# ارائه الگاریتم جدید در حل معادلات غیرخطی
# وکاربرد آن در حل معادلات دیود


اکبر ادیبی
دانشیار دانشکده مهندسی برق
دانشگاه صنعتی امیرکبیر

محمدجواد شریفی
دانشجوی دکترای
دانشگاه صنعتی امیرکبیر

منصور نیکخواه بهرامی
استاد دانشکده فنی
دانشگاه تهران



## چکیــده:

مطالب ارائه شده در این مقاله در سه بخش آورده می‌شود. در بخش اول فرمول جدیدی به جای فرمول معروف نیوتن رافسون ارائه می‌کنیم که به جای تقریب خطی از تابع، تقریب چند جمله‌ای با درجه دلخواه می‌باشد و بنابراین می‌تواند به جای استفاده در روشهای تکراری، بطور مستقیم نیز بکار گرفته شود. در بخش دوم از فرمول ارائه شده برای حل معادلات دیود اتصال *P-N* استفاده می‌کنیم و کارائی آن را مورد بحث قرار می‌دهیم. در بخش سوم رابطه جدیدی برای معادلات دیود ارائه می‌کنیم که از آن برای به دست آوردن تخمین اولیه در روش تکراری نیوتن رافسون یا روش خودمان استفاده خواهیم کرد. با استفاده از این روش در نرم‌افزارهای شبیه‌سازی مدار نظیر *SPICE* می‌توان با حذف تکرار، قابلیت پردازش موازی را به میزان زیادی اضافه کرد.


# A New Algorithm For Solving Nonlinear Algebric Equations and Its Application To Diode Equations


**A. Adibi**
**Associate Prof**
**EE. Dept. Amirkabir Univ. of Tech.**

**M.J. Sharifi**
**Ph.D. Student**
**Amirkabir Univ. of Tech.**

**M.Nikkhah Bahrami**
**Prof of Mech. Eng. Dept.**
**Tehran University**



## ABSTRACT:

*This paper introduces 3 related subjects in the three sections. First of all a new formula for getting an approximate analytical solution for nonlinear algebric equations is introduced. After that we solve the diode equations using the above formula. Finally in the third section a new approach for obtaining a first estimation of the solution of diode equations which can be used either in our proposed method or in the newton- raphson formula is introduced.*

*An important applican for our proposed approach is that since no iteration is necessary, one can get the benefit of real parallel processing ability in using simulation softwares such as SPICE.*


## مقدمه

روش نیوتن رافسون (N-R) برای حل معادلات غیرخطی یک روش عمومی است که تقریباً در همه رشته‌های مهندسی برای این منظور بکار می‌رود [1] در این روش ابتدا باید یک تخمین اولیه در مورد جواب داشته باشیم و سپس به شکل تکراری این تخمین اولیه را بهبود می‌بخشیم. روش N-R با بسط تیلور معادلات غیرخطی حول تخمین اولیه و حذف جملات غیرخطی این رابطه را

به دست می‌دهد. ($X^{[K]}$ بردار جواب در مرحله K ام و F تابع غیرخطی موردنظر است)

$$x^{[k+1]} = x^{[k]} - F(x^{[k]}) / \frac{dF}{dx}\Big|_x^{[k]} \qquad (۱)$$

تاکنون گرچه اصلاحات متعددی در این روش انجام شده است اما استخوان‌بندی رابطه فوق ثابت مانده است. بعنوان مثال در مرجع [2] برای بهبود پایداری در نزدیکی جواب نهائی و حذف نوسانات، توصیه شده است که بعد از سه تکرار اول از رابطه ذیل استفاده شود.

$$x^{[k+1]} = \frac{x^{[k]} + x^{[k-1]}}{2} - F(x^{[k]}) / \frac{dF}{dx}\Big|_x^{[k]}$$

یک اصلاح مهم و قابل توجه اخیراً مطرح شده است [3] ولی بطور غیرصریح و بدون ذکر ارتباط آن با روش N-R و در مورد یک معادله خاص یعنی معادله دیود این کار انجام شده است. ما با بسط موضوع و روشن کردن پایه‌های اصلی آن، آنرا بعنوان یک روش حل معادلات غیرخطی در حالت کلی مطرح می‌نماییم و دامنه همگرایی و محدودیتهای آن را مورد بررسی قرار می‌دهیم. در بخش اول رابطه‌ای را که به جای رابطه N-R می‌خواهیم بکار ببریم شرح می‌دهیم. در بخش دوم با این رابطه معادله یک دیود را بعنوان مثال حل می‌کنیم. در بخش سوم برای به دست آوردن تخمین اولیه جریان دیود یک رابطه ارائه خواهیم کرد و بالاخره در بخش چهارم با جمع‌بندی نتایج، روش به دست آوردن یک جواب تحلیلی تقریبی را برای معادلات غیرخطی در حالت کلی مطرح می‌نماییم.

