حل عددی انتگرالهای چندگانه برای تابع توزیع زمان تکمیل پروژه با استفاده از تعمیم فرمول کوادراتور گاوس و مقایسه با روشهای شبیه‌سازی مستقیم و شرطی

محمدتقی فاطمی قمی
دانشیار دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه صنعتی امیرکبیر

سید سعید هاشمین
عضوهیئت‌علمی دانشکده‌مهندسی صنایع، دانشگاه‌آزاداسلامی‌واحداردبیل

چکیــده:

شناخت تابع توزیع تکمیل شبکه می‌تواند اطلاعات مفیدی در اختیار بگذارد، اما تاکنون این شناخت در حالت کلی به صورت دقیق صورت نگرفته است و همواره با تخمین و تقریب همراه بوده است. در اینجا ابتدا شبکه‌های احتمالی به دو طبقه تقسیم شده و سپس با فرض اینکه توزیع زمان تکمیل شاخه‌های تشکیل دهنده شبکه پیوسته، مشخص، متنوع و مستقل از هم می‌باشند توزیع زمان شبکه برحسب توزیع زمان تکمیل شاخه‌ها به صورت یک رابطه که شامل یک یا چند انتگرال چندگانه می‌باشد بدست آمده است. رابطه نهایی بدست آمده در حالت کلی به صورت تحلیلی قابل حل نمی‌باشد؛ حل عددی آن نیز در حالت کلی چون انتگرال‌گیری روی مجموعه‌ای انجام می‌شود که به سهولت نمی‌توان از روی آن حدود انتگرالها را استخراج نمود، مشکل است. روشی پیشنهاد شده است تا بتوان رابطه نهایی را به رابطه‌ای با انتگرالهای معین و حدود مشخص تبدیل نمود، سپس فرمول کوادراتورگاوس برای حل عددی انتگرالهای چندگانه تعمیم داده شده است، تا در نهایت بتوان انتگرالها و در نتیجه تابع توزیع زمان تکمیل شبکه‌های احتمالی را محاسبه نمود. استفاده از دورن‌یابی لاگرانژ و ریشه‌های چند جمله‌ای چبیشف برای تقریب صورت کلی تابع توزیع زمان تکمیل شبکه، پیشنهاد شده است.

Numerical Solution of Multiple Integrals for Distribution Function of Project Completion Time Using Generalized Quadrature Formula and Comparison with Crude and Conditional Simulation

M.T. Fatemi Ghomi
Indus. Eng. Dept. Amirkabir Univ. of Tech.

S.S. Hashemin, M.Sc.
Indus. Eng. Dept. Islamic Azad Univ. Ardabil

ABSTRACT:

Although the acquisition of completion time distribution function of network can provide some useful data, this acquisition has not been exactly accomplished in this term, yet, instead it has always been performed with estimation and approximation.

Here, at first, stochastic networks are divided into two groups, then with this assumption that the completion time distribution of the branches that the network organizers are always continued, identified, varied and independent on each other, completion time distribution function of network has been found according to term of completion time distribution of branches as a relation which can be obtained as one or more multiple integral. In general term, the finally obtained relation is not solvable analytically. Again, talking in general, its numerical solution is not possible either, because the integration needs to be done on a set that extracting limits of which is not easy.

There has been a suggestion to change the final relation into a relation with definite integrals and identified limits. Then the Gaussian quadrature formula are generalized to numerical solution of multiple integrals. In this case, the final conclusion will be the calculation of integrals and the completion time distribution function of network.

Another suggestion is, using Lagrange Interpolation and the roots of Chebychev polynomials for approximation of general case of the completion time distribution function.

مقدمه

در دهه‌های اخیر برای آگاهی یافتن از زمان تکمیل شبکه‌های احتمالی، تلاشهای متعددی صورت گرفته است. این تلاشها به طور عمده در ۴ زمینه زیر بوده‌اند:

۱- تصحیح در تخمین تابع توزیع زمان تکمیل شاخه‌ها و کاهش خطای روشی که بر اساس قضیه حد مرکزی بنا شده است.

۲- یافتن توزیعات حدی برای شبکه‌ها و تخمینهای آماری از زمان تکمیل شبکه‌ها.

۳- استفاده از شبیه‌سازی مونت‌کارلو، ترکیب آن با روشهای تحلیلی و کاربرد تکنیکهای کاهش واریانس در این روشها.

۴- ارائه روشهای تحلیلی برای بدست آوردن تابع توزیع دقیق زمان تکمیل شبکه.

در زمینه اول کارهای زیر انجام شده است:

در سال ۱۹۶۴ Mac Crimmon و Ryavec [1] توزیع مثلثی را برای تخمین توزیع زمان شاخه‌ها پیشنهاد کردند. در سال ۱۹۷۳ Wallace , Kotain [2] توزیع نرمال بریده شده را برای تخمین زمان شاخه‌ها معرفی کردند. در سال ۱۹۷۳ Whitehouse [3] فرض توزیع بتا را مورد بررسی قرار داده و خطاهای حاصل از این فرض در روش PERT را ارائه نموده است. در سال ۱۹۷۵ Greig, Perry [4] با فرض اینکه توزیع زمان تکمیل شاخه‌ها بتا هستند، روابط تازه‌ای را برای تخمین میانگین و واریانس توزیع بتا ارائه کردند؛ که مزیت این روابط تنها بطور تجربی اثبات شده بود. در سال ۱۹۸۶ Sasieni [5] روابط جدیدی برای تخمین میانگین و واریانس توزیع بتا پیشنهاد نمود. در سال ۱۹۹۰ Chae [6] تخمینهای میانگین و واریانس توزیع بتا را با استفاده از نسبت Likelihood نما و میانه انجام داد. در سال ۱۳۶۹ دکتر فرهاد کیانفر [۳۲] توزیع زمان تکمیل هر شاخه را گاما فرض کرده و پارامترهای آنرا تخمین زده است، سپس مسیر بحرانی شبکه را به صورت احتمالی محاسبه کرده و توزیع احتمالی زمان کل شبکه را بدست آورده است، سپس توزیع گاما را به عنوان توزیع پیشین زمان هر شاخه، در نظر گرفته و با داشتن مقدار مشاهده شده برای هر شاخه توزیع پسین آنرا بدست آورده و مجدداً مسیر بحرانی و توزیع زمان تکمیل شبکه را مورد تجزیه و تحلیل قرار داده است. در سال ۱۹۹۱ Chengbin [7] روابط چندگانه‌ای برای تخمین میانگین توزیع بتا پیشنهاد نموده است، به طوری که مقادیر تخمینی m,b,a تعیین می‌کنند که استفاده از کدام رابطه بهتر است. درسال ۱۹۹۲ Williams [8] استفاده از توزیعات دیگر نظیر گاما را پیشنهاد کرده و فرض بتا بودن زمان شاخه‌ها را به دلیل اینکه خطای زیادی در روش PERT بوجود می‌آورد نامناسب تشخیص داده است.

در زمینه دوم کارهای زیر انجام گرفته است:

در سال ۱۹۶۱ Clark [9] با فرض نرمال بودن توزیع زمان تکمیل شاخه‌ها میانگین و واریانس زمان تکمیل شبکه را تخمین زد. در سال ۱۹۶۷ Elmaghraby [10] تقریبی برای میانگین زمان تکمیل شبکه‌های احتمالی ارائه داد. در سال ۱۹۷۱ P.R. Cleindorfer و G.B. [11] و شبکه‌های احتمالی با گرههای قطعی را به صورت حالت خاصی از شبکه‌های احتمالی با گرههای منطقی در نظر گرفته‌اند و با فرض گسسته بودن توزیع زمان شاخه‌ها و در نظر گرفتن توزیعاتی برای تأخیر در وقوع گرهها حدودی تقریبی برای زمان شروع یا ختم گرهها بدست آوردند. در سال ۱۹۷۶ Britney [12] تخمین نقطه‌ای بیزی را برای برنامه‌ریزی شبکه‌های احتمالی معرفی نمود. در سال ۱۹۸۳ Sculli [13] با فرض نرمال بودن توزیع زمان تکمیل شاخه‌ها تخمینهای بهتری برای میانگین و واریانس زمان تکمیل شبکه ارائه نمود. در سال ۱۹۸۵، Kamburowski [14] یک حد بالایی برای میانگین زمان تکمیل شبکه‌های احتمالی در حالتهای سری و موازی و برای توزیعات خاص ارائه کرد. در همان سال Kamburowski [15] مجدداً علاوه بر حد بالایی یک حد پایینی برای شبکه‌های احتمالی با توزیع نرمال معرفی

کرد. در سال ۱۹۸۶ Anklesarie, Drezner [16] زمان تکمیل مسیرهای مختلف در شبکه‌ها را متغیرهای تصادفی وابسته فرض نموده و با محاسبه کوواریانس هر زوج از آنها توزیع توأم آنها را تقریب زده و تخمینی برای تابع توزیع زمان تکمیل شبکه ارائه نموده است. در سال ۱۹۹۰ Sirvanci, Dodin [17] برای حالتهای خاصی که توزیع زمان شاخه‌ها همگی نمایی، گاما یا نرمال باشند توزیعات حدی را ارائه کردند.

در زمینه سوم کارهای زیر انجام شده است:

در سال ۱۹۶۳ Vanslyke [18] با استفاده از شبیه‌سازی مونت کارلو نشان داد که در حالت کلی تابع توزیع زمان تکمیل شبکه از توزیع نرمال تبعیت نمی‌کند وبدین وسیله خطای PERT کلاسیک را مورد بررسی قرار داد. در سال ۱۹۶۸، Perlas, Gavert [19] نشان دادند که واریانس محاسبه شده بوسیله شبیه‌سازی مونت کارلو بیشتر از مقدار حقیقی می‌باشد و با استفاده از اعداد تصادفی antithetic واریانس حاصل از روش شبیه‌سازی راکاهش داده و به مقدار واقعی‌نزدیکترساختند. درسال ۱۹۷۱ Garman, Burt [20] روش شبیه‌سازی مونت کارلو شرطی را برای کاهش اندازه نمونه انتخاب شده پیشنهادکرده و اعداد تصادفی antithetic را در این روش بکار بردند و نشان دادند که این روش نسبت به روش شبیه‌سازی مستقیم دقیق‌تر است. در سال ۱۹۷۹ Solberg, Pritsker, Sigal [21] نشان دادند که با استفاده از Cut Set می‌توان کاهشهای مشابهی در اندازه نمونه ایجاد کرد. در سال ۱۹۸۵ Goldstein, Saisi, Fisher [22] احتمال بحرانی بودن را برای مسیرهای مختلف شبکه تقریب زدند. در سال ۱۹۸۵ Fishman [23] استفاده از نظریه اعداد شبه تصادفی را به عنوان تکنیکی برای کاهش واریانس حاصل از شبیه‌سازی معرفی نمود.

