

بررسی ارتعاشات آزاد ورق قطاعی تابعی مدرج دوبعدی کوپل با پیزوالکتریک مستقر بر بستر الاستیک دوپارامتری با استفاده از روش رایلی ریتز و تئوری مرتبه سوم تغییر شکل برشی

علی بخششی^۱، حسین مهبادی^{۱*}، کوروش خورشیدی^۲

۱- گروه مهندسی مکانیک، واحد تهران مرکزی، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران

۲- گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه اراک، اراک، ایران

تاریخچه داوری:

دریافت: ۱۸ فروردین ۱۳۹۶

بازنگری: ۲۰ خرداد ۱۳۹۶

پذیرش: ۲۵ تیر ۱۳۹۶

ارائه آنلاین: ۱۳ مرداد ۱۳۹۶

کلمات کلیدی:

ورق‌های قطاعی

فرکانس طبیعی

روش رایلی ریتز

پیزوالکتریک

چکیده: در این مقاله ارتعاشات آزاد ورق قطاعی تابعی مدرج دو بعدی کوپل با پیزوالکتریک بر مبنای تئوری مرتبه سوم تغییر شکل برشی مستقر بر بستر الاستیک دو پارامتری مورد بررسی قرار گرفته است. تئوری مرتبه سوم تغییر شکل برشی ورق با وجود داشتن معادلات پیچیده تر بدلیل در نظر گرفتن تاثیرات تغییر شکل برشی عرضی و اینرسی دورانی منجر به حصول نتایج دقیق تری می شود. تغییر خواص ورق مدور تابعی دو بعدی به صورت پیوسته در دو راستای ضخامت و محیط در نظر گرفته شده است و برای مدل سازی رفتار ورق قطاعی دو بعدی از مدل قانون توانی کسر حجمی استفاده شده است. به منظور تعیین پتانسیل الکتریکی لایه‌های پیزوالکتریک از توابع سینوسی استفاده شده است به نحوی که معادله الکترواستاتیکی ماکسول بوسیله این توابع ارضا می شود. پس از تشکیل فانکشنال لاگرانژین بوسیله تفاضل انرژی‌های جنبشی و پتانسیل ورق، از اصل همپلتون و روش ریتز به منظور تعیین مقادیر فرکانس طبیعی ورق استفاده شده است. در ادامه پس از اعتبارسنجی نتایج با مراجع مختلف برای حالت‌های گوناگون، تاثیر پارامترهای ورق از جمله زاویه قطاع ورق، نسبت ضخامت به شعاع ورق، ضریب توانی نسبت حجمی و ضرایب بستر بر روی فرکانس طبیعی سازه مورد بحث و بررسی قرار گرفته است.

۱- مقدمه

بررسی رفتار دینامیکی ورق‌های دایروی، حلقوی و قطاعی به دلیل کاربرد آن‌ها همواره مورد توجه محققین بوده است اما به دلیل شرایط هندسی پیچیده تر ورق‌های قطاعی در مقایسه با ورق‌های دایروی و حلقوی، رفتار این ورق‌ها در مقایسه با ورق‌های دایروی و حلقوی کمتر مورد بررسی قرار گرفته است. از طرفی، با توجه به فرضیات کرشهف، تئوری کلاسیک ورق قادر به پیش‌بینی میزان کرنش برشی عرضی یا تنش برشی عرضی نیست و باعث ایجاد خطا در تحلیل صفحات ضخیم و محدود شدن کاربرد این تئوری در حد صفحات نازک می‌شود. به همین علت تئوری‌های تغییر شکل‌های برشی مرتبه اول [۱] و مراتب بالاتر [۲] برای تحلیل دقیق تر این گونه ورق‌ها ارائه شده است. مبنای این تئوری‌ها براساس فرضیات میندلین [۳] و ریسنر [۴] است. این فرضیات موجب به وجود آمدن تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول شد. در این فرضیات محدودیت موجود در تئوری کلاسیک ورق اصلاح شده و فرض بر این است که صفحات عمود بر صفحه میانی، چرخش‌های مستقلی در راستای محورهای اصلی تجربه می‌کنند. زو و همکاران [۵] در مقاله‌ای به بررسی رفتار ارتعاشی ورق دایروی سوراخ‌دار با استفاده روش چیبشف - ریتز پرداختند. شی و همکاران [۶] مقدار فرکانس را برای ورق دایروی سوراخ‌دار برای شرایط مرزی مختلف محاسبه نمودند.

وانگ و همکاران [۷] و لیو و همکاران [۸] ارتعاشات آزاد ورق‌های نازک و نسبتاً ضخیم دایروی که دارای وصله پیزوالکتریک بودند را بررسی نمودند. سونی و راثو [۹] ارتعاشات متقارن محوری آزاد ورق‌های دایروی با ضخامت متغیر را مورد مطالعه قرار دادند و از توابع چیبشف برای حل معادلات استفاده نمودند. چانگ و کوک [۱۰] فرکانس ارتعاشی ورق‌های ضخیم دایروی با تکیه‌گاه ساده یا گیردار را بر اساس روش المان محدود به دست آوردند. حسینی هاشمی و همکاران [۱۱] مقادیر فرکانس طبیعی ورق قطاعی تابعی را برای چندین شرایط مرزی مختلف با استفاده از روش کوادراچر و بر مبنای تئوری کلاسیک به دست آوردند. ایشان در مقاله‌ای دیگر [۱۲] به بررسی تأثیر وجود بستر پسترناک بر ارتعاش آزاد ورق دایروی سوراخ‌دار پرداختند که در آن نیز از روش رایلی ریتز استفاده شده است. هانگ و هو [۱۳] پاسخ تحلیلی برای ارتعاش ورق‌های قطاعی میندلین ارتوتروپیک قطبی با استفاده از روش فروبنیوس ارائه نمودند. کاربرد مواد به طوری که خواص آن‌ها در دو راستای مستقل از هم به صورت تابعی تغییر کند، می‌تواند باعث بهبود روند طراحی قطعاتی گردد که تحت تأثیر توزیع تنش‌هایی از قبیل تنش‌های حرارتی در دو راستای مختلف قرار دارند. لذا ساخت اجسام با ساختار تابعی مدرج دو بعدی می‌تواند جایگزین مناسبی برای مواد مدرج یک‌بعدی در این قبیل موارد باشد. با این حال پژوهشگران به ندرت به بررسی رفتار استاتیکی و دینامیکی ورق‌های تابعی دوبعدی پرداختند. یانگ و همکاران [۱۴] به

نویسنده عهده‌دار مکاتبات: h_mahbadi@iauctb.ac.ir

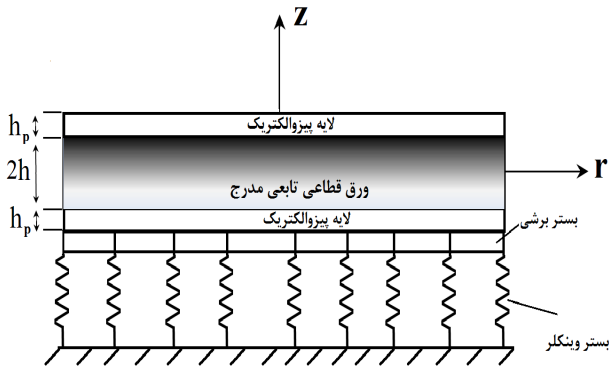


Fig. 1. The side view of 2D-FG annular sector plates resting on two-parameter elastic foundation and the cylindrical coordinate system
 شکل ۱: نمای جانبی ورق قطاعی تابعی دو بعدی مستقر بر بستر الاستیک و دستگاه مختصات استوانه‌ای

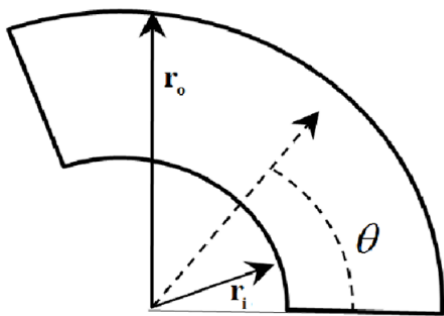


Fig. 2. The top view of the annular sector plate and cylindrical coordinate system

شکل ۲: نمای از بالا ورق قطاعی و دستگاه مختصات استوانه‌ای

جابه‌جایی‌ها و کرنش‌های کوچک وجود دارند.

