

کنترل بهینه رباتها

قسمت سوم: کاربرد روش بهینه سازی در رباتیک

دکتر محسن بهرامی

دانشیار دانشکده مهندسی مکانیک دانشگاه صنعتی امیرکبیر

مهندس غلامرضا نخعی

آزمایشگاه تحقیقاتی ارتعاشات دانشگاه صنعتی امیرکبیر

چکیده:

در این قسمت، الگوریتمی که برای کنترل زمان بهینه سیستمهای دینامیکی با ورودی کراندار در قسمت دوم شرح داده شد، در مورد یک ربات 2R بکار می رود. معادلات حرکت ربات 2R همگیری و غیرخطی شدیدی داشته و از این لحاظ، آزمون خوبی برای الگوریتم بهینه سازی بشمار می رود. مسیر حرکت پنجه ربات مشخص بوده و در ابتدا و انتهای حرکت ربات ساکن است، کوپل موتورهای آن کراندار بوده و لزوماً برابر نیستند.

Optimal Control of Robotic Manipulator

Part III : Application

M.Bahrami, Assoc. Prof.

G.R.Nakhaie Jazar, Lecturer

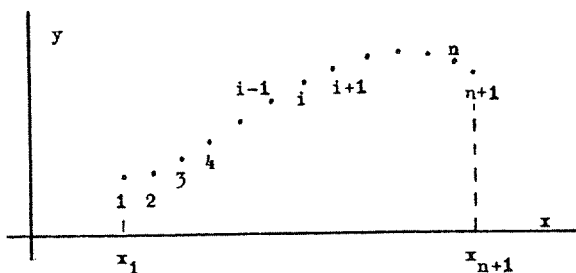
Mechanical Engineering Dept.

Amirkabir Univ. of Technology

ABSTRACT

This is the third part of the article on optimal control of robotic manipulators. In first part a literature review was presented, in second part a new algorithm was introduced, along with simple applications. In this last part the algorithm is used for time optimal control of a 2R robotic manipulator.

از حل سینماتیک وارون، زوایای پیکربندی θ, φ را نیز در تمام نقاط بیابیم.



شکل ۲- بیان مسیر حرکت پنجه ربات با $n + 1$ نقطه

اینک در معادلات حرکت ربات که بر حسب θ و φ مشتقات آنهاست تمامی مختصات θ_i و φ_i در نقاط روی مسیر مشخص شده است.

معادلات حرکت ربات $2R$ را از پیوست A بصورت

زیر می نویسیم

$$T = A \ddot{\theta} + B \ddot{\varphi} + C \dot{\theta} \dot{\varphi} + D \dot{\varphi}^2 + M \quad (1)$$

$$Q = E \ddot{\theta} + F \ddot{\varphi} + G \dot{\theta}^2 + N \quad (2)$$

که در آنها

$$A = A(\varphi) = m_1 l_1^2 + m_2 l_1^2 + m_2 l_2^2 \quad (3)$$

$$+ 2m_2 l_1 l_2 \cos \varphi$$

$$B = B(\varphi) = m_2 l_2^2 + m_2 l_1 l_2 \cos \varphi \quad (4)$$

$$C = C(\varphi) = -2m_2 l_1 l_2 \sin \varphi \quad (5)$$

$$D = D(\varphi) = -m_2 l_1 l_2 \sin \varphi \quad (6)$$

$$E = E(\varphi) = B \quad (7)$$

$$F = m_2 l_2^2 \quad (8)$$

$$G = G(\varphi) = -D \quad (9)$$

$$M = M(\theta, \varphi) = (m_1 + m_2) g l_1 \cos \theta \quad (10)$$

$$+ m_2 l_2 g \cos(\theta + \varphi)$$

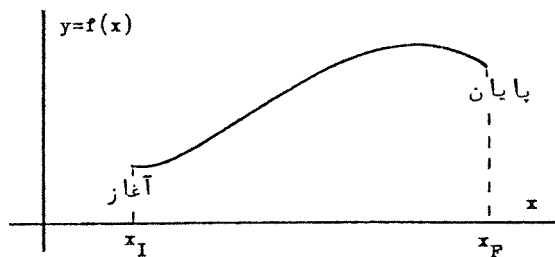
این سومین قسمت از نوشته مربوط به کنترل بهینه رباتهاست. در قسمت اول مروری بر کنترل بهینه در رباتیک ارائه گردید. در قسمت دوم، الگوریتم نوینی که توسط مؤلفین برای پاسخ به مسائل کنترل بهینه با ورودی کراندار ابداع گردیده است، تشریح شد و کارآیی آن روشن گردید. در این قسمت، الگوریتم گفته شده برای کنترل زمان بهینه یک ربات $2R$ به عنوان یک سیستم دینامیکی نمونه ارائه می شود. ربات $2R$ محدود کننده نبوده و الگوریتم گفته شده را می توان برای ربات های دیگر با هر درجه آزادی به کار برد.

۲) کاربرد روش بهینه سازی در رباتیک

در این بخش می خواهیم الگوریتم بهینه سازی گفته شده در قسمت دوم را در مورد یک ربات $2R$ به کار ببریم روشن خواهد شد که این شیوه کنترل می تواند برای هر سیستم مکانیکی دیگر، با درجات آزادی بیشتر نیز بکار رود.

روابط سینماتیک و دینامیک ربات $2R$ در پیوست A آورده شده است که خواننده نا آشنا می تواند به آن مراجعه کند. چنانکه در مقدمه گفته شده و در قسمت دوم مشخص شده است می خواهیم پنجه ربات را روی مسیری مشخص از نقطه ای به نقطه ای دیگر در کمترین زمان عبور دهیم. در قسمت قبل این عمل برای مسأله اساسی کنترل بنگ بنگ انجام گرفت.

اگر مسیر پنجه ربات در صفحه $x-y$ با تابع فرضی $y = f(x)$ مشخص شده باشد و نقطه آغاز و پایان حرکت بر آن معلوم باشد، در این صورت با تقسیم x_I تا x_F یا y_I تا y_F به n بازه مساوی یا نامساوی اما مشخص، مسیر گفته شده با $n + 1$ نقطه نشان داده خواهد شد (شکل ۱).