در زمینه چهارم کارهای زیر انجام گرفته است:

در سال ۱۹۶۵ Martin [24] روشی برای محاسبه تابع چگالی زمان تکمیل شبکه ارائه کرد که در آن فرض شده بود توابع چگالی شاخه‌ها چندجمله‌ای هستند. وی الگوریتمی برای تبدیل یک شبکه شامل زیر شبکه‌هایی از چند شاخه سری و موازی به یک شاخه منفرد تشریح نمود که تابع چگالی آن شاخه مربوط به زمان تکمیل شبکه است.در سال ۱۹۶۶ Wortham و Hartly [25] طبقه‌بندی جدیدی از انواع شبکه‌ها تحت عنوان شبکه‌های متقاطع، غیرمتقاطع و متقاطع چندگانه ارائه کردند و نحوه محاسبه تابع توزیع در مدل ارائه شده توسط Martin را اصلاح نمودند. در سال ۱۹۶۹ Ringer [26] تقسیم‌بندی جدیدی از شبکه‌ها ارائه داد و تابع توزیع زمان تکمیل شبکه را برحسب توابع توزیع زمان شاخه‌ها بدست آورد، اما حل رابطه نهایی بدست آمده جز در موارد خاص بسیار مشکل بود. در سال ۱۳۶۸ محمدتقی فاطمی قمی و سعید حاجی ابراهیم زرگر [۳۲] با تعریف مناسبی از وضعیت و تبدیل شبکه احتمالی به زنجیره مارکف روشی ابداع کردند که تابع توزیع زمان تکمیل شبکه را برای حالتی که زمان تکمیل شاخه‌ها نمایی باشند به صورت دقیق ارائه می‌کرد. درسال ۱۹۹۱ Ord [27] برای شبکه‌هایی که زمان تکمیل شاخه‌های آنها یکنواخت و گسسته باشند یک روش Heuristic ارائه نمود که براساس این روش، تقریبی از زمان تکمیل شبکه بدست می‌آید. درسال ۱۹۹۲ Williams [28] ریسکهایی راکه در شبکه‌های احتمالی پیش می‌آید با توجه به احتمال بحرانی بودن مسیرها مورد بررسی قرار داد.

در اینجا با این فرض که تابع توزیع زمان تکمیل شاخه‌ها مستقل، پیوسته، مشخص و متنوع می‌باشند هدف محاسبه دقیقتر تابع توزیع زمان تکمیل شبکه‌های احتمالی بوسیله روشهای ریاضی می‌باشد. از دیدگاه تئوری احتمالات و آمار، مسأله را می‌توان به این صورت مطرح کرد که هدف محاسبه تابع توزیع ماکزیمم مجموعهایی از متغیرهای تصادفی مستقل، پیوسته و متنوع می‌باشد و البته روشن است که هرکدام از این مجموعها خود متغیرهای تصادفی هستند که ممکن است مستقل از هم نباشند.در اینجا با

محاسبه تابع توزیع زمان تکمیل شبکه برحسب توابع توزیع زمان تکمیل شاخه‌ها به صورت یک انتگرال چندگانه و معرفی طبقه‌بندی جدیدی از شبکه‌های احتمالی تجزیه و تحلیل دقیقتر این شبکه‌ها فراهم آمده است. این انتگرالها درحالت کلی به صورت تحلیلی قابل حل نمی‌باشند، زیراکه توابع زیر انتگرالها شکل معینی ندارند (همواره قابل انتگرال‌گیری نیستند).

همچنین انتگرال‌گیری روی مجموعه‌ای انجام می‌شود که همواره به سهولت نمی‌توان از روی آن حدود انتگرالها را استخراج نمود. با اثبات قضیه‌ای نشان داده شده است که می‌توان این انتگرالهای چندگانه را به انتگرالهای چندگانه معادلی با حدود معین تبدیل نمود و سپس انتگرال چندگانه تبدیل یافته را حل کرد. فرمول کوادراتورگاوس همواره به عنوان دقیق‌ترین روش عددی حل انتگرالهای یگانه معرفی شده است [29] اما حل عددی انتگرالهای چندگانه به طور مناسب (با محاسبات کمتر و دقت بیشتر) تنها با تعمیم فرمول کوادراتورگاوس عملی بود که این تعمیم در اینجا صورت گرفته و در نتیجه تقریب بسیار دقیقی از تابع توزیع زمان تکمیل شبکه بدست آمده است. در روشهای دسته اول علاوه بر خطای محسوس آنها فرض شده است که توابع توزیع زمان تکمیل شاخه‌ها در یک شبکه یکسان هستند که این فرض در روشهای دسته دوم نیز وجود دارند، خصوصاً که برای برخی توزیعات اصلاً روشی ارائه نشده است (مثلاً برای توزیع بتا) بنابراین هیچکدام از آنها قادر به حل مسأله مورد نظر ما که در آن فرض تنوع زمان تکمیل شاخه‌ها وجود دارد نیستند، تنها روش شبیه‌سازی مستقیم ازدسته سوم می‌تواند این نوع مسائل را حل نماید. روش شبیه‌سازی شرطی نیز در حالت خاصی پیشنهاد شده است که در اینجا با کاربرد فرمول کوادراتورگاوس در آن به صورت یک روش کلی که قادر به تجزیه و تحلیل شبکه‌های احتمالی با توزیعهای مستقل، مشخص، پیوسته و متنوع باشد درآمده است. به دلایل فوق نتایج حاصل از روش پیشنهادی در چندین مثال با روشهای شبیه سازی مستقیم و شبیه سازی شرطی از نظر دقت و سرعت مقایسه شده‌اند. همچنین نظریه اعداد تصادفی **antithetic** نیز در روشهای فوق بکار برده شده‌اند تا جوابها به مقادیر واقعی نزدیکتر باشند. مسائل متعددی در مهندسی صنایع وجود دارند که می‌توان آنها را بوسیله شبکه‌های احتمالی حتی با ابعاد کوچک مدلبندی کرده و مورد تجزیه و تحلیل قرار داد. نمونه‌ای از این مسائل نیز در انتها ذکر شده‌اند.

۱ـ یک روش تحلیلی برای محاسبه تابع توزیع زمان تکمیل شبکه

۱ـ۱ـ تعاریف مقدماتی و طبقه‌بندی شبکه‌ها

الف ـ هرگره در شبکه به صورت یک دایره و یک عدد نشان داده می‌شود. یک گره در شبکه شروع یا ختم یک یا چند شاخه در شبکه را نشان می‌دهد.

ب ـ یک شاخه بوسیله یک پاره خط که از دایره شروع و به یک دایره دیگر ختم می‌شود نشان داده می‌شود. جهت شروع جریان زمان بوسیله بردار نمایش داده می‌شود. هر شاخه نیز با یک عدد معرفی می‌شود.

ج ـ یک مسیر عبارتست از یک سری از شاخه‌های متوالی که از گره شروع شبکه شروع شده و به گره ختم شبکه ختم می‌شود.

د ـ یک شبکه حداقل دارای دو شاخه می‌باشد.

باتوجه به تعاریف مقدماتی فوق شبکه را می‌توان به دو طبقه زیر تقسیم نمود:

الف ـ شبکه‌های تفکیک‌پذیر

ب ـ شبکه‌های تفکیک‌ناپذیر

این شبکه‌ها به طور ساده به صورت زیر تعریف می‌شوند.

هرگاه مجموعه مسیرهای موجود در شبکه را بتوان به زیر مجموعه‌هایی افراز نمود به طوری که هر مسیر در زیر مجموعه‌های مختلف فقط در گرههای شروع و ختم شبکه مشترک باشند، آنگاه شبکه را تفکیک‌پذیر نامیده و می‌توان

آنرا به زیر شبکه‌هایی که هر کدام از زیر مجموعه‌های فوق‌الذکر معرف آنها هستند تجزیه کرد؛ در صورتیکه نتوان عمل فوق را انجام داد شبکه را تفکیک‌ناپذیر می‌نامیم.

در قسمتهای بعدی روشن خواهد شد که عمل محاسبه تابع توزیع زمان تکمیل شبکه تفکیک‌پذیر را می‌توان به محاسبه تابع توزیع زمان تکمیل زیر شبکه‌های حاصل از تفکیک تبدیل نمودو استدلال خواهد شد که این عمل موجب سهولت و تسریع عمل محاسبه می‌شود.

۱-۲ـ الگوریتمی تحلیلی برای محاسبه تابع توزیع زمان تکمیل شبکه

فرض کنید که شبکه‌ای دارای n شاخه و m مسیر باشد. زمان تکمیل ازطریق i امین مسیر به صورت زیر نشان داده می‌شود:

$$u_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ t_j$$

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{اگر فعالیت } j \text{ ام روی مسیر } i \text{ ام باشد.} \\ 0 & \text{اگر فعالیت } j \text{ ام روی مسیر } i \text{ ام نباشد.} \end{cases}$$

ماتریس $A_{m\times n}$ راکه a_{ij} ها مؤلفه‌های آن هستند تشکیل دهید.

مرحله ۱) قرار دهید $Q=\phi\ ,\ R=\phi\ ,\ S=\phi$ سپس یک ستون از A بنام ستون r_1 پیدا کنید به طوری که به ازای s_1، $a_{s_1r_1}=1$ و به ازای $i\neq s_1$ ، $a_{ir_1}=0$. سپس به ازای هر j اگر $a_{s_1j}=1$ آنگاه مقدار j را در R قرار دهید. همچنین فرض کنید $Q=\{r_1\}$ ، $S=\{s_1\}$ و شاخه r_1 را شاخه یگانه با رتبه یک بنامید. در این صورت تابع توزیع زمان تکمیل شبکه ازطریق مسیر s_1 با فرض ثابت بودن t_j هایی که $j\in R-Q$ برابر خواهد بود با:

$$F_{r_1}(t - \sum_{j\neq r_1} a_{s_1j}\ t_j)$$

سپس به مرحله ۲ بروید. اگر در این مرحله ستونی مانند r_1 پیدا نشد به مرحله ۳ بروید.

مرحله ۲) ستونی دیگر مانند r_2 پیدا کنید به طوری که

$$a_{s_2r_2}=1\ ,\ \forall i\neq s_2\ a_{ir2}=0\ ,\ s_2\notin S\ ,\ r_2\notin R$$

سپس به ازای هر j اگر $a_{s_3j}=1$ آنگاه مقدار j را در R قرار دهید همچنین s_2 را در S و r_2 را در Q قرار دهید و مجدداً شاخه r_2 راشاخه‌یگانه‌بارتبه‌یک‌بنامید.دراین‌صورت تابع توزیع زمان تکمیل شبکه ازطریق مسیر s_2 (با فرض ثابت بودن t_j هایی که $j\in R-Q$) برابر خواهد بود با $F_{r_2}(t - \sum_{j\neq r_2} a_{s_3j}\ t_j)$

سپس این مرحله را تکرار کنید تا جاییکه ستونی مانند r_2 یافت نشود. در این صورت به مرحله ۳ بروید.

مرحله ۳) ستونی مانند r_3 پیدا کنید به طوری که

$$a_{s_3r_3}=1, a_{s_4r_3}=1\ \ \forall i\neq s_3,s_4\ a_{ir_3}=0, s_3,s_4\notin S, r_3\notin R$$

سپس به ازای هر j اگر $a_{s_3j}=1$ یا $a_{s_4j}=1$ آنگاه مقدار j را در R قرار دهید، همچنین، s_3 و s_4 را در S و r_3 را در Q قرار دهید و شاخه r_3 را شاخه یگانه با رتبه ۲ بنامید. در این صورت تابع توزیع زمان تکمیل شبکه ازطریق مسیرهای s_3 و s_4 (با فرض ثابت‌بودن t_j هایی که $j\in R-Q$) برابرخواهدبودبا $F_{r_3}(a)$ که:

$$a = \min \begin{cases} t - \sum_{j\neq r_3} a_{s_3j}\ t_j \\ t - \sum_{j\neq r_3} a_{s_4j} \end{cases}$$

سپس این مرحله را تکرار کنید تا جائیکه ستونی مانند r_3 یافت نشود، در این صورت به مرحله ۴ بروید.

