

# کاربرد آنالیز عددی جهت محاسبه توابع چگالی احتمال و توزیع جمعی<sup>۱</sup> زمان تکمیل یک شبکه<sup>۲</sup> و مقایسه آن با روشهای پرت کلاسیک و شبیه سازی مونت کارلو<sup>۳</sup>

محمد تقی فاطمی قمی

استادیار دانشکده مهندسی صنایع دانشگاه صنعتی امیرکبیر

سید سعید هاشمین

فارغ التحصیل کارشناسی ارشد رشته مهندسی صنایع دانشگاه آزاد اسلامی

چکیده:

در این مقاله الگوریتم پیشنهادی Ringer [۱۱] که توابع چگالی احتمال و توزیع جمعی زمان تکمیل یک شبکه را به صورت انتگرال های چند گانه ارائه می دهد، مورد بررسی قرار گرفته است. به دلیل اینکه در حالت کلی، جواب این انتگرال ها را به صورت تحلیلی نمی توان به دست آورد، ابتدا یک روش انتگرال گیری عددی به نام روش Boole [۱۴] معرفی و سپس برای حل انتگرال های دو گانه و در نهایت چند گانه تعمیم داده شده است. همچنین یک برنامه کامپیوتری براساس روش تعمیم یافته توسعه داده شده است. روش شبیه سازی مونت کارلو نیز به همراه برنامه کامپیوتری توسعه داده شده براساس این روش معرفی شده است. سه شبکه به عنوان مثال طرح شده اند و هر سه به ترتیب به وسیله روش های پرت کلاسیک، شبیه سازی مونت کارلو و آنالیز عددی انتگرال های چند گانه حاصل از الگوریتم Ringer مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته اند. در انتهای مقاله مقایساتی بین روشها صورت گرفته و نتایج حاصل از مقایسات ارائه شده اند.

## *Application of Numerical Analysis to estimate PDF and CDF of PERT-type network completion time and comparison with classical PERT and Monte Carlo Simulation*

M.T. Fatemi Ghomi, Ph. D.

Indus. Eng. Dept. Amirkabir Univ. of Tech.

S.S. Hashemin, M.Sc.

Indus. Eng. Dept. Islamic Azad Univ.

## Abstract:

In this paper, proposed algorithm by Ringer, which gives PDF and CDF of PERT-type network completion time in the form of multiple integrals, is fully discussed. Because these integrals, in the general case, are not analytically tractable, first a method of numerical integration called Boole's method is introduced, and it is generalized for the solution of double integrals and multiple integrals. Also, based on the generalized method, a computer program is developed.

Monte carlo simulation approach is introduced, and based on it, a computer program is developed.

Three different complex networks, as examples, are devised. The examples are fully studied, respectively, by approaches of classical PERT, Monte Carlo simulation, and numerical analysis of multiple integrals obtained using Ringer's algorithm.

Finally, comparisons are made between the approaches, and conclusions are presented.

## (۱) مقدمه

در زمینه بیان توابع توزیع زمان تکمیل شبکه در قالب انتگرالهای چندگانه تا کنون کارهای زیر انجام شده است: Martin [۹] روشی برای محاسبه تابع چگالی زمان تکمیل شبکه ارائه داده که در آن فرض شده توابع چگالی فعالیتها چند جمله‌ای هستند. وی الگوریتمی برای تبدیل یک شبکه شامل زیر شبکه‌هایی از چند فعالیت سری و موازی به یک فعالیت منفرد تشریح نموده که تابع چگالی آن فعالیت مربوط به زمان تکمیل شبکه است.

Wortham و Hartly [۶] طبقه بندی جدیدی از انواع شبکه‌ها تحت عنوان شبکه‌های متقاطع، غیر متقاطع و متقاطع چندگانه ارائه کردند و با تعریف زیر شبکه‌های پل و تستون شکل (۱) و Criss-Cross شکل (۲) و نحوه محاسبه تابع توزیع پل و تستون مدل Martin را اصلاح نمودند.

Ringer [۱۱] انواع زیر شبکه‌های پل و تستون دوگانه شکل (۳) و Criss-Cross را براساس جهت شاخه‌ها تعریف و نحوه محاسبه توابع توزیع مربوطه را نشان داد. وی همچنین مدل وابستگی بین زمانهای تکمیل فعالیتها را مطرح و روش محاسبه توزیع زمان تکمیل شبکه را براساس زیر شبکه‌های سری و موازی ارائه کرد [۱۰].

تاکنون هیچ پیشنهادی برای حل انتگرالهای چندگانه‌ای که توابع توزیع زمان تکمیل شبکه را بیان می‌کنند نشده است. در اینجا ابتدا بهترین الگوریتم از میان الگوریتمهای پیشنهادی را که توسط Ringer [۱۱] ارائه شده است، معرفی کرده ایم. سپس از آنجا که در حالت کلی این انتگرالها به صورت تحلیلی قابل حل نیستند یک روش انتگرال گیری عددی به نام روش Boole انتخاب و آنرا برای حل انتگرالهای دوگانه و چندگانه تعمیم داده ایم و یک برنامه

یکی از مهمترین اهداف تجزیه و تحلیل شبکه‌ها آگاهی یافتن از زمان تکمیل آنها است. وقتی زمان تکمیل فعالیتهای تشکیل دهنده شبکه قطعی باشند روش مسیر بحرانی از کارآیی بالایی برخوردار است، لیکن وقتی زمان تکمیل فعالیتها متغیر تصادفی باشد تجزیه و تحلیل شبکه بسیار پیچیده می‌شود. در این حالت اغلب هدف محاسبه تابع توزیع زمان تکمیل شبکه برحسب توابع توزیع زمانهای تکمیل فعالیتها خواهد بود. تا کنون برای یافتن توابع توزیع زمان تکمیل شبکه‌هایی که زمان تکمیل فعالیتهای آنها احتمالی باشند روشهای متعددی پیشنهاد شده اند که قدیمی ترین آنها همان PERT کلاسیک است که براساس قضیه حد مرکزی بنا شده است. برخی برای شبکه‌های ساده و توزیع‌های نمایی حل‌های تحلیلی ارائه داده‌اند [۶]. عده‌ای هم یافتن توزیعات حدی [۷ و ۸] و گروهی نیز شبیه سازی مونت کارلو را پیشنهاد کرده‌اند [۲ و ۵]. تعدادی نیز به یافتن تخمینهای نا اریب از زمان تکمیل شبکه در مقایسه با PERT کلاسیک و نقاط ضعف آن پرداخته‌اند [۱ و ۳ و ۴]. عده‌ای هم با استفاده از زنجیره مارکف روشی ابداع کرده‌اند که تابع توزیع زمان تکمیل شبکه را برای حالتی که زمان تکمیل فعالیتها نمایی باشند ارائه می‌دهد [۱۲]. برخی نیز توزیع احتمالی زمان هر فعالیت را گاما فرض کرده و پارامترهای آنرا تخمین زده‌اند، سپس مسیر بحرانی پروژه به صورت احتمالی محاسبه شده و توزیع احتمالی زمان کل پروژه به دست آمده است. بعد توزیع گاما به عنوان توزیع پیشین زمان هر فعالیت در نظر گرفته شده و با داشتن مقدار مشاهده شده زمان آن فعالیت توزیع پیشین آن به دست آمده است. مجدداً مسیر بحرانی پروژه محاسبه شده و توزیع احتمالی زمان کل پروژه به دست آمده است [۱۳].

در نتیجه می توان نوشت:  $F_p(a)$

$$a = \text{Min} \begin{cases} t - \sum_{j \neq p} a_{gj} t_j \\ t - \sum_{j \neq p} a_{hj} t_j \end{cases} \quad \text{که } a \text{ به صورت زیر تعریف می شود:}$$

مرحله ۴) فرض کنید  $S$  مجموعه مشخص شده در مرحله ۲ به اضافه اعداد  $g$  و  $h$  به کار رفته در مرحله ۳ باشد. همچنین فرض کنید که  $R$  مجموعه معین شده در مرحله ۲ به اضافه اعداد  $p$  به کار رفته در مرحله ۳ باشد. اگر ستونهای دیگری نیز وجود دارند  $p'$  را طوری بگیرید که شرایط مرحله ۳ ارضا شود و آن مرحله را تکرار کنید و به مرحله بعدی بروید. مرحله ۵) اگر ما برای همه ستونهایی که در  $R$  نیستند و یک عنصر غیر صفر در سطری وابسته به یک عنصر از  $S$  دارند این عملیات را انجام داده باشیم توقف می کنیم. اگر ستونی باقی مانده باشد آن را  $q$  می نامیم. آنگاه خواهیم داشت:  $F_q(b)$

به ازای تمام  $i$  هایی که:  $a_{iq} \neq 0$

$$b = \text{Min} \left\{ t - \sum_{j \neq q} a_{ij} t_j \right\}$$

پس از پایان مراحل خواهیم داشت:

حاصل ضرب توابع تولید شده در مراحل مختلف الگوریتم برابر است با:

$$\text{Pr} \{ \text{Max } u_i \leq t \mid \text{ها } t_j \} = F(t \mid \text{ها } t_j)$$

که  $t$  متغیر تصادفی زمان تکمیل شبکه است و  $R \notin j$ . برای محاسبه  $\text{Pr} \{ \text{Max } u_i \leq t \} = F(t)$ ،  $\int_0^t f_j(t_j) dt_j$  را در ضرب کرده روی متغیرهای  $t_j$  به ازای  $j \in R$  انتگرال گیری کنید. به سهولت روشن است که  $f(t \mid \text{ها } t_j)$  و در نتیجه  $f(t)$  نیز قابل محاسبه می باشد.

### ۳) رابطه بین بعد انتگرال نهایی به دست آمده، پیچیدگی تابع زیر انتگرال و خصوصیات شبکه

با توجه به الگوریتم Ringer مشخص است که عدد اصلی مجموعه  $S$  تعداد آرگومانهای توابع زیر انتگرال را معین می کند که این تعداد باید همواره برابر  $m$  یعنی تعداد مسیرهای شبکه باشد. از طرفی هر قدر عدد اصلی مجموعه  $R$  بزرگتر باشد بعد انتگرال به دست آمده کوچکتر می باشد. بیان ساده تر این عبارت بدین صورت است که اگر شبکه به گونه ای باشد که برای هر مسیر آن بتوان فعالیت یافت که

کامپیوتری براساس روش تعمیم یافته نوشته ایم. سه شبکه به عنوان مثال طرح و توابع توزیع زمان تکمیل آنها را به وسیله برنامه کامپیوتری محاسبه کرده ایم. همچنین ضمن معرفی روش شبیه سازی مونت کارلو و برنامه کامپیوتری توسعه داده شده براساس آن این سه شبکه را توسط برنامه کامپیوتری فوق الذکر مورد تجزیه و تحلیل قرار داده و در نهایت PERT کلاسیک را نیز در مورد این سه مثال به کار برده ایم. در انتها روشها را مقایسه و نتایجی ارائه داده ایم.