در این تحقیق خواص ورق در دو راستای ضخامت و محیط تغییر می‌کند به طوری که سطح تختانی ورق $z = -h$ از سرامیک تشکیل شده است. در $z = -h$, $\theta = 0$ دارای سرامیک نوع اول خالص هستیم و با حرکت در جهت محیط رفته‌رفته از درصد سرامیک اول کاسته و به سرامیک دوم افزوده می‌شود. به طوری که در $z = -h$, $\theta = \alpha$ سرامیک نوع دوم خالص را خواهیم داشت. سطح فوقانی $z = 0$ نیز از جنس فلز است که $\theta = 0, z = h$ تماماً فلز نوع اول است و با حرکت در جهت محیط از میزان فلز نوع اول کاسته و به فلز دوم اضافه می‌شود. به طوری که در $\theta = \alpha, z = h$ فلز نوع دوم را خواهیم داشت. جهت مدل‌سازی خواص ورق از روابط ریاضی زیر استفاده می‌کنیم [۱۹].

$$E(\theta, z) = E_{m1}V_{m1} + E_{m2}V_{m2} + E_{c1}V_{c1} + E_{c2}V_{c2} \quad (1)$$

$$\rho(\theta, z) = \rho_{m1}V_{m1} + \rho_{m2}V_{m2} + \rho_{c1}V_{c1} + \rho_{c2}V_{c2} \quad (2)$$

$$V_{c1} = \left[\left(0.5 + \left(\frac{z}{h} \right) \right)^{\beta_z} \right] \left[1 - \left(\frac{\theta}{\alpha} \right)^{\beta_\theta} \right] \quad (3)$$

تحلیل ارتعاش آزاد ورق تابعی مدرج دو بعدی مستطیلی پرداختند. در این مقاله از روش عددی جدیدی تحت عنوان روش شبکه آزاد جهت به دست آوردن مقادیر فرکانس طبیعی استفاده نمودند. ابراهیمی و نجفی زاده [۱۵] در مقاله‌ای فرکانس طبیعی پوسته‌های استوانه‌ای از جنس ماده تابعی مدرج دوبعدی احاطه شده توسط بستر الاستیک را محاسبه نمودند. در این پژوهش از روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته^۱ استفاده شده و مقادیر فرکانس برای پوسته استوانه‌ای یک بعدی با دو بعدی مقایسه و نتایج برای شرایط مرزی مختلف و ضرایب بستر دو پارامتری الاستیک ارزیابی شده است. در همین راستا نیز سبحانی و هدایتی [۱۶] با استفاده از روش‌های الاستیسیته سه بعدی توانستند ارتعاشات آزاد پوسته استوانه تابعی مدرج دوبعدی را بررسی کنند که در این مقاله تغییر خواص پوسته در راستای ضخامت نیز در قالب چند منحنی بیان شده است. نی و ژانگ در مطالعاتی [۱۷ و ۱۸] به بررسی رفتار استاتیکی و دینامیکی قطاع تابعی دو بعدی با تکیه‌گاه‌های ساده بدون در نظر گرفتن اثر پیزوالکتریک پرداختند. آن‌ها در این پژوهش از روش نیمه‌تحلیلی برای حل معادلات الاستیسیته سه‌بعدی استفاده نمودند. عسکری و اخلاقی [۱۹] به بررسی تأثیر توان‌های نسبت حجمی و عدد موج محیطی بر فرکانس طبیعی پوسته استوانه‌ای ضخیم تابعی مدرج دو بعدی پرداختند.

تحقیق در سوابق علمی توسط نویسندگان نشان می‌دهد که اثر بستر پاسترناک و لایه‌های پیزوالکتریک بر روی رفتار ارتعاشی ورق‌های قطاعی ضخیم که از مواد تابعی مدرج دو بعدی ساخته شده‌اند، بر اساس تئوری مرتبه سوم برشی مورد بررسی قرار نگرفته است. با توجه به اهمیت مواد پیزوالکتریک به عنوان موادی پرکاربرد و در حال توسعه در زمینه کاهش ارتعاش و صدا و تأثیر استفاده از تئوری‌های مرتبه بالای برشی در پیش‌بینی رفتار ارتعاشی ورق‌های ضخیم، در این مقاله با به کارگیری تئوری مرتبه سوم تغییر شکل برشی، به بررسی ارتعاش آزاد ورق‌های قطاعی تابعی دوبعدی مستقر بر بستر پاسترناک با استفاده از روش ریلی ریتز پرداخته می‌شود. برای به دست آوردن نتایج برنامه‌ای در نرم افزار ممتیکا^۲ تهیه شده و در بخش نتایج تأثیر پارامترهای مختلف ورق بر روی فرکانس طبیعی ورق مورد بررسی و تحلیل قرار می‌گیرد.

۲- معادلات و روابط دینامیکی ورق

ورق قطاعی با نمای روبرو و جانبی نشان‌داده شده در اشکال ۱ و ۲ را در نظر بگیرید که ضخامت آن $2h$ ، شعاع داخلی r_i ، شعاع خارجی r_o و زاویه قطاع α است. ورق زمینه تابعی به وسیله دو لایه پیزوالکتریک به ضخامت h_p احاطه شده و θ زاویه دلخواه هر نقطه از ورق است. ورق کوپل شده با لایه‌های پیزوالکتریک مستقر بر بستر دو پارامتری الاستیک پاسترناک می‌باشد که این بستر ترکیبی از فنرهای عمودی وینکلر و بستر برشی است. مبدأ دستگاه محوره‌های مختصات استوانه‌ای در مرکز ورق و در صفحه میانی در نظر گرفته شده است. در تمامی روابط فرض رفتار خطی الاستیکی مواد و

1 General differential quadrature
 2 Mathematica

$$\varepsilon_{rr} = z \frac{\partial \psi_r}{\partial r} - z^3 \frac{4}{3h^2} \left(\frac{\partial \psi_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right) \quad (16)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = z \left(\frac{\partial \psi_\theta}{r \partial \theta} + \frac{\psi_r}{r} \right) - z^3 \frac{4}{3h^2} \left(\frac{\partial \psi_\theta}{r \partial \theta} + \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \theta^2} + \frac{\psi_r}{r} + \frac{\partial w}{r \partial r} \right) \quad (17)$$

$$\varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{r \partial r \partial \theta} + z \frac{4}{3h^2} \left(\frac{\partial \psi_r}{r \partial \theta} + \frac{\partial \psi_\theta}{\partial r} - \frac{\psi_\theta}{r} \right) - z^3 \frac{4}{3h^2} \left(\frac{\partial \psi_r}{r \partial \theta} + 2 \frac{\partial^2 w}{r \partial \theta \partial r} + \frac{\partial \psi_\theta}{\partial r} - \frac{2 \partial w}{r^2 \partial \theta} - \frac{\psi_\theta}{r} \right) \quad (18)$$

$$\varepsilon_{rz} = \left(1 - \frac{z^2}{h^2} \right) \left(\psi_r + \frac{\partial w}{\partial r} \right) \quad (19)$$

$$\varepsilon_{\theta z} = \left(1 - \frac{z^2}{h^2} \right) \left(\psi_\theta + \frac{\partial w}{r \partial \theta} \right) \quad (20)$$

با توجه به قانون هوک تعمیم یافته، معادلات ساختاری برای ورق با در نظر گرفتن تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم عبارتند از:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{rr}^h \\ \sigma_{\theta\theta}^h \\ \sigma_{r\theta}^h \\ \sigma_{rz}^h \\ \sigma_{\theta z}^h \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \varepsilon_{r\theta} \\ \varepsilon_{rz} \\ \varepsilon_{\theta z} \end{pmatrix} \quad (21)$$

که در رابطه بالا $Q_{11} = \frac{E(\theta, z)}{1-\nu^2}$ ، $Q_{12} = \nu Q_{11}$ و $Q_{33} = \frac{E(\theta, z)}{2(1+\nu)}$ ، مدول الاستیسیته با تابعیت θ, z ، ضریب پواسون ورق و بالانویس h نشان‌دهنده خواص ورق تابعی هستند. توزیع تنش در لایه‌های پیزوالکتریک به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\begin{pmatrix} \sigma_{rr}^p \\ \sigma_{\theta\theta}^p \\ \sigma_{r\theta}^p \\ \sigma_{rz}^p \\ \sigma_{\theta z}^p \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \varepsilon_{r\theta} \\ \varepsilon_{rz} \\ \varepsilon_{\theta z} \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & e_{31} \\ 0 & 0 & e_{31} \\ 0 & 0 & 0 \\ e_{15} & 0 & 0 \\ 0 & e_{15} & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} E_r \\ E_\theta \\ E_z \end{pmatrix} \quad (22)$$

