یادداشتی بر معیارهای اندازه گیری نابرابری تیل

دکتر خسرو منطقی

دانشکده امور اقتصادی

وزارت امور اقتصادی و دارایی

چکیده:

تیل ([٦]) با استفاده از تابع انتروپی در تئوری آگاهی، دو معیار برای اندازه گیری نابرابری در توزیع درآمد معرفی نمود. این دو معیار را می توان با استفاده از معیارهای اندازه گیری آگاهی کولبک - لیبلر ([٤]) نیز بدست آورد. معیارهای معرفی شده توسط تیل دارای اکثر خواص مطلوب برای معیارهای اندازه گیری نابرابری درآمد می باشند ولی در عین حال زمانی که فردی با درآمد صفر به توزیع درآمد، اضافه گردد این معیارها دارای شکل بخصوصی می شوند.

A Note on Theil's Inequality Measures

Kh. Manteghi ph.D.

College of Economic Affairs

Ministry of Finance

ABSTRACT:

Theil ([6]) proposed two inequality measures of the income distribution which are derived from the notion of entropy function in information theory. These two measures also can be drived from the Kulbock-Leibler ([4]) measures of information. The measures proposed by Theil satisfy most of the properties which any good measure of income inequality should satisfy. However, Theil's measures face a pecular problem, when an individual with income zero is added to the income distribution.

مقدمه:

تیل ([٦]) از کاربرد تئوری آگاهی در اقتصاد استفاده نموده و از جمله تابع انتروپی را به عنوان معیار اندازه گیری نابرابری توزیع درآمد معرفی نموده است. معیارهای اندازه گیری نابرابری تیل دارای خاصیت تجزیه پذیری به نابرابری - درون گروه و نابرابری بین - گروه‌ها می باشد که این خود یکی از

شرایط مطلوب برای معیار اندازه گیری نابرابری توزیع درآمد در نظر گرفته شده است، آناند ([۲])، شوروکز ([۵])، فوستر ([۳]). معیارهای تیل می توانند با استفاده از معیارهای اندازه گیری آگاهی کولبک - لیبلر ([٤]) نتیجه گردند. در ادبیات معیارهای اندازه گیری نابرابری درآمد، خواص متعددی در نظر گرفته شده است که مطلوب بودن یا نبودن یک معیار توسط آنها بررسی می گردد و اساسیترین آنها بدین قرار می باشند. معیار اندازه گیری نابرابری درآمد باید: I) تابعی از تمام درآمدهای توزیع (بردار) درآمد باشد. II) معیار باید متقارن باشد. III) معیار باید مستقل از میانگین درآمد باشد. یعنی هر گاه درآمد تمام افراد را به یک نسبت افزایش یا کاهش دهیم، مقدار معیار ثابت باقی بماند. IV) معیار باید مستقل از افزایش متناسب تمام افراد جامعه باشد. V) معیار باید حداکثر باشد، هر گاه همه درآمد فقط به یک نفر از افراد جامعه تعلق داشته باشد و دیگر افراد دارای درآمد نباشند، معیار باید حداقل (مساوی صفر) باشد، هر گاه همه افراد دارای درآمد مساوی با میانگین درآمد باشند. VI) معیار باید دارای شرط قانون پیگو - دالتون** باشد، یعنی هر گاه انتقال درآمدی از فرد ثروتمند به فرد فقیرتر صورت پذیرد به گونه‌ای که مقدار انتقال آنقدر نباشد که رابطه آنان را تغییر دهد، معیار کاهش یابد یا بالعکس. VII) معیار باید دارای شرط تجزیه پذیری نیز باشد.

معیارهای تیل، همه خواص فوق را دارا بوده ولی در عین حال زمانی که فردی با درآمد صفر به جامعه افزوده می گردد، رفتار آنان بخصوص می گردد که در این مقاله به آن می پردازیم.

شاخصهای تیل:

تیل دو معیار اندازه گیری نابرابری توزیع درآمد را براساس تابع انتروپی در تئوری آگاهی معرفی نمود. فرض کنیم که p احتمال وقوع یک پیشامد قطعی باشد، سپس آگاهی h(p) که حاوی در واقع انجام این پیشامد است لگاریتم معکوس p است یعنی $h(p)=\log(1/p)$. حال اگر n احتمال پیشامد $1,...,n$ موجود و احتمالات مربوط به آنها مساوی با $\underset{\sim}{P}=(p_1,p_2,...,p_n)$ به طوری که $\sum_{i=1}^{n} p_i=1 \quad , \quad p_i \geq 0$

باشد، انتروپی یا آگاهی منتظره از این شرایط از رابطه زیر بدست می آید:

$$H(\underset{\sim}{P}) = \sum_{i=1}^{n} p_i\, h(p_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} p_i \log\left(\frac{1}{p_i}\right)$$

حال فرض کنیم که x_i/X سهم درآمد و $1,n$ سهم جمعیت i امین فرد و $i=1,...,n$ باشد، درنتیجه انتروپی حاصل از توزیع سهم درآمد عبارتست از:

$$H\left(\frac{x_1}{X}, \frac{x_2}{X}, ..., \frac{x_n}{X}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{X} \log \frac{X}{x_i}$$

که مانند یک معیار اندازه گیری برابری می باشد. H ماکزیمم خواهد بود هر گاه

$$\frac{x_i}{X} = \frac{1}{n} \qquad i = 1,...,n,$$

یعنی $H = \log n$.