شکل ۱- مسیر پنجه ربات در صفحه $x-y$

با مشخص شدن x و y در تمام $n + 1$ نقطه مسیر، می توانیم

$$N = N(\theta, \varphi) = m_2 l_2 g \cos(\theta + \varphi) \quad (11)$$

معادلات حرکت پس از جایگذاری روابط $\ddot{\varphi}, \dot{\varphi}, \ddot{\theta}, \dot{\theta}$ از قسمت قبل چنین خواهند شد.

$$T_i = A_i \frac{4}{t_i^2 + t_{i-1}^2} \left(\frac{t_{i-1}}{t_i + t_{i-1}} \theta_{i+1} + \frac{t_i}{t_i + t_{i-1}} \theta_{i-1} - \theta_i \right) + B_i \frac{4}{t_i^2 + t_{i-1}^2} \left(\frac{t_{i-1}}{t_i + t_{i-1}} \varphi_{i+1} + \frac{t_i}{t_i + t_{i-1}} \varphi_{i-1} - \varphi_i \right) + C_i \frac{\theta_{i+1} - \theta_{i-1}}{t_i + t_{i-1}} \frac{\varphi_{i+1} - \varphi_{i-1}}{t_i + t_{i-1}} + D_i \left(\frac{\varphi_{i+1} - \varphi_{i-1}}{t_i + t_{i-1}} \right)^2 + M_i \quad (12)$$

$$Q_i = E \frac{4}{t_i^2 + t_{i-1}^2} \left(\frac{t_{i-1}}{t_i + t_{i-1}} \theta_{i+1} + \frac{t_i}{t_i + t_{i-1}} \theta_{i-1} - \theta_i \right) + F_i \frac{4}{t_i^2 + t_{i-1}^2} \left(\frac{t_i}{t_i + t_{i-1}} \varphi_{i+1} + \frac{t_i}{t_i + t_{i-1}} \varphi_{i-1} - \varphi_i \right) + C_i \frac{\theta_{i+1} - \theta_{i-1}}{t_i + t_{i-1}} \quad (13)$$

T_i و Q_i مقدار کوپل موتور اول و دوم در نقطه i هستند. چنانکه دیده می شود، هر یک از کوپلها در نقطه i به موقعیتهای زاویه ای بازوها در نقطه i و $i+1$ و $i-1$ و زمانهای t_i و t_{i-1} وابسته هستند.

ارتباط بین موقعیتهای θ و φ و کوپل های T و Q را با زمان در شکل ۳ نشان داده ایم.

نقطه ۱ نقطه شروع حرکت و نقطه $n+1$ نقطه پایان حرکت است. در هر نقطه i ($i = 1, 2, \dots, n+1$) موقعیتهای θ_i و φ_i مشخص و کوپلهای T_i و Q_i نامشخص هستند.

$$\theta_0 = \theta_2 \quad \varphi_0 = \varphi_2 \quad (14)$$

$$\theta_{n+2} = \theta_n \quad \varphi_{n+2} = \varphi_n \quad (15)$$

$$t_0 = t_1 \quad (16)$$

$$t_{n+1} = t_n \quad (17)$$

زیرا ربات در آغاز و پایان حرکت خود ساکن است. به این ترتیب معادلات حرکت ربات در نقاط آغاز و پایان چنین است.

$$T_1 = \frac{4}{2t_1^2} [A_1(\theta_2 - \theta_1) + B_1(\varphi_2 - \varphi_1)] + M_1 \quad (18)$$

$$Q_1 = \frac{4}{2t_1^2} [E_1(\theta_2 - \theta_1) + F_1(\varphi_2 - \varphi_1)] + N_1 \quad (19)$$

$$T_{n+1} = \frac{4}{2t_n^2} [A_{n+1}(\theta_n - \theta_{n+1}) + B_{n+1}(\varphi_n - \varphi_{n+1})] + M_{n+1} \quad (20)$$

$$Q_{n+1} = \frac{4}{2t_n^2} [E_{n+1}(\theta_n - \theta_{n+1}) + F_{n+1}(\varphi_n - \varphi_{n+1})] + N_{n+1} \quad (21)$$

فرض می کنیم قیدهای کنترل

$$T \leq T_{\max} \quad (22)$$

$$Q \leq Q_{\max} \quad (23)$$

بر مسئله حاکمند. از معادله (۱۸) مقدار کمینه t_1 که کوپل T_1 را به بیشینه خود T_{\max} میرساند، پیدا می شود. اینک با جایگذاری t_1 بدست آمده، در معادله (۱۹) مقدار Q_1 محاسبه می شود. اگر Q_1 بدست آمده بیشتر از Q_{\max} باشد در اینصورت t_1 را آنقدر می کاهشیم تا $Q_1 = Q_{\max}$ گردد سپس با زمان جدید t_1 ، از معادله (۱۸) مقدار T_1 به دست می آید و اگر Q_1 کمتر از Q_{\max} باشد زمان t_1 که T_1 را بیشینه کرده است، کمترین زمان ممکن یعنی زمان مطلوب خواهد بود.

توجه داریم که در هر نقطه از حرکت چون i مقدار کوپل اول به زمانهای پس و پیش آن یعنی t_i و t_{i-1} وابسته است. کوپل دوم نیز در نقطه i به همان بازه های زمانی t_i و t_{i-1} بستگی دارد (و چنانچه درجات آزادی، بیشتر باشد،

آغاز				پایان				
0	1	2	3	4	n-1	n	n+1	n+2
t_0	t_1	t_2	t_3	t_4	t_{n-1}	t_n	t_{n+1}	t_{n+2}
T_0	T_1	T_2	T_3			T_n	T_{n+1}	T_{n+2}
Q_0	Q_1	Q_2	Q_3			Q_n	Q_{n+1}	Q_{n+2}
θ_0	θ_1	θ_2	θ_3			θ_n	θ_{n+1}	θ_{n+2}
φ_0	φ_1	φ_2	φ_3			φ_n	φ_{n+1}	φ_{n+2}

شکل ۳- نمایش پارامترهای مختلف معادلات حرکت پاره پاره

بنابر بحثی که در قسمت دوم آمده است، موقعیتهای مجازی 0 و $n+2$ و همچنین زمانهای مجازی t_0 و t_{n+1} چنین خواهند بود.