که E_r, E_θ, E_z به ترتیب شدت میدان الکتریکی در راستاهای

$$V_{c2} = \left[\left(0.5 + \left(\frac{z}{h} \right) \right)^{\beta_z} \right] \left[\left(\frac{\theta}{a} \right)^{\beta_\theta} \right] \quad (4)$$

$$V_{m1} = \left[1 - \left(0.5 + \left(\frac{z}{h} \right) \right)^{\beta_z} \right] \left[1 - \left(\frac{\theta}{a} \right)^{\beta_\theta} \right] \quad (5)$$

$$V_{m2} = \left[1 - \left(0.5 + \left(\frac{z}{h} \right)^{\beta_z} \right) \right] \left[\left(\frac{\theta}{a} \right)^{\beta_\theta} \right] \quad (6)$$

در روابط فوق مقادیر V بیانگر کسرهای حجمی، E و ρ مدول الاستیسیته و چگالی ورق، پانویس‌های m_1, m_2, c_1, c_2 به ترتیب بیانگر فلز نوع اول، دوم و سرامیک نوع اول و دوم هستند. همچنین β_z, β_θ ضرایب توانی کسر حجمی به ترتیب در راستای محیطی و ضخامت ورق هستند. استفاده از مدل فوق، ضمن امکان مدل‌سازی دقیق خواص مکانیکی ماده باعث جلوگیری از پیچیدگی روابط، در مقایسه با مدل‌هایی مانند موری-تانکا می‌گردد. با فرض تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم روابط جابه‌جایی ورق در دستگاه مختصات استوانه‌ای به صورت زیر بیان می‌شوند [۲۰].

$$u(r, \theta, z, t) = z \psi_r(r, \theta, t) - \frac{4}{3h^2} (z)^3 \left(\psi_r + \frac{\partial w}{\partial r} \right) \quad (7)$$

$$v(r, \theta, z, t) = z \psi_\theta(r, \theta, t) - \frac{4}{3h^2} (z)^3 \left(\psi_\theta + \frac{\partial w}{r \partial \theta} \right) \quad (8)$$

$$w(r, \theta, z, t) = w_0(r, \theta, t) \quad (9)$$

که u, v, w به ترتیب جابه‌جایی در راستای شعاعی، مماسی و عرضی بوده و ψ_r, ψ_θ به ترتیب شیب‌های عمودی بر صفحات میانی $z - r, z - \theta$ را نشان می‌دهند. روابط کرنش-جابه‌جایی با فرض تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم به صورت زیر است.

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r} \quad (10)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u}{r} + \frac{\partial v}{r \partial \theta} \quad (11)$$

$$\varepsilon_{r\theta} = \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial u}{r \partial \theta} - \frac{v}{r} \quad (12)$$

$$\varepsilon_{\theta z} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{r \partial \theta} \quad (13)$$

$$\varepsilon_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \quad (14)$$

$$\varepsilon_{zz} = 0 \quad (15)$$

با جانشانی روابط جابه‌جایی (۷) تا (۹) در روابط (۱۰) تا (۱۵) و فرض کرنش خطی روابط بین کرنش‌ها و جابه‌جایی‌های ورق به صورت زیر به دست می‌آیند.

که در آن u, v, w مشتق جابه‌جایی نسبت به زمان و ρ_p چگالی لایه پیزوالکتریک می‌باشد. انرژی پتانسیل به صورت زیر می‌باشد.

$$U_p = \frac{1}{2} \int_{r_i}^{r_o} \int_{0-h}^h \left(\sigma_r^h \varepsilon_{rr} + \sigma_\theta^h \varepsilon_{\theta\theta} + \tau_{rz}^h \varepsilon_{rz} + \tau_{\theta z}^h \varepsilon_{\theta z} + \tau_{r\theta}^h \varepsilon_{r\theta} \right) r dr d\theta dz + \int_{r_i}^{r_o} \int_{0-h}^H \left(\sigma_r^p \varepsilon_{rr} + \sigma_\theta^p \varepsilon_{\theta\theta} + \tau_{rz}^p \varepsilon_{rz} + \tau_{\theta z}^p \varepsilon_{\theta z} + \tau_{r\theta}^p \varepsilon_{r\theta} + D_r E_r + D_\theta E_\theta + D_z E_z \right) r dr d\theta dz \quad (31)$$

همچنین انرژی پتانسیل ناشی از استقرار ورق بر پایه الاستیک پسترناک به صورت زیر به دست می‌آید [۲۰].

$$U_{pk} = \frac{1}{2} \int_{r_i}^{r_o} \int_{0-h}^H \left\{ K_W(w)^2 + K_S \left[\left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{r \partial \theta} \right)^2 \right] \right\} r dr d\theta \quad (32)$$

که K_W ضریب سفتی وینکلر بستر پسترناک و K_S ضریب سفتی برشی بستر پسترناک است. انرژی پتانسیل کل ورق از مجموع دو رابطه (۳۱) و (۳۲) به صورت زیر به دست می‌آید.

$$U = U_p + U_{pk} \quad (33)$$

برای ساده‌سازی و راحتی در انجام و به کارگیری عملیات محاسباتی، مختصات استوانه‌ای (r, θ, z) به دستگاه بی‌بعد (r^*, θ^*, z^*) انتقال داده شده است. روابط انتقال به صورت زیر است.

$$r^* = \frac{2r/r_o - 1 + \zeta}{1 - \zeta}, \theta^* = \frac{2\alpha}{\theta} - 1, z^* = \frac{z}{h} \quad (34)$$

همچنین نسبت شعاع داخلی به شعاع خارجی ورق $\zeta = \frac{r_i}{r_o}$ ، نسبت ضخامت به شعاع خارجی ورق $\delta = \frac{h}{r_o}$ و نسبت ضخامت لایه ورق پیزوالکتریک به ضخامت لایه ورق مدرج $\eta = \frac{h_p}{r_o}$ است. حال اگر برای ارتعاش صفحه، حرکت هارمونیک با فرکانس ω را فرض کنیم، می‌توان هر یک از مؤلفه‌های بی‌بعد جابجایی را به صورت زیر نوشت.

$$\tilde{w}_0(r^*, \theta^*, t) = \tilde{w}_0(r^*, \theta^*) \cdot \sin \omega t \quad (35)$$

$$\tilde{\psi}_r(r^*, \theta^*, t) = \tilde{\psi}_r(r^*, \theta^*) \cdot \sin \omega t \quad (36)$$

$$\tilde{\psi}_\theta(r^*, \theta^*, t) = \tilde{\psi}_\theta(r^*, \theta^*) \cdot \sin \omega t \quad (37)$$

۳- روش ریلی-ریتز

روش ریلی-ریتز بر این اساس استوار است که توابع مجهول با یک تابع تقریبی تخمین زده شوند و پارامترهای آن تابع تقریبی با اکستریم کردن لاگرانژین به دست آیند. در این جا توابع مجهول به صورت $\tilde{\psi}_r, \tilde{\psi}_\theta, \tilde{w}_0$ هستند. شکل کلی این توابع را به فرم چندجمله‌ای فرض می‌کنیم. در حالت کلی، می‌توان نوشت.