### ۲) الگوریتم Ringer

فرض کنید که شبکه ای دارای  $n$  فعالیت و  $m$  مسیر باشد. زمان تکمیل از طریق  $i$  امین مسیر به صورت زیر نشان داده می شود:

$$u_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} t_j$$

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{اگر فعالیت } j \text{ روی مسیر } i \text{ باشد} \\ 0 & \text{اگر فعالیت } j \text{ روی مسیر } i \text{ نباشد} \end{cases}$$

سپس ماتریس  $A_{m \times n}$  را که  $a_{ij}$  ها مؤلفه های آن هستند تشکیل دهید.

مرحله ۱) پیدا کردن یک ستون از  $A$  به نام ستون  $r$  به طوری که به ازای  $S$ ،  $a_{sr} = 1$  و به ازای  $i \neq s$ ،  $a_{ir} = 0$  سپس خواهیم داشت:

$$F_r(t - \sum_{j \neq r} a_{sj} t_j)$$

مرحله ۲) فرض کنید که  $R$  یک مجموعه از اعداد  $r$  بوده و همچنین  $S$  مجموعه ای از اعداد به کار رفته در مرحله ۱ باشد. اگر ستون دیگری وجود دارد آنرا  $r'$  نامیده و فرض می کنیم:

$$a_{s'r'} = 1, \quad a_{i'r'} = 0 \quad s' \in S, \quad i' \neq s'$$

سپس مرحله ۱ را تکرار کنید و  $r'$  و  $s'$  را مانند  $r$  و  $s$  به کار برید. مراحل ۱ و ۲ را تا جایی که ممکن است ادامه دهید. اگر ستونی باقی ماند که در شرایط مراحل ۱ و ۲ صدق نکرد آنگاه به مرحله ۳ بروید.

مرحله ۳)  $p$  را طوری بگیرید که  $p \in R$  و به ازای  $g, h \in S$  داشته باشیم:

$$a_{gp} = 1, \quad a_{hp} = 1, \quad a_{ip} = 0 \quad i \neq h, g$$

$$F(t) = \int_0^t \int_0^{t_1} F_3(t-t_2) F_4(t-t_1-t_2) F_5(t-t_1) f_1(t_1) f_2(t_2) dt_1 dt_2$$

افزایش مسیرهایی از شبکه که نمی توان برای آنها فعالیتی یافت که منحصر به آن مسیرها باشد سبب می شود که بعد انتگرالهای نهایی به دست آمده افزایش ولی تعداد توابع شرکت کننده در تشکیل تابع  $F(t | t_j), \forall j \in R$  کاهش یابد.

روشن است که افزایش بعد انتگرال به مراتب بیشتر از بزرگتر شدن تابع زیر انتگرال محاسبه را مشکل تر و پیچیده تر می کند.

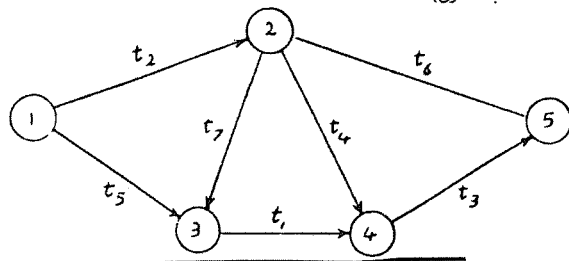
الگوریتم Ringer به گونه ای بنا شده است که ابتدا سعی می کند فعالیتهایی را بیابد که منحصر به یک مسیر هستند. در هر مرحله که دیگر نتوان چنین فعالیتی یافت، فعالیتهایی الویت پیدا می کنند که حداکثر به دو مسیر تعلق داشته باشند. هر بار که مجبور می شویم فعالیتی پیدا کنیم که به دو مسیر تعلق داشته باشد (مراحل ۳ و ۴ الگوریتم) بعد انتگرال را از کمترین مقدار ممکن خود یعنی  $(n-m)$  به اندازه یک افزایش می دهیم. به همین ترتیب اگر به جایی برسیم که دیگر فعالیتی که حداکثر به دو مسیر تعلق داشته باشد یافت نشود و مجبور باشیم به دنبال فعالیتی بگردیم که حداکثر بین ۳ مسیر یا بیشتر مثلاً  $K$  مسیر مشترک باشد، در این صورت به ناچار بعد انتگرال به اندازه ۲ یا  $K-1$  افزایش خواهد یافت. لذا برای شبکه های مختلفی که همه دارای  $m$  مسیر و  $n$  فعالیت باشند هر قدر تعداد مسیرهایی که می توان برای آنها فعالیتی یافت که منحصر به آن مسیر بوده زیاد باشد به عبارت دیگر هر قدر تفاضل عدد اصلی مجموعه  $R$  و  $m$  کوچکتر باشد، بعد انتگرال کمتر می شود و الگوریتم Ringer کارایی بیشتری پیدا می کند.

#### ۴) محاسبه توابع توزیع زمان تکمیل چند شبکه با استفاده

##### از الگوریتم Ringer

در این قسمت توابع توزیع جمعی و چگالی زمان تکمیل سه شبکه با استفاده از الگوریتم Ringer به دست آمده اند.

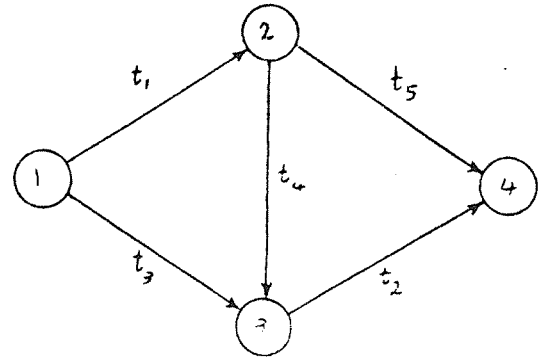
(شبکه اول)



شکل (۲)

به هیچ مسیر دیگری متعلق نباشد در این صورت عدد اصلی مجموعه  $R$  برابر  $m$  بوده و بعد انتگرال نهایی به دست آمده کمترین مقدار ممکن یعنی  $n-m$  را خواهد داشت. اما در این حالت تابع  $F(t | t_j), \forall j \in R$  حاصل ضرب  $m$  تابع خواهد بود که بیشترین تعداد تابعی است که می تواند در تشکیل تابع فوق دخالت نماید.

شبکه زیر نمونه ای از حالت فوق الذکر است:



شکل (۱)

در این شبکه  $n=5$  و  $m=3$  است و چون برای هر مسیر می توان فعالیتی یافت که فقط منحصر به آن مسیر باشد، بنابراین بعد انتگرالی که تابع توزیع زمان تکمیل شبکه را بیان می کند حداقل بعد ممکن یعنی  $n-m=5-3=2$  خواهد بود. زمان تکمیل برای مسیرهای مختلف به صورت زیر است:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \\ t_5 \end{bmatrix}$$

الگوریتم Ringer با اجرای مراحل ۱، ۲ و ۱ به ترتیب به ازای  $r=3$  و  $r'=4$  و  $r=5$  کامل می شود و نتیجه به صورت زیر خواهد بود:

$$R = \{3, 4, 5\} \quad S = \{1, 2, 3\}$$

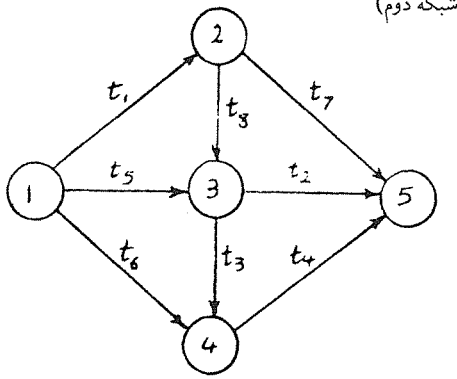
$$F(t | t_1, t_2) = F_3(t-t_2) F_4(t-t_1-t_2) F_5(t-t_1)$$

بنابراین  $F(t)$  به صورت زیر خواهد بود:

برای این شبکه  $m=4$  و  $n=7$  است.

زمان تکمیل برای مسیرهای مختلف به صورت زیر

است:



شکل (۳)

زیر است:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \\ t_5 \\ t_6 \\ t_7 \end{bmatrix}$$

با توجه به ماتریس فوق روشن است که الگوریتم Ringer با اجرای مراحل ۱، ۲، ۳ و ۴ به ترتیب به ازای  $r=4$ ،  $r=5$ ،  $r=6$  و  $r=7$  کامل می شود و نتیجه به صورت زیر خواهد بود:

$$R = \{4,5,6,7\} \quad S = \{1,2,3,4\}$$

$$F(t | t_1, t_2, t_3) = F_4(t-t_2-t_3) F_5(t-t_1-t_3) F_7(t-t_2-t_1-t_3) F_6(t-t_2)$$

بامشتق گیری می توانیم  $f(t | t_1, t_2, t_3)$  را به دست آوریم.

$$\begin{aligned} f(t | t_1, t_2, t_3) &= \frac{dF(t | t_1, t_2, t_3)}{dt} \\ &= f_4(t-t_2-t_3) F_5(t-t_1-t_3) F_7(t-t_1-t_2-t_3) F_6(t-t_2) \\ &+ F_4(t-t_2-t_3) f_5(t-t_1-t_3) F_7(t-t_1-t_2-t_3) F_6(t-t_2) \\ &+ F_4(t-t_2-t_3) F_5(t-t_1-t_3) f_7(t-t_1-t_2-t_3) F_6(t-t_2) \\ &+ F_4(t-t_2-t_3) F_5(t-t_1-t_3) F_7(t-t_1-t_2-t_3) f_6(t-t_2) \end{aligned}$$

بنابراین  $F(t)$  و  $f(t)$  به صورت زیر به دست می آیند:

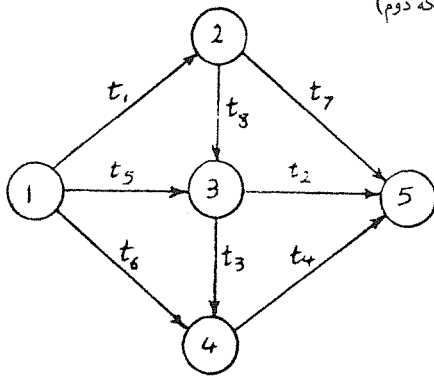
$$F(t) = \int_0^t \int_0^t \int_0^t F(t | t_1, t_2, t_3) f_1(t_1) f_2(t_2) f_3(t_3) dt_1 dt_2 dt_3$$

$$f(t) = \int_0^t \int_0^t \int_0^t f(t | t_1, t_2, t_3) f_1(t_1) f_2(t_2) f_3(t_3) dt_1 dt_2 dt_3$$

در این شبکه  $m=6$  و  $n=8$  است.