کوپلهای سوم و چهارم و ... نیز در نقطه i تنها به همان بازه‌های زمانی t_i و t_{i-1} بستگی دارند) بنابراین در هر نقطه باید زمان را بگونه‌ای یابیم که یکی از کوپلها در بیشینه خود قرار داشته و بقیه آنها پایین تر از بیشینه خود باشند. با توجه به شکل ۶ قسمت دوم روشن است که امکان ندارد اگر مثلاً کوپل T_i در بیشینه خود بوده و کوپل Q_i کمتر از بیشینه خود باشد زمان را بگونه‌ای تغییر دهیم که کوپل Q_i در بیشینه خود واقع شده و کوپل T_i نیز کمتر از بیشینه خود باشد، زیرا برای آنکه کوپل Q_i افزایش یافته و به بیشینه خود برسد، باید زمان را بکاهیم و کاهش زمان باعث افزایش تمام کوپلها می‌شود. پس در یک نقطه تنها یکی از کوپلها می‌تواند بیشینه باشد و کوپلهای دیگر کمتر از بیشینه خود قرار گیرند. به عبارت دیگر ترتیب بزرگی کوپلها در هر نقطه ثابت بوده و تغییر نمی‌کند. پس در هر نقطه تنها باید بزرگترین کوپل را به بیشینه خود برسانیم زیرا رساندن هر کوپل دیگر به بیشینه خود موجب می‌گردد که کوپل بزرگتر، از بیشینه فراتر رود. البته این برای حالتی است که بیشینه تمام کوپلها مساوی باشد، در غیر اینصورت باید کوپلی را به بیشینه خود رساند که فاصله‌اش از بیشینه خود کمتر از فاصله کوپلهای دیگر از بیشینه‌های خود است.

این اصول در تمام نقاط، از جمله نقطه آغاز و نقطه پایان حرکت نیز برقرار است. همین اصل است که الگوریتم بهینه‌سازی را برای سیستمهای مکانیکی از هر درجه آزادی، کارآمد می‌سازد.

پس از آنکه زمان مرحله اول و زمان مرحله آخر یعنی t_1 و t_n از معادلات (۱۸) و (۱۹) و (۲۰) و (۲۱) به دست آمدند، روند رفت آغاز می‌شود. چون زمان t_1 بدست آمده است، در معادلات نقطه ۲ تنها زمان t_2 ناشناخته است. آنرا بگونه‌ای می‌یابیم که بار دیگر یکی از کوپلها بر بیشینه خود قرار داشته و کوپل (یا کوپلهای) دیگر کمتر از بیشینه خود باشند. ناگفته نماند که اگر چه در هر نقطه خاص تغییر بازه‌های زمانی ترتیب بزرگی کوپلها را تغییر نمی‌دهد، اما این ترتیب می‌تواند از یک نقطه به نقطه دیگر تغییر نماید. یعنی اگر در یک نقطه، مثلاً T بر بیشینه خود بوده و Q از بیشینه خود کمتر باشد، در حالت کلی دلیل ندارد که در نقطه بعدی نیز همین ترتیب حفظ گردد بلکه می‌تواند در نقطه بعدی Q بر بیشینه خود قرار داشته و T کمتر از بیشینه خود باشد. اما در هر صورت تمامی کوپلها تابعی پیوسته از زمان خواهند بود. پس از بدست آمدن t_2 از معادلات نقطه ۲ به سراغ نقطه ۳ رفته و t_3 را از معادلات آن می‌یابیم. این روند برای نقاط بعدی پیگیری شده و تا نقطه $n-1$ تمام زمانهای ناشناخته بدست می‌آیند زیرا t_n قبلاً از معادلات (۲۰) و (۲۱) با شرط سکون ربات در نقطه آخر $n+1$ بدست آمده است. اینک مقدار کوپلها در نقطه ماقبل پایانی n که در قید

زمانهای مشخص شده t_n و t_{n-1} است محاسبه می‌شوند. اگر این کوپلها بیش از بیشینه‌های خود باشند و قیدهای کنترل (۲۲) و (۲۳) را بشکنند، روند بازگشت آغاز می‌شود.

اینک در نقطه n زمان t_{n-1} را آنقدر می‌افزاییم تا تمام کوپلها جز یکی که بر کمینه خود قرار خواهد داشت، بیشتر از کمینه خود گردند. سپس مقدار کوپلها در نقطه قبلی یعنی $n-1$ یافته و چنانچه قیدهای کنترل شکسته شوند، بار دیگر زمان t_{n-2} را آنقدر می‌افزاییم تا تنها مقدار یک کوپل بر کمینه خود قرار داشته و بقیه بزرگتر از آن باشند. این روند تا رسیدن به نقطه‌ای که کوپلهای آن قیدهای کنترل را نشکنند ادامه می‌یابد. در این حالت است که روند بازگشت پایان یافته و کنترل بهینه انجام گرفته است زیرا در تمام نقاط، دست کم یکی از کوپلها بر بیشینه خود قرار داشته (کنترل بنگ‌بنگ) و کاهش هر یک از بازه‌های زمانی باعث می‌شود تا در یک نقطه، یکی از کوپلها از قید نیرو (یا گشتاور) فراتر رود.

بر اساس این روش یک برنامه کامپیوتری تهیه شده است که مسئله کنترل زمان بهینه هر ربات $2R$ را برای هر مسیر دلخواه حل می‌کند.

۳ نتیجه‌ها

بنابر الگوریتم بهینه‌سازی، یک برنامه کامپیوتری تهیه شده است که نتایج نمونه آن در پیوست آورده شده است. در اجرای اول برای حالت

$$m_1 = m_2 = 1$$

$$l_1 = l_2 = 1$$

$$T_{Max} = Q_{Max} = 100$$

elbowup بالاکنج

$$n = 20$$

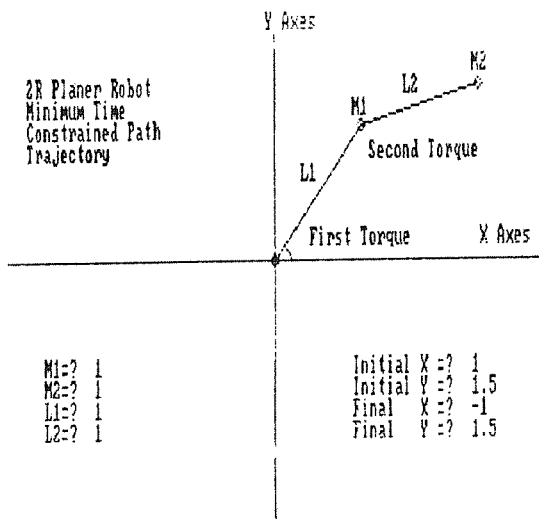
مسیر مستقیم

$$x_1 = 1 \quad y = 1.5$$

$$x_F = -1 \quad y_F = 1.5$$

انتخاب گردیده است.