## بخش اول

همانطور که مطرح شد روش نیوتن رافسون برای حل معادلات غیرخطی به شکل $f(x) = 0$ می‌باشد، ولی ما معمولاً در مسائل مهندسی با مسائلی به شکل $y = f(x)$ برخورد داریم که y لزوماً صفر نیست.

$$y = f(x) \qquad (۲)$$

یک x از طرفین کم می‌کنیم

$$y - x = f(x) - x \qquad (۳)$$

با تعریف $g(x) = f(x) - x$ داریم

$$x = y - g(x) = h(x,y) \qquad (۴)$$

حال بسط تیلور این رابطه را حول نقطه y می‌نویسیم:

$$x = h(x,y)|_{y_0} + \frac{\partial h}{\partial y}\Big|_{y_0}(y-y_0) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}\Big|_{y_0}(y-y_0)^2 + \frac{1}{3!}\frac{\partial^3 h}{\partial y^3}\Big|_{y_0}(y-y_0)^3 + \ldots\ldots \qquad (۵)$$

$$\frac{\partial h}{\partial y} = 1 - \frac{\partial g(x)}{\partial y} = 1 - \frac{\partial g(x)}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y} = 1 - \frac{\partial g(x)}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial y}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial h}{\partial y} = \frac{1}{1 + \frac{\partial g}{\partial x}} \qquad (۶)$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{1+\frac{\partial g}{\partial x}}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{1+\frac{\partial g}{\partial x}}\right)\frac{\partial x}{\partial y}$$

$$= \frac{\partial x}{\partial y}\left[\frac{-\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}}{\left(1+\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2}\right] = \frac{-\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}}{\left(1+\frac{\partial g}{\partial x}\right)^3} \qquad (۷)$$

و بطور مشابه می‌توان به دست آورد:

$$\frac{\partial^3 h}{\partial y^3} = \frac{3\left(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\right)^2 - \frac{\partial^3 g}{\partial x^3}\left(1+\frac{\partial g}{\partial x}\right)}{\left(1+\frac{\partial g}{\partial x}\right)^5} \qquad (۸)$$

اگر روابط ۶ و ۷ و ۸ را در رابطه ۵ قرار دهیم و به جای dg/dx نیز مقدار آن را بگذاریم داریم:

$$x = x_0 + \frac{1}{F'}\Big|_{x_0}(y-y_0) + \frac{1}{2}\frac{-F''}{(F')^3}\Big|_{x_0}(y-y_0)^2 + \frac{1}{6}\frac{3(F'')^2 - F'''F'}{(F')^5}\Big|_{x_0}(y-y_0)^3 \qquad (۸)$$

$$+ \frac{1}{24}\frac{10F'''F''F' - 15(F'')^3 - F''''(F')^2}{(F')^7}\Big|_{x_0}(y-y_0)^4 + \ldots \qquad (۹)$$

تمام عناصر فرمول فوق با فرض معین بودن مشتقات متوالی f در نقطه تخمین اولیه، معین هستند بجز y که آن را از رابطه ۲ به دست می‌آوریم.

در به دست آوردن فرمول ۹ از این واقعیت استفاده شد که وقتی تابع $y = f(x)$ نسبت به محور x ها پیوسته و هموار بوده و دارای بسط تیلور باشد اگر جای دو محور را هم عوض کنیم نسبت به محور y ها نیز دارای بسط تیلور است و جالب است که دو جمله اول فرمول ۹ همان جملات فرمول N-R می‌باشد.

دامنه همگرایی این فرمول به دامنه همگرایی بسط تیلور مربوط می‌شود و به علاوه از آنجا که در مخرج توانهای مشتق f(x) ظاهر می‌شود، تخمین اولیه بایستی در فاصله‌ای از جواب باشد که در آن فاصله مشتق صفر نشود. اگر در نقطه جواب مشتق صفر شده باشد (دو یا چند ریشه مضاعف داشته باشیم) یا مشتق خیلی کوچک شود (دو یا چند جواب خیلی نزدیک به یکدیگر) در آن صورت همگرایی این روش هم مثل روش N-R خوب نیست.