مرحله ۴) ستونی مانند r_4 پیدا کنید به طوری‌که:

$$a_{s_{4+1}}\ r_4= 1,\dots\ a_{s_{4+p}}\ r_4=1$$

$$\forall i\neq\ s_{4+1}\ ,\dots,\ s_{4+p}\ a_{ir4}=0,\ s_{4+1}\ ,\dots,\ s_{4+p}\ \notin S,\ r_4\notin R$$

و p کوچکترین مقدار ممکن را داشته باشد. سپس به ازای هر j اگر $a_{s4+1j}=1$ ... یا $a_{s4+pj}=1$ آنگاه j را در R قرار دهید $s_{4+1},\dots,s_{4+p}$ را در S و r_4 را در Q قرار دهید و شاخه r_4 را شاخه یگانه با رتبه P بنامید، در این صورت تابع توزیع زمان تکمیل شبکه از طریق مسیرهای $s_{4+1},\dots,s_{4+p}$ (با فرض ثابت بودن t_j هایی که $j\in R-Q$) برابر خواهد بود با:

$F_{r_4}(b)$ که

$$b = \underset{h}{\mathrm{Min}} \left\{ t - \sum_{j\neq r_4} a_{s_hj}\ t_j , h=4+1,\dots,4+p \right\}$$

سپس این مرحله را تکرار کنید تا جائیکه شرط توقف ارضا شود.

شرط توقف: در هریک از مراحل، اگر S برابر با مجموعه تمام مسیرهای شبکه یا R برابر با مجموعه تمام شاخه‌های شبکه باشد توقف کنید.

مرحله نهایی: پس از توقف، تابع توزیع زمان تکمیل شبکه ازطریق کل مسیرها با فرض ثابت بودن t_j هایی که $j \in R-Q$ عبارت خواهد بود از حاصل ضرب کلیه توابع توزیع تولید شده در مراحل مختلف الگوریتم، بنابراین می‌توان نوشت،

$$P_r\left\{\max_i u_i \le t \mid t_j, j \in R-Q\right\} = F(t \mid t_j, j \in R-Q)$$

حاصل ضرب توابع تولید شده درمراحل مختلف الگوریتم =

که t متغیر تصادفی زمان تکمیل شبکه می‌باشد. اما چون در واقع t_j هایی که $j \in R-Q$ ثابت نبوده و خود متغیرهای تصادفی هستند، برای محاسبه $Pr\{\max_i u_i \le t\} = F(t)$ باید رابطه زیر را حل نمود:

$$F(t) = \int \int_{\sigma} \dots \int \int F(t \mid t_j, j \in R-Q) \prod_{j \in R-Q} f_j(t_j)\, dt_j$$

$\sigma = \{ u_i \le t , i \in S \}$

۱-۴- رابطه بین بعد انتگرال و خصوصیات شبکه

قضیه ۱: تفاضل تعداد کل شاخه‌های شبکه و تعداد شاخه‌های یگانه برابر با بعد انتگرال است.

اثبات: عدد اصلی مجموعه R-Q با بعد انتگرال بدست آمده برابر می‌باشد، زیرا این مجموعه شامل اندیس متغیرهایی (شاخه‌هایی) است که انتگرال‌گیری روی آنها انجام می‌شود، اما این موضوع را به گونه دیگری نیز می‌توان بیان نمود. از آنجا که هر عضو Q به R نیز متعلق است، پس عدد اصلی R-Q برابر با تفاضل اعداد اصلی مجموعه‌های R و Q خواهد بود؛ اما پس از توقف الگوریتم عدد اصلی مجموعه R برابر با تعداد کل شاخه‌های شبکه و عدد اصلی مجموعه Q برابر با تعداد شاخه‌های یگانه می‌باشد. بنابراین بعد انتگرال برابر با تفاضل تعداد کل شاخه‌های شبکه و تعداد شاخه‌های یگانه می‌باشد.

قضیه ۲: معیارهای توقف مجموعه کل شاخه‌ها =R و مجموعه کل مسیرها =S با هم معادلند.

اثبات: فرض کنید که مجموعه کل مسیرها =S باشد و ستونی (شاخه‌ای) مانند r که متعلق به R نیست وجود داشته باشد، آنگاه در این ستون حداقل باید یک عنصر یک وجود داشته باشد. فرض کنید این عنصر یک در سطر s قرار داشته باشد، آنگاه اگر s متعلق به S باشد می‌بایست طبق الگوریتم به ازای هر j که $a_{sj}=1$ ، j در R قرار گیرد. اما چون $a_{sr}=1$ و r متعلق به R نیست، پس s نیز نمی‌تواند متعلق به S باشد که خلاف فرض است پس اگر مجموعه کل مسیرها =S باشد آنگاه مجموعه کل شاخه‌ها =R خواهد بود.

حال فرض کنید مجموعه کل شاخه‌ها =R ، وجود داشته باشد مسیری مانند s که متعلق به S نباشد. در این صورت اگر این مسیر دارای عنصری مانند $a_{sr}=1$ باشد که $r \in Q$ در این صورت در یکی از مراحل الگوریتم این مسیر حتماً در S قرار می‌گرفت. اما چون $s \notin S$ بنابراین تمام عنصرهای یک در این مسیر در ستونهایی قرار گرفته‌اند که متعلق به R-Q می‌باشند. بنابراین هر شاخه این مسیر حداقل به یک مسیر دیگر نیز باید تعلق داشته باشد بدون اینکه شاخه یگانه مسیرهای دیگر را شامل شود اما چنین ترکیبی از شاخه‌های دیگر مسیرها نمی‌تواند یک مسیر کامل ایجاد نماید. بنابراین اگر مجموعه کل شاخه‌ها =R نمی‌توان مسیری یافت که به S متعلق نباشد در نتیجه مجموعه کل مسیرها =S خواهد بود.

قضیه ۳: مجموع رتبه شاخه‌های یگانه برابر m است.

اثبات: چون در هر مرحله از الگوریتم به تعداد رتبه شاخه یگانه مسیرهایی از شبکه در مجموعه S قرار می‌گیرند، اگر با معیار مجموعه مسیرهای شبکه =S توقف کرده باشیم قضیه ثابت شده است. اما اگر با معیار مجموعه کل شاخه‌های =R توقف کرده باشیم فرض کنیم که مجموع رتبه شاخه‌های یگانه برابر m نباشد. در این صورت باید مسیری مانند s وجود داشته باشد که به S متعلق نیست. اما بنا به قضیه ۲ چنین مسیری نمی‌تواند وجود داشته باشد و مجموعه مسیرهای شبکه =S خواهد بود. بنابراین مجموع رتبه شاخه‌های یگانه برابر m می‌باشد.

نتیجه ۱: تفاضل n-N(Q) می‌تواند معرف پیچیدگی یا سادگی شبکه باشد که N(Q) عدد اصلی مجموعه Q است و روشن است که:

$1 \leq n - N(Q) \leq n-1$

$n-N(Q)$ طبق قضیه ۱ برابر با بعد انتگرال می‌باشد. پس هر قدر کوچک باشد انتگرال بعد کوچکتری داشته و حل شبکه ساده‌تر خواهد بود. به عکس هر قدر بزرگتر باشد انتگرال به دست آمده دارای بعد بزرگتری بوده و حل آن مشکل‌تر خواهد بود.

نتیجه ۲: $n-N(Q)$ زمانی کوچک خواهد بود که $N(Q)$ بزرگ باشد و باتوجه به اینکه طبق قضیه ۳ مجموع رتبه شاخه‌های یگانه برابر m است $N(Q)$ زمانی بزرگ خواهد بود که شاخه‌های یگانه دارای رتبه پایین‌تری باشند. به این دلیل الگوریتم پیشنهادی انتخاب خود را با شاخه‌های یگانه رتبه یک شروع کرده و تنها زمانی اقدام به انتخاب شاخه یگانه رتبه ۲ می‌کند که شاخه یگانه رتبه یک یافت نشود و به همین ترتیب برای انتخاب شاخه‌های یگانه از رتبه‌های بالاتر اقدام می‌کند تا شرط توقف ارضا شود.

۱-۴- تبدیل انتگرال چندگانه روی مجموعه σ به یک انتگرال چندگانه ساده‌تر

قضیه ۴: اگر تابع $h(x_1,x_2,...,x_n)$ روی مجموعهٔ $w \subset R^n$ پیوسته و معین باشد آنگاه

$$\int\int\underset{w}{\cdots}\int h(x_1,x_2,...,x_n)\,dx_n \ldots dx_2\, dx_1 = \int\int\underset{W}{\cdots}\int H(x_1,x_2,...,x_n)\,dx_n \ldots dx_2\, dx_1$$

به قسمی که:

الف ـ $w \subset W$ و

ب ـ

$$H(x_1,x_2,...,x_n) = \begin{cases} h(x_1,x_2,...,x_n) & \text{اگر } (x_1,x_2,...,x_n) \in w \\ 0 & \text{اگر } (x_1,x_2,...,x_n) \in W-w \end{cases}$$

اثبات:

$$\int\int\underset{W}{\cdots}\int H(x_1,x_2,...,x_n)\,dx_n \ldots dx_2\, dx_1$$

$$= \int\int\underset{w}{\cdots}\int H(x_1,x_2,...,x_n)\,dx_n \ldots dx_2\, dx_1$$

$$+ \int\int\underset{W-w}{\cdots}\int H(x_1,x_2,...,x_n)\,dx_n \ldots dx_2\, dx_1$$

$$= \int\int\underset{w}{\cdots}\int h(x_1,x_2,...,x_n)\,dx_n \ldots dx_2\, dx_1$$

$$+ \int\int\underset{W-w}{\cdots}\int 0 \times dx_n \ldots dx_2\, dx_1$$

$$= \int\int\underset{w}{\cdots}\int h(x_1,x_2,...,x_n)\,dx_n \ldots dx_2\, dx_1$$

نتیجه: فرض کنید الگوریتم پیشنهادی در (۱-۲) برای یک شبکه مفروض رابطه نهایی را به دست دهد.

$$F(t) = \int\int_{\sigma}\cdots\int f(t,t_1,t_2,...,t_n)\,dt_n \ldots dt_2\, dt_1$$

که $\sigma = \{u_i \leq t,\ i \in S\}$ آنگاه تعیین حدودی برای هر یک از انتگرالها به نحوی که $F(t)$ قابل محاسبه باشد در حالت کلی تقریباً غیرممکن است. خوشبختانه تابع $f(t,t_1,t_2,...,t_n)$ شرط (ب) قضیه فوق را خود بخود داراست زیرا در خارج مجموعه σ حداقل یکی از مسیرهای شبکه بزرگتر از t بوده و در نتیجه تابع توزیع تکمیل شبکه از طریق آن مسیر به ازای t صفر خواهد شد و چون این تابع در تمام توابع دیگر مشمول در $f(t,t_1,t_2,...,t_n)$ ضرب خواهد شد کل تابع $f(t,t_1,t_2,...,t_n)$ در هر نقطه خارج از مجموعه σ دارای مقدار صفر خواهد بود. حال کافی است مجموعه‌ای مناسب مانند σ' انتخاب کنیم به نحوی که $\sigma \subset \sigma'$ بوده و حدود هر یک ازانتگرالها به سهولت از روی مجموعه σ' قابل استخراج باشد از آنجا که در مجموعه σ حداکثر مقدار زمان هر شاخه از شبکه t می‌باشد می‌توان σ' را در حالت کلی به صورت یک فوق مکعب با ضلع t تعریف نمود:

$$\sigma' = \{L_j \leq t_j \leq U_j,\ j \in R-Q\}$$

L_j باتوجه به تابع توزیع زمان تکمیل شاخه jام تعیین می‌شود که می‌تواند صفر یا مقداری بیشتر از صفر داشته باشد. U_j نیز باتوجه به مقدار t و تابع توزیع زمان تکمیل شاخه jام تعیین می‌شود. اگر حد بالایی برای متغیر تصادفی t_j وجود نداشته باشد، مقدار U_j برابر t خواهد بود در صورتی که متغیر تصادفی t_j دارای حد فوقانی باشد داریم

$U_j = t$ اگر حد فوقانی $t \leq t_j$

$U_j = t_j$ حدفوقانی اگر حد فوقانی $t > t_j$

بدیهی است با تعاریف فوق استخراج حدود انتگرالها از روی مجموعه σ' بسیار ساده است اما برای حل عددی انتگرال تبدیل یافته یک روش عددی مناسب که سریع و دقیق باشد مورد نیاز است.