پس اگر $(x_1/X,...,x_n/X)$ توزیع سهم درآمد یک گروه و $(1/n,...,1/n)$ توزیع سهم جمعیت آنها و

$$\bar{x} \quad , \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = X = n\bar{x}$$

میانگین درآمد و x_i درآمد متعلق به i امین فرد گروه باشد، تیل اولین شاخص خود را از رابطه زیر به دست می آورد:

$$T = \log n - H\left(\frac{x_1}{X}, \frac{x_2}{X}, ..., \frac{x_n}{X}\right)$$

$$= \log n + \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{X} \log \frac{x_i}{X}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{X} \log \frac{\frac{x_i}{X}}{\frac{1}{n}}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\bar{x}} \log \frac{x_i}{\bar{x}} \quad , \quad (X = n\bar{x})$$

با این فرض که $0 \log 0 = 0$.

شاخص دوم تیل مانند شاخص اول T می باشد، با این فرض که نقش سهم درآمد x_i/X و سهم جمعیت $1/n$ در فرمول

$$T = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{X} \log \frac{\frac{x_i}{X}}{\frac{1}{n}}$$

تعویض می گردد یعنی

$$L = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \log \frac{1/n}{x_i/X}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \log \frac{\bar{x}}{x_i} \quad , (X=n\bar{x})$$

تیل، T را به عنوان آگاهی منتظره از پیامی که سهام جمعیت $1/n$ را به سهام درآمد x_i/X تبدیل می‌سازد و L را به مفهوم آگاهی منتظره حاوی پیام غیرمستقیم که سهام درآمد را به عنوان احتمالات پیشین*** به سهام جمعیت به عنوان احتمالات پسین**** تبدیل می کند معرفی نمود.

استفاده از معیارهای اندازه گیری آگاهی کولبک - لیبلر برای بدست آودن معیارهای تیل:

در واقع معیارهای اندازه گیری نابرابری تیل می توانند از معیارهای اندازه گیری آگاهی کولبک - لیبلر ([٤]) حاصل گردند. اگر $q=(q_1,q_2,...,q)$ و $e=(e_1,...,e_n)$ دو توزیع احتمال باشند، معیارهای آگاهی کولبک - لیبلر برای دو توزیع احتمال q و e بقرار زیر می باشند

$$I(\underset{\sim}{q} ; \underset{\sim}{e}) = \sum_{i=1}^{n} q_i \log \frac{q_i}{e_i}$$

و

$$I(\underset{\sim}{e} ; \underset{\sim}{q}) = \sum_{i=1}^{n} e_i \log \frac{e_i}{q_i}$$

حال اگر فرض کنیم که توزیع سهم درآمد $(x_1/X,...,x_n/X)$ مساوی با q و توزیع سهم جمعیت $(1/n,...,1/n)$ مساوی با e_N باشد، خواهیم داشت

$$I(\underset{\sim}{q} ; \underset{\sim}{e}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{X} \log \frac{\frac{x_i}{\bar{x}}}{\frac{1}{n}}$$

$$= T$$

$$I(\underset{\sim}{e} ; \underset{\sim}{q}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \log \frac{\frac{1}{n}}{\frac{x_i}{\bar{x}}}$$

$$= L$$

معیارهای اندازه گیری آگاهی کولبک - لیبلر، طبیعتاً توابع «فاصله» نامتقارن بین توزیعهای $\underset{\sim}{q}$ و $\underset{\sim}{e}$ هستند.

بنابراین معیارهای اندازه گیری نابرابری تیل T و L براساس فاصله کولبک - لیبلر بین توزیع سهم درآمد $(x_1/X,...,x_n/X)$ و توزیع سهم مساوی درآمد $(1/n,...,1/n)$ بوده و هرچه فاصله بین این دو توزیع بیشتر گردد به همان اندازه نابرابری بیشتر خواهد شد.

نقاط ضعف جدی معیارهای تیل:

معیارهای اندازه گیری نابرابری تیل اکثر خواص برای مطلوب بودن را حایز هستند ولی در مواردی دارای مشکل جدی نیز می باشند.