## بخش دوم

معادله دیود در حالت ساده معمولاً به شکل زیر داده می‌شود:

$$I_D = I_S\,(e^{qV_D/nKT} - 1) \qquad (۱۰)$$

زمانی که اثر مقاومتهای پارازیتی هم به حساب آید این معادله به شکل زیر درمی‌آید.

$$I_D = I_S\,(e^{q(V_d - r_s I_D)/nKT} - 1) \qquad (۱۱)$$

$$V_d = r_s I_D \frac{nKT}{q} \ln\left(\frac{I_D + I_S}{I_S}\right) \qquad (۱۲)$$

رابطه ۱۲ به فرم رابطه ۲ می‌باشد و با محاسبه مشتقات آن و قرار دادن در فرمول ۹ می توان آن را حل کرد.

$$F'(I_D) = r_s + \frac{nKT}{q}(I_D + I_S)^{-1} \qquad (۱۳)$$

$$F''(I_D) = \frac{-nKT}{q}(I_D + I_S)^{-2} \qquad (۱۴)$$

$$F'''(I_D) = 2\frac{nKT}{q}(I_D + I_S)^{-3} \qquad (۱۵)$$

$$I_D = I_{DO} + \frac{1}{F'(I_D)}\Big|_{I_{DO}}(V_d - V_{d0}) + \frac{1}{2}\frac{-F''(I_D)}{(F'(I_D))^3}\,I_{DO}\,(V_d - V_{do})^2 \qquad (۱۶)$$

$$+\frac{1}{6}\frac{3(F''(I_D))^2 - (F'''(I_D))(F'(I_D))}{(F'(I_D))^5}\Big|_{I_{DO}}(V_d - V_{do})^3 + \dots$$

خوشبختانه با حضور rs در رابطه ۱۳ مطمئن هستیم که مقدار مشتق خیلی کوچک نخواهد بود بعنوان مثال اگر داشته باشیم $(V_d = 0.85\ ,\ I_s = 1e-13\ ,\ nKT/q = 0.025\ ,\ r_s = 1)$ آنگاه اگر بتوان حدس زد که Id حدود 100 mA است از رابطه ۱۲ مقدار Vd برابر 0.7908 و از رابطه ۱۶ مقدار Id برابر 0.14920 به دست می‌آید که با مقدار دقیق (0.1492182) بیش از چهار رقم اعشار تطابق دارد در حالی که خطای حدس اولیه Id حدود 50% بوده است.

## بخش سوم

در این بخش می‌خواهیم یک فرمول برای تخمین اولیه جریان دیود به دست آوریم. ابتدا معادله دیود را با تغییر متغیرهای مناسب نرمالیزه می‌کنیم.

$$V_d = r_s I_D + \frac{nKT}{q}\ln\left(\frac{I_D + I_S}{I_S}\right) \qquad (۱۲)$$

طرفین رابطه را بر nKT/q تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{q}{nKT}V_d = \frac{q}{nKT}r_S I_D + \ln\left(\frac{I_D + I_S}{I_S}\right) \qquad (۱۷)$$

در ترم دوم طرف راست به جای Id عبارت داخل لگاریتم را می‌سازیم:

$$\frac{q}{nKT}(V_d + r_s I_s) = \frac{q}{nKT}r_S I_S\left(\frac{I_D + I_S}{I_S}\right) + \ln\left(\frac{I_D + I_S}{I_S}\right) \qquad (۱۸)$$

حالا ترم دوم سمت راست را در داخل لگاریتم می‌سازیم:

$$\frac{q}{nKT}(V_d + r_S I_s) + \ln\left(\frac{q}{nKT}r_S I_S\right) = \frac{q}{nKT}r_S(I_D + I_S) + \ln\left[\frac{q}{nKT}r_S(I_D + I_S)\right] \qquad (۱۹)$$

با یک تغییر نتاسیون به سادگی می‌توان نوشت:

$$U = I + \ln(I) \qquad (۲۰)$$

نکته‌ای که باید مورد توجه قرار گیرد آنست که با داشتن

Vd و پارامترهای دیود (Is , rs,n,KT/q) می‌توان U را به دست آورد و با داشتن U معادله ۲۰ را حل می‌کنیم تا مقدار I را بیابیم و با داشتن I به راحتی Id به دست می‌آید. بنابراین در این روش به جای حل معادله ۱۲ که پارامترهای زیادی در آن هست معادله ۲۰ را حل می‌کنیم که فاقد پارامتر است و برای هر دیود به شکل یکسان می‌باشد و نیز به علت نرمالیزه بودن ضرایب خطای محاسبات عددی کمتر خواهد بود.

در معادله ۲۰ برای مقادیر خیلی کم U (U های منفی و بزرگ) I نیز خیلی کم خواهد بود (البته I همیشه مثبت باقی می‌ماند) و ترم دوم سمت راست تعیین کننده است و برای مقادیر بزرگ U مقدار I نیز بزرگ خواهد بود و ترم اول سمت راست مهمتر می‌شود.

