

# بررسی رفتار الاستو-پلاستیک صفحه سوراخدار تحت کشش و راه‌های کاهش تمرکز تنش به روش اجزاء محدود

محسن تهرانی‌زاده

استادیار دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی امیرکبیر

چکیده:

رفتار صفحات سوراخدار تحت کشش به علت تمرکز تنش در اطراف سوراخ در صورت افزایش بار به سرعت از حالت الاستیک خارج شده و به حالت الاستو الاستیک تبدیل می‌شود. در این مقاله ابتدا خلاصه‌ای از کاربرد روش المانهای محدود برای مسائل الاستوپلاستیک توضیح داده می‌شود و سپس بر این اساس یک برنامه کامپیوتری بر مبنای تحلیل اجزاء محدود در ارتباط با مسائل الاستوپلاستیک دو بعدی ارائه می‌گردد. به علاوه در این مقاله با استفاده از نتایج به دست آمده برای کاهش تمرکز تنش در صفحات سوراخدار راه‌های عملی پیشنهاد شده است.

## Elasto-Plastic Analysis of Perforated Plate Under Tension by Finite Element Method

Mohsen Tehrani-Zadeh

Assist. Prof. of Civil Engineering,  
AmirKabir University of Technology.

### Abstract:

*The finite element is now firmly accepted as a most powerful general technique for the numerical solution of a variety of problems encountered in engineering. Applications range from the stress analysis of solids to the solution of acoustical fluid dynamics and etc, problems. The finite element process is now established as a general subject to known boundary and initial conditions.*

کاملاً جنبه کلی داشته و قابل کاربرد در کلیه مسائل دو بعدی است. برای دست‌یابی به هدف اشاره شده یک برنامه کامپیوتری نیز تهیه شده که قابل استفاده در کلیه مسائل دوبعدی می‌باشد.

## ۲- تئوری ریاضی پلاستیسیته

هدف تئوری ریاضی پلاستیسیته، تعیین یک تعریف تئوریک از رابطه تنش-تغییر شکل نسبی ماده‌ای که رفتار الاستو-پلاستیک از خود نشان می‌دهد می‌باشد. رفتار پلاستیک با به وجود آمدن تغییر شکلهای غیر قابل جبران که تابع زمان نبوده و فقط با رسیدن تنش به حد خاصی ایجاد می‌شوند، مشخص می‌شود.

در بحث حاضر عوامل زمان در محاسبات ریاضی پلاستیسیته وارد نشده و اثرات تغییر درجه حرارت به طور کلی قابل صرف نظر فرض گردیده و رابطه تنش-تغییر شکل نسبی قبل از شروع تسلیم، الاستیک خطی در نظر گرفته شده است.

## ۳- رابطه تنش-تغییر شکل نسبی الاستو-پلاستیک

بعد از ایجاد تسلیم اولیه، رفتار مصالح، قسمتی الاستیک و قسمتی پلاستیک خواهد بود. با توجه به اینکه در اثر باربرداری مسیر برگشت منحنی تنش تغییر شکل نسبی موازی شیب اولیه رفتار الاستیک است، می‌توان فرض نمود که در هر نمو تنش، تغییرات تغییر شکل نسبی قابل تقسیم به مؤلفه‌های الاستیک و پلاستیک می‌باشد:

$$d\varepsilon_{ij} = (d\varepsilon_{ij})_e + (d\varepsilon_{ij})_p \quad (1)$$

$(d\varepsilon_{ij})_e$ ،  $(d\varepsilon_{ij})_p$  به ترتیب نموهای تغییر شکلهای نسبی الاستیک و پلاستیک می‌باشند. نموهای تغییر شکل نسبی الاستیک به کمک رابطه زیر با نموهای تنش مرتبط می‌شوند.

$$\{\varepsilon\} = [c] \{\sigma\} \quad (2)$$

در این رابطه شش مؤلفه مستقل تنش و تغییر شکل نسبی به صورت بردار معرفی شده‌اند که توسط ماتریس  $[c]$  به یکدیگر مرتبط شده و عناصر آن در صورت مصالح ایزوتروپ با دو ضریب مستقل قابل تعریف می‌باشد. شکل این رابطه با توجه به تقسیم تنشها به تنشهای