باتوجه به الگوریتم (۱-۲) روشن است که تابع $F(t \mid t_j, j \in R-Q)$ از حاصل ضرب توابع توزیع زمان تکمیل شاخه‌های یگانه تشکیل شده است. در برخی از

شبکه‌های خاص ممکن است زمان همه یا برخی از شاخه‌های یگانه از توزیعات خاصی (مانند بتا یا گاما) پیروی کنند که تنها تابع چگالی آنها در اختیار است و درحالت کلی صورت صریحی برای توزیع آنها وجود ندارد. در این حالت باید بوسیله انتگرالگیری عددی مقدار توابع توزیع را به ازای مقادیر مورد نیاز بدست آورد. در این نوع از شبکه‌ها به تعداد شاخه‌های یگانه‌ای که تابع توزیع صریح آنها در اختیار نیست به بعد انتگرال به دست آمده از الگوریتم (۱-۲) اضافه می‌شود. پس در حالت کلی می توان نوشت:

تعداد شاخه‌های یگانه‌ای که تابع + n - N(Q) =
بعدانتگرال توزیع آنها به صورت صریح دراختیارنیست

قابل ذکر است که این نوع انتگرالها به دلیل این‌که به طور مجزا از بقیه انتگرالها قابل حل هستند (آنها را می توان به صورت تابع زیر انتگرال در نظر گرفت) نسبت به انتگرالهای حاصل از الگوریتم (۱-۲) پیچیدگی کمتری درحل مسأله پدید می آورند.

۱-۵- تعیین توابع توزیع زمان تکمیل شبکه‌های تفکیک‌پذیر

هرگاه شبکه‌ای تفکیک‌پذیر بوده و به k شبکه تفکیک‌ناپذیر قابل تفکیک باشد، آنگاه تابع توزیع زمان تکمیل هریک از k شبکه تفکیک‌ناپذیر را می توان به طریقی که در بخشهای (۱-۲)، (۱-۳) و (۱-۴) ارائه گردید به صورت یک انتگرال چندگانه معین به دست آورد. هرگاه تابع توزیع زمان تکمیل زیر شبکه تفکیک‌ناپذیر iام را با $F_i(t)$ نشان دهیم تابع توزیع زمان تکمیل شبکه تفکیک‌پذیر اولیه عبارت خواهد بود از:

$$F(t)=\prod_{i=1}^{k} F_i(t)$$

مفهوم رابطه فوق این است که اگر یک شبکه تفکیک‌پذیر را قبل از تفکیک مورد تجزیه و تحلیل قرار دهیم می‌توان نشان داد که انتگرال نهایی به دست آمده با اینکه بعد بزرگی دارد خود به انتگرالهای چندگانه دیگری با ابعاد کوچکتر قابل تفکیک می‌باشد که هر کدام از انتگرالهای چندگانه حاصل از تفکیک در صورت تفکیک شبکه تفکیک‌پذیر اولیه درواقع با زیر شبکه‌های حاصل از تفکیک متناظر می‌باشند که این امر با کوچکتر ساختن بعد انتگرالها موجب سهولت و تسریع عمل محاسبه خواهد شد.

توابع توزیع زمان تکمیل شبکه‌هایی را که فقط دارای چندین شاخه موازی هستند و درواقع قابل تفکیک به شاخه‌ها هستند و نه زیر شبکه‌های تفکیک‌پذیر نیز می‌توان به صورت

$$F(t)=\prod_{j=1}^{n} F_j(t)$$

بیان کرد که $F_j(t)$ ها درواقع توابع توزیع زمان تکمیل شاخه‌ها می‌باشند.

۲- فرمول کوادراتورگاوس

۲-۱- فرمول کوادراتور گاوس برای انتگرالهای یگانه

چند جمله‌ای لژاندریک، چند جمله‌ای به صورت زیر است:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n] \quad (n=0,1,2,...)$$

چندجمله‌ای لژاندر $P_n(x)$، n ریشه حقیقی متمایز دارد که در فاصله (۱،۱-) واقع شده‌اند.

رابطه $\int_{-1}^{1} f(t)\,dt=\sum_{i=1}^{n} A_i f(t_i)$ $i=1,2,...,n$ وقتی که t_i ها ریشه‌های چندجمله‌ای لژاندر $P_n(t)$ باشند و A_i ها $i=1,2,...,n$ ریشه دستگاه معادلات زیر باشند فرمول کوادراتورگاوس نامیده می‌شود.

$$\sum_{i=1}^{n} A_i = 2$$

$$\sum_{i=1}^{n} A_i\, t_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} A_i\, t_i^{2n-2} = \frac{2}{2n-2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} A_i\, t_i^{2n-1} = 0$$

سیستم معاملات فوق غیرخطی است اما با قرار دادن t_i ها در آن، این سیستم به یک دستگاه معادلات خطی برحسب A_i ها $i=1,2,...,n$ تبدیل می‌شود. دترمینان این دستگاه معادلات خطی دترمینان Vandermonde [29] می‌باشد که غیرصفربوده وعبارتست از:

$$D=\prod_{i\rangle j} (t_i - t_j) \neq 0$$

بنابراین A_i ها منحصر بفرد بوده و از حل دستگاه معادلات به راحتی به دست می‌آیند. برای محاسبه $\int_a^b f(x)\,dx$ تغییر متغیر زیر را انجام می‌دهیم:

$$x = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} t$$

سپس می توان نوشت:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^{1} f\left(\frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} t\right) dt$$

با کاربرد فرمول کوادراتورگاوس می توان نوشت:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i)$$

$$x_i = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} t_i \qquad i=1,2,\ldots,n$$

و t_i ها ریشه‌های چندجمله‌ای لژاندر $P_n(t)$ هستند یعنی $P_n(t_i)=0$.

خطای فرمول کوادراتورگاوس به صورت زیر است

$$R_n = \frac{(b-a)^{2n+1} (n!)^4 f^{(2n)}(\xi)}{[(2n)!]^3 (2n+1)}$$

۲-۲- مکانیسم انتشار خطا در انتگرالهای چندگانه

انتگرال چندگانه تبدیل یافته حاصل از الگوریتم (۱-۲) را همانطور که در بخش (۱-۴) توضیح داده شد می‌توان به صورت زیر نمایش داد:

$$F(t) = \int\int \overset{\ldots}{\sigma'} \int f(t, t_j\ j \in R-Q) \prod_{i \in R-Q} dt_j$$

که بعد انتگرال $n\text{-}N(Q)$ می‌باشد. برای سهولت در نمایش فرض کنید که $n\text{-}N(Q)=l$ باشد. در نتیجه می‌توان انتگرال فوق را به صورت

$$F(t) = \int\int \overset{(\ell)}{\underset{\sigma'}{\ldots}} \int f(t, t_1, t_2, \ldots t_l)\, dt_l \ldots dt_2\, dt_1$$

نمایش داد. اگر یکی ازانتگرالها رابه‌روش عددی‌گاوس حل کنیم (انتگرال روی t_l را) به دلیل اینکه قبلاً در بخش (۱-۴) نشان دادیم که در حل انتگرالها حدود انتگرالها ثابت یا مقدار t خواهند بود. بنابراین تابع حاصل ازانتگرالگیری تابعی برحسب متغیرهای $t_{l-1},\ldots,t_2,t_1,t$ خواهند بود. در صورتی که خطای این انتگرالگیری را R_l بنامیم $F(t)$ به صورت زیر درمی‌آید:

$$F(t) = \int\int \overset{(\ell-1)}{\underset{\sigma'}{\ldots}} \int \left[f(t, t_1, t_2, \ldots t_{\ell-1}) + R_\ell \right] dt_{\ell-1} \ldots dt_2\, dt_1$$

با حل یک انتگرال دیگر $F(t)$ به صورت زیر درمی‌آید:

$$F(t) = \int\int \overset{(\ell-2)}{\underset{\sigma'}{\ldots}} \int \left[f(t, t_1, t_2, \ldots t_{\ell-2}) + R_{\ell-1} + R_{\ell-1}(U_{\ell-1} - L_{\ell-1}) \right] dt_{\ell-2} \ldots dt_1$$

که L_{l-1} و U_{l-1} به ترتیب حدود تحتانی و فوقانی انتگرال l-1 هستند و درنهایت اگر به همین ترتیب ادامه دهیم و آخرین انتگرال را نیز حل کنیم خواهیم داشت:

$$F(t) = \hat{F}(t) + R_1 + \sum_{i=2}^{\ell} R_j \prod_{j=1}^{i-1} (U_j - L_j)$$

که

$$R_k = \frac{(U_k - L_k)^{2n+1} (n!)^4\, \partial^{2n} f(t, t_1, \ldots, \xi_k)}{((2n)!)^3 (2n+1)\, \partial t_k^{2n}} \quad k=1,2,\ldots,\ell$$

و n تعداد نقطه‌هایی است که برای محاسبه انتگرال به کار گرفته شده‌اند.

روابط فوق نشان می‌دهند که تجزیه و تحلیل خطای انتگرالگیری در روش گاوس بسیار مشکل است، اما تمام جملات خطا شامل R_kها $k=1,2,\ldots,l$ هستند.

خطا زمانی ناچیز است که R_k ها بسیار کوچک باشند که دقت بسیار بالای فرمول کوادراتور گاوس این نیاز را تأمین می‌کند. به این دلیل در بخش بعدی اقدام به تعمیم فرمول کوادراتورگاوس نموده‌ایم.

۳-۲- تعمیم فرمول کوادراتورگاوس برای حل عددی انتگرالهای چندگانه

همانطور که در بخش قبلی توضیح داده شد انتگرال چندگانه تبدیل یافته حاصل از الگوریتم (۱-۲) را با فرض l=n-N(Q) می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$F(t) = \int\int \overset{(\ell)}{\underset{\sigma'}{\ldots}} \int f(t, t_1, t_2, \ldots t_\ell)\, dt_1 \ldots dt_2\, dt_\ell$$

سپس‌رابطه‌فوق‌رامی‌توان‌به‌صورت‌زیرنوشت:

$$F(t) = \int dt_1 \int dt_2 \underset{\sigma'}{\ldots} \int f(t, t_1, t_2, \ldots t_\ell)\, dt_\ell$$

اگر آخرین انتگرال را با فرمول کوادراتورگاوس محاسبه کنیم در صورتی که تعداد نقطه‌های بکارگرفته‌شده n_l باشد خواهیم داشت: (از این مرحله به بعد چون تقریبی از $F(t)$ را محاسبه می‌کنیم بجای $F(t)$ از علامت $\hat{F}(t)$ استفاده می‌کنیم)

$$\hat{F}(t) = \int dt_1 \int dt_2 \ldots \int dt_{\ell-1} \left[\frac{U_\ell - L_\ell}{2} \sum_{i_\ell=1}^{n_\ell} A_{i_\ell} f(t, t_1, t_2, \ldots, t_{i_\ell}) \right]$$

حال اگر مجدداً داخلی‌ترین انتگرال را با فرمول کوادراتورگاوس حل کنیم و همین عمل را تا حل آخرین انتگرال ادامه دهیم به طوری که تعداد نقاط بکارگرفته شده درحل انتگرالهای بعدی به ترتیب $n_1, n_2, \ldots, n_{l-1}$ باشند خواهیم داشت:

$$\hat{F}(t) = \prod_{k=1}^{l} \left(\frac{U_k - L_k}{2}\right) \sum_{i_1=1}^{n_1} \sum_{i_2=1}^{n_2} \cdots \sum_{i_l=1}^{n_l} \left(\prod_{k=1}^{l} A_{i_k}\right) f(t, t_{i_1}, t_{i_2}, \ldots, t_{i_l})$$

براساس رابطه بالا و باتوجه به دقت بالای فرمول کوادراتورگاوس $\hat{F}(t)$ تقریب بسیار خوبی برای $F(t)$ خواهد بود.