شعاعی، مماسی و عرضی، $C_{11}, C_{12}, C_{22}, C_{33}, C_{44}, C_{55}$ ثوابت الاستیک ماده پیزوالکتریک تحت میدان الکتریکی ثابت و e_{31}, e_{15} ثوابت پیزوالکتریک هستند. بالانویس P نشان‌دهنده خواص لایه پیزوالکتریک می‌باشد. به منظور مدل کردن تابع پتانسیل الکتریکی در جهت ضخامت، از یک تابع سینوسی استفاده شده است. به کارگیری این تابع پتانسیل ضمن ارضا نمودن تقریبی معادله ماکسول، فرم معادلات حاکم را در مقایسه با توابع پتانسیل مربعی ساده‌تر می‌کند.

$$\Phi = \begin{cases} \varphi(r, \theta, t) \sin \left(\pi \left(\frac{z}{hp} - \frac{h}{hp} \right) \right) & , h \leq z \leq H \\ \varphi(r, \theta, t) \sin \left(-\pi \left(\frac{z}{hp} + \frac{h}{hp} \right) \right) & , -H \leq z \leq -h \end{cases} \quad (23)$$

مقدار $H = h + h_p$ به صورت H تعریف می‌شود همچنین $\varphi(r, \theta, t)$ پتانسیل الکتریکی در صفحه میانی لایه پیزوالکتریک است. با توجه به فرضیات ارائه شده در مبحث پیزوالکتریک چگالی میدان الکتریکی و چگالی شار الکتریکی به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$E_r = -\frac{\partial \Phi}{\partial r} = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} \sin \left(\pi \left(\frac{z}{hp} - \frac{h}{hp} \right) \right) \quad (24)$$

$$E_\theta = -\frac{\partial \Phi}{r \partial \theta} = -\frac{\partial \varphi}{r \partial \theta} \sin \left(\pi \left(\frac{z}{hp} - \frac{h}{hp} \right) \right) \quad (25)$$

$$E_z = -\frac{\partial \Phi}{\partial z} = -\frac{\pi}{hp} \varphi \cos \left(\pi \left(\frac{z}{hp} - \frac{h}{hp} \right) \right) \quad (26)$$

$$D_r = e_{15} \varepsilon_{rz} + \Xi_{11} E_r \quad (27)$$

$$D_\theta = e_{15} \varepsilon_{\theta z} + \Xi_{11} E_\theta \quad (28)$$

$$D_z = e_{15} (\varepsilon_r + \varepsilon_\theta) + \Xi_{33} E_z \quad (29)$$

که D_r, D_θ, D_z جابه‌جایی‌های الکتریکی لایه‌های پیزوالکتریک در راستاهای شعاعی، مماسی و عرضی و Ξ_{11}, Ξ_{33} ثوابت دی الکتریک هستند. روابط مربوط به انرژی جنبشی برای یک ورق قطاعی کوپل شده با ورق پیزوالکتریک که به صورت آزاد ارتعاش می‌نماید به شکل زیر است.

$$T = \frac{1}{2} \int_{r_i}^{r_o} \int_{0-h}^h \rho(x, z) (u^2 + v^2 + w^2) r dr d\theta dz + \int_{r_i}^{r_o} \int_{0-h}^H \rho_p (u^2 + v^2 + w^2) r dr d\theta dz \quad (30)$$

مقادیر فرکانس برحسب rad/s نسبت شعاع داخلی به شعاع خارجی ورق $\zeta = 0.16$ و نسبت ضخامت لایه ورق پیزوالکتریک به ضخامت لایه ورق مدرج $\eta = 0.1$ است در ادامه باتوجه به این مسئله که برای صحت سنجی مدل قطاعی ماده تابعی دوبعدی مرجع معتبری یافت نشد با فرض تغییر خواص تک بعدی ورق در جدول ۴ مقادیر را با مراجع مورد مقایسه قرار داده‌ایم. در جدول ۴ مقادیر فرکانس طبیعی ورق دایروی سوراخ‌دار مدرج یک بعدی کوپل با لایه پیزوالکتریک با شرایط مرزی دوطرف ساده با مراجع مقایسه شده است. در این جدول نسبت ضخامت به شعاع داخلی ورق $\delta = 0.04$ ، نسبت ضخامت لایه ورق پیزوالکتریک به ضخامت لایه ورق مدرج $\eta = 0.1$ ، نسبت شعاع داخلی به شعاع خارجی ورق $\zeta = 0.16$ ، زاویه قطاع $\alpha = 180^\circ$ و مقادیر فرکانس برحسب Hz است. همان طور که از این جداول ملاحظه می‌شود تطابق خوبی بین نتایج به دست آمده از این تحقیق و نتایج مراجع وجود دارد و تا حد قابل قبولی می‌توان به روش حل و صحت محاسبات صورت گرفته تکیه نمود. در جداول ۵ و ۶ مقادیر فرکانس طبیعی اول ورق قطاعی تابعی دوبعدی کوپل با پیزوالکتریک مسقر بر بستر الاستیک بر حسب rad/s به ازای تغییرات پارامترهای مختلف به ترتیب برای زوایای قطاع 30° ، 45° و 60° در جدول ۵ و زوایای قطاع 90° ، 180° و 270° ، در جدول ۶ برای شرایط مرزی چهار طرف ساده ارائه شده است. در این جدول نسبت ضخامت به شعاع خارجی ورق $\delta = 0.04$ ، نسبت ضخامت لایه ورق پیزوالکتریک به ضخامت لایه ورق مدرج $\eta = 0.1$ و نسبت شعاع داخلی به شعاع خارجی ورق $\zeta = 0.16$ است. همانطور که از نتایج به دست آمده مشخص است با افزایش ضرایب سختی بستر مقادیر فرکانس افزایش می‌یابد که نرخ افزایش فرکانس به ازای افزایش ضریب بستر برشی بیشتر خواهد بود. همچنین در خصوص تغییرات مقادیر فرکانس به ازای ضرایب توانی کسر حجمی (β_z, β_θ) می‌توان گفت افزایش این مقادیر باعث کاهش مقادیر فرکانس طبیعی ورق می‌شود زیرا با افزایش β_z به ازای β_θ ثابت از میزان سرامیک ورق کاسته می‌شود و درصد فلز در ورق افزایش می‌یابد به نحوی که به برای $\beta_z \rightarrow \infty$ درصد سرامیک صفر و درصد فلز 100% است. بنابراین با این تغییرات از میزان صلبیت ورق کاسته می‌شود و مقادیر فرکانس با کاهش روبرو می‌شود. به طریقه مشابه می‌توان بیان نمود که با افزایش β_θ به ازای $\beta_z = 0$ از میزان سرامیک نوع دوم (که دارای صلبیت بیشتری است) در ورق کاسته می‌شود و به درصد سرامیک نوع دوم در ورق افزوده می‌شود. به نحوی که به برای $\beta_\theta \rightarrow \infty$ به ازای $\beta_z \rightarrow \infty$ درصد سرامیک نوع دوم صفر و درصد سرامیک نوع اول 100% است. در نتیجه با افزایش β_θ از میزان صلبیت ورق کاسته می‌شود و مقادیر فرکانس با کاهش روبرو می‌شود. در جداول ۷ و ۸ نیز مقادیر فرکانس طبیعی اول ورق قطاعی تابعی دوبعدی کوپل با پیزوالکتریک مسقر بر بستر الاستیک به ترتیب برای نسبت شعاع داخلی به شعاع خارجی ورق $\delta = 0.04$ و $\delta = 0.008$ بر حسب rad/s به ازای تغییرات پارامترهای مختلف به ازای شرایط مرزی چهارطرف ساده ارائه شده است. در این جدول

$$\bar{w}_0^*(r^*, \theta^*) = F_1(r^*, \theta^*) \cdot \sum_{i=0}^{N_1} \sum_{j=0}^i a_{ij} (r^*)^j (\theta^*)^{i-j} \quad (38)$$

$$\bar{\psi}_r^*(r^*, \theta^*) = F_2(r^*, \theta^*) \cdot \sum_{i=0}^{N_2} \sum_{j=0}^i b_{ij} (r^*)^j (\theta^*)^{i-j} \quad (39)$$

$$\bar{\psi}_\theta^*(r^*, \theta^*) = F_3(r^*, \theta^*) \cdot \sum_{i=0}^{N_3} \sum_{j=0}^i c_{ij} (r^*)^j (\theta^*)^{i-j} \quad (40)$$

که $N = \frac{(i+1)(i+2)}{2}$ - j جمله‌ای $F_i(r^*, \theta^*)$ ، برای ارضای شرایط مرزی تکیه‌گاهی چهارطرف ساده به صورت زیر است.

$$F_1(r^*, \theta^*) = [(r^*)^2 - 1][(\theta^*)^2 - 1] \quad (41)$$

$$F_2(r^*, \theta^*) = [(\theta^*)^2 - 1] \quad (42)$$

$$F_3(r^*, \theta^*) = [(r^*)^2 - 1] \quad (43)$$

فانکشنال انرژی به صورت زیر خواهد بود.

$$\Pi = U_{\max} - T_{\max} \quad (44)$$

در عبارت فوق، U_{\max}, T_{\max} تابعی از پارامترهای مجهول a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} و خواهد بود. با استفاده از اصل همبیتون، برای مینیمم کردن لاگرانژین باید از آن نسبت به پارامترهای مجهول مشتق گرفت و برابر صفر قرار داد.