— اجرای ۱ —



مهمترین خروجی برنامه پاسخهای گرافیکی آن است که هر شکل دارای توضیح کافی و مقیاس‌بندی مناسب می‌باشد. در نمودار کوپل - زمان دیده می‌شود که همواره یکی از کوپلهای بر بیشینه یا کمینه خود قرار گرفته است. چنانکه دیده میشود، کوپل موتور دوم (در این حرکت) همواره کمتر از بیشینه بوده و موتور اول همواره بر بیشینه خود عمل می‌کند.

پس از پایان یافتن کنترل بهینه، سرعت و شتاب در تمام نقاط مسیر قابل محاسبه است.

اجرای دوم برای یک حالت استثنایی در نظر گرفته شده است، حرکتی فرضی که در آن پنجه روی دایره‌ای به مرکز پیوند دوم دوران کند. در این حرکت بازوی اول بی حرکت مانده و تنها بازوی دوم حرکت می‌کند. روشن است که این به منزله صفر بودن کوپل موتور اول نیست. نمودار کوپل - زمان این حرکت نشان می‌دهد که گاهی موتور اول و گاهی موتور دوم بر بیشینه کوپل خود قرار می‌گیرند.

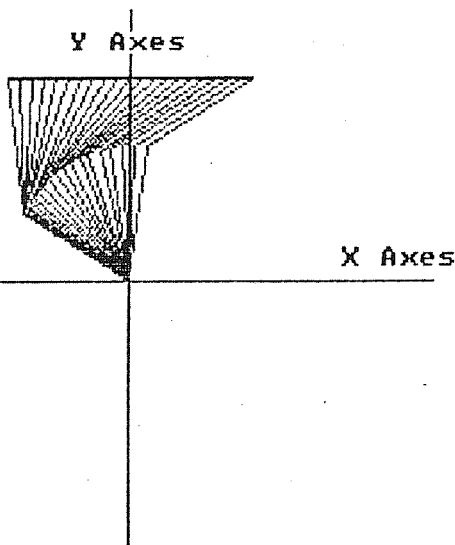
در صفحه اول هر اجرا، مشخصات ربات و همچنین مسیر حرکت پنجه نشان داده شده است. گشتاور بیشینه موتورهای ۱ و ۲ برابر و مساوی ۱۰۰ می‌باشند. اگر از سیستم واحدهای متریک استفاده شود، طولها بر حسب متر و جرمها بر حسب کیلوگرم و گشتاورها بر حسب نیوتن متر خواهند بود و زمان با ثانیه سنجیده می‌شود.

از نمودار گشتاور - زمان هر اجرا کارایی الگوریتم آشکار گشته و نشان می‌دهد که به سادگی می‌توان نقاط راه‌گزین را در کنترل ورودی کراندار مشخص نمود، پس از یافتن گشتاور موتورها در هر لحظه، می‌توان سرعت و شتاب پنجه ربات و همچنین سرعت و شتاب پیکربندی ربات را تعیین و رسم نمود.

(۴) پیشنهادها

شیوه پاره‌سازی معادلات دیفرانسیل و الگوریتم بهینه‌سازی ارائه شده در این نوشته، این امر را روشن می‌سازد که هر مسئله با دو مقدار مرزی را می‌توان به این روش کنترل بهینه نمود. در این راه کنترل انرژی بهینه رباتها و یا کنترل زمان یا انرژی بهینه انتقال مدار ماهواره، می‌تواند مورد آزمایش قرار گیرد.

گذشته از آن، در اینجا تنها قید مسیر و قید نیرو در نظر گرفته شد. افزودن قید سرعت به آنها مسایل عملی تری را حل می‌کند، چرا که وجود قید سرعت (مثلاً برای پنجه ربات) در حرکت رباتهای صنعتی فراوان به چشم می‌خورد.



DeltaX=-.1

Node	X Comp.	Y Comp.	position of endeffector
1	1	1.5	
2	.9000001	1.5	
3	.8	1.5	
4	.7000001	1.5	
5	.6	1.5	
6	.5	1.5	
7	.4	1.5	
8	.3	1.5	
9	.2	1.5	
10	.1	1.5	
11	-2.235174E-08	1.5	
12	-.1	1.5	
13	-.2	1.5	
14	-.3	1.5	
15	-.4	1.5	
16	-.5	1.5	
17	-.6	1.5	
18	-.7000001	1.5	
19	-.8	1.5	
20	-.9	1.5	
21	-.9999999	1.5	

Angels of 1th And 2nd Links

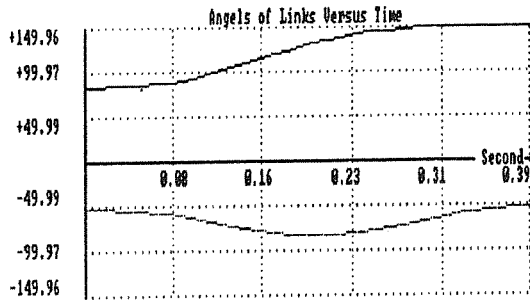
Node	Teta 1	Teta 2
1	TETA1= 81.96885	TETA2=-51.31781 Deg.
2	TETA1= 88.03352	TETA2=-57.99456 Deg.
3	TETA1= 93.71584	TETA2=-63.57666 Deg.
4	TETA1= 99.12531	TETA2=-68.28438 Deg.
5	TETA1= 104.3195	TETA2=-72.24184 Deg.
6	TETA1= 109.3263	TETA2=-75.52248 Deg.
7	TETA1= 114.1539	TETA2=-78.1705 Deg.
8	TETA1= 118.7962	TETA2=-80.21218 Deg.
9	TETA1= 123.2367	TETA2=-81.66272 Deg.
10	TETA1= 127.4512	TETA2=-82.53041 Deg.
11	TETA1= 131.4096	TETA2=-82.81925 Deg.
12	TETA1= 135.0793	TETA2=-82.53041 Deg.
13	TETA1= 138.426	TETA2=-81.66272 Deg.
14	TETA1= 141.416	TETA2=-80.21218 Deg.
15	TETA1= 144.0167	TETA2=-78.1705 Deg.
16	TETA1= 146.1962	TETA2=-75.52248 Deg.
17	TETA1= 147.9223	TETA2=-72.24184 Deg.
18	TETA1= 149.1591	TETA2=-68.28438 Deg.
19	TETA1= 149.8608	TETA2=-63.57666 Deg.
20	TETA1= 149.961	TETA2=-57.99456 Deg.
21	TETA1= 149.349	TETA2=-51.31782 Deg.