خطی فرض کردن رفتار اجسام، از جمله فرضهایی است که حل مسائل مکانیک جامدات را تا حد زیادی ساده کرده و مدتهای مدیدی ابزار مناسبی برای رفع نیازها در این زمینه محسوب می‌شده است. اما این فرض با توجه به نیازهای جدید، روز بروز کارایی خود را از دست داده است، زیرا رفتار اکثر مصالح در برابر نیروها، غیرخطی بوده و طبیعی‌ترین نحوه بررسی آنها، در نظر گرفتن این شکل از رفتار مکانیکی می‌باشد.

پیشرفت سریع روشهای عددی و ابزار جدید آزمایش و نیز وجود تکنولوژی پیشرفته کامپیوترها عواملی هستند که بررسی رفتار غیرخطی اجسام را ممکن می‌سازند.

در این راستا روش المانهای محدود هم اکنون به عنوان قویترین وسیله برای حل معادلات ديفرانسیل پاره‌ای، خطی یا غیرخطی در مسائل مختلف هندسی در آمده است. کاربرد آن محدود و وسیعی از تحلیل تنشها در سازه‌ها، حل مسائل دینامیک سیالات و انتقال حرارت را در برمی‌گیرد. این روش در محدوده رفتارهای خطی، به طور وسیعی کاربرد داشته و نتایج مطلوبی از آن حاصل شده است.

در مسائل غیرخطی دو عامل مهم، قابلیت کاربرد آن را محدود می‌سازد. عامل اول وجود عملیات زیاد محاسبات عددی است که لازمه حل مسائل غیرخطی بوده و نیاز به قدرت محاسبات زیادی دارد که ساخت و پیشرفت در زمینه ساخت کامپیوترهای با سرعت بالا از یک طرف و تهیه و تدارک روشهای عددی که باعث کاهش محاسبات غیرخطی می‌شوند از سوی دیگر، این نیاز را تا حدود زیادی برطرف ساخته است. عامل دوم، همخوانی مدل‌های ریاضی که رفتار غیرخطی اجسام را نمایش می‌دهند با رفتار طبیعی و نتایج آزمایشگاهی و امکان اعمال روشهای عددی بر آنها می‌باشد که لازم است قبل از تحلیل از روش اجزاء محدود به صورت غیرخطی، مورد بررسی و تأیید قرار گیرند.

امروزه گسترش تحقیقات در مورد دو عامل مزبور و دستیابی به نتایج مطمئن آن، تحلیل غیرخطی به کمک روش المانهای محدود را کاملاً امکان پذیر ساخته است.

در این مقاله، هدف این بوده است که ضمن تشریح جزئیات کاربرد روش المانهای محدود در رفتار الاستوپلاستیک فلزات، مسأله خاص صفحه سوراخدار مورد بررسی و تحلیل قرار گیرد. آنچه که در مورد تئوری الاستوپلاستیک و روش اجزاء محدود دو بعدی ارائه شده

دویاتوریک و هیدرواستاتیک مطابق رابطه زیر است.

$$(d\varepsilon_{ij})_e = \frac{d\sigma_{ij}}{2\mu} + \frac{(1-2\nu)}{E} \delta_{ij} d\sigma_{kk} \quad (3)$$

در این رابطه E مدول الاستیته،  $\sigma_{kk}$  تنش هیدرواستاتیک و  $\delta_{ij}$  دلتای کرونکر می باشد.

برای تعیین رابطه بین نموهای تنش و تغییر شکل پلاستیک باید فرض دیگری نیز راجع به رفتار مصالح صورت گیرد. به طور مشخص فرض می شود که تغییر شکل‌های پلاستیک متناسب با گرادیان کمیتی هستند که پتانسیل پلاستیک Q, (Plastic Potential) نامیده می شود به طوری که

$$(d\varepsilon_{ij})_p = d\lambda \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ij}} \quad (4)$$

$d\lambda$  ثابت تناسب بوده و به نام ضریب پلاستیک (Plastic Multiplier) خوانده می شود.