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_{ij}} = 0, \frac{\partial \Pi}{\partial b_{ij}} = 0, \frac{\partial \Pi}{\partial c_{ij}} = 0 \quad (45)$$

مجموعه معادلات اخیر در واقع دستگاه معادلاتی است که شکل کلی زیر را داراست.

$$([K] - \omega^2 [M]) \{A\} = 0 \quad (46)$$

که در رابطه اخیر، A بردار پارامترهای مجهول است. K و M ماتریس‌های سختی و جرم سیستم ارتعاشی هستند. معادله (۴۶) یک مسئله مقدار ویژه تعمیم یافته است که حل آن منجر به حاصل شدن فرکانس طبیعی ورق می‌گردد.

۴- صحت‌سنجی و نتایج

برای صحت سنجی نتایج حاصل شده و روش حل بکاربرده شده نتایج با مراجع مختلف مقایسه شده است. در جدول ۱ خواص مواد به کار رفته در این تحقیق و مراجع لیست شده است. در جداول ۲ و ۳ مقادیر فرکانس طبیعی ورق دایروی سوراخ‌دار ایزوتروپیک کوپل با لایه پیزوالکتریک برای دو شرط مرزی به ترتیب برای نسبت ضخامت به شعاع خارجی $\delta = 0.16$ و $\delta = 0.05$ با نتایج روش اجزاء محدود ارائه شده در مراجع [۲۱] و [۲۲] صحت سنجی شده است. نتایج مرجع [۲۱] بر اساس تئوری مرتبه اول برشی و نتایج مرجع [۲۲] بر اساس تحلیل سه‌بعدی به دست آمده‌اند. در این جدول

جدول ۱: خواص مواد به کار رفته
Table 1. Properties of 2D-FG material

پیزوالکتریک												
چگالی (kg/m ³)	ثوابت دی الکتریک (nC/Vm)			ثوابت پیزوالکتریک (C/m ²)			مدول الاستیسیته (GPa)					
	Ξ_{33}	Ξ_{31}	Ξ_{11}	e_{15}	e_{31}	e_{33}	C_{11}	C_{12}	C_{13}	C_{33}	C_{55}	
۷۵۰۰	۵,۸۴۱	۶,۴۶	۷,۱۲۴	۱۰,۵	-۴/۱	۱۴,۱	۷۳	۷۱	۲۶	۱۱۵	۱۳۲	PZT-4
۷۷۵۰	۷,۳۵	۸,۱۱	۸,۱۱	۱۲,۳	-۵/۴	۱۵,۸	۷۵,۴	۷۵,۹	۲۱,۱	۱۱۱	۱۲۱	PZT-A5

ماده تابعی مدرج دو بعدی				
مواد	موقعیت	E (GPa)	ρ (kg/m ³)	ν
AL	M_1	۷۰	۲۷۰۲	۰/۲۸
Si ₃ N ₄	C_1	۳۲۲,۲۷	۲۳۷۰	۰/۲۴
SiC	C_2	۴۲۷	۳۱۰۰	۰/۱۷
Ti-6AL-4V	M_2	۱۱۵	۲۷۱۵	۰/۳

جدول ۳: صحت سنجی مقادیر فرکانس طبیعی بر حسب rad/s برای ورق دایروی سوراخ دار ایزوتروپیک کوپل با لایه پیزوالکتریک ($\zeta = 0.16, \eta = 0.1, \delta = 0.05$)

Table 3. Validation of the natural frequency values (rad/s) for isotropic annular sector plates coupled with piezoelectric layers ($\zeta = 0.16, \eta = 0.1, \delta = 0.05$)

شرایط مرزی		نتایج	
SC	SS	مرجع [۲۰]	نتایج حاضر
۶۹۰۷	۵۴۰۶	۶۴۳۳	۴۴۵۰
۶۸۳۸	۵۳۶۹	۶۳۳۲	۴۳۶۱
۷۱۱۹	۵۶۱۰	۶۳۵۶	۴۴۳۴

جدول ۲: صحت سنجی مقادیر فرکانس طبیعی بر حسب rad/s برای ورق دایروی سوراخ دار ایزوتروپیک کوپل با لایه پیزوالکتریک ($\zeta = 0.16, \eta = 0.1, \delta = 0.016$)

Table 2. Validation of the natural frequency values (rad/s) for isotropic annular sector plates coupled with piezoelectric layers ($\zeta = 0.16, \eta = 0.1, \delta = 0.016$)

شرایط مرزی		نتایج	
SC	SS	مرجع [۲۰]	نتایج حاضر
۲۴۹۵	۱۹۵۷	۲۳۰۶	۱۵۸۳
۲۴۴۸	۱۹۲۲	۲۲۶۰	۱۵۵۱
۲۴۹۸	۱۹۷۰	۲۲۹۰	۱۶۰۲

پارامترهای مختلف برای $(K_w, K_s) = (50 \text{ MN/m}^2, 50 \text{ MN/m}^2)$ و $(\beta_z, \beta_\theta) = (2, 2)$ نمایش داده شده است. در این نمودار مشاهده می شود با افزایش مقادیر نسبت ضخامت لایه ورق پیزو به ضخامت لایه ورق مدرج η فرکانس افزایش می یابد که شیب نمودار افزایشی تقریباً به فرم خطی است.

جدول ۴: صحت سنجی مقادیر فرکانس طبیعی بر حسب Hz برای ورق دایروی سوراخ دار مدرج یک بعدی کوپل با لایه پیزوالکتریک برای شرط مرزی SS ($\delta = 0.04, \zeta = 0.16, \eta = 0.1, \alpha = 180^\circ$)

Table 4. Validation of the natural frequency values (Hz) for 1D-FG annular sector plates coupled with piezoelectric layers for SS boundary conditions ($\delta = 0.04, \zeta = 0.16, \eta = 0.1, \alpha = 180^\circ$)

β_z				نتایج
۱۰	۵	۱	۰	
۲۱۰,۴۱	۲۱۲,۱۲	۲۱۴,۵۹	۲۱۹,۵۸	مرجع [۲۳]
۲۱۰,۵۳	۲۱۱,۲۹	۲۱۵,۱۳	۲۲۰,۶۰	مرجع [۲۴]
۲۱۱,۶۵	۲۱۲,۳۲	۲۱۵,۷۹	۲۲۱	مرجع [۲۵]
۲۱۲,۰۱	۲۱۲,۷۵	۲۱۶,۹۸	۲۲۱,۳۵	نتایج حاضر

$(\beta_z, \beta_\theta) = (2, 2)$ و $(K_w, K_s) = (50 \text{ MN/m}^2, 50 \text{ MN/m}^2)$ است همانطور که از نتایج به دست آمده مشخص است با افزایش مقادیر η, δ فرکانس افزایش می یابد همچنین با افزایش نسبت شعاع داخلی به شعاع خارجی ورق ζ فرکانس طبیعی با کاهش روبروست. در انتها در خصوص تأثیر زوایای قطاع بر مقادیر فرکانس طبیعی در هر دو جدول مشاهده می شود افزایش زوایای قطاع باعث کاهش فرکانس طبیعی ورق می شود. زیرا با افزایش زاویه قطاع، صلبیت کاهش یافته و افزایش جرم مؤثر ورق صورت می گیرد که نهایتاً این عوامل باعث کاهش فرکانس طبیعی ورق می گردد. در شکل ۳ مقادیر فرکانس ورق قطاعی سوراخ دار تابعی دوبعدی کوپل با پیزوالکتریک مسقر بر بستر الاستیک برای تغییرات پارامترهای ضرایب بستر و زوایای قطاع برای مقادیر $(\beta_z, \beta_\theta) = (1, 1)$ و $\zeta = 0.16$ و $\eta = 0.1$ و $\delta = 0.04$ نمایش داده شده است.