Node 1	Time For Node 1 To 2 = 7.660155E-02	First Torque 1 = 99.96815	Second Torque 1 = 27.34702
Node 2	Time For Node 2 To 3 = 2.013271E-02	First Torque 2 = 100.0389	Second Torque 2 = 26.07961
Node 3	Time For Node 3 To 4 = .017287	First Torque 3 = 99.99071	Second Torque 3 = 29.94519
Node 4	Time For Node 4 To 5 = 1.532997E-02	First Torque 4 = 99.98184	Second Torque 4 = 31.28573
Node 5	Time For Node 5 To 6 = 1.386707E-02	First Torque 5 = 99.98579	Second Torque 5 = 33.06995
Node 6	Time For Node 6 To 7 = 1.270789E-02	First Torque 6 = 99.99852	Second Torque 6 = 35.46115
Node 7	Time For Node 7 To 8 = 1.174793E-02	First Torque 7 = 100.0128	Second Torque 7 = 38.63782
Node 8	Time For Node 8 To 9 = 1.092469E-02	First Torque 8 = 99.98198	Second Torque 8 = 42.79172
Node 9	Time For Node 9 To 10 = 1.019763E-02	First Torque 9 = 100.0383	Second Torque 9 = 48.20081
Node 10	Time For Node 10 To 11 = 9.540895E-03	First Torque 10 = 100.0125	Second Torque 10 = 55.11883
Node 11	Time For Node 11 To 12 = 8.937134E-03	First Torque 11 = 99.98289	Second Torque 11 = 63.88143
Node 12	Time For Node 12 To 13 = 8.374145E-03	First Torque 12 = 100.0084	Second Torque 12 = 74.88894
Node 13	Time For Node 13 To 14 = 7.844115E-03	First Torque 13 = 99.96031	Second Torque 13 = 88.56721
Node 14	Time For Node 14 To 15 = 7.366576E-03	First Torque 14 = 87.71336	Second Torque 14 = 99.99756
Node 15	Time For Node 15 To 16 = 6.979431E-03	First Torque 15 = 46.66582	Second Torque 15 = 100.0223
Node 16	Time For Node 16 To 17 = 6.655947E-03	First Torque 16 = 5.108479	Second Torque 16 = 100.0231
Node 17	Time For Node 17 To 18 = 6.379095E-03	First Torque 17 = -38.65202	Second Torque 17 = 99.97876
Node 18	Time For Node 18 To 19 = 6.137035E-03	First Torque 18 = -87.7414	Second Torque 18 = 99.99812
Node 19	Time For Node 19 To 20 = 5.921739E-03	First Torque 19 = -149.2227	Second Torque 19 = 100.0153
Node 20	Time For Node 20 To 21 = 5.933593E-02	First Torque 20 = -154.9241	Second Torque 20 = -92.51362
Node 21	Total Time = .3222685	First Torque 21 = -100.0291	Second Torque 21 = -57.70638

Node 1	First Torque 1 = 99.96815
Time For Node 1 To 2 = 7.660155E-02	Second Torque 1 = 27.34702
Node 2	First Torque 2 = 100.0389
Time For Node 2 To 3 = 2.013271E-02	Second Torque 2 = 26.07961
Node 3	First Torque 3 = 99.99071
Time For Node 3 To 4 = .017287	Second Torque 3 = 29.94519
Node 4	First Torque 4 = 99.98184
Time For Node 4 To 5 = 1.532997E-02	Second Torque 4 = 31.28573
Node 5	First Torque 5 = 99.98579
Time For Node 5 To 6 = 1.386707E-02	Second Torque 5 = 33.06995
Node 6	First Torque 6 = 99.99852
Time For Node 6 To 7 = 1.270789E-02	Second Torque 6 = 35.46115
Node 7	First Torque 7 = 100.0128
Time For Node 7 To 8 = 1.174793E-02	Second Torque 7 = 38.63782
Node 8	First Torque 8 = 99.98198
Time For Node 8 To 9 = 1.092469E-02	Second Torque 8 = 42.79172
Node 9	First Torque 9 = -54.61408
Time For Node 9 To 10 = 1.103259E-02	Second Torque 9 = 2.01076
Node 10	First Torque 10 = -99.98516
Time For Node 10 To 11 = 1.141296E-02	Second Torque 10 = -11.94124
Node 11	First Torque 11 = -99.98851
Time For Node 11 To 12 = 1.181995E-02	Second Torque 11 = -12.84872
Node 12	First Torque 12 = -100.044
Time For Node 12 To 13 = 1.226087E-02	Second Torque 12 = -13.94965
Node 13	First Torque 13 = -99.96089
Time For Node 13 To 14 = 1.274646E-02	Second Torque 13 = -15.25616
Node 14	First Torque 14 = -100.0176
Time For Node 14 To 15 = 1.329626E-02	Second Torque 14 = -16.95248
Node 15	First Torque 15 = -100.0459
Time For Node 15 To 16 = 1.393841E-02	Second Torque 15 = -19.04785
Node 16	First Torque 16 = -99.96083
Time For Node 16 To 17 = 1.471454E-02	Second Torque 16 = -21.51839
Node 17	First Torque 17 = -100.0111
Time For Node 17 To 18 = 1.569745E-02	Second Torque 17 = -24.50861
Node 18	First Torque 18 = -99.99747
Time For Node 18 To 19 = 1.701203E-02	Second Torque 18 = -27.95122
Node 19	First Torque 19 = -100.0488
Time For Node 19 To 20 = 1.892174E-02	Second Torque 19 = -32.02369
Node 20	First Torque 20 = -99.97586
Time For Node 20 To 21 = 5.933593E-02	Second Torque 20 = -53.63716
Node 21	First Torque 21 = -100.0291
Total Time= .390788	Second Torque 21 = -57.70638

