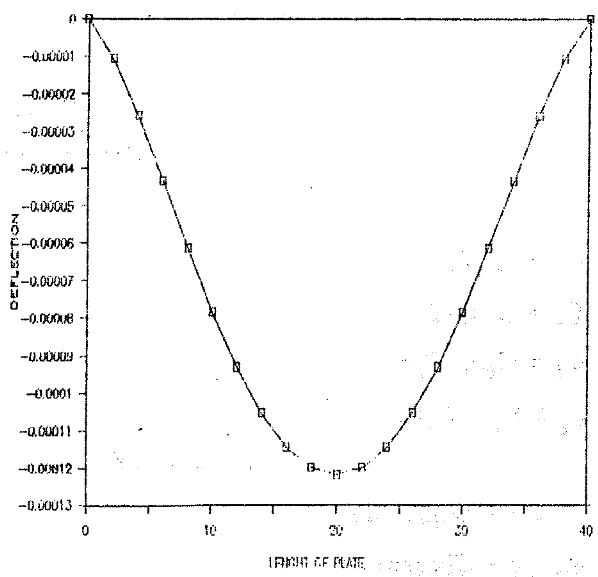
□ initial guess +first iteration

Δ second iteration * third iteration

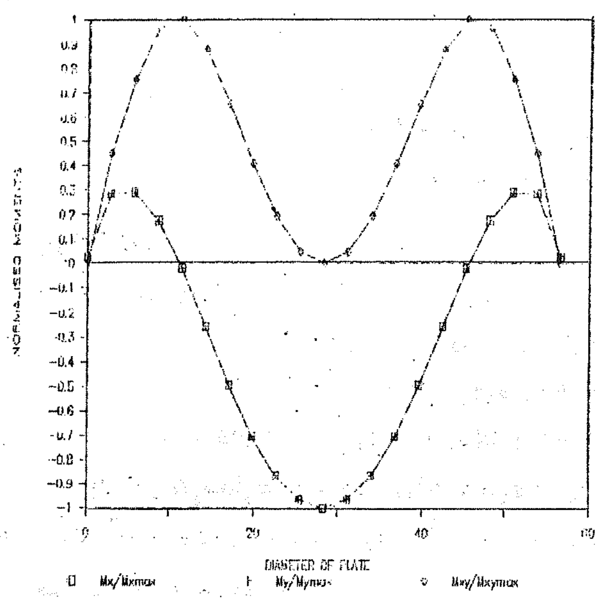
شکل ۱ -حدس اولیه و سه تکرار اول برای تابع $\psi_2(y)$



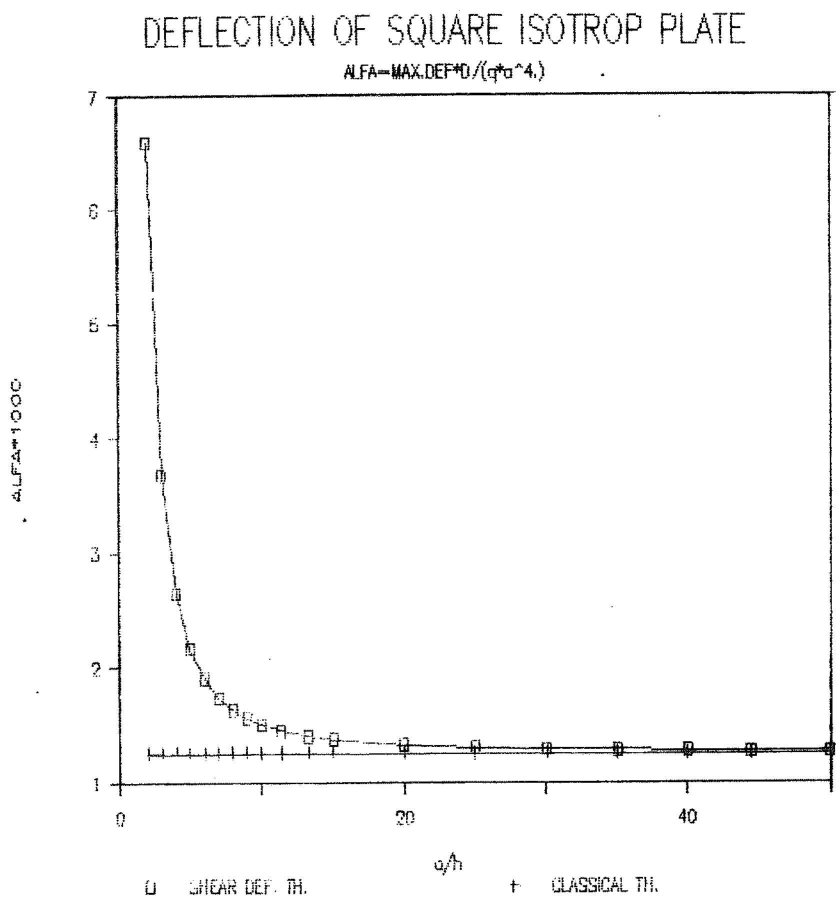
شکل ۳-منحنی ممانهای M_{xx} و M_{yy} در راستای .y=0 برای ورق مربع شکل براساس SDPT.



شکل ۲-منحنی خیز ورق مربع شکل در راستای $y=L_{y/2}$ براساس SDPT.



شکل ٤ -توزیع ممانهای خمشی و پیچشی در راستای قطر ورق مربع شکل براساس SDPT.



شکل ۵-خیز ماکزیمم ورق مربع براساس دو تئوری CPT و SDPT برحسب نسبت ضلع به ضخامت ورق.