مشاهده می شود که به ازای افزایش زاویه قطاع مقادیر فرکانس کاهش روبرو می شود و از شیب نزولی این نمودار بتدریج کاسته می شود. به نحوی که برای زوایای بیشتر از ۱۲۰ تغییرات فرکانس ناچیز است. در شکل ۴ مقادیر فرکانس ورق قطاعی سوراخ دار تابعی دوبعدی کوپل با پیزوالکتریک مسقر بر بستر الاستیک بر حسب rad/s برای تغییرات

جدول ۶: مقادیر فرکانس ورق قطاعی سوراخ‌دار تابعی دوبعدی کوپل با پیزوالکتریک مسقر بر بستر الاستیک بر حسب rad/s برای تغییرات پارامترهای مختلف ($\delta = 0.04, \zeta = 0.16, \eta = 0.1$)

Table 6. The frequency values (rad/s) of the 2D-FG annular sector plate coupled with piezoelectric layers resting on elastic foundation for various parameters ($\delta = 0.04, \zeta = 0.16, \eta = 0.1$)

α (deg)			(β_z, β_θ)	K_w, K_s (MN/m ²)
۲۷۰	۱۲۰	۹۰		
۷۳۹۷,۲۳	۸۸۴۴,۵۱	۸۹۸۴,۴۳	(۰,۰)	(۰,۰)
۸۸۵۶,۷۹	۱۰۲۴۵,۲	۱۰۳۷۶,۴		
۱۰۱۰۶	۱۱۴۷۴,۷	۱۱۶۰۵,۳	(۰,۲۰)	(۰,۲۰)
۱۰۱۵۹,۱	۱۱۹۰۷,۶	۱۲۰۷۱,۸		
۶۳۳۹,۳۷	۷۵۸۶,۴۲	۷۷۰۲,۲۷	(۰,۵۰)	(۰,۵۰)
۷۷۰۶,۴۴	۸۸۹۹,۴۳	۹۰۱۲,۲۴		
۸۸۶۵,۱۵	۱۰۰۴۲,۲	۱۰۱۵۴,۶	(۰,۹۰)	(۰,۹۰)
۸۹۱۴,۱۸	۱۰۴۴۲,۷	۱۰۵۸۶,۳		
۸۸۵۶,۷۹	۶۹۵۹,۷۲	۷۰۶۵,۵۳	(۱,۰)	(۱,۰)
۷۱۴۳,۶۵	۸۲۳۱,۸۴	۸۳۳۴,۸۴		
۸۲۵۶,۸	۹۳۳۲,۱۲	۹۴۳۴,۹۱	(۱,۲۰)	(۱,۲۰)
۸۳۰۳,۷۹	۹۷۱۶,۶۷	۹۸۴۹,۴		
۴۸۱۵,۸۲	۵۷۵۷,۵۲	۵۸۴۵,۰۵	(۱,۵۰)	(۱,۵۰)
۷۵۰۶,۵۳	۸۳۹۷,۹۵	۸۴۸۳,۶۱		
۹۴۶۰,۶۵	۱۰۳۸۷,۶	۱۰۴۷۷,۵	(۱,۹۰)	(۱,۹۰)
۹۵۳۹,۸۶	۱۱۰۴۸,۵	۱۱۱۹۱		

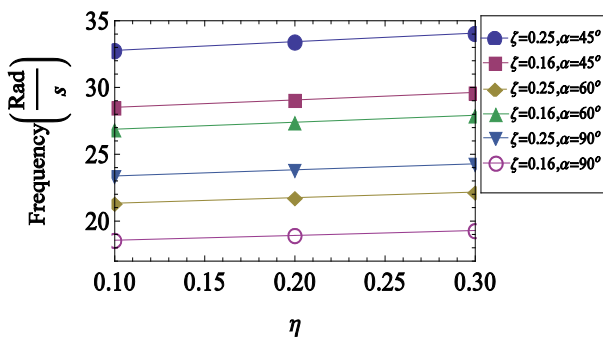


Fig. 4. The frequency values of the 2D-FG annular sector plate coupled with piezoelectric layers resting on elastic foundation (rad/s) for various parameters $(\beta_z, \beta_\theta) = (2, 2), (K_w, K_s) = (50 \text{ MN/m}^2, 50 \text{ MN/m}^2)$

شکل ۴: مقادیر فرکانس ورق قطاعی سوراخ‌دار تابعی دوبعدی کوپل با پیزوالکتریک مسقر بر بستر الاستیک بر حسب rad/s برای تغییرات پارامترهای مختلف

$$(\beta_z, \beta_\theta) = (2, 2), (K_w, K_s) = (50 \cdot \text{MN/m}^2, 50 \cdot \text{MN/m}^2)$$

جدول ۵: مقادیر فرکانس ورق قطاعی سوراخ‌دار تابعی دوبعدی کوپل با پیزوالکتریک مسقر بر بستر الاستیک بر حسب rad/s برای تغییرات پارامترهای مختلف ($\delta = 0.04, \zeta = 0.16, \eta = 0.1$)

Table 5. The frequency values (rad/s) of the 2D-FG annular sector plate coupled with piezoelectric layers resting on elastic foundation for various parameters ($\delta = 0.04, \zeta = 0.16, \eta = 0.1$)

α (deg)			(β_z, β_θ)	K_w, K_s (MN/m ²)
۶۰	۴۵	۳۰		
۱۲۲۵۱,۵	۱۵۵۱۸,۶	۲۲۰۵۲,۷	(۰,۰)	(۰,۰)
۱۳۶۳۵,۲	۱۷۰۱۷,۴	۲۳۷۶۲		
۱۴۸۹۳,۹	۱۸۳۶۵,۴	۲۵۳۶۹,۳	(۰,۲۰)	(۰,۲۰)
۱۶۱۱۱	۲۰۲۵۸	۲۸۴۶۹,۶		
۱۰۵۱۴,۸	۱۷۰۱۷,۴	۱۸۹۳۵	(۰,۵۰)	(۰,۵۰)
۱۱۸۱۸,۱	۱۴۷۳۴,۴	۲۰۵۵۵,۹		
۱۲۹۹۱,۴	۱۵۹۹۲,۷	۲۲۰۵۸	(۰,۹۰)	(۰,۹۰)
۱۴۱۱۹,۶	۱۷۷۴۸,۷	۲۴۹۳۶,۹		
۹۶۳۵,۶۶	۱۲۲۳۵,۸	۱۷۳۳۷,۶	(۱,۰)	(۱,۰)
۱۰۹۰۱	۱۳۵۷۳,۲	۱۸۹۱۴		
۱۲۰۳۴,۱	۱۴۷۹۰,۲	۲۰۳۶۸,۸	(۱,۲۰)	(۱,۲۰)
۱۳۱۱۹,۷	۱۶۴۸۱,۸	۲۳۱۴۴,۷		
۷۹۷۱,۲۲	۱۰۱۲۲,۲	۱۴۳۴۲,۷	(۱,۵۰)	(۱,۵۰)
۱۰۶۶۷,۷	۱۳۰۰۸,۴	۱۷۷۸۳,۲		
۱۲۸۰۸,۶	۱۵۳۶۱,۵	۲۰۶۵۸,۴	(۱,۹۰)	(۱,۹۰)
۱۴۷۲۶,۷	۱۸۳۹۲,۶	۲۵۶۹۸		

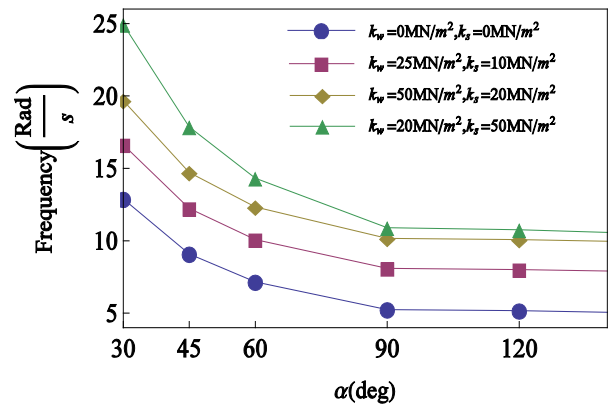


Fig. 3. The frequency values of the 2D-FG annular sector plate coupled with piezoelectric layers resting on elastic foundation for variation of the foundation coefficients and sector angles

$$(\beta_z, \beta_\theta) = (1, 1), \zeta = 0.16, \eta = 0.1, \delta = 0.004$$

شکل ۳: مقادیر فرکانس ورق قطاعی سوراخ‌دار تابعی دوبعدی کوپل با پیزوالکتریک مسقر بر بستر الاستیک برای تغییرات پارامترهای ضرایب بستر و زوایای قطاع

$$(\beta_z, \beta_\theta) = (1, 1), \zeta = 0.16, \eta = 0.1, \delta = 0.004$$

جدول ۸: مقادیر فرکانس ورق قطاعی سوراخ‌دار تابعی دوبعدی $(\beta_z, \beta_\theta) = (2, 2)$ کوپل با پیزوالکتریک مسقر بر بستر الاستیک بر حسب α برای تغییرات پارامترهای مختلف $(K_w, K_s) = (50 \text{ MN/m}^2, 50 \text{ MN/m}^2), \delta = 0.008, \zeta = 0.16, \eta = 0.1$