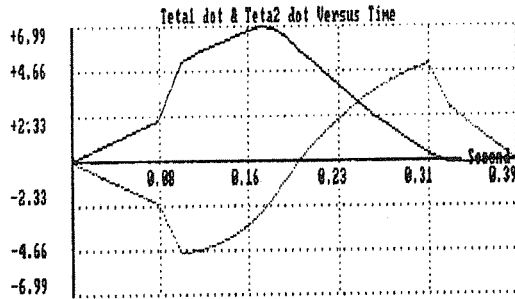
Maximum of Teta1 = 149.961
 Maximum of Teta2 = 82.81925
 Total time = .398788

Teta1
 Teta2



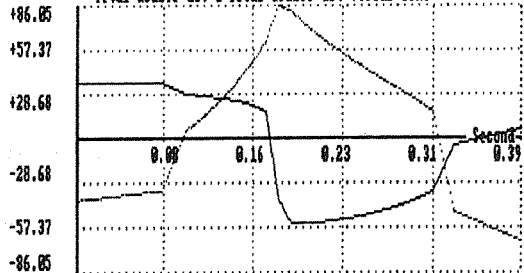
Maximum of Teta1 dot = 6.991967
 Maximum of Teta2 dot = 4.997845
 Total time = .398788

Teta1 dot
 Teta2 dot



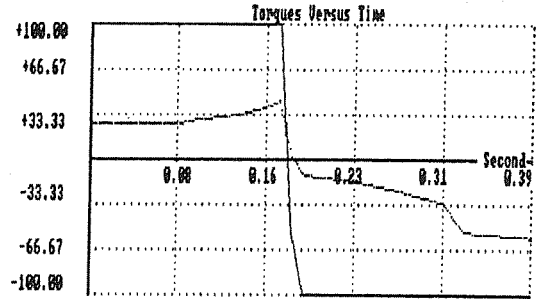
Maximum of Teta1 double dot = 54.64517
 Maximum of Teta2 double dot = 86.85819
 Total time = .398788

Teta1 double dot
 Teta2 double dot



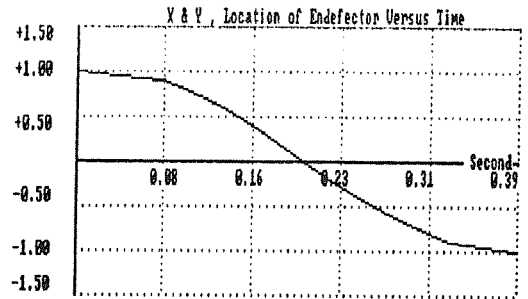
Max of first torque = 100
 Max of second torque = 100
 Total time = .398788

First Torque
 Second Torque



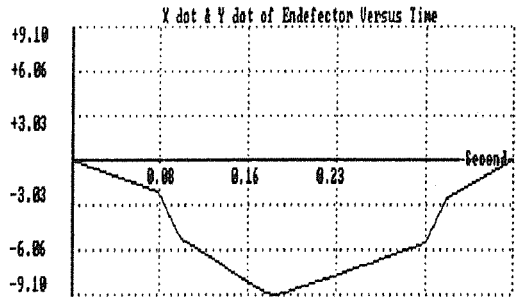
Maximum of X = 1
 Maximum of Y = 1.5
 Total time = .398788

X
 Y



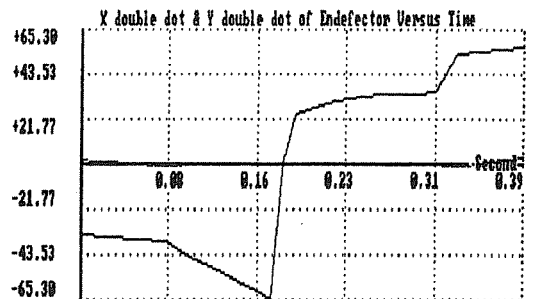
Maximum of X dot = 9.896653
 Maximum of Y dot = 1.229429E-02
 Total time = .398788

X dot
 Y dot



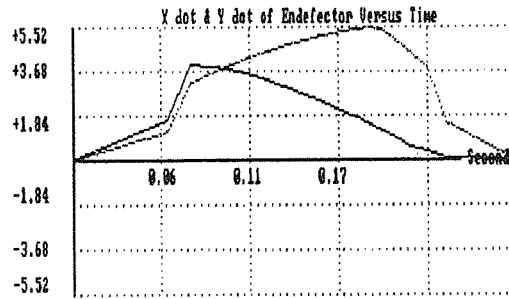
Maximum of X double dot = 65.38285
 Maximum of Y double dot = 3.18821
 Total time = .398788

X double dot
 Y double dot



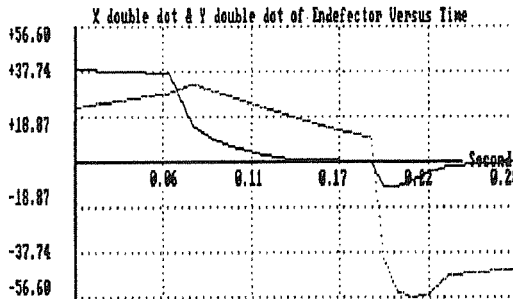
Maximum of X dot = 3.946884
 Maximum of Y dot = 5.517316
 Total time = .2798377

X dot
 Y dot



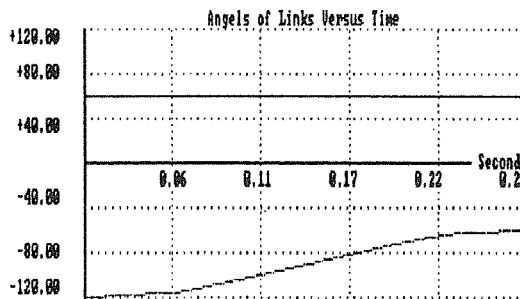
Maximum of X double dot = 39.87277
 Maximum of Y double dot = 56.60437
 Total time = .2798377