۳- شبیه‌سازی مونت کارلو شرطی

۳-۱- تخمین تابع توزیع زمان تکمیل شبکه با استفاده از تشکیل تابع توزیع شرطی زمان تکمیل شبکه

همانگونه که در بخش (۱-۵) بحث شد تفکیک یک شبکه تفکیک‌پذیر به زیر شبکه‌های تفکیک‌ناپذیر حل عددی انتگرالها را تسریع می‌کند. اما همانطور که روشن خواهد شد در مورد شبیه‌سازی مونت کارلو شرطی این نوع طبقه‌بندی و تفکیک موجب تسریع و تسهیل نشده همچنین موانعی را ایجاد نمی‌کند. بنابراین در این روش تفکیک شبکه یک عمل اضافه محسوب می‌شود. به این دلیل در این فصل شبکه به صورت کلی آن مورد بحث قرار می‌گیرد.

در مرحله نهایی الگوریتم پیشنهادی در (۱-۲) نشان داده شد که تابع توزیع شرطی زمان تکمیل یک شبکه را می‌توان به صورت زیر نوشت:

حاصل‌ضرب توابع تولید شده در مراحل مختلف الگوریتم = $F(t \mid t_j, j \in R\text{-}Q\}$ که t متغیر تصادفی زمان تکمیل شبکه است. حال به جای ضرب تابع شرطی فوق در $\prod_{j \in R-Q} f(t_j)\, dt_j$ و انتگرالگیری روی مجموعه $\sigma = \{u_i \le t, i \in S\}$ می‌توان از متغیرهای تصادفی مجموعه $\{t_j, j \in R\text{-}Q\}$ ، N سری اعداد تصادفی تولید کرده و N سری مقدار:

$$H^k(t) = \begin{cases} F^k(t \mid t_j^k, j \in R-Q & \text{اگر } \forall i \in S \;\; t > u_i \\ 0 & \text{اگر } \exists \in i S \mid \;\; t \le u_i \end{cases}$$

با $k=1,2,\ldots,N$ را محاسبه نموده، سپس

$$\hat{F}(t) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} H^k(t)$$

تخمینی از $F(t)$ خواهد بود.

۳-۲- تجزیه و تحلیل شبکه‌ها در روش شبیه‌سازی مونت کارلو شرطی و معیار کارآیی آن

چون مبنای تشکیل تابع شرطی زمان تکمیل شبکه همان الگوریتم پیشنهادی در بخش (۱-۲) است، لذا تحلیل شبکه‌ها در این روش مشابه تجزیه و تحلیلی است که در بخش (۱-۳) ارائه گردید.

قضیه ۵: تفاضل تعداد کل شاخه‌ها و تعداد شاخه‌های یگانه برابر تعداد شاخه‌هایی از شبکه است که نمونه‌برداری (شبیه‌سازی) می‌شوند.

اثبات: عدد اصلی مجموعه R-Q برابر با تعدادی از شاخه‌های شبکه است که تابع $F(t \mid t_j, j \in R\text{-}Q)$ روی آنها مشروط شده است. اما از آنجاکه هر عضو Q به R نیز متعلق است پس عدد اصلی R-Q برابر با تفاضل اعداد اصلی مجموعه‌های R و Q خواهد بود. اما پس از توقف الگوریتم عدد اصلی مجموعه R برابر تعداد کل شاخه‌های شبکه و عدد اصلی مجموعه Q برابر تعداد شاخه‌های یگانه می‌باشد. بنابراین تفاضل کل شاخه‌های شبکه و تعداد شاخه‌های یگانه برابر با تعداد شاخه‌هایی از شبکه است که نمونه‌برداری (شبیه‌سازی) می‌شوند.

قضایای ۲ و ۳ اثبات شده در بخش (۱-۳) در اینجا نیز صادقند و شیوه اثبات نیز به همان ترتیب می‌باشد، یعنی دو معیار توقف مجموعه کل شاخه‌های شبکه =R و مجموعه کل مسیرهای شبکه =S معادلند. همچنین مجموع رتبه شاخه‌های یگانه برابر m است.

نتیجه ۱: نسبت $\frac{N(Q)}{n}$ می‌تواند معرف درصد کاهش نمونه‌برداری باشد. روشن است که در یک شبکه:

$$\frac{1}{n} \le \frac{N(Q)}{n} \le 1 - \frac{1}{n}$$

نتیجه ۲: باتوجه به آنکه مجموع رتبه شاخه‌های یگانه برابر m است، $N(Q)$ زمانی بزرگ خواهد بود که شاخه‌های یگانه دارای رتبه‌های پایینی باشند. دراینجا نیز مشاهده می‌شود که الگوریتم پیشنهادی در بخش (۱-۲) انتخاب خود را با شاخه‌های یگانه رتبه یک شروع کرده و تنها زمانی به انتخاب شاخه‌های رتبه ۲ می‌پردازد که شاخه رتبه یک یافت نشود و به همین ترتیب برای انتخاب شاخه‌های یگانه با رتبه بالاتر

اقدام می‌کند تا شرط توقف ارضا شود تا به این طریق بتواند بیشترین کاهش را در نمونه‌برداری ایجاد کند. بنابراین اگر درصد کاهش نمونه‌برداری را معیاری برای کارآیی روش فرض کنیم کارآیی روش ممکن است در شبکه‌های مختلف متفاوت باشد.

۳-۳- نظریه اعداد تصادفی antithetic و کاربرد آن درروش شبیه‌سازی مونت‌کارلو شرطی

فرض کنیم مجموعه $RN_k = \{rn_i^k,\ i=1,2,...,q\}$ مجموعه اعداد تصادفی یکنواخت تولید شده در فاصله (۰،۱) باشد که برای k امین بار شبیه سازی شبکه مورد استفاده قرار می‌گیرد. آنگاه $RN'_k = \{1\text{-}rn_i^k,\ i=1,2,...,q\}$ را مجموعه اعداد تصادفی antithetic مجموعه RN_k می‌نامند. فرض کنید که بخواهیم یک شبکه احتمالی را N بار بوسیله روش شبیه‌سازی مونت کارلو شرطی شبیه‌سازی کنیم (فرض می‌شود N زوج است). اگر این شبکه را $\frac{N}{2}$ بار بوسیله مجموعه‌های RN_k ، $k=1,2,...,\frac{N}{2}$ شبیه‌سازی کرده و تخمین $\hat{F}'(t)$ را از تابع توزیع زمان تکمیل شبکه به دست آوریم و سپس مجدداً این شبکه را $\frac{N}{2}$ بار بوسیله مجموعه‌های RN'_k ، $k=1,2,...,\frac{N}{2}$ شبیه‌سازی نموده و تخمین $\hat{F}''(t)$ را از تابع توزیع تکمیل شبکه بدست آوریم آنگاه تخمین

$$\hat{F}(t) = \frac{\hat{F}'(t)+\hat{F}''(t)}{2}$$

دارای واریانس کمتری بوده و به مقدار واقعی نزدیکتر است زیرا اگر $\hat{F}'(t)$ نسبت به توزیع حقیقی به یک سمت تمایل داشته باشد $\hat{F}''(t)$ به طرف دیگر متمایل شده و $\hat{F}(t)$ به توزیع حقیقی زمان تکمیل شبکه نزدیکتر خواهد شد.

۳-۴- کاربرد فرمول کوادراتورگاوس در شبیه‌سازی مونت‌کارلو شرطی

باتوجه به الگوریتم (۱-۲) روشن است که تابع $F(t|\ t_j,\ j\in R\text{-}Q)$ از حاصل ضرب توابع توزیع زمان تکمیل شاخه‌های یگانه تشکیل شده است. در برخی از شبکه‌های خاص ممکن است زمان همه یا برخی از شاخه‌های یگانه از توزیعات خاصی (مانند بتا یا گاما) پیروی کنند که تنها تابع چگالی آنها در اختیار است و در حالت کلی صورت صریحی برای توابع توزیع آنها وجود ندارد. در این حالت باید بوسیله انتگرالگیری عددی مقدار توابع توزیع را به ازای مقادیر مورد نیاز به دست آورد. در این صورت تابع $F(t|\ t_j,\ j\in R\text{-}Q)$ عبارت خواهد بود از حاصل ضرب M انتگرال که M تعداد شاخه‌های یگانه‌ای است که تابع توزیع آنها بطور صریح در اختیار نیست. در نتیجه در هر بار شبیه‌سازی که $t>u_i$ باشد، برای محاسبه $F^k(t|\ t_j^k,\ j\in R\text{-}Q)$ باید M انتگرال بطور عددی محاسبه شوند که در اینجا نیز نیاز به یک روش عددی که سریع و دقیق باشد احساس می‌شود. فرمول کوادراتورگاوس این نیاز را بخوبی تأمین می‌نماید.

۴- روش شبیه‌سازی مستقیم

۴-۱- تخمینی ازتابع توزیع زمان تکمیل شبکه‌های احتمالی به وسیله روش شبیه‌سازی مستقیم

در این روش از تمام توابع توزیع زمان تکمیل شاخه‌ها اعداد تصادفی تولید می‌شوند. سپس از روی اعداد تولید شده طول تمام مسیرها محاسبه شده و زمان طولانی‌ترین مسیر زمان تکمیل شبکه محسوب می‌شود. این عمل به تعداد دفعاتی که مایل هستیم شبکه را شبیه‌سازی کنیم تکرار می‌شود. یعنی اگر بخواهیم شبکه را N بار شبیه‌سازی کنیم می‌توان نوشت:

$$u_i^k = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, t_j^k \qquad \begin{matrix} i=1,2,...,m \\ k=1,2,...,N \end{matrix}$$

سپس خواهیم داشت:

$$T^k = \operatorname*{Max}_i \{u_i^k\}$$

که T^k زمان تکمیل شبکه در k امین بار شبیه‌سازی است.

سپس تابع $G^k(t)$ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$G^k(t) = \begin{cases} 1 & \text{اگر}\quad T^k \le t \\ 0 & \text{درغیراینصورت} \end{cases}$$

آنگاه

$$\hat{F}(t) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} G^k(t)$$

تخمینی ازتابع توزیع زمان تکمیل شبکه یعنی $F(t)$ است.

۴-۲- کاربرد اعداد تصادفی antithetic در روش شبیه‌سازی مستقیم

در این روش نیز برای کاهش واریانس تخمین و نزدیکتر ساختن آن به مقدار واقعی می‌توان از اعداد تصادفی antithetic استفاده کرد، به این صورت که در این روش برای

N بار شبیه‌سازی یک شبکه $\frac{N}{2}$ بار آنرا بوسیله مجموعه‌های $RN_k=\{rn_i^k, i=1,2,...,q\}$ و $\frac{N}{2}$ بار بوسیله مجموعه‌های $RN'_k=\{1-rn_i^k, i=1,2,...,q\}$، $k=1,2,...,\frac{N}{2}$ شبیه‌سازی کرده و به ترتیب تخمینهای $\hat{F}'(t)$ و $\hat{F}''(t)$ را به دست می‌آوریم آنگاه

$$\hat{F}(t)=\frac{\hat{F}'(t)+\hat{F}''(t)}{2}$$

تخمین بهتری خواهد بود.