با یک بحث درفیزیک قطعه می‌توان نشان داد که U از منفی بینهایت (متناظر با $I = 0$ یعنی $Id = -Is$) تا $U = 20$ تغییر می‌کند معذالک به دلیل عنوان شده، در مقادیر کوچک U، رابطه ۲۰ می‌تواند به شکل $I = EXP(U)$ نوشته شود که جواب آن مشخص است و بنابراین ما جواب را فقط در محدوده $U = (-5,20)$ مورد بررسی قرار می‌دهیم که در شکل (۱) رسم شده است.

تقریب این منحنی با فرمولهای تحلیلی مختلفی ممکن است ولی از آنجا که ما می‌خواهیم یک روش عمومی ارائه دهیم و معادله دیود را فقط بعنوان یک مثال انتخاب کرده‌ایم، از تقریب خطی تکه‌ای استفاده می‌کنیم. برای انتخاب نقاط انفصال می‌توان به این شکل استدلال کرد، اگر هر تکه را بسط تیلور بدهیم دو جمله اول همان جملاتی هستند که در تقریب خطی خودمان استفاده می‌کنیم و جمله سوم تخمینی از خطا را به دست می‌دهد و اگر به خطای نسبی علاقمند باشیم داریم:

ماکزیمم خطای نسبی هر تکه

$$\frac{\frac{1}{2}\frac{d^2 f(x)}{dx^2}}{f(x)}\Bigg|_{x_i+\Delta x_i} \Delta x_i^2 = E_i \Delta x_i^2 \qquad (۲۱)$$

($x_i$ مرکز بسط و $\Delta x_i$ فاصله حداکثر از مرکز بسط در هر تکه می‌باشد) اگر بخواهیم یک تقریب n تکه‌ای داشته باشیم محور x ها را به n قسمت مساوی تقسیم کرده و خطای نسبی فوق را روی تمام حدود سمت راست قسمتهای فوق محاسبه کرده و سپس محور x ها را توسط آنها مقیاس می‌کنیم:

$$(۲۲) \quad \text{مقیاس‌جدیدمحور} \, x \; S_i = \frac{\text{کل فاصله موردنظر روی محور } x}{\Sigma \left(\frac{1}{E_i}\right)^{1/2}}$$

فاصله هر تکه از سمت چپ با توجه به مقیاس جدید این طور می‌شود:

$$di = \frac{S_i}{(E_i)^{1/2}} \qquad (۲۳)$$

به این ترتیب می‌توان امیدوار بود که محور x طوری تکه‌تکه شود که در تمام تکه‌ها ماکزیمم خطاهای نسبی در یک حدود باشد. در این مسأله خاص تاکید زیاد روی خطای نسبی خوب نیست و با مصالحه‌ای با خطای مطلق تکه‌ها را این طور انتخاب کرده‌ایم:

-5 تا -2.1

-2.1 تا 0.1

0.1 تا 4.1

4.1 تا 20.

در این حال با یک نرم‌افزار تطبیق منحنی [4] مقادیر پارامترهای تقریب خطی در هر ناحیه این طور به دست می‌آید (مشتق اول و دوم و سوم نیز در شکل (۱) رسم شده است)

$$\begin{aligned} I = {} & 0.04187 * U + 0.17865 \\ & 0.2226 * U + 0.53218 \qquad (۲۴) \\ & 0.6094 * U + 0.3943 \\ & 0.8978 * U - 0.9523 \end{aligned}$$

نکته جالبی که مطرح است آنست که لازم نیست تکه خطهای ما حتی پیوسته باشند همانطور که در این مثال هم پیوسته نیستند. مقدار خطای نسبی برای این تقریب در شکل (۲) آمده است و در همان شکل میزان خطای نسبی وقتی از دو یا سه یا چهار جمله از فرمول ۱۶ استفاده شود نیز رسم شده است و ملاحظه می‌شود به راحتی می‌توان جواب را تا

هر دقتی که بخواهیم به دست آوریم.

## بخش چهارم

جمع‌بندی و نتیجه‌گیری با توجه به مثال ارائه شده برای به دست آوردن یک جواب تحلیلی تقریبی برای مسائل مهندسی می‌توان به روش زیر عمل کرد:

الف - سعی می‌کنیم با نرمالیزاسیونهای مناسب صورت مسأله را که غالباً به شکل $y = f(x,p)$ داده می‌شود به شکل $y = f(x)$ درآوریم.