زمان تکمیل شبکه برای مسیرهای مختلف به صورت

شبکه دوم)



شکل (۳)

زیر است:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \\ t_5 \\ t_6 \\ t_7 \\ t_8 \end{bmatrix}$$

با توجه به ماتریس فوق الگوریتم Ringer با اجرای مراحل ۱ و ۲ به ترتیب به ازای  $r=6$  و  $r=7$  و مراحل ۳ و ۴ به ترتیب به ازای  $p=5$  و  $p=8$  کامل می شود و نتیجه به صورت زیر خواهد بود:

$$R = \{5,6,7,8\} \quad S = \{1,2,3,4,5,6\}$$

$$F(t | t_1, t_2, t_3, t_4) = F_8(a) F_5(b) F_6(t-t_4) F_7(t-t_1)$$

که  $a$  و  $b$  به صورت زیر هستند:

$$a = \text{Min}(t-t_1-t_2, t-t_1-t_3-t_4)$$

$$b = \text{Min}(t-t_2, t-t_3-t_4)$$

با مشتق گیری می توانیم  $f(t | t_1, t_2, t_3, t_4)$  را محاسبه کنیم:

$$\begin{aligned} f(t | t_1, t_2, t_3, t_4) &= \frac{dF(t | t_1, t_2, t_3, t_4)}{dt} \\ &= f_8(a) F_5(b) F_6(t-t_4) F_7(t-t_1) \\ &+ F_8(a) f_5(b) F_6(t-t_4) F_7(t-t_1) \\ &+ F_8(a) F_5(b) f_6(t-t_4) F_7(t-t_1) \\ &+ F_8(a) F_5(b) F_6(t-t_4) f_7(t-t_1) \end{aligned}$$

بنابراین  $F(t)$  و  $f(t)$  به صورت زیر به دست می آیند:

$$F(t) = \int_0^t \int_0^t \int_0^t \int_0^t F(t | t_1, t_2, t_3, t_4) f_1(t_1) f_2(t_2) f_3(t_3) f_4(t_4) dt_1 dt_2 dt_3 dt_4$$

$$f(t) = \int_0^t \int_0^t \int_0^t \int_0^t f(t | t_1, t_2, t_3, t_4) f_1(t_1) f_2(t_2) f_3(t_3) f_4(t_4) dt_1 dt_2 dt_3 dt_4$$

$$f(t | t_1, t_2, t_3, t_4, t_5) = \frac{dF(t | t_1, t_2, t_3, t_4, t_5)}{dt}$$

$$= f_6(a) F_7(b) F_9(c) F_8(t-t_1-t_5)$$

$$+ F_6(a) f_7(b) F_9(c) F_8(t-t_1-t_5)$$

$$+ F_6(a) F_7(b) f_9(c) F_8(t-t_1-t_5)$$

$$+ F_6(a) F_7(b) F_9(c) f_8(t-t_1-t_5)$$

بنابراین  $F(t)$  و  $f(t)$  به صورت زیر خواهند بود:

$$F(t) = \int_0^t \int_0^t \int_0^t \int_0^t F(t | t_1, t_2, t_3, t_4, t_5) f_1(t_1) f_2(t_2) f_3(t_3) f_4(t_4) f_5(t_5) dt_1 dt_2 dt_3 dt_4 dt_5$$

$$f(t) = \int_0^t \int_0^t \int_0^t \int_0^t f(t | t_1, t_2, t_3, t_4, t_5) f_1(t_1) f_2(t_2) f_3(t_3) f_4(t_4) f_5(t_5) dt_1 dt_2 dt_3 dt_4 dt_5$$

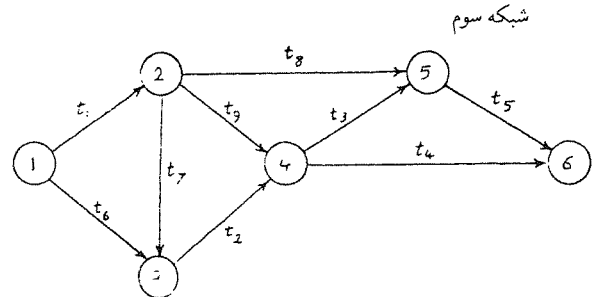
### ۵) نحوه استفاده از آنالیز عددی جهت حل عددی انتگرالها

در انتگرالهایی که  $F(t)$  و  $f(t)$  را بیان می کنند  $t$  می تواند از صفر تا حداکثر زمان تکمیل شبکه در تغییر باشد. حال اگر به  $t$  یک مقدار خاص مانند  $t_0$  اختصاص داده شود در آن صورت انتگرالهای چندگانه ای که توابع توزیع را بیان می کنند به انتگرالهای معین تبدیل می شوند و با حل عددی این انتگرالهای چندگانه به ازای مقدار معین  $t=t_0$  یک نقطه از منحنی توابع توزیع زمان تکمیل شبکه یعنی  $(t_0, F(t_0))$  یا  $(t_0, f(t_0))$  به دست می آید. حال با تغییر مقدار تخصیص یافته به  $t$  و حل مجدد انتگرال چندگانه به ازای مقدار جدید  $t$  می توان نقاط دیگری از توابع توزیع زمان تکمیل شبکه را به دست آورد. در صورتی که فواصل مقادیر اختصاص یافته به  $t$  کوچک و تعداد مقادیر زیاد باشد، اطلاعات بسیار دقیقی راجع به توابع توزیع زمان تکمیل شبکه به دست می آید. با استفاده از نقاط به دست آمده منحنیهای توابع توزیع زمان تکمیل شبکه قابل ترسیم خواهد بود.

### ۶) روش Boole برای حل عددی انتگرالهای یگانه

اگر تابع  $f(x)$  را در پنج نقطه  $(x_0, f(x_0))$ ،  $(x_1, f(x_1))$ ،  $(x_2, f(x_2))$ ،  $(x_3, f(x_3))$  و  $(x_4, f(x_4))$  به وسیله یک چند جمله ای از درجه چهارم تقریب بنزیم آنگاه با استفاده از چند جمله ای درونیاب نیوتن-گریگوری [۱۹] خواهیم داشت:

$$I = \int_{x_0}^{x_4} \left[ f(x_0) + \Delta f(x_0)\alpha + \frac{\Delta^2 f(x_0)}{2!} \alpha(\alpha-1) + \frac{\Delta^3 f(x_0)}{3!} \alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \right. \\ \left. + \frac{\Delta^4 f(x_0)}{4!} \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3) + \frac{\Delta^5 f(x_0)}{5!} \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)(\alpha-4) \right. \\ \left. + \frac{f^{(6)}(\xi)}{6!} \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)(\alpha-4)(\alpha-5)h^6 \right] dx$$



شکل (۴)

برای این شبکه  $m=7$  و  $n=9$  است.

زمان تکمیل برای مسیرهای مختلف به صورت زیر است:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \\ t_5 \\ t_6 \\ t_7 \\ t_8 \\ t_9 \end{bmatrix}$$

با توجه به ماتریس فوق الگوریتم Ringer با اجرای مرحله ۱ به ازای  $r=8$  و مراحل ۳، ۴ و ۳ به ترتیب به ازای  $p=9$  و  $p=7$ ،  $p=6$  کامل می شود و نتیجه به صورت زیر خواهد بود:

$$R = \{6, 7, 8, 9\} \quad S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

$$F(t | t_1, t_2, t_3, t_4, t_5) = F_6(a) F_7(b) F_9(c) F_8(t-t_1-t_5)$$

a, b و c به صورت زیر خواهند بود:

$$a = \text{Min}(t-t_2-t_3-t_5, t-t_2-t_4)$$

$$b = \text{Min}(t-t_1-t_2-t_3-t_5, t-t_1-t_2-t_4)$$

$$c = \text{Min}(t-t_1-t_3-t_5, t-t_1-t_4)$$

با مشتق گیری می توانیم  $f(t | t_1, t_2, t_3, t_4, t_5)$  را به دست آوریم:

## ۷) تعمیم روش Boole برای حل عددی انتگرالهای دوگانه و چندگانه

اگر برای حل انتگرال دوگانه زیر بخواهیم از روش Boole استفاده کنیم به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

$$\int_a^A \int_b^B f(x,y) dx dy = \int_a^A dx \int_b^B f(x,y) dy$$

اگر روی هر محور ۴ تقسیم داشته باشیم:

$$\int_a^A \int_b^B f(x,y) dx dy = \frac{4k}{90} \left[ 7 \int_a^A f(x,y_0) dx + 32 \int_a^A f(x,y_1) dx + 12 \int_a^A f(x,y_2) dx + 32 \int_a^A f(x,y_3) dx + 7 \int_a^A f(x,y_4) dx \right]$$

با کاربرد مجدد این روش برای هر یک از انتگرالها خواهیم داشت:

$$\int_a^A \int_b^B f(x,y) dx dy = \left(\frac{4}{90}\right) hk \times [7(7f(x_0,y_0) + 32f(x_1,y_0) + 12f(x_2,y_0) + 32f(x_3,y_0) + 7f(x_4,y_0)) + 32(7f(x_0,y_1) + 32f(x_1,y_1) + 12f(x_2,y_1) + 32f(x_3,y_1) + 7f(x_4,y_1)) + 12(7f(x_0,y_2) + 32f(x_1,y_2) + 12f(x_2,y_2) + 32f(x_3,y_2) + 7f(x_4,y_2)) + 32(7f(x_0,y_3) + 32f(x_1,y_3) + 12f(x_2,y_3) + 32f(x_3,y_3) + 7f(x_4,y_3)) + 7(7f(x_0,y_4) + 32f(x_1,y_4) + 12f(x_2,y_4) + 32f(x_3,y_4) + 7f(x_4,y_4))]$$