پیوست:(۱)

ضرایب F_i در روابط (۵):

$F_i = \int \psi_i^2 \; dy \qquad i=1,3$

$F\,4 = \int \psi_1 \psi_2 \; dy$

$F_5 = \int \psi_1 (d\psi_3/dy)\; dy = -\int \psi_3 (d\psi_1/dy)\; dy$

$F_6 = \int \psi_2 (d\psi_3/dy)\; dy = -\int \psi_3 (d\psi_2/dy)\; dy$

$F_{6+i} = \int \psi i \,(d^2\psi_i/dy^2)\; dy = -\int (d\psi_i/dy)^2 \; dy \qquad i=1,3$

ضرایب C_i در روابط (٤) و (۵):

$C_1 = \sqrt{(L_x * L_y)}$

$C_2 = 1/(B*D)$

$C_3 = (1+\nu)/2$

$C_4 = (1-\nu)/2$

$C_5 = C_4F_8 - C_2F_2$

$C_6 = F_9 - C_2F_3$

ضرایب K_i در روابط (۵):

$K_1 = \int - B*q\psi_1 \; dy$

$K_2 = \int - C(dq/dx)\, \psi_2 \; dy$

$K_3 = \int - C(dq/dy)\, \psi_3 \; dy$

ضرایب G_i در روابط (۹):

$G_i = \int \delta_i^2 \ dx \qquad i=1,3$

$G_4 = \int \delta_1\delta_3 \ dx$

$G_5 = \int \delta_1(d\delta_2/dx) \ dx = -\int \delta_2(d\delta_1/dx) \ dx$

$G_6 = \int \delta_2(d\delta_3/dx) \ dx = -\int \delta_3(d\delta_2/dx) \ dx$

$G_{6+i} = \int \delta_i(d^2\delta_i/dx^2) \ dx = -\int (d\delta_i/dy)^2 \ dx \qquad i=1,3$

ضرایب H_i در روابط (۹):

$H_5 = G_8 - C_2G_2$

$H_6 = C_4G_9 - C_2G_3$

ضرایب P_i در روابط (۹):

$P_1 = \int -B^*q\delta_1 \ dx$

$P_2 = \int -C(dq/dx)\delta_2 \ dx$

$P_3 = \int -C(dq/dy)\delta_3 \ dx$

LX/LY	DEFLECTION $\overline{W}$ X=LX/2,Y=LY/2 TIMO.	PRESET	MOMENT $\overline{Mxx}$ Y=LY/2 X=0.0 TIMO.	PRESET	MOMENT $\overline{Myy}$ X=LX/2 Y=0.0 TIMO.	PRESET
1.	.00126	.00127	.0513	.0522	.0513	.0522
1.1	.00150	.00151	.0581	.0589	.0538	.0544
1.2	.00172	.00171	.0639	.0645	.0554	.0556
1.3	.00191	.00192	.0687	.0702	.0563	.0571
1.4	.00207	.00207	.0726	.0741	.0568	.0575
1.5	.00220	.00222	.0757	.0782	.0570	.0578
1.6	.00230	.00226	.0780	.0786	.0571	.0567
1.7	.00238	.00235	.0799	.0809	.0571	.0572
1.8	.00245	.00246	.0812	.0840	.0571	.0583
1.9	.00249	.00259	.0822	.0859	.0571	.0596
2.0	.00254	.00261	.0829	.0859	.0571	.0597

جدول ۱-مقایسه خیز و ممانهای ماکزیمم نرمالیزه شده در ورق گیردار با $\nu=0.3$ و
$a/h=50.0$ و $W=\bar{W}^*q_0^*a^4/D$ و $M_{xx}=\bar{M}_{xx}^*q_0^*a^2$ و $M_{yy}=\bar{M}_{yy}^*q_0^*a^2$

	DEFLECTION W	NORMAL STRESS Sx
Reddy.	0.1495	1.333
Present.	0.1502	1.352

جدول ۲-مقایسه خیز و تنش محوری در ورق مربع شکل گیردار
با $a/h=10.0$ و $\nu=0.3$ و $E=3^*e+7$. در این جدول
$\bar{W}=W(a/2,a/2)D^*100/qa^4$ و
$S_x=S_x(a/2,a/2,h/2)^*10h^2/qa^2$ است.

پاورقی

1. Extended Kantorovich method.(EKM)
2. Shear deformation plate theory. (SDPT)
3. Closed form solution.
4. Classical plate theory. (CPT)
5. Finite Element Formulation.
6. Iterative.

منابع :

[1]- A.D., Kerr, An extension of Kantorovich method. **Quart. appl. Math.** 26, 219-229 (1968).

[2]- A. D. Kerr & H. Alexander, An application of the extended Kantorovich method to the stress analysis of a clamped rectangular plate. **Acta Mech.** 6,180-196 (1968).

[3]- A. D. Kerr, An extended Kantorovich method for the solution of eigenvalue problems. **Int.J. Solids Struct.** 5,339-572 (1969).

[4]- S.J. Fariborz & A. Pourbohloul, Application of the extended Kantorovich method to the bending of variable thickness plates. **Comp. & struct.** 31, 957-965 (1989).

[5]- E. Reissner, Reflection on the throry of elastic plates. **Appl. Mech. Rev.** 38, 1453-1464 (1985).

[6]- S. Timoshenko & S. Woinowsky - Krieger, Theory of plates & Shells. pp. 202. McGraw-Hill, New York (1959).

[7]- J.N. Reddy, Applied functional analysis and variational methods in engineering. pp. 483. McGraw-Hill, N.Y. (1986).