Table 8. The frequency values of the 2D-FG annular sector plate coupled with piezoelectric layers resting on elastic foundation for various parameters $(K_w, K_s) = (50 \text{ MN/m}^2, 50 \text{ MN/m}^2), \delta = 0.008, (\beta_z, \beta_\theta) = (2, 2)$

$\zeta = 0.16$	$\zeta = 0.25$	$\zeta = 0.5$	$\alpha(\text{deg})$	η
۱۹۷۱۷,۷	۲۲۶۶۹,۵	۳۱۸۹۳,۱		۰/۱
۲۰۱۰۴,۳	۲۳۱۱۴	۳۲۵۱۸,۴	۴۵	۰/۲
۲۰۴۹۱	۲۳۵۵۸,۵	۳۳۱۴۳,۸		۰/۳
۱۶۱۶۲,۲	۱۸۵۸۱,۶	۲۶۱۴۲		۰/۱
۱۶۴۷۹,۱	۱۸۹۴۶	۲۶۶۵۴,۶	۶۰	۰/۲
۱۶۷۹۶	۱۹۳۱۰,۳	۲۷۱۶۷,۲		۰/۳
۱۲۸۳۳,۸	۱۴۷۵۵	۲۰۷۵۸,۵		۰/۱
۱۳۰۸۵,۵	۱۵۰۴۴,۴	۲۱۱۶۵,۵	۹۰	۰/۲
۱۳۳۳۷,۱	۱۵۳۳۳,۷	۲۱۵۷۲,۵		۰/۳
۱۰۰۰۹	۱۲۶۴۲,۹	۲۰۷۷۵,۲		۰/۱
۱۰۲۰۵,۲	۱۲۸۹۰,۸	۲۱۱۸۲,۶	۱۲۰	۰/۲
۱۰۴۰۱,۵	۱۳۱۳۸,۷	۲۱۵۸۹,۹		۰/۳

جدول ۷: مقادیر فرکانس ورق قطاعی سوراخ‌دار تابعی دوبعدی $(\beta_z, \beta_\theta) = (2, 2)$ کوپل با پیزوالکتریک مسقر بر بستر الاستیک بر حسب α برای تغییرات پارامترهای مختلف $(K_w, K_s) = (50 \text{ MN/m}^2, 50 \text{ MN/m}^2), \delta = 0.004, \zeta = 0.16, \eta = 0.1$

Table 7. The frequency values (rad/s) of the 2D-FG annular sector plate coupled with piezoelectric layers resting on elastic foundation for various parameters $(K_w, K_s) = (50 \text{ MN/m}^2, 50 \text{ MN/m}^2), \delta = 0.004, (\beta_z, \beta_\theta) = (2, 2)$

$\zeta = 0.16$	$\zeta = 0.25$	$\zeta = 0.5$	$\alpha(\text{deg})$	η
۱۰۹۲۰,۶	۱۲۵۵۵,۴	۱۸۶۲۹,۶		۰/۱
۱۱۱۳۴,۷	۱۲۸۰۱,۶	۱۸۹۸۷,۴	۴۵	۰/۲
۱۱۳۴۸,۸	۱۳۰۴۷,۷	۱۹۳۵۲,۶		۰/۳
۸۹۵۱,۳۳	۱۰۲۹۱,۴	۱۵۲۶۴,۱		۰/۱
۹۱۲۶,۸۵	۱۰۴۹۳,۱	۱۵۵۶۳,۵	۶۰	۰/۲
۹۳۰۲,۳۷	۱۰۶۹۴,۹	۱۵۸۶۲,۸		۰/۳
۷۱۰۷,۹۴	۸۱۷۲,۰۱	۱۲۱۲۰		۰/۱
۷۲۴۷,۳۲	۸۳۳۲,۲۴	۱۲۳۵۸,۵	۹۰	۰/۲
۷۳۸۶,۶۹	۸۴۹۲,۴۸	۱۲۵۹۶,۱		۰/۳
۵۴۴۹,۶	۶۸۸۳,۷۱	۱۱۹۹۶,۶		۰/۱
۵۵۵۶,۴۶	۷۰۱۸,۶۸	۱۲۳۳۱,۶	۱۲۰	۰/۲
۵۶۶۳,۳۱	۷۱۵۳,۶۶	۱۲۶۶۶,۸		۰/۳

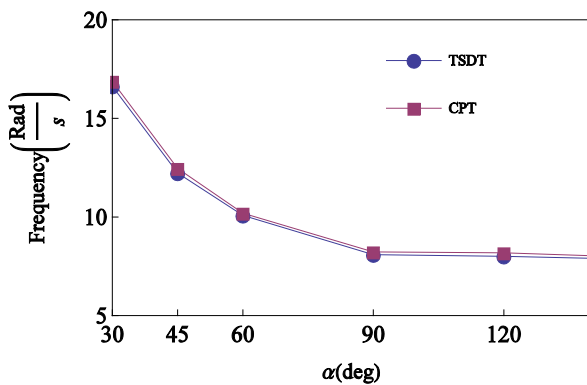


Fig. 6. The frequency values of 2D-FG annular sector plate coupled with piezoelectric layers resting on elastic foundation (rad/s) for various sector angle and theories

$(\beta_z, \beta_\theta) = (1, 1), \zeta = 0.16, (K_w, K_s) = (20 \text{ MN/m}^2, 10 \text{ MN/m}^2), \eta = 0.1, \delta = 0.004$

شکل ۶: مقادیر فرکانس ورق قطاعی سوراخ‌دار تابعی دوبعدی کوپل با پیزوالکتریک مسقر بر بستر الاستیک بر حسب α برای تغییرات زاویه قطاع برای تئوری‌های مختلف $\delta = 0.004$ و $\eta = 0.1$ $(\beta_z, \beta_\theta) = (1, 1), \zeta = 0.16, (K_w, K_s) = (20 \text{ MN/m}^2, 10 \text{ MN/m}^2)$

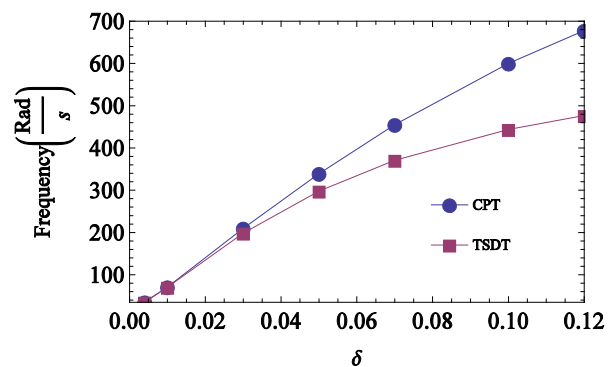


Fig. 5. The frequency values of 2D-FG annular sector plate coupled with piezoelectric layers resting on elastic foundation (rad/s) for various ratios of thickness to outer radius of the plate

$(K_w, K_s) = (20 \text{ MN/m}^2, 50 \text{ MN/m}^2), (\beta_z, \beta_\theta) = (0, 0), \alpha = 30^\circ, \zeta = 0.16, \eta = 0.1$

شکل ۵: مقادیر فرکانس ورق قطاعی سوراخ‌دار تابعی دوبعدی کوپل با پیزوالکتریک مسقر بر بستر الاستیک بر حسب α برای تغییرات نسبت ضخامت به شعاع خارجی ورق δ و $\eta = 0.1$ $(\beta_z, \beta_\theta) = (0, 0), \alpha = 30^\circ, \zeta = 0.16, \eta = 0.1, (K_w, K_s) = (20 \text{ MN/m}^2, 50 \text{ MN/m}^2)$

است. همانطور که در این شکل مشاهده می‌شود، با افزایش ضخامت ورق، اختلاف بین تئوری کلاسیک و مرتبه سوم برشی، افزایش پیدا می‌کند که علت این امر دقت بالاتر تئوری مرتبه سوم تغییر شکل برشی نسبت به تئوری کلاسیک برای بررسی رفتار ارتعاشی ورقهای ضخیم است.