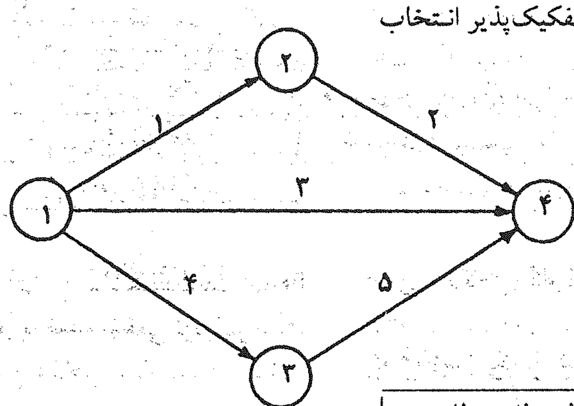
۵ـ مثالها

۵ـ۱ـ شبکه‌هایی که تابع توزیع زمان تکمیل آنها به صورت تحلیلی قابل محاسبه هستند

در این بخش فرمول کوادراتورگاوس تعمیم یافته، شبیه‌سازی شرطی مونت‌کارلو و شبیه‌سازی مستقیم در ۳ مثال از نظر دقت و سرعت با هم مقایسه شده‌اند. مثالهای ۱، ۲ و ۳ به دلیل سهولت محاسبه توابع توزیع زمان تکمیل آنها به روش تحلیلی از نوع شبکه‌های تفکیک‌پذیر انتخاب شده‌اند، اما برای محاسبه توابع توزیع زمان آنها بوسیله فرمول کوادراتورگاوس تعمیم یافته آنها را شبکه‌های تفکیک‌ناپذیر فرض نموده‌ایم تا روش پیشنهادی را بیازماییم.

در مثال اول توزیع زمان تکمیل شاخه‌ها بتا و در مثال دوم یکنواخت و در مثال سوم نمایی فرض شده‌اند. در هر مثال تعدادی متناهی نقاط ازتابع توزیع زمان تکمیل شبکه به روشهای تحلیلی، فرمول کوادراتورگاوس تعمیم یافته، شبیه‌سازی مونت کارلو شرطی و شبیه‌سازی مستقیم همراه با کاربرد نظریه اعداد تصادفی antithetic محاسبه و نتایج هر روش با جواب واقعی مقایسه شده است. زمان صرف شده برای محاسبه نیز در هر روش ذکر شده‌اند. همچنین باتوجه به معیار کارآیی روش شبیه‌سازی مونت کارلو شرطی که در بخش ۳ـ۲ بیان گردید این روش درمثالهای اول و دوم سبب ۶۰٪ کاهش و در مثال سوم باعث ۶۷٪ کاهش در نمونه‌برداری گردیده است.

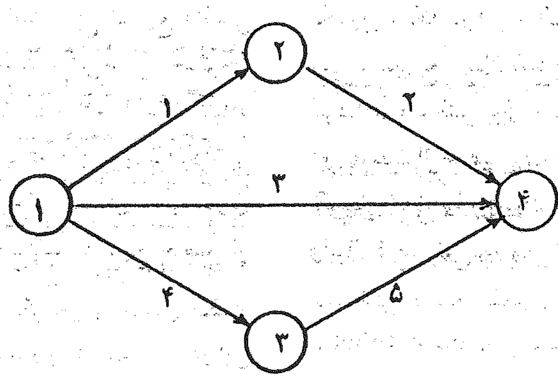
مثال ۱:



شبکه مثال (۱)

زمان	متوسط خطای مطلق		
00:01	8.186695×10^{-5}	فرمول کوادراتورگاوس تعمیم‌یافته	
00:05	9.730182×10^{-4}	شبیه‌سازی شرطی مونت‌کارلو	N=۱۰۰
00:59	4.776862×10^{-3}	شبیه‌سازی مستقیم	N=۱۰۰۰

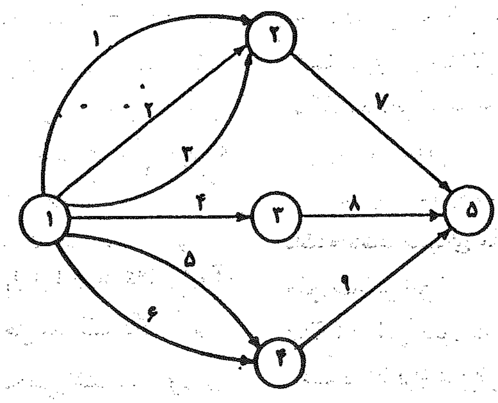
مثال ۲:



شبکه مثال (۲)

زمان	متوسط خطای مطلق		
کمتر از یک ثانیه	5.394141×10^{-4}	فرمول کوادراتورگاوس تعمیم‌یافته	
00:03	3.047064×10^{-3}	شبیه‌سازی شرطی مونت‌کارلو	N=۱۰۰
00:22	1.069607×10^{-2}	شبیه‌سازی مستقیم	N=۱۰۰۰

مثال ۳:



شبکه مثال (۳)

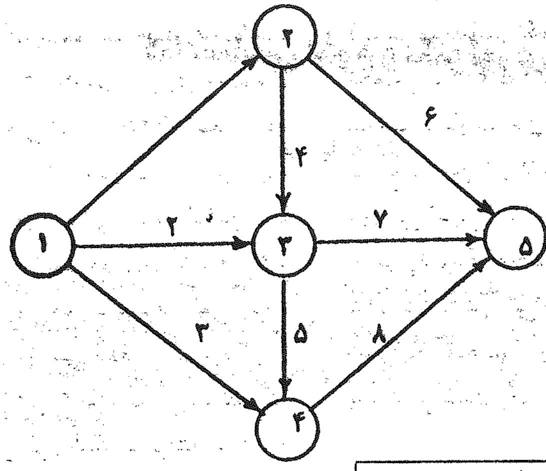
زمان	متوسط خطای مطلق		
2.6 ثانیه	1.672102×10^{-4}	فرمول کوادراتورگاوس تعمیم‌یافته	
00:02	3.98568×10^{-3}	شبیه‌سازی شرطی مونت‌کارلو	N=۱۰۰
00:59	1.311807×10^{-3}	شبیه‌سازی مستقیم	N=۱۰۰۰

۵-۲- شبکه‌هایی که تابع توزیع زمان تکمیل آنها به صورت تحلیلی قابل محاسبه نیستند

در هر سه مثال بخش قبل مشاهده می‌شود که بطور نسبی فرمول کوادراتورگاوس تعمیم یافته از نظر دقت و سرعت کارآتر است. همچنین مشاهده می‌شود که روش شبیه‌سازی مونت‌کارلو شرطی با N=100 جوابهایی دقیقتر از روش شبیه‌سازی مستقیم با N=1000 فراهم آورده است.

در مثالهای چهارم و پنجم محاسبه تابع توزیع واقعی زمان تکمیل شبکه امکان‌پذیر نیست. به این دلیل و باتوجه به نتایج این سه روش در مثالهای ۱، ۲ و ۳ و با این استنباط که فرمول کوادراتورگاوس تعمیم یافته مقادیری نزدیکتر به مقدار واقعی را تقریب می‌زند نتایج روشهای شبیه‌سازی مونت‌کارلو شرطی و شبیه‌سازی مستقیم با نتایج حاصل از فرمول کوادراتور گاوس تعمیم یافته مقایسه شده‌اند. در این مثالها نیز مشاهده خواهد شد که نتایج روش شبیه‌سازی مونت کارلو شرطی در مثالهای چهارم و پنجم به ترتیب سبب پنجاه و شصت و چهار درصد کاهش در نمونه‌برداری گردیده است. به دلیل اینکه فرض بتا بودن تابع توزیع زمان تکمیل شاخه‌ها بعلت صریح نبودن تابع توزیع جمعی آن و همچنین محدود بودن آن مشکل‌ترین حالت را ایجاد می‌کند و تاکنون نیز در جهت به دست آوردن دقیقتر زمان تکمیل شبکه در این حالت اقدام جالبی صورت نگرفته است، توزیع زمان شاخه‌ها را در مثال پنجم بتا فرض کرده‌ایم. همچنین برای نشان دادن کارآیی روش پیشنهادی و دور نشدن از هدف این مقاله در مثال ۴ توابع توزیع زمان تکمیل شاخه‌ها را مخلوطی از توزیعهای نمایی، گاما و وایبال فرض نموده‌ایم.

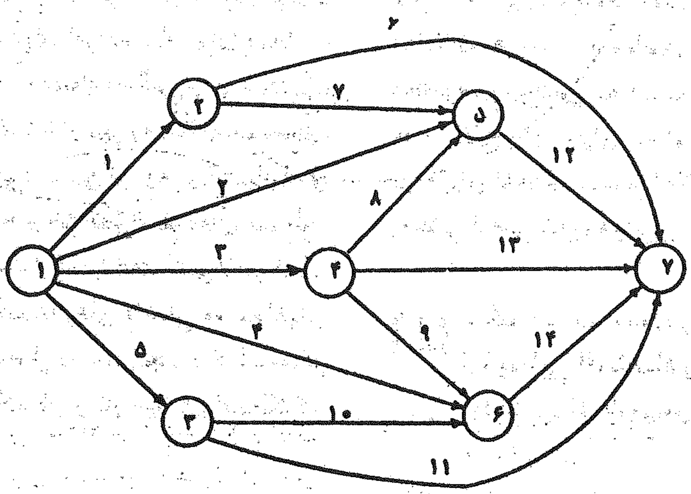
مثال ۴:



شبکه مثال (۴)

		متوسط اختلاف	زمان
	فرمول کوادراتورگاوس تعمیم‌یافته	—	1:05
N=۲۰۰	شبیه‌سازی مونت‌کارلوشرطی	4.48683×10^{-3}	0:07
N=۱۰۰۰	شبیه‌سازی مستقیم	7.298602×10^{-3}	0:45

مثال ۵:



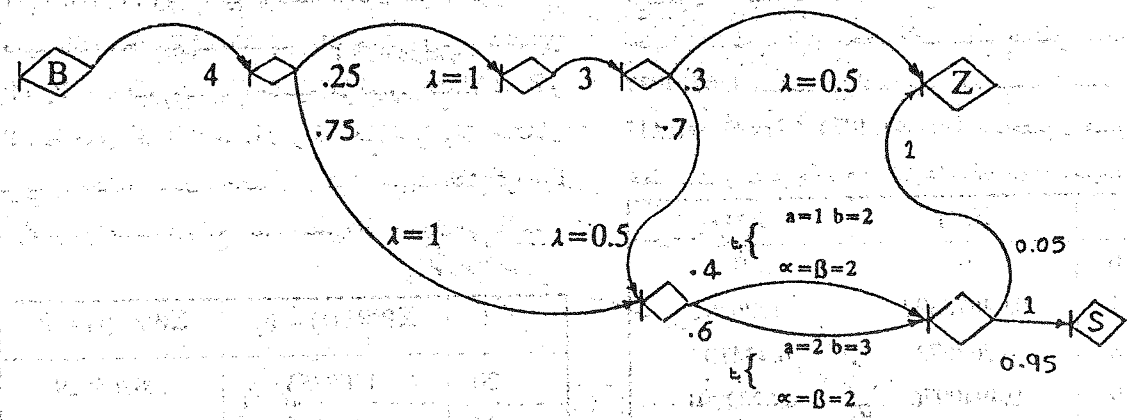
شبکه مثال (۵)

		متوسط اختلاف	زمان
	فرمول کوادراتورگاوس تعمیم‌یافته	—	5:30
N=۸۰۰	شبیه‌سازی مونت‌کارلوشرطی	2.274045×10^{-3}	1:20
N=۴۰۰۰	شبیه‌سازی مستقیم	2.610007×10^{-3}	12:00

در این مثال روشهای شبیه‌سازی مونت‌کارلو شرطی و شبیه‌سازی مستقیم با N=200 و N=1000 جوابهایی ارائه دادند که با جوابهای حاصل از فرمول کوادراتورگاوس اختلاف زیادتری داشت ولی با افزایش N مشاهده شد که جوابهای حاصل از دو روش فوق به جوابهای فرمول کوادراتورگاوس نزدیک می‌شوند. همانطور که ملاحظه می‌شود با N=800 و N=4000 برای روشهای شبیه‌سازی مونت کارلو شرطی و شبیه‌سازی مستقیم متوسط اختلاف همچون مثالهای قبل در حدود 10^{-3} می‌باشد. این موضوع می‌تواند خود نشانگر دقیق بودن فرمول کوادراتورگاوس تعمیم یافته باشد.