ب - با تعیین حدود موردنظر برای $x$ و استفاده از اطلاعات مشتق دوم می‌توان محور $x$ را در بازه موردنظر به تکه‌هایی تقسیم کرد که در آنها ماکزیمم خطای نسبی در تقریب خطی تقریباً یکسان باشد.

ج - در هر تکه با استفاده از تکنیکهای تطبیق منحنی یک منحنی خطی تطبیق می‌نماییم.

د - با استفاده از مشتقهای مرتبه بالاتر و فرمول ۹ می‌توان دقت جواب را تا هر میزان بخواهیم افزایش داد.

این روش بدون دشواری به حالاتی که تابعی از بیش از یک متغیر داشته باشیم یا نتوان پارامترها را تماماً حذف کرد تعمیم داده می‌شود و به این ترتیب فرمولی برای حل مسأله موردنظر بدون استفاده از روشهای تکراری به دست می‌آید.

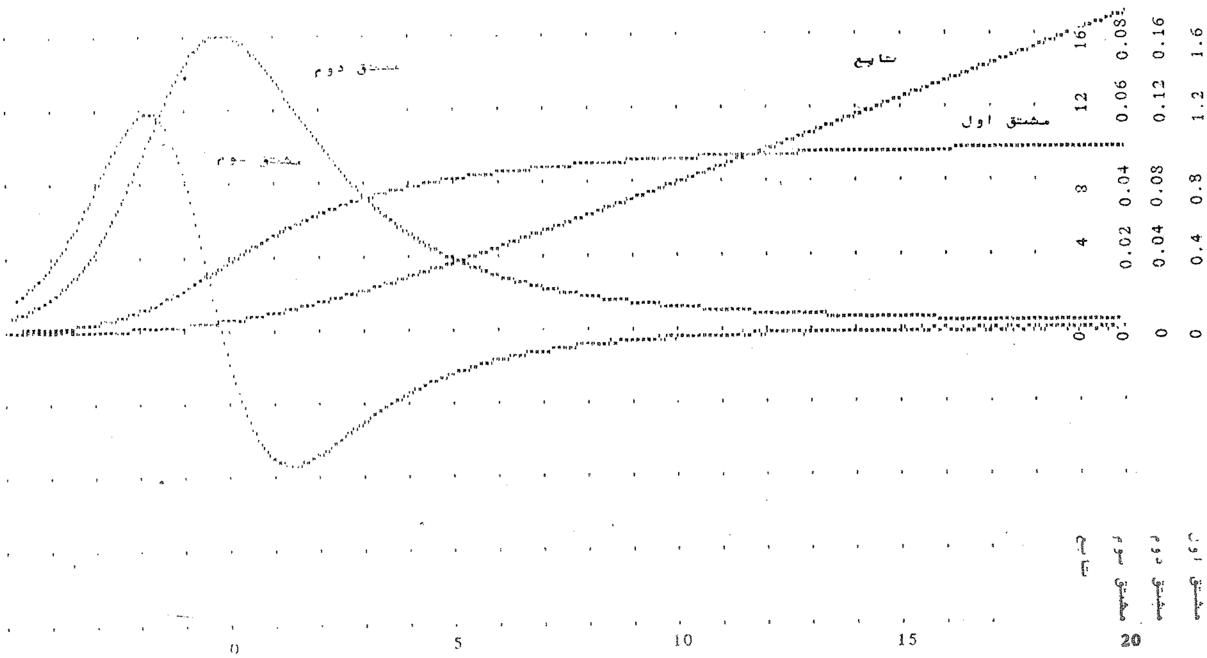
## منابع


[1] Pres-W.H,Flannery-B.P "Numerical Recipes" Cambridge University Press pp 254-259, 1986.