که h و k به صورت زیر هستند:

$$h = \frac{A-a}{4} \quad k = \frac{B-b}{4}$$

در حالتی که m تقسیم روی هر محور داشته باشیم (m باید مضرب ۴ باشد) داریم:

$$\iint_{(R)} f(x,y) dx dy = \left(\frac{4}{90}\right)^2 hk \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^m \lambda_{ij} f(x_i, y_j)$$

(R) یک مستطیل و  $\lambda_{ij}$  مؤلفه های ماتریس زیر هستند:

$$\lambda = \begin{vmatrix} 49 & 224 & 84 & 224 & 98 & \dots & \dots & 98 & 224 & 84 & 224 & 49 \\ 224 & 1024 & 384 & 1024 & 448 & \dots & \dots & 448 & 1024 & 384 & 1024 & 224 \\ 84 & 384 & 144 & 384 & 168 & \dots & \dots & 168 & 384 & 144 & 384 & 84 \\ 224 & 1024 & 384 & 1024 & 448 & \dots & \dots & 448 & 1024 & 384 & 1024 & 224 \\ 98 & 448 & 168 & 448 & 196 & \dots & \dots & 196 & 448 & 168 & 448 & 98 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 98 & 448 & 168 & 448 & 196 & \dots & \dots & 196 & 448 & 168 & 448 & 98 \\ 224 & 1024 & 384 & 1024 & 448 & \dots & \dots & 448 & 1024 & 384 & 1024 & 224 \\ 84 & 384 & 144 & 384 & 168 & \dots & \dots & 168 & 384 & 144 & 384 & 84 \\ 224 & 1024 & 384 & 1024 & 448 & \dots & \dots & 448 & 1024 & 384 & 1024 & 224 \\ 49 & 224 & 84 & 224 & 98 & \dots & \dots & 98 & 224 & 84 & 224 & 49 \end{vmatrix}$$

که  $x_0 < \xi < x_4$  و  $\alpha = \frac{x - x_0}{h}$  است. بنابراین می‌توانیم بنویسیم  $dx = h d\alpha$  در نتیجه خواهیم داشت:

$$I = h \int_0^1 \left[ f(x_0) + \Delta f(x_0)\alpha + \Delta^2 f(x_0) \left(\frac{\alpha^2}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) + \Delta^3 f(x_0) \left(\frac{\alpha^3}{6} - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha}{3}\right) + \Delta^4 f(x_0) \left(\frac{\alpha^4}{24} - \frac{\alpha^3}{4} + \frac{11\alpha^2}{24} - \frac{\alpha}{4}\right) + \Delta^5 f(x_0) \left(\frac{\alpha^5}{120} - \frac{\alpha^4}{12} + \frac{7\alpha^3}{24} - \frac{5\alpha^2}{12} + \frac{\alpha}{5}\right) + h^6 \left(\frac{\alpha^6}{720} - \frac{\alpha^5}{48} + \frac{17\alpha^4}{144} - \frac{5\alpha^3}{16} + \frac{137\alpha^2}{360} - \frac{\alpha}{6}\right) f^{(6)}(\xi) \right] d\alpha$$

پس از انتگرال گیری خواهیم داشت:

$$I = h \left[ 4f(x_0) + 8\Delta f(x_0) + \frac{20}{3}\Delta^2 f(x_0) + \frac{8}{3}\Delta^3 f(x_0) + \frac{14}{45}\Delta^4 f(x_0) + (0)\Delta^5 f(x_0) \right] - h^7 \left(\frac{8}{945}\right) f^{(6)}(\xi)$$

بنابراین جمله خطا عبارتست از  $-\frac{8}{945}h^7 f^{(6)}(\xi)$  که  $x_0 < \xi < x_4$ . همچنین طبق تعریف  $\Delta f(x_i) = f(x_{i+1}) - f(x_i)$  بوده، در نتیجه خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \Delta f(x_0) &= f(x_1) - f(x_0) \\ \Delta^2 f(x_0) &= \Delta(\Delta f(x_0)) = f(x_2) - 2f(x_1) + f(x_0) \\ \Delta^3 f(x_0) &= \Delta(\Delta^2 f(x_0)) = f(x_3) - 3f(x_2) + 3f(x_1) - f(x_0) \\ \Delta^4 f(x_0) &= \Delta(\Delta^3 f(x_0)) = f(x_4) - 4f(x_3) + 6f(x_2) - 4f(x_1) + f(x_0) \end{aligned}$$

با جاگذاری عبارات فوق پس از ساده کردن، عبارت I به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$I = \frac{2h}{45} [7f(x_0) + 32f(x_1) + 12f(x_2) + 32f(x_3) + 7f(x_4)] - \frac{8}{945}h^7 f^{(6)}(\xi)$$

اگر  $[a,b]$  به m قسمت مساوی تقسیم شود (m باید مضرب ۴ باشد) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} I &= \int_{x_0}^{x_4} f(x) dx + \int_{x_4}^{x_8} f(x) dx + \dots + \int_{x_{m-4}}^{x_m} f(x) dx \\ I &= \frac{4h}{90} [7f(x_0) + 32f(x_1) + 12f(x_2) + 32f(x_3) + 7f(x_4)] \\ &+ \frac{4h}{90} [7f(x_4) + 32f(x_5) + 12f(x_6) + 32f(x_7) + 7f(x_8)] \\ &+ \dots + \frac{4h}{90} [7f(x_{m-4}) + 32f(x_{m-3}) + 12f(x_{m-2}) + 32f(x_{m-1}) + 7f(x_m)] \end{aligned}$$

که  $h = \frac{b-a}{m}$  است.

$$I = \frac{4h}{90} \left[ 7f(x_0) + 32 \sum_{i=1,3,9} f(x_i) + 12 \sum_{j=2,6,10} f(x_j) + 32 \sum_{k=3,7,11} f(x_k) + 14 \sum_{l=4,8,12} f(x_l) + 7f(x_m) \right]$$

حال اگر برای حل یک انتگرال n گانه از روش Boole استفاده کنیم خواهیم داشت:

$$\int \dots \int_{(S)} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n \\ = \frac{h_1 h_2 \dots h_n}{4^n} \sum_{i_1=0}^m \sum_{i_2=0}^m \dots \sum_{i_n=0}^m (\lambda_{i_1, i_2, \dots, i_n}) f(x_{1i_1}, x_{2i_2}, \dots, x_{ni_n})$$

(S) یک زیرمجموعه از فضای  $R^n$  است و  $h_p = 1, 2, \dots, n$  اندازه تقسیم روی مختص  $x_p$  می باشد و m تعداد تقسیمات روی هر مختص است که باید مضرب 4 باشد (تعداد تقسیمات روی مختصهای متفاوت مساوی فرض شده است).

بردار G را در نظر بگیرید و عنصر q ام آنرا  $g_{q-1}$  بنامید که  $q = 1, 2, \dots, m+1$  است. به عبارت دیگر تعداد عناصر بردار G برابر (m+1) می باشد. در این صورت  $\lambda_{i_1, i_2, \dots, i_n}$  به صورت زیر تعریف می شود:

$$G = (7, 32, 12, 32, 14, \dots, 14, 32, 12, 32, 7)$$

$$\lambda_{i_1, i_2, \dots, i_n} = g_{i_1}, g_{i_2}, \dots, g_{i_n}$$

به طوریکه  $i_1, i_2, \dots, i_n = 0, 1, 2, \dots, m$

## ۸) معرفی برنامه های کامپیوتری توسعه داده شده بر اساس روش Boole تعمیم یافته

برنامه های PERTA و PERTB به زبان Gwbasic بر روی PC رایانه ساز که همسازگار با کامپیوتر IBM-AT و دارای سرعت 10MHz می باشد نوشته شده اند. اساس و پایه این برنامه ها همان روش Boole می باشد. تفاوت برنامه های PERTA و PERTB در این است که در برنامه PERTA تعداد المانهای انتگرال گیری برای هر انتگرالی ثابت است و عرض المان متغیر می باشد، اما در برنامه PERTB عرض المان ثابت و تعداد آنها متغیر می باشد. برنامه PERTA برای حل شبکه های کوچک و برنامه PERTB برای حل شبکه های بزرگتر توصیه می شود. این برنامه ها می توانند انتگرالهای یگانه تا پنجگانه را حل کنند و تعداد آرگومانهای تابع زیر انتگرال که شامل بیش از دو متغیر زمان باشند حداکثر 10 می تواند باشد. این برنامه ها مقادیر  $f(t)$  و  $F(t)$  را برای تعدادی متناهی از نقاط به صورت جداگانه ارائه می دهند. حدود t و دقت انتگرال گیری این برنامه ها توسط استفاده کننده قابل تغییر می باشد.

## ۹) روش شبیه سازی مونت کارلو

در این روش فرض بر این است که توابع توزیع چگالی و جمعی زمان تکمیل فعالیتها مشخص باشند. با این فرض در هر رانش شبیه سازی برای هر فعالیت یک عدد تصادفی از تابع توزیع مربوط به آن تولید می شود. محاسبات مسیر بحرانی با استفاده از اعداد تولید شده انجام می گیرد و فعالیتهای بحرانی و زمان تکمیل شبکه تعیین می گردد. با تکرار این عملیات می توان میانگین و انحراف معیار زمان تکمیل شبکه را به دست آورد. همچنین احتمال اینکه زمان تکمیل شبکه در فاصله زمانی معینی قرار گیرد قابل محاسبه خواهد بود و با استفاده از آن می توان یک نمودار برای تابع توزیع جمعی زمان تکمیل شبکه ترسیم نمود.

## ۱۰) معرفی برنامه کامپیوتری توسعه داده شده بر اساس روش شبیه سازی مونت کارلو

برنامه شبیه سازی MONTE نام دارد و به زبان Turbo Pascal 5.5 نوشته شده است که روی کامپیوترهای همسازگار با IBM که دارای مانیتور EGA باشند قابل اجرا می باشد. اساس کار این برنامه همان روش شبیه سازی مونت کارلو می باشد. این برنامه قادر به شبیه سازی شبکه هایی است که زمان فعالیتهای آنها دارای توزیع های یکنواخت، پواسن، نمایی، نرمال، گاما یا ثابت باشند و تعداد فعالیتها بیش از 1000 نباشد. این برنامه میانگین و انحراف معیار زمان تکمیل شبکه را محاسبه و نموداری ارائه می دهد که احتمال قرار گرفتن زمان تکمیل شبکه را در فواصل زمانی معینی نشان می دهد. همچنین توزیع جمعی زمان تکمیل شبکه را به صورت نمودار ستونی ترسیم می کند.