X double dot
 Y double dot



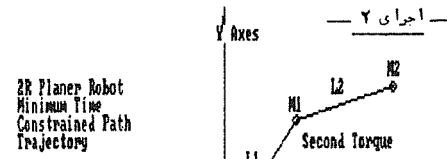
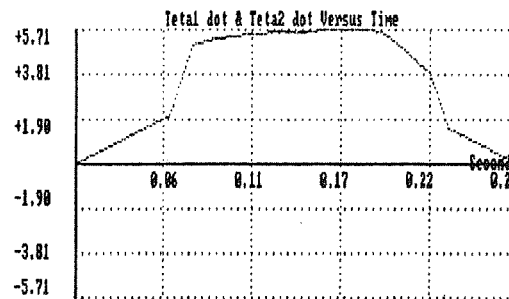
Maximum of Teta1 = 60.00001
 Maximum of Teta2 = 119.9971
 Total time = .2798377

Teta1
 Teta2



Maximum of Teta1 dot = 1.442434E-04
 Maximum of Teta2 dot = 5.71332
 Total time = .2798377

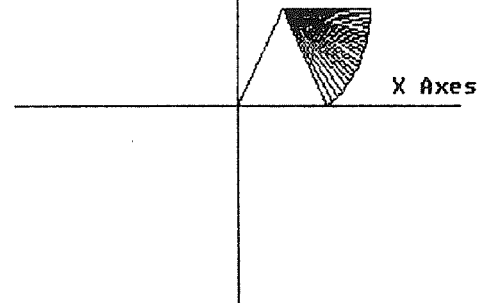
Teta1 dot
 Teta2 dot



M1=? 1
 M2=? 2
 L1=? 1
 L2=? 1

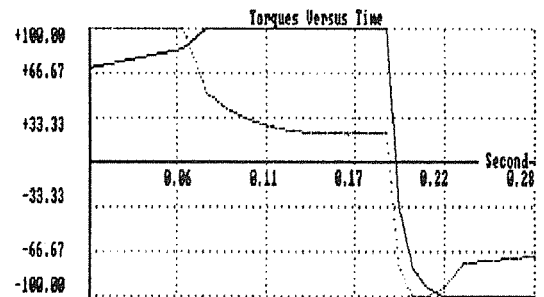
Initial X=? 1
 Initial Y=? 0
 Final X=? 1.5
 Final Y=? .866

Y Axes
 X Axes



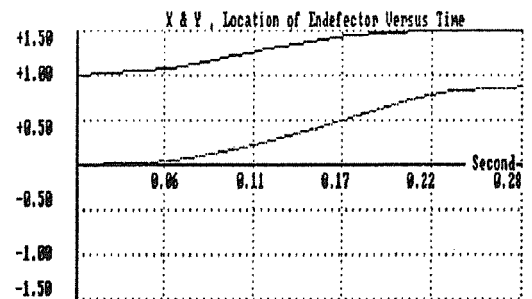
Max of first torque = 100
 Max of second torque = 100
 Total time = .2798377

First Torque
 Second Torque



Maximum of X = 1.5
 Maximum of Y = .8659999
 Total time = .2798377

X
 Y



به رابطه بین موقعیت، سرعت و شتاب بازوهای ربات گفته می‌شود. استاتیک، رابطه نیرو و گشتاور پیوندها و بازوهای ربات با نیرو و گشتاورهای خارجی است و دینامیک ارتباط بین سینماتیک و نیروهای لازم برای حرکت است. برای آنکه ربات حرکت کند باید موتور متصل به پیوندها، گشتاور وارد کنند. مسأله تعیین آنکه چه کوپلی باید در پیوندها وارد آید تا خط سیر مطلوب طی شود را دینامیک وارون می‌گویند. [۲ و ۳]

با توجه به شکل A-۱ روابط سینماتیکی ربات 2R چنین است:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 \cos \theta + l_2 \cos(\theta + \varphi) \\ l_1 \sin \theta + l_2 \sin(\theta + \varphi) \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \quad (25)$$

$$\begin{bmatrix} -l_1 \sin \theta - l_2 \sin(\theta + \varphi) & -l_2 \sin(\theta + \varphi) \\ l_1 \cos \theta + l_2 \cos(\theta + \varphi) & l_2 \cos(\theta + \varphi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\dot{\theta} + \dot{\varphi}) \cos \theta & \dot{\theta} \sin \theta \\ (\dot{\theta} + \dot{\varphi}) \sin \theta & -\dot{\theta} \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix} +$$

$$- \begin{bmatrix} l_1 \cos \theta & l_2 \cos(\theta + \varphi) \\ l_1 \sin \theta & l_2 \sin(\theta + \varphi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ (\dot{\theta} + \dot{\varphi})^2 \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$\cos \varphi = (x^2 + y^2 - l_1^2 - l_2^2) / 2l_1 l_2 = u \quad (27)$$

$$\varphi = \left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \frac{u}{\sqrt{1-u^2}} \right) \quad (28)$$

$$\theta = \tan^{-1} y/x - \tan^{-1} l_2 \sin \varphi / (l_1 + l_2 \cos \varphi) \quad (29)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} = \frac{1}{l_1 l_2 \sin \varphi} \begin{bmatrix} l_2 \cos(\theta + \varphi) \\ -l_1 \cos \theta - l_2 \cos(\theta + \varphi) \end{bmatrix} \quad (30)$$

$$\begin{bmatrix} l_2 \sin(\theta + \varphi) \\ -l_1 \sin \theta - l_2 \sin(\theta + \varphi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix}$$

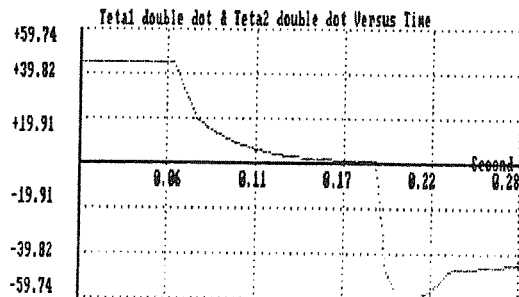
$$\begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\varphi} + \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \quad (31)$$

$$\frac{1}{l_1 l_2 \sin \varphi} \begin{bmatrix} l_2 \cos(\theta + \varphi) & l_2 \sin(\theta + \varphi) \\ -l_1 \cos \theta & -l_1 \sin \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} l_1 l_2 \cos \varphi & l_2 \\ -l_1^2 & -l_1 l_2 \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}^2 \\ (\dot{\theta} + \dot{\varphi})^2 \end{bmatrix}$$