رابطه (4) به نام قانون جریان (Flow Rule) معروف است. از آنجایی که تابع پتانسیل Q را می توان در فضای تنشها تعریف کرد، بنابراین در رفتار پلاستیک، Q باید تابعی از  $J_1, J_2, J_3$  (انواریان تنشهای دویاتوریک) باشد، در این صورت اتحاد  $f=Q$  (که  $f=K(\alpha)$  بیانگر معیار تسلیم و k پارامتر مشخص کننده مصالح است) را با این استدلال که هر دو تابع  $J_2, J_3$  هستند می توان صحیح فرض کرد. در چنین وضعیتی خواهیم داشت.

$$(d\varepsilon_{ij})_p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (5)$$

این رابطه به نام «شرط عمود بودن» (normality condition) مشهور است. مؤلفه های نمو تغییر شکل پلاستیک باید در فضای n بعدی به صورت برداری با یکدیگر جمع شوند که برداری عمود بر سطح تسلیم ایجاد گردد. در حالت خاص  $f=J_2$  خواهیم داشت:

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial J_2}{\partial \sigma_{ij}} = \sigma_{ij} \quad (6)$$

در این حالت رابطه (5) به صورت زیر در خواهد آمد:

$$(d\varepsilon_{ij})_p = d\lambda \sigma_{ij} \quad (7)$$

با توجه به روابط قبل، رابطه کامل بین نموهای تغییر شکل نسبی را برای تغییر شکل‌های الاستو-پلاستیک می توان مطابق رابطه زیر نوشت:

$$d\varepsilon_{ij} = \frac{d\sigma_{ij}}{2\mu} + \frac{1-2\nu}{E} \delta_{ij} d\sigma_{kk} + d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (8)$$

#### 4- سخت شوندهگی Strain Hardening

پس از تسلیم اولیه سطح تنش که تحت آن تغییر شکل‌های پلاستیک ایجاد می شود، ممکن است تابع مقدار تغییر شکل‌های پلاستیک در آن لحظه تغییر یابد. این پدیده تغییر شکل نسبی سخت شوندهگی (Strain Hardening) نامیده می شود. بنابراین سطح تسلیم در هر مرحله تغییر شکل پلاستیک تغییر خواهد کرد. این تغییر سطح تسلیم به نوعی وابسته به تغییر شکل‌های پلاستیک می باشد.

گسترش سطح تسلیم را می توان با ارتباط دادن ثابت k به تغییر شکل پلاستیک به کمک پارامتر سخت شوندهگی  $\alpha$ ، تعریف کرد. این عمل را می توان به دو طریق انجام داد. در طریقه اول درجه سخت شوندهگی را تنها به مقدار کار پلاستیک  $W_p$  ارتباط می دهند یعنی:

$$\alpha = W_p \quad (9)$$

$$W_p = \int \sigma_{ij} (d\varepsilon_{ij})_p \quad (10)$$

که در این رابطه  $(d\varepsilon_{ij})_p$  مؤلفه های پلاستیک تغییر شکل نسبی است. از طرفی  $\alpha$  را می توان به تغییر شکل پلاستیک مؤثر یا معادل ارتباط داد، مقدار نمو این تغییر شکل نسبی با رابطه زیر بیان می شود.

$$d\bar{\varepsilon}_p = \sqrt{\frac{2}{3}} \{ (d\varepsilon_{ij})_p (d\varepsilon_{ij})_p \}^{\frac{1}{2}} \quad (11)$$

با توجه به این فرض که شرایط تسلیم از تنشهای هیدرواستاتیک تأثیر نمی پذیرد یعنی  $(d\varepsilon_{ii})_p = 0$ ،  $(d\varepsilon_{ij})_p = (d\varepsilon_{ji})_p$  خواهیم داشت.

$$d\bar{\varepsilon}_p = \sqrt{\frac{2}{3}} = \{ (d\varepsilon_{ij})_p (d\varepsilon_{ij})_p \}^{\frac{1}{2}} \quad (12)$$

بنابراین پارامتر سخت شوندهگی  $\alpha$  را می توان به شکل

زیر تعریف کرد:

$$a = \bar{\varepsilon}_p \quad (13)$$

در حالت پلاستیک نمو تغییرات در تابع تنش به علت تغییرات در نمو تنش از رابطه زیر تبعیت می کند:

$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} \quad (14)$$

نوشت که ماتریس  $[D]$ ، ماتریس الاستیک می باشد. با استفاده از رابطه (۱۹) و (۲۰) می توان نتیجه گرفت که:

$$d\lambda = \frac{1}{[A + a^T D a]} a^T dD d\varepsilon \quad (21)$$

که در آن  $dD^T = a^T D$  و در این صورت رابطه (۲۰) به صورت زیر در خواهد آمد:

$$d\sigma = D_{ep} d\varepsilon \quad (22)$$

که در آن:

$$D_{ep} = D - \frac{dD dD^T}{A + dD^T \cdot a}, \quad dD = Da \quad (23)$$

با استفاده از فرضیه کار سخت شوندگی خواهیم داشت:

$$d\alpha = \sigma^T d\varepsilon_p \quad (24)$$

رابطه (۱۷) را می توان به شکل زیر نیز بیان نمود:

$$F(\sigma, \alpha) = f(\sigma) - \sigma_Y(k) \quad (25)$$

$$\sigma_Y = \sqrt{3}k \quad \text{زیرا}$$

بنابراین از رابطه (۱۹) خواهیم داشت:

$$A = - \frac{1}{d\lambda} \frac{\partial F}{\partial \alpha} d\alpha = \frac{1}{d\lambda} \frac{d\sigma_Y}{d\alpha} d\alpha \quad (26)$$

با استفاده از قانون عمود بودن رابطه (۲۴) را به شکل رابطه زیر می توان بیان نمود:

$$d\alpha = \sigma_Y d\bar{\varepsilon}_p = d\lambda a^T \sigma \quad (27)$$

مطابق با نتایج آزمایش تک محوری یک ماده الاستو-پلاستیک، ابتدا رفتار ماده الاستیک بوده و با مدول الاستیسیته  $E$  تعریف می شود تا اینکه تحت تنش تک محوری  $\sigma_Y$  تسلیم اتفاق می افتد. از آن پس رفتار مصالح الاستویلاستیک بوده و مدول الاستویلاستیک مماسی  $E_T$  به طور پیوسته تغییر می کند. بدین ترتیب قانون سخت شوندگی  $K=K(\alpha)$  را می توان براساس تنش مؤثر  $\sigma$  تعریف

۵- کاربرد روش المانهای محدود در مسائل دو بعدی پلاستیسیته

قبل از کاربرد روش اجزاء محدود در تئوری پلاستیسیته لازم است روابط تئوریک پلاستیسیته به صورتی در آید که اعمال روشهای عددی بر آنها ممکن باشد. در این راستا رابطه  $f(\sigma) = K(\alpha)$  را می توان به شکل زیر نوشت:

$$F(\sigma, k) = f(\sigma) - k(\alpha) = 0 \quad (15)$$

پس از مشتق گیری از رابطه اخیر خواهیم داشت:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial \sigma} d\sigma + \frac{\partial F}{\partial \alpha} d\alpha = 0 \quad (16)$$

اگر رابطه (۱۶) را به صورت زیر بنویسیم:

$$a^T d\sigma - A d\lambda = 0 \quad (17)$$

در این صورت:

$$a^T = \frac{\partial F}{\partial \sigma} = \left[ \frac{\partial F}{\partial \sigma_x}, \frac{\partial F}{\partial \sigma_y}, \frac{\partial F}{\partial \sigma_z}, \frac{\partial F}{\partial \tau_{yz}}, \frac{\partial F}{\partial \tau_{zx}}, \frac{\partial F}{\partial \tau_{xy}} \right] \quad (18)$$

و

$$A = - \frac{1}{d\lambda} \frac{\partial F}{\partial \alpha} d\alpha \quad (19)$$

خواهد بود و رابطه (۱۲) را می توان به شکل

$$d\bar{\varepsilon} = [D]^{-1} d\sigma + d\lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma} \quad (20)$$

کرد به طوری که:

$$a^T = \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma_x}, \frac{\partial F}{\partial \sigma_y}, \frac{\partial F}{\partial \tau_{xy}}, \frac{\partial F}{\partial \sigma_z} \right\} \quad (35)$$