## ۱۱) تجزیه و تحلیل سه شبکه به وسیله روشهای PERT کلاسیک، شبیه سازی مونت کارلو و آنالیز عددی

در این قسمت سه شبکه به عنوان مثال طرح شده اند. در هر سه، فرض بر این است که توابع توزیع زمان تکمیل فعالیتهای آن از توزیع های شناخته شده پیروی کنند و برای ما مشخص باشند. هر کدام از این شبکه ها توسط سه روش PERT کلاسیک، شبیه سازی مونت کارلو و آنالیز عددی مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته اند. نمودارهای رسم شده حاصل از روش شبیه سازی مونت کارلو در واقع نمودارهای فراوانی نسبی و فراوانی نسبی جمعی می باشند، اما نمودارهای ارائه شده توسط دو روش



مقایسه در یک دستگاه مختصات رسم شده اند.

دیگر (PERT کلاسیک و آنالیز عددی) نمودار توابع چگالی احتمال و توزیع جمعی زمان تکمیل شبکه بوده و برای سهولت

مثالها:

Report of D2.NET Network

t	f(t)
15	8.536536E-02
16	7.582237E-02
17	6.444553E-02
18	5.386027E-02
19	4.492295E-02
20	3.769043E-02
21	3.190187E-02
22	2.724633E-02
23	2.346037E-02
24	2.034085E-02
25	1.773708E-02
26	1.553841E-02
27	1.366342E-02
28	1.205134E-02
29	1.065618E-02

If You See Other Page Press Enter Key ?

مثال ۱: فرض می شود که در شبکه نشان داده شده در شکل (۱) مقاله، توزیع زمان تکمیل فعالیتها به صورت زیر باشند:

$$t_1 \sim N(7, 3)$$

$$t_2 \sim N(4, 2)$$

$$t_3 \sim E(0.1)$$

$$t_4 \sim E(0.5)$$

$$t_5 \sim E(0.2)$$

بر اساس روش PERT کلاسیک، مسیر بحرانی برای این شبکه دارای میانگین ۱۴ و واریانس ۱۰۲ خواهد بود. در صفحات بعدی ابتدا نتایج روش آنالیز عددی هم برای تابع چگالی احتمال و هم برای تابع توزیع جمعی زمان تکمیل شبکه درج شده و در هر مورد نمودارهای مربوط به روش PERT کلاسیک و روش آنالیز عددی در یک دستگاه مختصات رسم شده اند. سپس نمودارهای حاصل از روش شبیه سازی مونت کارلو نمایش داده شده اند. در اینجا ذکر می کنیم که در مورد بقیه مثالها نیز چنین رفتار شده است.

Report of D2.NET Network

t	f(t)
30	9.442392E-03
31	8.381915E-03
32	7.452257E-03
33	6.634943E-03
34	5.914711E-03
35	5.278741E-03
36	4.716146E-03
37	4.217654E-03
38	3.775298E-03
39	3.382218E-03
40	3.03247E-03
41	2.720902E-03
42	2.443029E-03
43	2.194939E-03
44	1.973212E-03

If You See Other Page Press Enter Key ?

Report of D2.NET Network

t	f(t)
0	0
1	3.864936E-09
2	1.810613E-07
3	2.737612E-06
4	2.450983E-05
5	1.502213E-04
6	7.054282E-04
7	2.570016E-03
8	7.429583E-03
9	1.730011E-02
10	3.288224E-02
11	5.360275E-02
12	7.290071E-02
13	8.640949E-02
14	9.041258E-02

If You See Other Page Press Enter Key ?

Report of C2.NET Network

t	F(t)
15	.415831
16	.4972141
17	.567519
18	.626617
19	.6758803
20	.7170587
21	.7517483
22	.7812407
23	.8065293
24	.8283813
25	.847383
26	.8639919
27	.8785679
28	.8914061
29	.9027434

If You See Other Page Press Enter Key ?

Report of C2.NET Network

t	F(t)
30	.9127784
31	.921679
32	.9295854
33	.9366213
34	.9428888
35	.9484786
36	.9534698
37	.9579321
38	.9619247
39	.9655007
40	.9687056
41	.9715801
42	.9741604
43	.9764782
44	.9785592

If You See Other Page Press Enter Key ?

Report of C2.NET Network

t	F(t)
45	.9804291
46	.9821098
47	.9836161
48	.9849692
49	.9861811
50	.987266

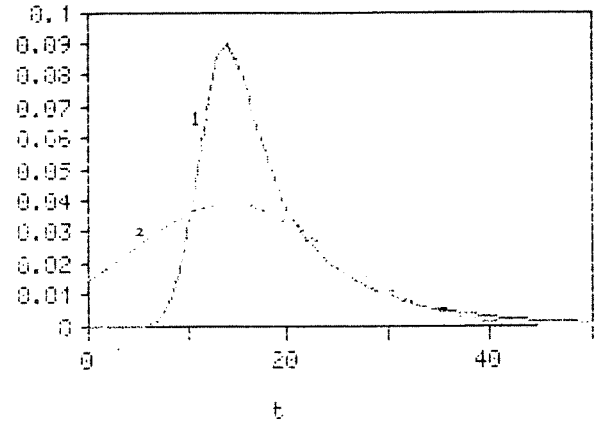
For To Go To Main Menu Press Enter Key ?

Report of D2.NET Network

t	f(t)
45	1.774859E-03
46	1.597253E-03
47	1.43809E-03
48	1.295343E-03
49	1.167223E-03
50	1.052152E-03

For To Go To Main Menu Press Enter Key ?

1.P.D.F WITH NUMERICAL METHOD  
2.P.D.F WITH CLASIC PERT



Report of C2.NET Network

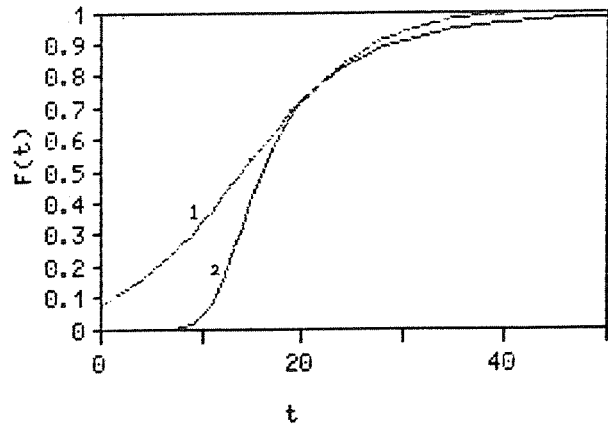
t	F(t)
0	0
1	6.638093E-10
2	5.292523E-08
3	1.057485E-06
4	1.149691E-05
5	8.472726E-05
6	4.636027E-04
7	1.975237E-03
8	6.753108E-03
9	1.894618E-02
10	4.445867E-02
11	8.884587E-02
12	.1540021
13	.2360506
14	.326476

If You See Other Page Press Enter Key ?

Expected time for project completion  
 in 1000 iteration is: 18.08  
 Standard deviation= 7.453

1. D.D.F WITH CLASIC PERT  
 2. D.D.F WITH NUMERICAL METHOD

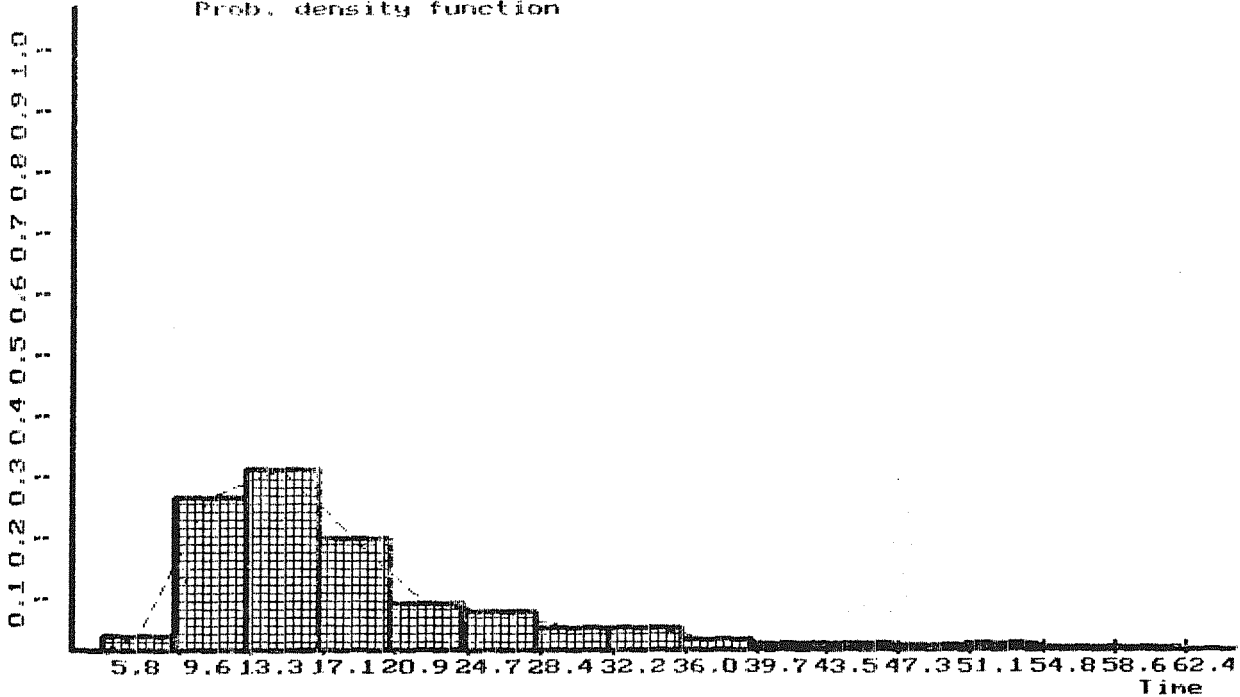
t	f(t)	F(t)
7.48	0.0260	0.02600
11.30	0.2270	0.25300
15.12	0.3160	0.56900
18.94	0.1930	0.76200
22.76	0.0950	0.85700
26.58	0.0550	0.91200
30.40	0.0300	0.94200
34.22	0.0220	0.96400
38.04	0.0190	0.98300
41.86	0.0030	0.98600
45.69	0.0050	0.99100
49.51	0.0040	0.99500
53.33	0.0020	0.99700
57.15	0.0020	0.99900
60.97	0.0010	1.00000