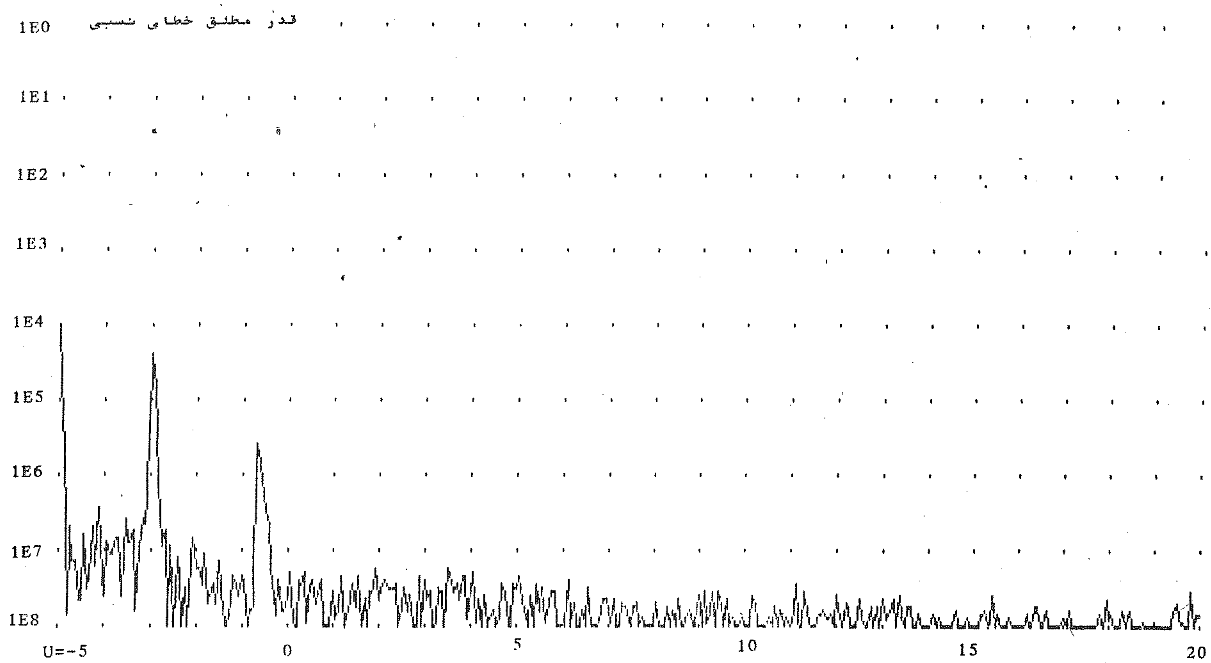
[2] Don-W., Carl. J "Hydralic Network Analysis Using Linear Theory" ASCE 98 [HY7] pp 1157-1170,1972.

[3] Feldy-T.A., Moon-B.J., Shur-M. "Approximate Analytical Solution of Generalized Diode Equation "IEEE Trans. on Electron Devices Augest 1991.

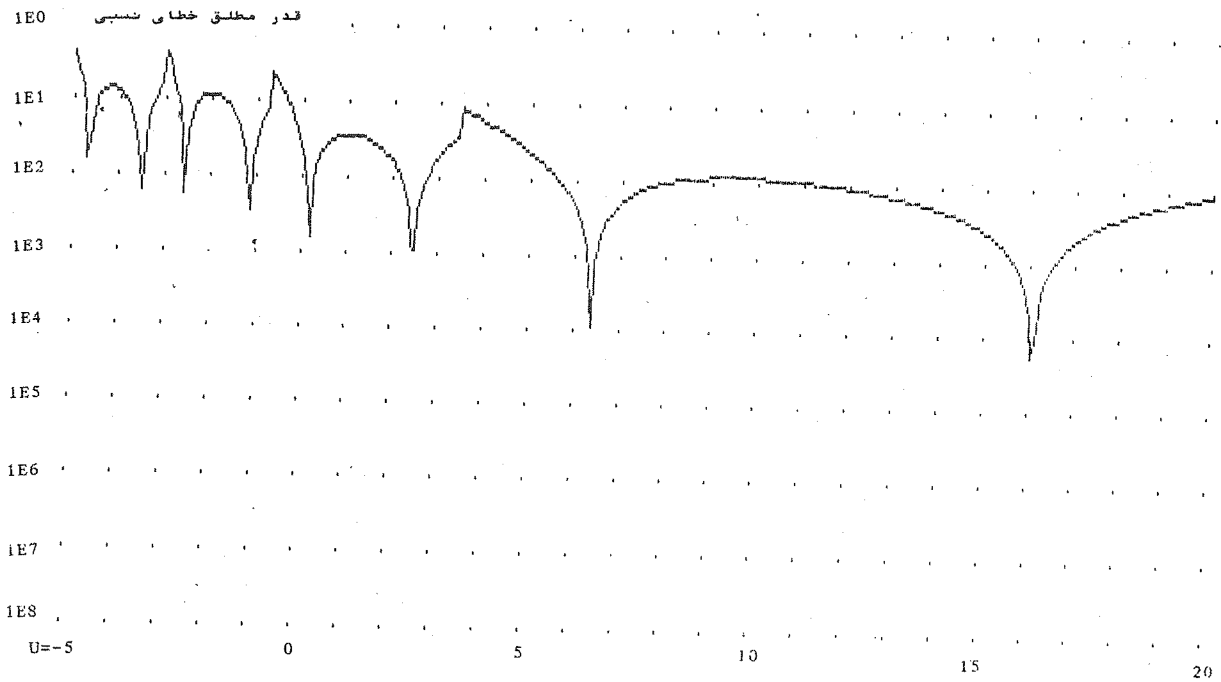
[۴] شریفی- محمد جواد «استخراج پارامترهای عناصر نیمه‌هادی به‌کمک کامپیوتر» پایان‌نامه فوق لیسانس - دانشکده فنی دانشگاه تهران ۱۳۷۰.