مثال ۶: بر روی یک خط تولید محصولی در ابتدای خط

تولید می‌شود. فرض می‌شود که عمل ساخت ۴ ساعت طول می‌کشد. قبل از آنکه عملیات تکمیلی بر روی محصول انجام شود محصول بازرسی می‌شود و ۲۵٪ قطعات در بازرسی پذیرفته نمی‌شوند و نیاز به دوباره کاری پیدا می‌کنند. زمان بازرسی دارای توزیع نمایی با میانگین یک ساعت می‌باشد. دوباره کاری ۳ ساعت طول می‌کشد و ۳۰٪ قطعات دوباره کاری شده‌در بازرسی مجدد پذیرفته نمی‌شوند و ضایع قلمداد می‌شوند. زمان بازرسی قطعات دوباره کاری شده دارای توزیع نمایی با میانگین ۲ ساعت می‌باشند. اگر محصول در یکی از دو بازرسی فوق‌الذکر پذیرفته شود به قسمت عملیات تکمیلی فرستاده می‌شود. زمان عملیات تکمیلی در ۴۰ درصد موارد دارای توزیع بتا بین ۱ و ۲ ساعت با پارامترهای $\alpha=\beta=2$ و در ۶۰ درصد موارد دارای توزیع بتا بین ۲ و ۳ ساعت با پارامترهای $\alpha=\beta=2$ می‌باشد. بازرسی نهایی یک ساعت طول می‌کشد که ۵٪ محصولات را نمی‌پذیرد که محصولات رد شده ضایع محسوب خواهند شد. تولیدکننده می‌خواهد احتمال ضایع شدن یا تکمیل شدن یک محصول و همچنین تابع توزیع زمان ضایع شدن یا تکمیل شدن یک محصول را محاسبه نماید.



شبکه مثال (۶)

حل:

در چنین شبکه‌هایی یعنی شبکه‌های GERT با گرههای Exclusive- or از آنجاکه برای تولید هر محصول در عمل تنها یکی از مسیرهای شبکه واقع می‌شود این شبکه را می‌توان نوعی شبکه تفکیک‌پذیر تلقی نمود که هر مسیر آن بطور مجزا با احتمال معینی وقوع می‌یابد. فرض کنید $F_i^z(t)$ تابع توزیع زمان تکمیل مسیر i ام باشد که به گره مقصد Z ختم می‌شود و P_i^z احتمال آن باشد و $F_j^s(t)$ نیز تابع توزیع زمان تکمیل مسیر j ام باشد که به گره S ختم می‌شود و P_j^s احتمال وقوع آن باشد. در این صورت اگر احتمال ضایع شدن محصول P_z و احتمال تکمیل شدن آن (سالم بودن) P_s باشد تابع توزیع زمان ضایع شدن برای یک محصول ضایع برابر خواهد بود با:

$$F_z(t)=\frac{\sum_i P_i^z F_i^z(t)}{P_z}$$

و به همین ترتیب تابع توزیع زمان تکمیل یک محصول سالم برابر خواهد بود با:

$$F_s(t)=\frac{\sum_j P_j^s F_j^s(t)}{P_s}$$

اما روشن است که

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\sum_i P_i^z F_i^z(t)}{P_z}=\lim_{t\to\infty} F_z(t)=1$$

همچنین

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\sum_j P_j^S F_j^S(t)}{P_s}=\lim_{t\to\infty} F_s(t)=1$$

اما روابط فوق را به صورت زیر نیز می‌توان نوشت:

$$\lim_{t \to \infty} \sum_i P_i^z F_i^z(t) = P_z$$

$$\lim_{t \to \infty} \sum_j P_j^s F_j^s(t) = P_s$$

در عمل به جای ∞ می‌توان بزرگترین زمان متصور برای ضایع یا تکمیل شدن محصول را در روابط فوق قرارداد تا P_z و P_s به دست آیند. البته روشهای تحلیلی برای محاسبه P_z و P_s وجود دارند [30] که دراینجا به علت بتا بودن تابع توزیع زمان تکمیل ۲ تا از شاخه‌ها استفاده از آن مشکل است. $F_i^z(t), F_j^s(t)$ ، j و $\forall i$ نیز بوسیله فرمول کوادراتورگاوس تعمیم یافته محاسبه شده‌اند. پس باتوجه به روش پیشنهادی P_z و P_s را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم. احتمالات P_z و P_s سطرهای یک تا ۳ جدول را درواقع می‌توان احتمال ضایع یا تکمیل شدن محصول در کوتاه مدت تلقی کرد. P_z و P_s در درازمدت درواقع اعداد سطر آخر جدول می‌باشند.

t	$\sum_i P_i^z P_i^z(t) = P_z$	$\sum_j P_j^s P_j^s(t) = P_s$
20	.1209253	.08765529
25	.1212202	.8785108
30	.1212471	.8787359
35	.12125	.87875

زیراباافزایش t، P_z، P_s ثابت‌می‌مانند. اگر P_z و P_s رابوسیله روابط

$$P_s = \sum_j P_j^s, P_z = \sum_i P_i^z$$

محاسبه کنیم همان مقادیر نهایی جدول به دست می‌آیند که این موضوع دقت بالای فرمول کوادراتورگاوس تعمیم یافته را نشان می‌دهد. حال با داشتن مقادیر P_z و P_s می‌توان با استفاده از فرمول کوادراتورگاوس تعمیم یافته تابع توزیع زمان ضایع شدن یا تکمیل یک محصول را به دست آورد. در جدول زیر تعدادی متناهی از نقاط توابع توزیع، $F_s(t)$ و $F_z(t)$ محاسبه شده‌اند. قبل از ارائه جدول لازم است که مفهوم P_z و P_s درکوتاه مدت را بیان کنیم و آن عبارتست از اینکه اگر به ازای t خاص P_z و P_s طبق جدول فوق به دست آمده باشند، احتمال آنکه محصول در زمانی کمتر از t ضایع شود P_z و احتمال آنکه در زمانی کمتر از t تکمیل شود P_s است. اما از آنجا که در این حالت (کوتاه مدت) $P_z+P_s<1$ پس می‌توان گفت که با احتمال $1-P_s-P_z$ محصول هنوز روی خط تولید است و وضعیت آن مشخص نشده است. حال جدول توابع توزیع $F_z(t)$ و $F_s(t)$ را ارائه می‌کنیم.

دراین مثال نیزاگر تعدادمتغیرهای تصادفی هرمسیربه‌قدرکافی بزرگ باشد ازتقریب قضیه حد مرکزی می‌توان استفاده کرد.

در حالت کلی می‌توان گفت که احتمالات ضایع شدن یا تکمیل شدن محصول در زمان کمتر از t به صورت زیراست:

$$P_z(t) = \sum_i P_i^z F_i^z(t)$$

$$P_s(t) = \sum_j P_j^s F_j^s(t)$$

برای مثال در زمانی کمتر از ۱۰ ساعت احتمال اینکه محصول به انبار ضایعات منتقل شده باشد 0.0814874 و احتمال اینکه به انبار محصولات سالم منتقل شده باشد 0.6714937 می‌باشد پس با احتمال $1-0.08014874-.6714937 \cong 0.247$ محصول هنوز روی خط است و به هیچکدام از انبارها (مقصدها) نرسیده‌است.

t	$F_z(t)$	$F_s(t)$
6	0	0
7	0.04678392	.1226497
8	0.262572	0.434107
9	0.4940976	0.6722291
10	0.672061	0.7641465
11	0.7765634	0.82022136
12	0.8470007	0.8731611
13	0.9103694	0.9178389
14	0.9453858	0.9467049
15	0.9666862	0.9686991
16	0.9783301	0.9801068
17	0.9853849	0.9871666
18	0.991486	0.9919339
19	0.9952622	0.9955771
20	0.9973218	0.9974998
21	0.9984302	0.9984992
22	0.9990445	0.9990437
23	0.9993988	0.9993648
24	0.9996176	0.9995832
25	0.999754	0.9997278

نتیجه گیری

در اینجا یک الگوریتم تحلیلی برای محاسبات توابع توزیع زمان تکمیل شبکه‌هایی که توابع توزیع زمان تکمیل شاخه‌های آنها پیوسته، مشخص، متنوع و مستقل از هم می‌باشند ارائه دادیم. نتیجه حاصل از این الگوریتم انتگرال چندگانه‌ای بود که طبق قضیه‌ای آنرا به انتگرال چندگانه ساده‌تری تبدیل کردیم و فرمول کوادراتورگاوس را برای حل آن تعمیم دادیم. همچنین این فرمول را در روش شبیه‌سازی مونت کارلو شرطی بکار بردیم تا حیطه کاربرد و سرعت آنرا توسعه دهیم. شبکه‌ها را براساس هر دو روش مورد تجزیه و تحلیل قرار دادیم و معیاری برای کارآیی روش شبیه‌سازی مونت کارلو شرطی معرفی نمودیم. برای کاهش واریانس نتایج شبیه‌سازی شرطی و شبیه‌سازی مستقیم از اعداد تصادفی antithetic استفاده نموده و مثالهای متعددی را با هر سه روش فوق حل کرده و زمان محاسباتی و دقت روشها را مقایسه نمودیم. در انتها نیز نشان دادیم که فرمول کوادراتورگاوس تعمیم یافته می‌تواند کاربرد مناسبی در مهندسی صنایع داشته باشد. از بررسیهای به عمل آمده نتایج زیر به دست آمده‌اند:

۱) دقت فرمول کوادراتورگاوس تعمیم یافته از هر دو روش دیگر بیشتر است.

۲) زمان محاسباتی فرمول کوادراتورگاوس تعمیم یافته در شبکه‌های با n-$N(Q)$ کوچکتر، کمتر از روشهای دیگر است.

۳) در فرمول کوادراتورگاوس تعمیم یافته با اضافه شدن بعد انتگرال حجم محاسبات بطور نمایی اضافه می‌شود، اما محدودیت در بعد انتگرال تعداد شاخه‌ها را محدود نمی‌کند بلکه محدودیتی روی ساختار شبکه ایجاد می‌نمایند.

۴) شاخه‌های موازی در روشهای شبیه‌سازی و PERT کلاسیک خطای زیادی را ایجاد می‌کند اما در فرمول کوادراتورگاوس تعمیم یافته سبب سهولت محاسبات می‌شود، خصوصاً که مسیرهای موازی یا زیرشبکه‌های موازی شبکه‌های تفکیک‌پذیر را بوجود می‌آورد که در این حالت زیرشبکه‌ها بطور مجزا بررسی می‌شوند.