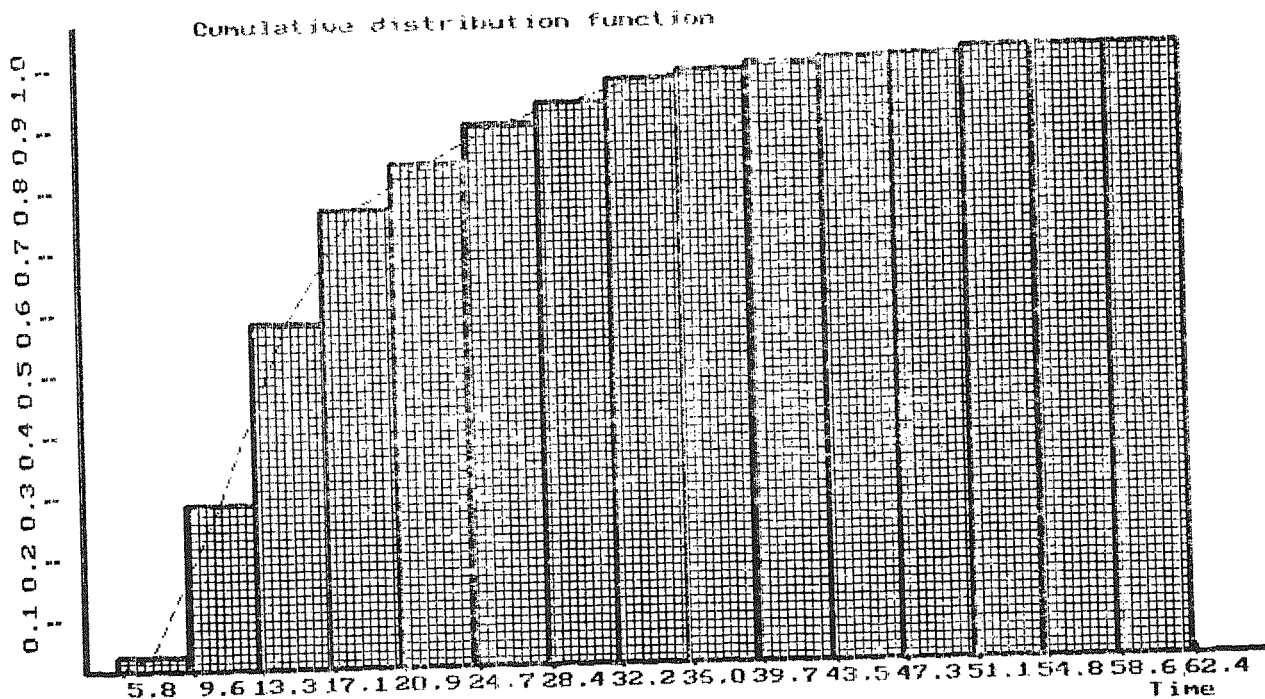


ACT. NO.	ACT.	DISTRIBUTION
1	1- 2	Normal( 7.00, 1.72)
2	1- 3	Expo.(10.00)
3	2- 3	Expo.( 2.00)
4	2- 4	Expo.( 5.00)
5	3- 4	Normal( 4.00, 1.41)

ACT. NO.	ACT.	CRITICAL INDEX
1	1- 2	%64.10
2	1- 3	%35.90
3	2- 3	%41.30
4	2- 4	%22.80
5	3- 4	%77.20

Prob. density function





- $t_4 \sim E(4)$
- $t_5 \sim N(0.5, 0.9)$
- $t_6 \sim N(0.5, 0.9)$
- $t_7 \sim E(4)$

برای مسیر بحرانی شبکه فوق میانگین برابر با  $1/75$  و واریانس برابر با  $2/7625$  می باشد.

مثال ۲: فرض می شود که در شبکه نشان داده شده در شکل (۲) توزیع زمان تکمیل فعالیتها به صورت زیر باشند (ضمناً فرض می شود که جهت شاخه های  $t_4$  و  $t_7$  خلاف جهت نشان داده شده در شکل باشند):

- $t_1 \sim N(0.5, 0.9)$
- $t_2 \sim E(4)$
- $t_3 \sim E(4)$

Report of C3.NET Network

t	F(t)
0	0
.6	9.837644E-04
1.2	2.254057E-02
1.8	.103661
2.4	.2566643
3	.4518983
3.6	.6407796
4.200001	.7875475
4.8	.8823078
5.4	.9342506
6	.9587702
6.6	.9688252

Report of D3.NET Network

t	f(t)
0	0
.6	7.831233E-03
1.2	6.924255E-02
1.8	.2260272
2.4	.2603392
3	.2880689
3.6	.2966804
4.2	.189446
4.8	.1132193
5.4	6.064865E-02
6	.023947
6.6	9.783345E-03

For To Go To Main Menu Press Enter Key ? For To Go To Main Menu Press Enter Key ?

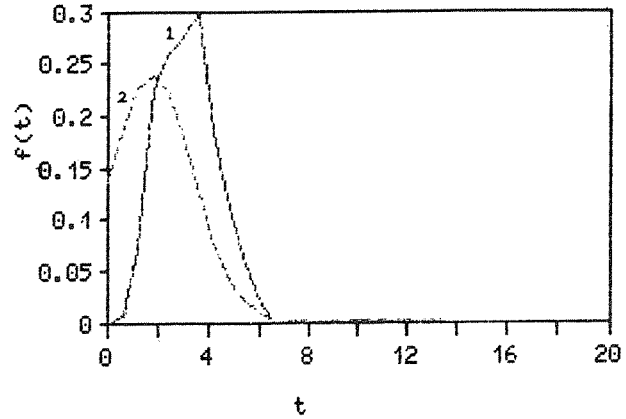
ACT. NO.	ACT.	DISTRIBUTION
1	1- 2	Normal( 0.50, 0.95)
2	1- 4	Expo.( 0.25)
3	2- 3	Normal( 0.50, 0.95)
4	2- 4	Expo.( 0.25)
5	3- 4	Expo.( 0.25)
6	3- 5	Expo.( 0.25)
7	4- 5	Normal( 0.50, 0.95)

ACT. NO.	ACT.	CRITICAL INDEX
1	1- 2	%95.70
2	1- 4	%4.30
3	2- 3	%79.00
4	2- 4	%16.70
5	3- 4	%64.30
6	3- 5	%14.70
7	4- 5	%85.30

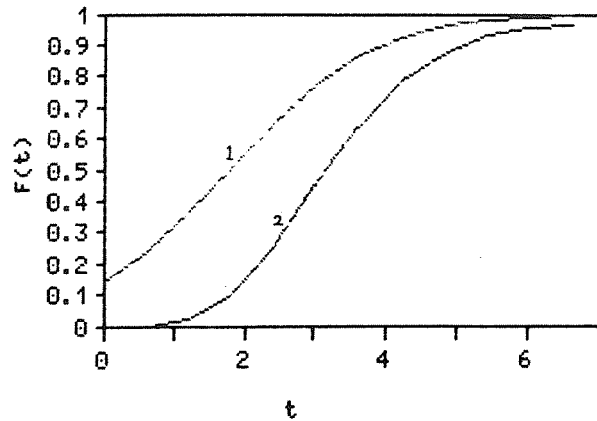
Expected time for project completion in 1000 iteration is: 2.29 Standard deviation= 1.146

t	f(t)	F(t)
0.30	0.0370	0.03700
0.72	0.0840	0.12100
1.14	0.0950	0.21600
1.57	0.1450	0.36100
1.99	0.1400	0.50100
2.41	0.1460	0.64700
2.84	0.1160	0.76300
3.26	0.0750	0.83800
3.69	0.0680	0.90600
4.11	0.0460	0.95200
4.53	0.0230	0.97500
4.96	0.0120	0.98700
5.38	0.0040	0.99100
5.80	0.0060	0.99700
6.23	0.0030	1.00000

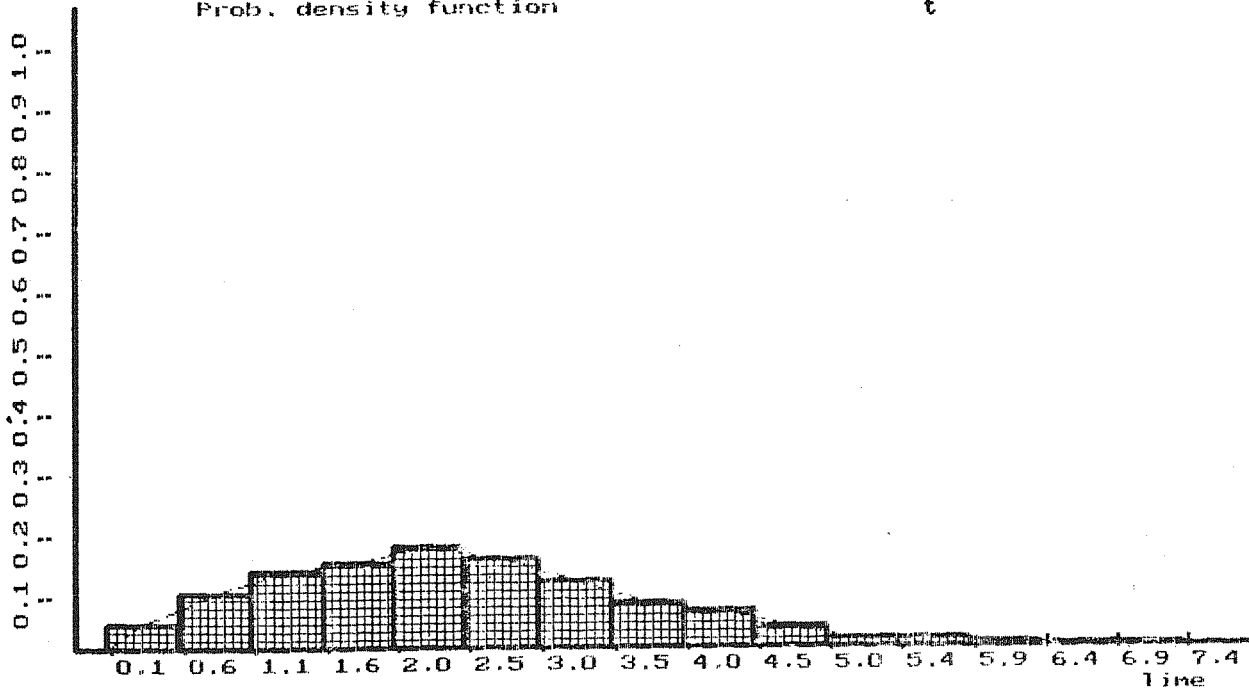
1. P.D.F WITH NUMERICAL METHOD  
2. P.D.F WITH CLASIC PERT