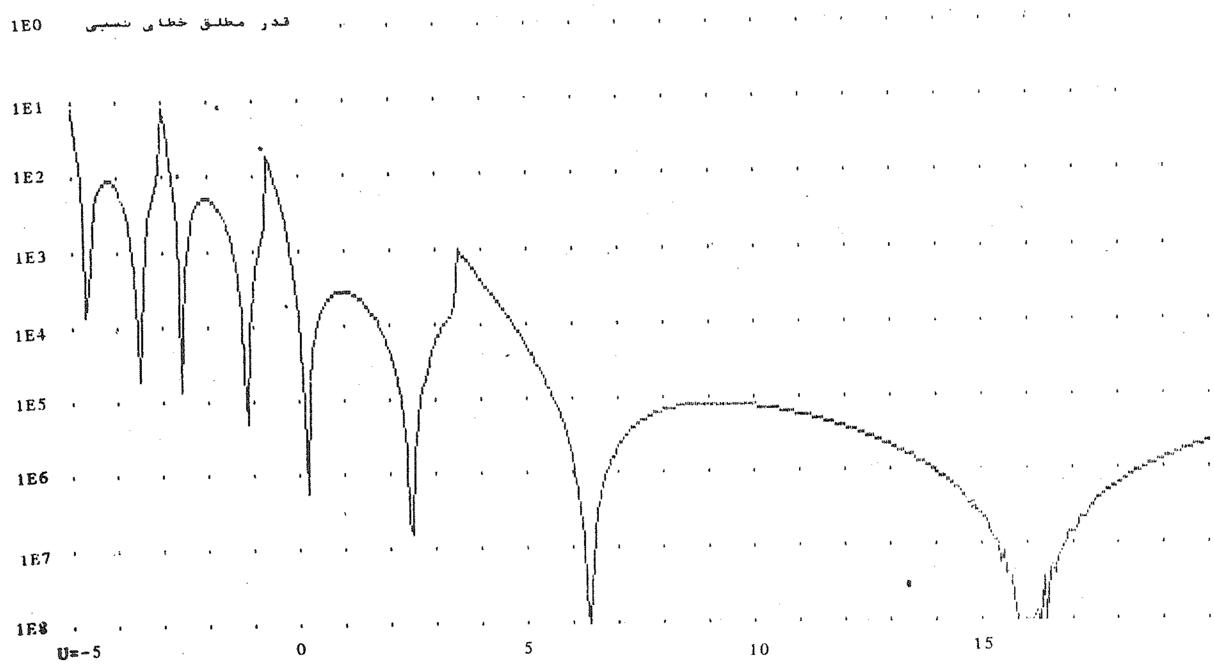

شکل (۱) منحنی تابع $U = I + Ln (I)$ ومشتقات متوالی آن



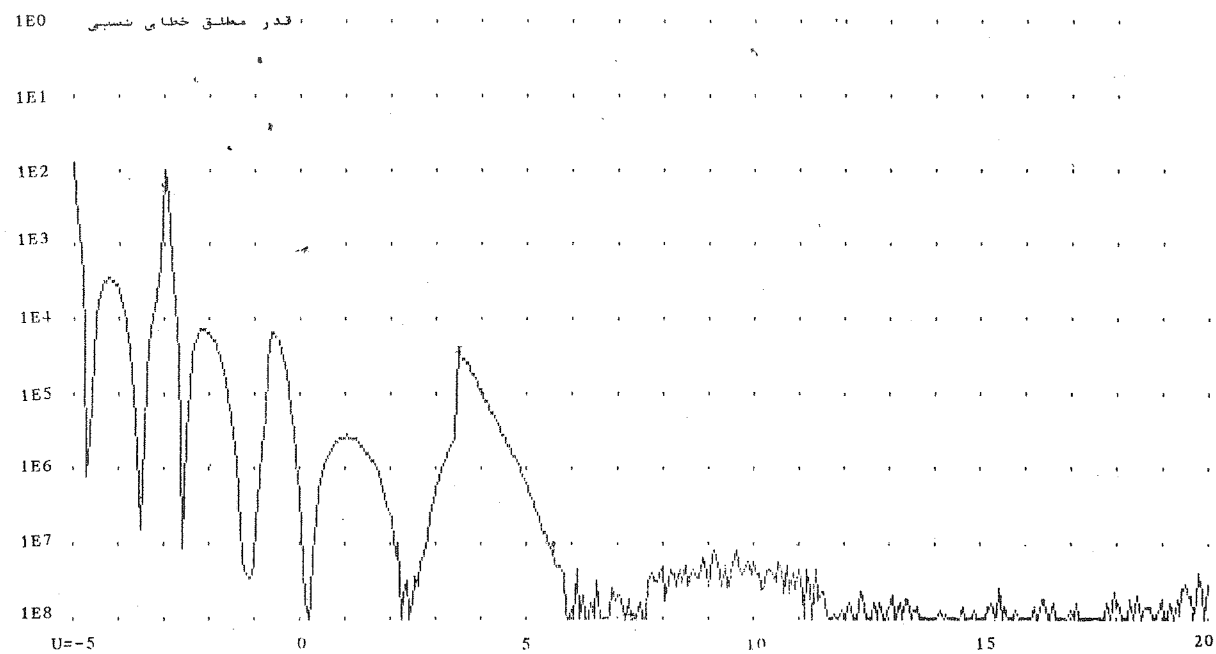

**شکل (۲) تقریب خطی تکه‌ای با پنج جمله از فرمول ۱۶**



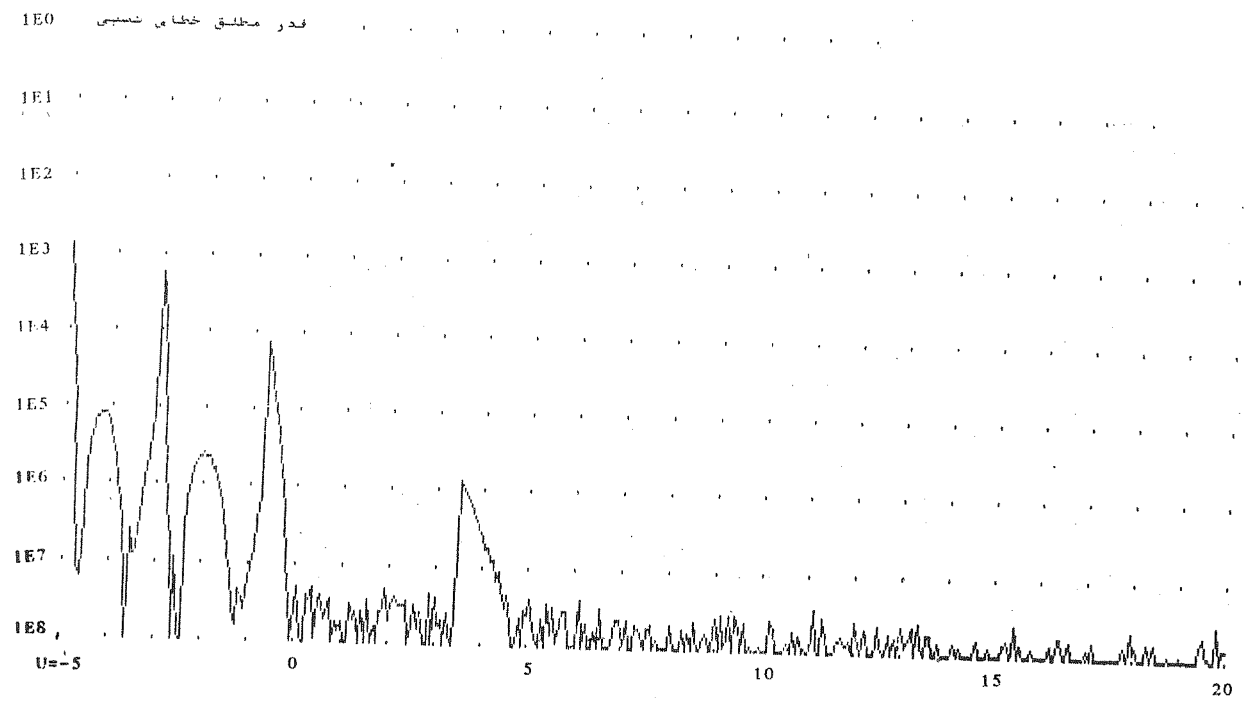

**شکل (الف ـ ۲) قدرمطلق خطای نسبی برای تقریب خطی تکه‌ای (فرمول ۲۴)**




شکل (ب ـ ۲) تقریب خطی تکه‌ای با پنج جمله از فرمول ۱۶




شکل (ج ـ ۲) تقریب خطی تکه‌ای با سه جمله از فرمول ۱۶




شکل (د ـ ۲) تقریب خطی تکه‌ای با چهار جمله از فرمول ۱۶