۵) در شبکه‌های تفکیک‌پذیر زمان تکمیل شبکه بصورت

$$F(t) = \prod_{i=1}^{k} F_i(t)$$

محاسبه می‌شود اما طبق رابطه

$$e\left(\prod_{i=1}^{k} F_i(t)\right) \le \sum_{i=1}^{k} e(F_i(t)) \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{k} F_j(t)$$

و به دلیل اینکه $e[F_i(t)]$ خود مقداری کوچک و نیز $F_j(t)$ ها نیز کمتر از یک می‌باشند انتشار خطا در رابطه بسیار ناچیز خواهد بود.

۶) اگر نامساوی زیر

$$|\hat{F}_{n+1}(t) - \hat{F}_n(t)| \le 5\times10^{-(n+1)}$$

که در آن $\hat{F}_{n+1}(t)$ مقدار تابع توزیع زمان تکمیل شبکه در فرمول کوادراتورگاوس تعمیم یافته و با $n+1$ نقطه و $\hat{F}_n(t)$ مقدار تابع توزیع شبکه در همین روش و با n نقطه است برقرار باشد می‌توان گفت که مقدار تقریبی به دست آمده از فرمول کوادراتورگاوس تعمیم یافته تا n رقم بعد از اعشار درست می‌باشد که این موضوع امتیاز مهمی محسوب می‌شود.

۷) روش شبیه‌سازی مونت کارلو شرطی همواره دقیقتر و سریعتر از شبیه‌سازی مستقیم می‌باشد. در شبکه‌های با n-$N(Q)$ کوچکتر کندتر از فرمول کوادراتورگاوس تعمیم یافته و در شبکه‌های با n-$N(Q)$ بزرگتر سریعتر از آن می‌باشد.

۸) اگر شبیه‌سازی مستقیم با N بار شبیه‌سازی اجرا شود شبیه‌سازی مونت‌کارلو شرطی در برخی موارد حتی با $\frac{N}{10}$ بار شبیه‌سازی جوابهایی دقیقتر فراهم می‌آورد.

۹) محاسبات در روش شبیه‌سازی مونت‌کارلو شرطی با اضافه شدن n-$N(Q)$ بطور نمایی اضافه نمی‌شود. بنابراین شبکه‌های بزرگتر را نیز می‌توان با این روش تجزیه و تحلیل کرد.

۱۰) کارآیی روش شبیه‌سازی شرطی در شبکه سری در کمترین حد خود بوده و هر قدر مسیرهای موازی در شبکه بیشتر باشند کارآیی این روش نیز بیشتر شده و می‌تواند کاهشهای بیشتری در نمونه‌برداری ایجاد کند.

۱۱) اگر توابع فعالیتها شامل توابع متعالی باشند تعداد نقاط مورد نیاز برای محاسبه بیشتر از حالتی است که توابع توزیع فعالیتها غیرمتعالی باشند. بنابراین کارآیی این روش در مورد توزیعهایی مانند بتا و یکنواخت بیشتر خواهد بود.

۱۲) روشن است که چون سرعت کامپیوترها روز بروز افزایش می‌یابد می‌توان نتیجه گرفت که محدوده کاربرد

فرمول کوادراتورگاوس تعمیم یافته روز بروز گسترده می‌شود.

پیشنهادات زیر برای توسعه روش ارائه شده مفید بنظر می‌رسد:

۱) در اینجا زمان را به عنوان نماینده‌ای از متغیرهای جمع‌پذیر بکار بردیم. روشن است که روش ارائه شده برای هر متغیر جمع‌پذیر دیگر مانند مسافت، مقدار مصرف و... بدون هیچ تغییری قابل استفاده است.

۲) از آنجا که طبق این روش فقط نقاط منفصلی از تابع توزیع زمان تکمیل شبکه را می‌توان به دست آورد، استفاده از ریشه‌های چند جمله‌ای چیبشف برای تعیین بهترین نقاط منفصل جهت کاربرد این نقاط در درونیابی لاگرانژ برای تقریب صورت کلی تابع توزیع بوسیله یک چند جمله‌ای پیشنهاد می‌شود به طوری که مقدار تابع به ازای هر t دلخواه به راحتی و با دقت مناسب قابل محاسبه باشد. حتی برای ایجاد دقت بیشتر می‌توان تابع توزیع را به بخشهایی که هر بخش از منحنی هموار تشکیل شده باشد تقسیم نمود سپس در مورد هر بخش پیشنهاد ارائه شده را بکار برد.

۳) حل مثالهای این پایان‌نامه توسط برنامه‌هایی که به زبان Basic نوشته شده و روی کامپیوتری با سرعت 12MHZ اجرا شده‌اند صورت گرفته است. بدیهی است با نوشتن برنامه‌ها به زبانهای سریعتر و پیشرفته‌تر و اجرای آنها روی کامپیوترهای سریعتر می‌توان زمانهای محاسباتی روشها را کاهش داد.

در انتها باید به این حقیقت مسلم اشاره کرد که تجزیه و تحلیل پروژه‌های غیرقطعی عظیم بوسیله روشهای دقیقی چون فرمول کوادراتورگاوس تعمیم یافته نه مقدور است و نه منطقی و معقول، چراکه استفاده از یک روش دقیق زمانی جواب دقیق به دست می‌دهد که توزیع زمان تکمیل خود شاخه‌ها با دقت بسیار بالایی به دست آمده باشند که این عمل در پروژه‌های عظیم با تقریبی نه آنچنان دقیق (نسبت به دقت فرمول کوادراتورگاوس تعمیم یافته) صورت می‌گیرد و حتی اگر با روش بسیار دقیقی مورد تجزیه و تحلیل قرار گیرد دقت بالای این روش در نتیجه تقریبهای نسبتاً نادقیق از بین رفته و محسوس نخواهد بود.

همانگونه که در آخرین مثال نشان دادیم فرمول کوادراتورگاوس تعمیم یافته می‌تواند در تجزیه و تحلیل شبکه‌های GERT با گرههای Exclusive-or مفید باشد. مطالعات آتی در زمینه کاربرد فرمول کوادراتورگاوس تعمیم یافته در تجزیه و تحلیل شبکه‌های GERT با دیگر گرههای منطقی یعنی Inclusive- or و AND می‌تواند مفید باشد.

منابع

[1] Mac Crimmon, K.R.&.C.A.Ryavec, Analytical Study of the PERT Assumption, Opns. Res., Vol. 12,PP.16-37, 1964.

[2] Kotain TCT, Wallace N.D., Another look at the PERT Assumption, Man. Sci., Vol. 21,No.1, PP.44-49, 1973.

[3] Whitehouse, System Analysis and Design Using Network Techniques Prentice- Hall, Inc, 1973.

[4] Perry c., Greig I.D., Estimqting the Mean and Variance of subjective Disrtibutions in PERT and Decision Analysis, Man. Sci., Vol. 21, PP. 1477-1480, 1975.

[5] M.W. Sasieni, A Note on PERT Times, Man. Sci,. Vol. 32, No.12, PP.1652-1653, 1986.

[6] Kyung C.Chae and Sehum Kim, Estimating the Meam and Variance of PERT Activity Time Using likelihood- ratio of the Mode and the Mid point, IIE Transactions, Vol. 22, No.3, PP. 198-203, 1990.

[7] Wang Chengbim, Certain Limitation of Classical PERT- Time Model and Improved Approach, presented at APOR's 90, Beijing, China.

[8] T.M. Williams, Practical use of Distributions in Network Analysis, J. Opl. Res., Vol. 43, No.3, PP.265-270, 1992.

[9] C.E. Clark, The Greatest of a Finite set of Random variables, Opns Res, Vol. 11, PP. 145-162, 1961.

[10] S.E. Elmaghraby, On the Expected Duration of PERT type Networks, Man. Sci., Vol. 13, PP. 299-306, 1967.

[11] G.B. and P.R. Kleindorfer, Bounding Distributions for Stochastic Logic Network, Opl. Res. Quar., Vol. 25, No.3, PP. 469-479, 1971.

[12] R.R. Britney, Bayesian Point Estimation and the PERT Scheduling of Stochastic Activities, Man. Sci., Vol. 22, No. 9,PP. 938-948, 1976.

[13] D. Sculli, The Completion Time of PERT Networks, J. Opl. Res. Soc,. Vol. 34, PP. 155-158, 1983.

[14] J. Kamburowski, An Upper bound of the Expected Completion time of PERT Networks, Eur. J.Opl. Res., Vol., 21, PP. 206-212, 1985.

[15] J. Kamburowski, Normally Distributed Activity Durations in PERT Networks, J. Opl. Res,. Vol. 36, No.11, PP. 1051-1057, 1985.

[16] K.P. Anklesaria and Z.Drezner, A Multivariate Approach to Estimating the Completion time for PERT Networks, J. Opl. Res., Vol. 37, No.8, PP.811-815, 1986.

[17] B.Dodin and M.Sirvanci, Stochastic Networks and the extreme value Distribution, Com. Opl. Res., Vol. 17, No.4, PP.397-409, 1990.

[18] R.M. Van Slyke, Monte Carlo Methods and the PERT Problem, Opns. Res., Vol. 11, PP. 839-860, 1963.

[19] J.M. Burt, D.P. Gavert and M. Perlas, Simple Stochastic Networks: Some Problems and Procedures, Naval Research Logistic Quarterly, PP. 439-459, 1970.

[20] J.M. Burt and M.B. Garman, Conditional Monte Carlo: A Simulation Technique for Stochastic Network Analysis, Man. Sci., Vol. 18, PP. 207-217, 1971.

[21] C.E. Sigal, A.A.B. Pritsker and J.J. Solberg, The use of Cutsets in Monte Carlo Analysis of Stochastic Networks, Math. Comp. Simulation Vol. 21, PP. 379-384, 1979.

[22] D.L. Fisher, D.Saisi and W.M.Goldstein, Stochastic PERT Networks: OP Diagrams, Critical path and project Completion time, Com. & Ops. Res., Vol. 12, No.5, PP.471-482, 1985.

[23] G.S. Fishman, Estimating Network characteristics in Stochastic Activity Networks, Man. Sci., Vol. 31, No.5, PP. 579-593, 1985.

[24] J.J. Martin, Distribution of the time through a direct acyclic network, Opns Res., Vol. 13, PP. 46-66, 1965.

[25] H.O. Hartley and A.M. Wortham, A statistical Theory for PERT critical path Analysis, Man. Sci., Vol. 12, PP.461-481, 1966.

[26] L.J. Ringer, Numerical oprators for statistical PERT critical path Analysis, Man. Sci., Vol. 16, No.2, PP. 136-143, 1969.

[27] J.K. Ord, A simple Approximation to the Completion Time Distribution for a PERT

network, J. Opl. Res., Vol. 42, No.11, PP.1011-1017, 1991.

[28] T.M. Williams, Criticality in Stochastic Networks, J. Opl. Res., Vol. 43, No. 4, PP. 353-357, 1992.

[29] B.P. Demidovich and I.A.Maron, Computational Mathematics, Mir Publishers, Moscow, 1987.

[30] A.Alan B.Pritsker and W.W.Happ, GERT: Graphical Evaluation and Review Technique, Part I- Fundamentals, J. Industrial Eng., Vol. 17, PP. 267-274, 1966.

[۳۱] دکتر فرهاد کیانفر، کاربرد آمار کلاسیک و آماربیزی در روش ارزیابی و بازبینی پروژه (PERT)، مجله امیرکبیر- سال چهارم - شماره ۱۶- زمستان ۱۳۶۹- صفحات ۲۳۱-۲۲۲.

[۳۲] دکتر محمدتقی فاطمی قمی و مهندس سعید حاجی‌ابراهیم زرگر، محاسبه توابع توزیع چگالی و جمعی زمان تکمیل یک پروژه، مجله امیرکبیر- سال سوم- شماره ۱۱- بهار ۱۳۶۸- صفحات ۱۵۷-۱۵۴.