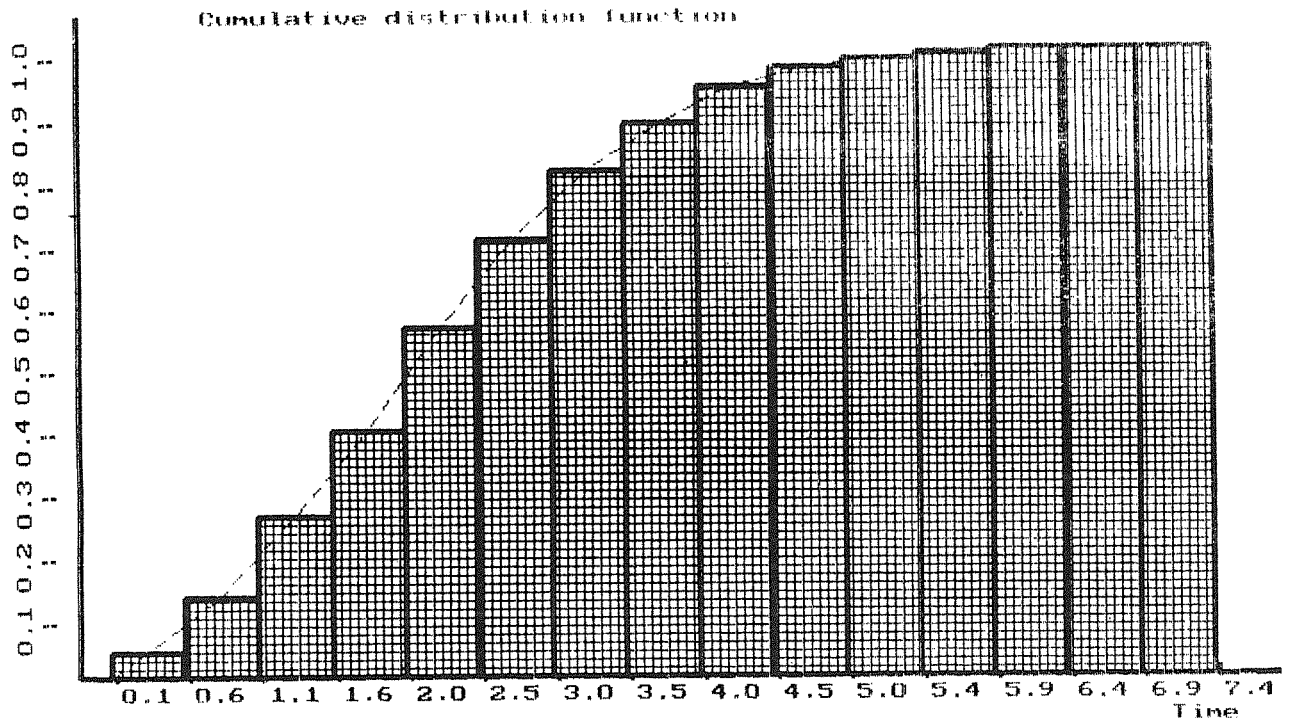


1. C.D.F WITH CLASIC PERT  
2. C.D.F WITH NUMERICAL METHOD



Prob. density function





$$t_5 \sim E(4)$$

$$t_6 \sim E(4)$$

$$t_7 \sim E(4)$$

$$t_8 \sim E(4)$$

برای مسیر بحرانی شبکه فوق میانگین برابر ۱/۵ و واریانس برابر ۰/۳۲۵ می باشد.

مثال ۳: در شبکه نشان داده شده در شکل (۳) توزیع

زمان تکمیل فعالیتها به صورت زیر است:

$$t_1 \sim N(0.5, 0.1)$$

$$t_2 \sim N(0.5, 0.1)$$

$$t_3 \sim N(0.5, 0.1)$$

$$t_4 \sim E(4)$$

Report of CP4.NET Network

t	F(t)
.3	.002
.6	.004
1.2	.179413
1.5	.369
1.8	.558657
2.4	.776266
3	.85043
3.6	.862065
4.2	.872308
4.8	.883201
5.4	.895409
6	.9045312
6.6	.911123

Report of D4.NET Network

t	f(t)
.3	.0005
.6	.05123
1.2	.5030271
1.5	.555768
1.8	.543103
2.4	.27
3	.15207
3.6	.1023
4.2	.052184
4.8	.029865
5.4	9.119999E-03
6	.005239
6.6	.00123

For To Go To Main Menu Press Enter Key ?

For To Go To Main Menu Press Enter Key ?

ACT. NO.	ACT.	DISTRIBUTION
1	1- 2	Normal( 0.50, 0.95)
2	1- 4	Expo.( 0.25)
3	2- 3	Normal( 0.50, 0.95)
4	2- 4	Expo.( 0.25)
5	3- 4	Expo.( 0.25)
6	3- 5	Expo.( 0.25)
7	4- 5	Normal( 0.50, 0.95)

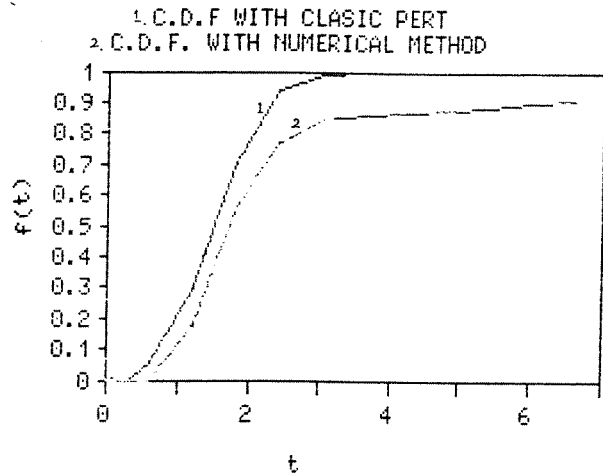
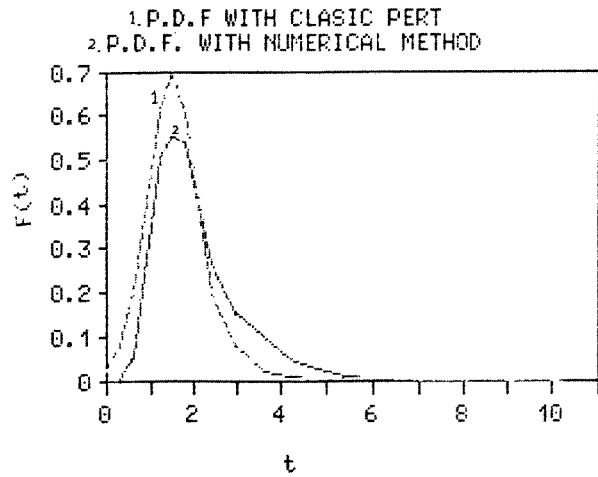
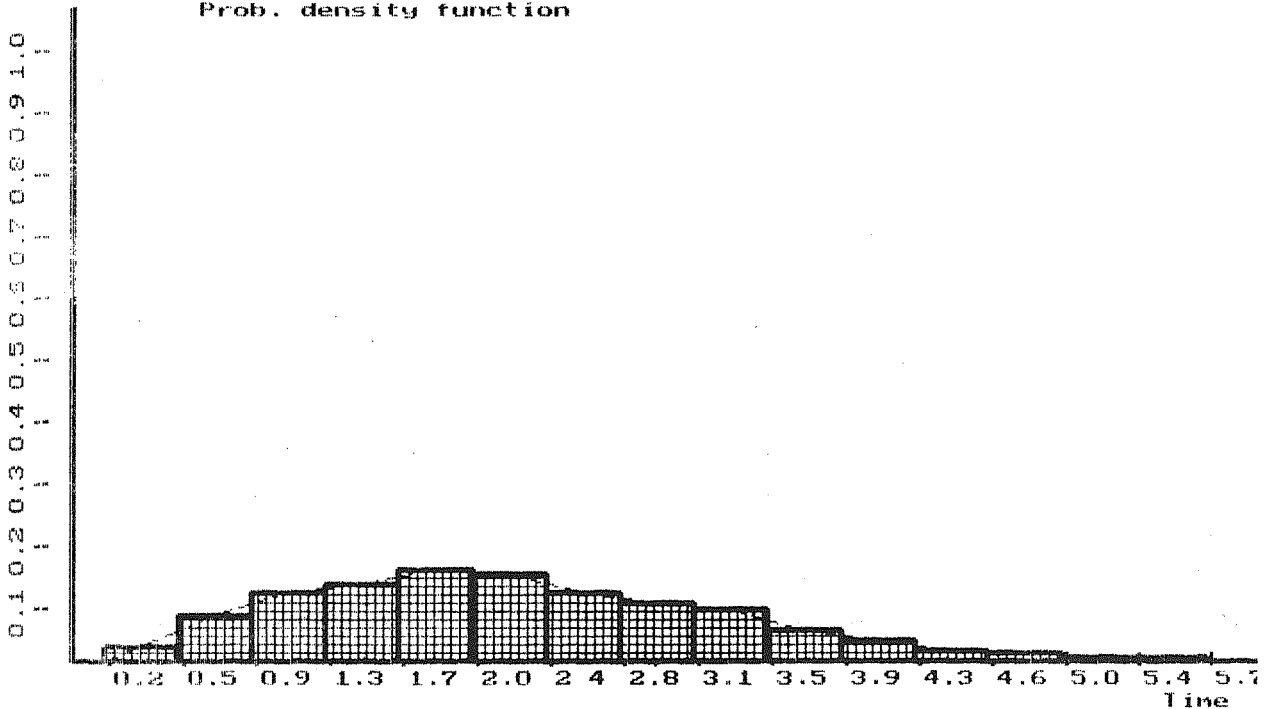
ACT. NO.	ACT.	CRITICAL INDEX
1	1- 2	%95.70
2	1- 4	%4.30
3	2- 3	%79.00
4	2- 4	%16.70
5	3- 4	%64.30
6	3- 5	%14.70
7	4- 5	%85.30