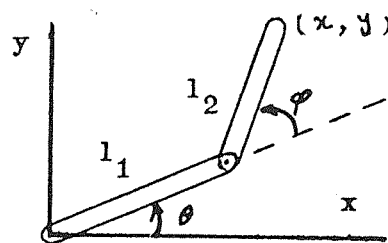
سطحی را که نقطه نهایی ربات یا پنجه آن بتواند به آن دست یابد فضای کاری گویند. فضای کاری صرف نظر از

Maximum of Total double dot = 7.369631E Total double dot
Maximum of Total double dot = 59.73689 Total double dot
Total time = .2798377



پیوست A- ربات 2R و سینماتیک و دینامیک آن

یک ربات دو بازو و دو مفصلی در شکل A-۱ نشان داده شده است. این ربات گرچه ظاهری ساده دارد، اما معادلات حرکت و کنترل آن در بین رباتهای صفحه‌ای از همه دشوارتر است. [۱]



شکل A-۱ ربات دو بازویی صفحه‌ای با دو پیوند چرخشی - موقعیت بازوها با دو زاویه θ و φ مشخص می‌شود. بازوها صلب و بی‌وزن فرض می‌شوند.

این ربات، دو مفصل چرخشی دارد که موقعیت آنها با زاویه‌های θ و φ بیان می‌گردد. محور دوران هر دو مفصل، موازی محور Z است. بنابراین، ربات تنها در صفحه x-y حرکت می‌کند. فرض می‌کنیم که جاذبه در جهت -y عمل می‌کند. l_1 و l_2 طول بازوهای صلب فرض شده ربات هستند.

سینماتیک، استاتیک و دینامیک

فهم سینماتیک، استاتیک و دینامیک یک ربات، اساس طراحی سیستم هدایت و کنترل آن است. سینماتیک

معادلات حرکت چنین بدست می آیند:

$$T = (m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2 + m_2 l_1^2 + 2m_2 l_1 l_2 \cos \varphi) \ddot{\theta} + (m_2 l_2^2 + m_2 l_1 l_2 \cos \varphi) \ddot{\varphi} - m_2 l_1 l_2 \sin \varphi \dot{\theta} \dot{\varphi} - m_2 l_2 \sin \varphi \dot{\varphi}^2 + (m_1 + m_2) g l_1 \cos \theta + m_2 l_2 g \cos(\theta + \varphi) \quad (32)$$

$$Q = m_2 l_2^2 \ddot{\varphi} + (m_2 l_2^2 + m_2 l_1 l_2 \cos \varphi) \ddot{\theta} + m_2 l_1 l_2 \sin \varphi \dot{\theta}^2 + m_2 l_2 g \cos(\theta + \varphi) \quad (33)$$

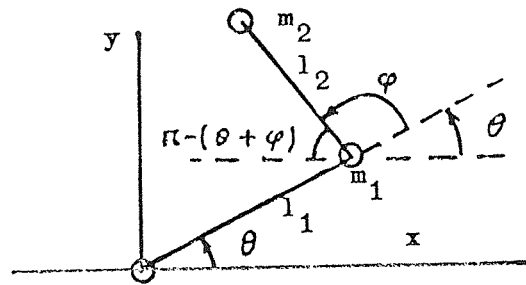
معادلات حرکت (32) و (33) را به صورت شبه ماتریسی نیز می نویسد:

$$\begin{bmatrix} T \\ Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 l_1^2 + m_2 l_1^2 + m_2 l_2^2 + 2m_2 l_1 l_2 \cos \varphi & 0 \\ m_2 l_2^2 + m_2 l_1 l_2 \cos \varphi & m_2 l_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -m_2 l_1 l_2 \sin \varphi \\ m_2 l_1 l_2 \sin \varphi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}^2 \\ \dot{\varphi}^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2m_2 l_1 l_2 \sin \varphi \\ 0 \end{bmatrix} \dot{\theta} \dot{\varphi} + \begin{bmatrix} (m_1 + m_2) g l_1 \cos \theta + m_2 l_2 g \cos(\theta + \varphi) \\ m_2 l_2 g \cos(\theta + \varphi) \end{bmatrix} \quad (34)$$

قیدهای مربوط به چگونگی ساخت ربات، یک قید سینماتیکی است. فضای کاری ربات 2R با بازوهای هم طول دیسکی به شعاع 2l است.

سوی نقاط مرزی، ربات 2R با دو آرایش مختلف می تواند به هر نقطه فضای کاری دست یابد. نقاط مرزی تنها با یک آرایش قابل دست یابی هستند. اگر بازوها هم طول باشند، دست یابی به مرکز با هر آرایشی ممکن است. برای آنکه پنجه ربات، نقطه ای از صفحه را با جهت گیری دلخواه اشغال کند باید از ربات 3R با سه بازو استفاده شود.

بدون آنکه فراگیر بودن مسأله لطمه ای ببیند، می توانیم بازوها را بدون جرم فرض کرده و جرمهای متمرکزی را در نوک بازوی اول و دوم در نظر بگیریم (شکل A-2) m_1 می تواند بیانگر جرم موتورگرداننده بازوی دوم و جرم دوم بیانگر جرم جسم حمل شوند باشد.



شکل A-2 مدل نمایشی ربات

با توجه به لاگرانژین این سیستم مکانیکی

$$L = \frac{1}{2} (m_1 l_1^2 + m_2 l_1^2 + m_2 l_2^2 + 2m_2 l_1 l_2 \cos \varphi) \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\varphi}^2 + (m_2 l_2^2 + m_2 l_1 l_2 \cos \varphi) \dot{\theta} \dot{\varphi} - (m_1 + m_2) g l_1 \sin \theta - m_2 l_2 g \sin(\theta + \varphi) \quad (31)$$

منابع :

- 1- Craig, J.,J., "Introduction to Robotics: Mechanics and Control", Addison Wesley, 1986.
- 2- MacMillan, W.D. "Dynamics of Rigid Bodies" Mc - Graw Hill, 1963
- 3- Sandor, G.N., Erdman, A.G., "Advanced Mechanisms Design", Vol.2, Printice Hall, 1984.
- 4- Vokobratovic, M., "Introduction to Robotics" Springer, 1989.
- 5- Von Karman, T, Biot, M.A "Mathematical Methods in Engineering: An Introduction to the Mathematical Treatment of Engineering Problems", Mc- Graw Hill Inc. 1940.