در شکل ۱ مقادیر فرکانس ورق قطاعی سوراخ‌دار تابعی دوبعدی کوپل با پیزوالکتریک مسقر بر بستر الاستیک بر حسب α با ازای تغییرات نسبت ضخامت به شعاع خارجی ورق δ برای تئوری‌های تغییر شکل برشی مرتبه سوم ورق و تئوری کلاسیک ورق با فرضیات $(\beta_z, \beta_\theta) = (0, 0), \alpha = 30^\circ, \zeta = 0.16, \eta = 0.1, (K_w, K_s) = (20 \text{ MN/m}^2, 50 \text{ MN/m}^2)$ نمایش داده شده

- [3] R.D. Mindlin, Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates, *J. appl. Mech.*, 18 (1951) 31-38.
- [4] E. Reissner, The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates, *J. appl. Mech.*, (1945) A69-A77.
- [5] D. Zhou, S. Lo, Y. Cheung, 3-D vibration analysis of annular sector plates using the Chebyshev-Ritz method, *Journal of sound and vibration*, 320(1-2) (2009) 421-437.
- [6] D. Shi, X. Shi, W.L. Li, Q. Wang, J. Han, Vibration analysis of annular sector plates under different boundary conditions, *Shock and Vibration*, 2014 (2014).
- [7] Q. Wang, S. Quek, C. Sun, X. Liu, Analysis of piezoelectric coupled circular plate, *Smart Materials and Structures*, 10(2) (2001) 229-239.
- [8] X. Liu, Q. Wang, S. Quek, Analytical solution for free vibration of piezoelectric coupled moderately thick circular plates, *International Journal of Solids and Structures*, 39(8) (2002) 2129-2151.
- [9] S. Soni, C. Amba-Rao, Axisymmetric vibrations of annular plates of variable thickness, *Journal of Sound and Vibration*, 38(4) (1975) 465-473.
- [10] Y. Cheung, W. Kwok, Dynamic analysis of circular and sector thick, layered plates, *Journal of Sound and Vibration*, 42(2) (1975) 147-158.
- [11] S. Hosseini-Hashemi, H. Akhavan, H.R.D. Taher, N. Daemi, A. Alibeigloo, Differential quadrature analysis of functionally graded circular and annular sector plates on elastic foundation, *Materials & Design*, 31(4) (2010) 1871-1880.
- [12] S.H. Hashemi, H.R.D. Taher, M. Omid, 3-D free vibration analysis of annular plates on Pasternak elastic foundation via p-Ritz method, *Journal of Sound and Vibration*, 311(3-5) (2008) 1114-1140.
- [13] C. Huang, K. Ho, An analytical solution for vibrations of a polarly orthotropic Mindlin sectorial plate with simply supported radial edges, *Journal of sound and vibration*, 273(1-2) (2004) 277-294.
- [14] Y. Yang, K.P. Kou, V.P. Iu, C.C. Lam, C. Zhang, Free vibration analysis of 2D FG plates by a meshfree boundary-domain integral equation method, in: *Asia Pacific Congress on Computational Mechanics and International Symposium on Computational Mechanics*, 2013.
- [15] M. Ebrahimi, M. Najafizadeh, Free vibration analysis of two-dimensional functionally graded cylindrical shells, *Applied Mathematical Modelling*, 38(1) (2014) 308-324.
- [16] B.S. Aragh, H. Hedayati, Static response and free

در شکل ۶ مقادیر فرکانس ورق قطاعی سوراخدار تابعی دوبعدی کوپل با پیزوالکتریک مسقر بر بستر الاستیک بر حسب rad/s با ازای تغییرات زاویه قطاع برای تئوری‌های تغییر شکل برشی مرتبه سوم ورق و تئوری کلاسیک ورق با فرضیات $(K_{\theta}, K_r) = (25 \text{ MN/m}^2, 10 \text{ MN/m}^2)$, $\delta = 0.004$, $\eta = 0.1$ $(\beta_z, \beta_\theta) = (1, 1)$, $\zeta = 0.16$ همانطور که در این شکل مشاهده می‌شود، فرکانس‌های محاسبه شده بر اساس تئوری مرتبه سوم تغییر شکل برشی برای زوایای قطاعی مختلف، همواره کمتر از فرکانس‌های محاسبه شده بر اساس تئوری کلاسیک ورق است.

۵- نتیجه‌گیری

در این پژوهش به بررسی ارتعاشات آزاد ورق قطاعی تابعی مدرج دوبعدی کوپل با لایه‌های پیزوالکتریک مستقر بر بستر پسترناک با استفاده از روش ریلی ریتز و بر مبنای تئوری مرتبه سوم تغییر شکل برشی مورد بررسی قرار گرفت و مقادیر فرکانس به ازای تغییرات پارامترهای مختلف برای شرایط مرزی چهار طرف ساده محاسبه شد و به طور خلاصه نتایج زیر حاصل شد.

- مقادیر فرکانس، با افزایش زاویه قطاع کاهش می‌یابد.
- با افزایش ضرایب توانی کسر حجمی مقادیر فرکانس با کاهش روبرو می‌شود.
- با افزایش ضریب سختی وینکلر و ضریب سختی برشی مقادیر فرکانسی ورق افزایش می‌یابد.
- تأثیر ضریب سختی وینکلر به مراتب از تأثیر ضریب سختی برشی بر مقادیر فرکانسی ورق کمتر می‌باشد.
- با افزایش نسبت شعاع داخلی به شعاع خارجی ورق فرکانس طبیعی با کاهش روبروست.
- افزایش نسبت ضخامت به شعاع خارجی ورق منجر به افزایش مقادیر فرکانس طبیعی ورق می‌شود
- با افزایش نسبت ضخامت لایه ورق پیزوالکتریک به ضخامت لایه ورق مدرج، مقادیر فرکانس طبیعی ورق افزایش می‌یابد.
- با افزایش نسبت ضخامت ورق به شعاع خارجی، تأثیر استفاده از تئوری مرتبه سوم برای تعیین فرکانس‌های طبیعی در مقایسه با تئوری کلاسیک، بسیار قابل توجه است.

مراجع

- [1] J. Reddy, C.M. Wang, An overview of the relationships between solutions of the classical and shear deformation plate theories, *Composites Science and Technology*, 60(12-13) (2000) 2327-2335.
- [2] N. Phan, J. Reddy, Analysis of laminated composite plates using a higher-order shear deformation theory, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 21(12) (1985) 2201-2219.

- Journal of Sound and Vibration*, 281(1-2) (2005) 119-139.
- [22] C.-F. Liu, T.-J. Chen, Y.-J. Chen, A modified axisymmetric finite element for the 3-D vibration analysis of piezoelectric laminated circular and annular plates, *Journal of Sound and Vibration*, 309(3-5) (2008) 794-804.
- [23] S. Hosseini-Hashemi, M. Azimzadeh-Monfared, H.R.D. Taher, A 3-D Ritz solution for free vibration of circular/annular functionally graded plates integrated with piezoelectric layers, *International Journal of Engineering Science*, 48(12) (2010) 1971-1984.
- [24] F. Ebrahimi, A. Rastgoo, A. Atai, A theoretical analysis of smart moderately thick shear deformable annular functionally graded plate, *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 28(5) (2009) 962-973.
- [25] S.H. Hashemi, M. Es'haghi, M. Karimi, Closed-form vibration analysis of thick annular functionally graded plates with integrated piezoelectric layers, *International Journal of Mechanical Sciences*, 52(3) (2010) 410-428.
- vibration of two-dimensional functionally graded metal/ceramic open cylindrical shells under various boundary conditions, *Acta Mechanica*, 223(2) (2012) 309-330.
- [17] G. Nie, Z. Zhong, Axisymmetric bending of two-directional functionally graded circular and annular plates, *Acta Mechanica Solida Sinica*, 20(4) (2007) 289-295.
- [18] G. Nie, Z. Zhong, Dynamic analysis of multi-directional functionally graded annular plates, *Applied Mathematical Modelling*, 34(3) (2010) 608-616.
- [19] M. Asgari, M. Akhlaghi, Natural frequency analysis of 2D-FGM thick hollow cylinder based on three-dimensional elasticity equations, *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 30(2) (2011) 72-81.
- [20] S. Hosseini-Hashemi, M. Es'haghi, H.R.D. Taher, An exact analytical solution for freely vibrating piezoelectric coupled circular/annular thick plates using Reddy plate theory, *Composite Structures*, 92(6) (2010) 1333-1351.
- [21] W. Duan, S.T. Quek, Q. Wang, Free vibration analysis of piezoelectric coupled thin and thick annular plate,

برای ارجاع به این مقاله از عبارت زیر استفاده کنید:

Please cite this article using:

A. Bakhsheshy, H. Mahbadi, K. Khorshidi, Free Vibration Analysis of Two-Dimensional Functionally Graded Annular Sector Plates with Piezoelectric Layers Resting on Two-Parameter Elastic Foundation, *Amirkabir J. Mech. Eng.*, 51(1) (2018) 109-118.

DOI: 10.22060/mej.2017.12691.5413