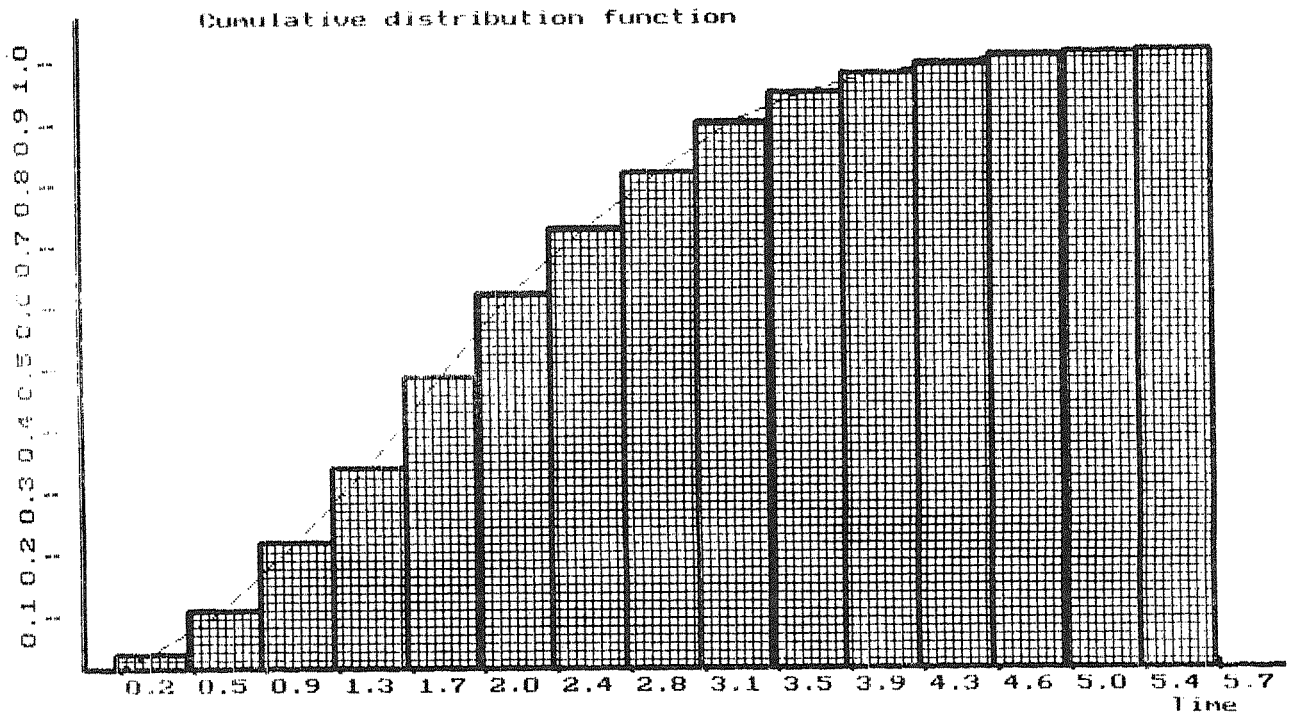
Expected time for project completion in 1000

iteration is: 2.29 Standard deviation= 1.146

t	f(t)	F(t)
0.30	0.0370	0.03700
0.72	0.0840	0.12100
1.14	0.0950	0.21600
1.57	0.1450	0.36100
1.99	0.1400	0.50100
2.41	0.1460	0.64700
2.84	0.1160	0.76300
3.26	0.0750	0.83800
3.69	0.0680	0.90600
4.11	0.0460	0.95200
4.53	0.0230	0.97500
4.96	0.0120	0.98700
5.38	0.0040	0.99100
5.80	0.0060	0.99700
6.23	0.0030	1.00000

Prob. density function





## ۱۲) نتایج:

مشخص با فعالیتهای و توزیعهای یکسان در اجراهای متمایز متفاوت می باشند.

۴- نتایج روش آنالیز عددی به علت آنکه این روش تحت حمایت تئوری نیرومندی قرار دارد دقیقتر و مورد اعتمادتر می باشند.

در خاتمه باید یادآور شد که مقایسه زمان مورد نیاز برای اجرای کامپیوتری این دو روش به علت آنکه برنامه ها به زبانهای مختلف نوشته شده اند منطقی به نظر نمی رسد. اما تردیدی نیست که بزرگترین محدودیت روش آنالیز عددی صرف زمان زیاد برای اجرای کامپیوتری می باشد و دلیل آن این است که زمان محاسبه با افزایش ابعاد انتگرالها به طور نمایی افزایش می یابد؛ یعنی اگر محاسبه  $F(t)$  برای یک  $t$  معین و با یک دقت مفروض برای انتگرال یگانه  $m$  دقیقه طول بکشد بدیهی است که محاسبه  $F(t)$  برای همین  $t$  و با همان دقت در صورتی که انتگرال  $n$  گانه باشد بیشتر از  $m^n$  دقیقه طول خواهد کشید، زیرا با آنکه تعداد محاسبات به توان  $n$  می رسد، اما برای محاسبه یک تابع  $n$  متغیره زمان بیشتری نسبت به محاسبه یک تابع یک متغیره صرف می شود. به همین دلیل با افزایش ابعاد انتگرالها زمانهای محاسبه به طور چشمگیری افزایش می یابند.

در مثال طرح شده و مثالهای دیگر مقایسه منحنیهای توابع چگالی احتمال و توزیع جمعی به دست آمده از دو روش آنالیز عددی و شبیه سازی نشان می دهد که جوابهای این دو روش تا حدودی با هم اختلاف دارند. اما به طور کلی مزایا و معایب این دو روش را می توان در موارد زیر خلاصه نمود:

۱- اطلاعات ورودی برای اجرای کامپیوتری روش آنالیز عددی پیچیده تر از اطلاعات ورودی برای روش شبیه سازی است.

۲- روش آنالیز عددی قادر است برای هر مقدار دلخواه  $t$  مقادیر توابع چگالی احتمال و توزیع جمعی را محاسبه نماید، در حالی که روش شبیه سازی احتمال قرار گرفتن زمان تکمیل شبکه را در فاصله های زمانی معینی محاسبه می کند. این فواصل را می توان به دلخواه کوچک کرد، اما با کوچک کردن این فواصل دقت جوابها کاهش یافته و برای دقیقتر کردن آنها باید تعداد رانش ها را به طور چشمگیری افزایش داد. با این تفصیل این روش باز نمی تواند مقادیر توابع چگالی احتمال و توزیع جمعی را برای یک نقطه خاص محاسبه نماید.

۳- در روش آنالیز عددی در صورتی که تعداد تقسیمات انتگرال گیری ثابت بماند جوابها همواره یکسان هستند، در صورتی که در روش شبیه سازی جوابها به ازاء یک تعداد رانش



گردد. این چند جمله ای مقدار تابع چگالی یا جمعی زمان تکمیل شبکه را به ازای هر  $t$  دلخواه به طور تقریبی ارائه می دهد. دقت این تقریب بستگی به تعداد نقاطی دارد که برای محاسبه چند جمله ای درونیاب لاگرانژ به کار گرفته شده اند. ج- می توان فقط نقاط منتهی الیه سمت راست تابع توزیع جمعی را محاسبه نمود، زیرا در عمل معمولاً به نقاط ۹۰ درصد تا ۹۹ درصد نیاز بیشتری داریم.

الف- استفاده از زبانها و کامپیوترهای پیشرفته تر و سریعتر برای افزایش دادن سرعت محاسبه.  
ب- از آنجا که زمان محاسبه به تعداد نقاط محاسبه شده ای که برای ترسیم توابع توزیع به کار می روند بستگی دارد، توصیه می شود که تعداد نقاط محاسبه شده از توابع چگالی احتمال و توزیع جمعی را کاهش داده و با استفاده از نقاط به دست آمده چند جمله ای درونیاب لاگرانژ محاسبه

1. R.R. Britney, Bayesian Point estimation and the PERT scheduling of stochastic activities, Manage. Sci. Vol 22. No. 9 (1976).
2. J.M. Burt, D.P. Gaver and M. Perlas, Simple stochastic networks: Some problems and procedures, Naval Research Logistic Quarterly, PP. 439-459 (1968).
3. K.P. Anklesaria and Z. Drezner, A multivariate approach to estimating the completion time for PERT Networks, J. Opl. Res. Soc. Vol 37. No. 8 (1986).
4. S.E. Elmaghraby, on the expected duration of PERT type networks, J. opl. Res. Soc. Vol 13 PP. 299-306 (1967).
5. G.S. Fishman, Estimating network characteristics in stochastic activity networks, Manage. Sci. Vol 31. No. 5 (1985).
6. H.O. Hartly and A.W. Wortham, A statistical theory for PERT Critical Path Analysis, Manage. Sci. Vol 12. No. 10 (1966).
7. J. Kamburoski, Normally Distributed activity durations in PERT Networks, J. opl. Res. Vol. 36. No.11(1985).
8. G.B. Kleindorfer and P.R. Kleindorfer, Bounding Distributions for stochastic logic networks, opl. Res. Quarterly. Vol 25. No. 3 (1971).
9. J.J. Martin, Distribution of the time through a directed acyclic network, J. opl. Res. PP. 46-66 (1964).
10. L.J. Ringer, A statistical theory for PERT in which completion time for activities are interdependent, Manage. Sci. Vol. 17. No. 11 (1971).
11. L.J. Ringer, Numerical operators for statistical PERT Critical Path Analysis, Manage. Sci. Vol. 16. No. 2 (1969).
- ۱۲- دکتر محمد تقی فاطمی قمی و مهندس سعید حاجی ابراهیم زرگر، محاسبه توابع توزیع چگالی و جمعی زمان تکمیل یک پروژه - مجله امیرکبیر شماره ۱۱ بهار ۱۳۶۸.
- ۱۳- دکتر فرهاد کیانفر، کاربرد آمار کلاسیک و آماریزی در روش ارزیابی و بازبینی پروژه PERT - مجله امیرکبیر شماره ۱۶ زمستان ۱۳۶۹.
14. B.P. Demidovich and I.A. Maron, Computational Mathematics, Mir publishers, Moscow (1987).
15. Steven C. Chapra and Raymond P. Canale, Numerical Methods for engineers with personal Computer Applications, Mc GrawHill (1984).