اول اینکه معیار

$$L = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \log \frac{\frac{1}{n}}{\frac{x_i}{\bar{x}}}$$

برای توزیعهای درآمد که دارای اعضای با درآمد صفر هستند نمی‌تواند مورد استفاده قرار گیرد زیرا:

$$\log \left(\frac{\frac{1}{n}}{\frac{x_i}{X}}\right)$$

و درنتیجه L درصورتی که $x_i \to 0$ به منهای بینهایت میل می کند و سپس L غیرقابل محاسبه می گردد، آناند ([۲]).

معیار

$$T = \log n + \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{X} \log \frac{x_i}{X}$$

می تواند برای توزیعهایی که دارای اعضای با درآمد صفر هستند مورد استفاده قرار گیرد، زیرا هرگاه در توزیع درآمد $\underset{\sim}{x} = (x_1,...,x_n)$ درنتیجه $x_i \to 0$

$$\frac{x_i}{X} \log \frac{x_i}{X}$$

سپس

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{x} \log \frac{x_i}{x}$$

به سمت صفر میل می کند، امّا این مسأله ما را به یک مطلب بخصوص هدایت می کند و آن این است که اگر به توزیع درآمد $\underset{\sim}{x} = (x_1,...,x_n)$ فردی را با درآمد صفر اضافه نماییم تا توزیع درآمد $\underset{\sim}{x}' = (x_1,...,x_n,0)$ با n+1 نفر جمعیت و

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n+1} x'_i = X$$

حاصل گردد، برای معیار T خواهیم داشت:

$$T(x_1,...,x_n,0) - T(x_1,...,x_n) = \log \frac{n+1}{n} \quad A$$

هرگاه $0 \log 0 = 0$. مشاهده می گردد که $T(\underset{\sim}{x}') - T(\underset{\sim}{x})$ بستگی به درآمدهای x_i و x'_i از دو توزیع $\underset{\sim}{x}$ و $\underset{\sim}{x}'$ با کل درآمد X نداشته و فقط بستگی به اندازه جمعیت دو توزیع درآمد n و n+1 خواهد داشت ([۷]). همان طوری که از رابطه A می‌توان مشاهده نمود، هر اندازه که مقدار x_i و x'_i بزرگ و یا کوچک باشند هیچگونه تأثیری در $T(\underset{\sim}{x}') - T(\underset{\sim}{x})$ نخواهند داشت و مقدار این اختلاف ثابت خواهد بود. در حالی که می‌دانیم که برای مقادیر بسیار کوچک x_i و x'_i این تفاوت باید به صفر نزدیک گردد.

نتیجه گیری:

معیارهای اندازه گیری نابرابری تیل می توانند از معیارهای آگاهی کولبک - لیبلر حاصل گردند. معیارهای تیل دارای نقاط ضعفی می باشند که همان طوری که در مورد معیار L مشاهده گردید درصورتی که فردی با درآمد صفر در توزیع درآمد موجود باشد قابل محاسبه نمی باشد که این مسأله توسط آناند اشاره گردیده است و دیگر اینکه اختلاف $T(x_1,...,x_n,0) - T(x_1,...,x_n)$ کلاً بستگی به درآمدهای $x_1,...,x_n$ نداشته و مقدار این اختلاف ثابت خواهد بود. هرگاه درآمدهای $x_1,...,x_n$ تقریباً مساوی و کوچک و یا نشان دهنده یک توزیع بسیار نابرابر باشند، که این بنظر نویسنده یک مشکل جدی است، احتیاج به دقت خاصی دارد و یک معیار اندازه گیری نابرابری مطلوب باید از این ضعف نیز بری باشد.

پاورقی:

information theory -*

Pigou - Dalton -**

Prior Probabilities -***

Posterior Probabilities -****

منابع:

1- ADHIKARI,B.P. & D.D.JOSHI (1956), "Distance,discrimination et resume exhaustif", publ. Inst. statist. Univ. Paris, vol.5, fasc.2, 57-74.

2- ANAND, S. (1983), "Inequality and poverty in Malaysia:" Measurement and Decomposition" Oxford University Press.

3- Foster,J.E. (1983)," An Oxiomatic characterization of the Theil measures of income inequality",J.Econ.TH.,31,105-121.

4- Kullback,S.and R.A.Leibler (1951)," on Information and Sufficiency ", Ann. Math.Statist;2,79-86.

5- Shorrocks,A.F.(1980)," The class of additively decomposable inequality measures ",Econometrica,48,PP.613-625.

6- Theil, H. (1967), " Economic and information Theory",North Holland.

7- Manteghi, Kh. (1989), " Studies on the Measurement of Income Inequality " unpublished Ph.D.Thesis,I.S.S.Agra University Agra,INDIA.