اگر رابطه فوق را به صورت

$$a = c_1 a_1 + c_2 a_2 + c_3 a_3 \quad (36)$$

در نظر بگیریم مقادیر  $a_1^T, a_2^T, a_3^T$  برابر خواهند بود با:

$$a_1^T = \{1, 1, 0, 1\}$$

$$a_2^T = \left\{ \frac{1}{2(J_2)} (\sigma'_x \sigma'_y, 2\tau_{xy}, \sigma'_z) \right\}$$

$$a_3^T = \left\{ (\sigma'_y \sigma'_z + \frac{J_2}{3}), (\sigma'_x \sigma'_z + \frac{J_2}{3}), -2\sigma'_z \tau_{xy}, (\sigma'_x \sigma'_y - \tau_{xy} + \frac{J_2}{3}) \right\} \quad (37)$$

و ضرایب  $c_3, c_2, c_1$  برای معیارهای مختلف تسلیم از جدول زیر به دست می آید.

معیار تسلیم	$c_1$	$c_2$	$c_3$
Tresca	0	$2\cos\theta(1+\tan\theta\tan3\theta)$	$\frac{\sqrt{3} \sin\theta}{J_2 \cos3\theta}$
Von Mises	0	$\sqrt{3}$	0

در جدول فوق زاویه  $\theta$  ریشه های معادله درجه سوم زیر می باشند.

$$\sin^3 \theta - \frac{J_2}{r^3} \sin \theta - \frac{J_3}{r^3} = 0 \quad (38)$$

که در آن:

$$r = \frac{2}{\sqrt{3}} (J_2)^{\frac{1}{2}}$$

برای تعیین ماتریس الاستوپلاستیک  $D_{ep}$  مطابق رابطه (۲۳) فقط کافی است بردار  $d_p$  را مشخص نمائیم. با استفاده از ماتریس  $D$  برای مسائل دو بعدی به ترتیب برای دو حالت کرنش صفحه ای و تنش صفحه به صورت

$$\sigma = H(\epsilon_p) \quad (28)$$

با مشتق گرفتن از دو طرف رابطه اخیر خواهیم داشت:

$$\frac{d\sigma}{d\epsilon_p} = H'(\epsilon_p) \quad (29)$$

با استفاده از قضیه اویلر رابطه (۱۵) را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma} \sigma = \sigma_Y \quad (30)$$

و یا:

$$a^T \sigma = \sigma_Y \quad (31)$$

با استفاده از روابط ۲۶، ۲۷، ۲۹ و ۳۱ خواهیم داشت:

$$d\lambda = d\bar{\epsilon}_p \quad (32)$$

$$A = H'$$

## ۶- روش اجزاء محدود در پلاستیسیته دو بعدی

روابطی که در مورد کاربرد روش اجزاء محدود در پلاستیسیته تا کنون بیان شد در مسائل دو بعدی کاربرد ساده تری دارند، زیرا در این نوع روابط فقط چهار مؤلفه غیر صفر تنش و تغییر شکل نسبی وجود دارد. به طوری که بردار تنش در حالت تنش صفحه ای

$$\sigma^T = \{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \sigma_z\} \quad \sigma_z = 0 \quad (33)$$

و کرنش صفحه ای

$$\sigma^T = \{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \sigma_z\} \quad \epsilon_z = 0 \quad (34)$$

دارای چهار عنصر غیر صفر می باشد.

بردار جریان  $a$  در این نوع مسائل به صورت ساده زیر بیان می شود:

زیرمی باشد.

باشد. در مسائل غیرخطی رابطه (۴۴) به طور کلی ارضاء نمی شود و در هر مرحله محاسبه خواهیم داشت:

$$\Psi = \int_{\Omega} b^T \sigma d\Omega - (f + \int_{\Omega} N^T b d\Omega) \neq 0 \quad (45)$$

$\Psi$  بردار نیروهای باقیمانده است. برای مصالح الاستو-پلاستیک، سختی مصالح به طور پیوسته تغییر می کند، به طوری که رابطه نمودی کرنش - تنش در هر لحظه با رابطه (۲۲) مشخص می شود. به منظور تعیین ماتریس سختی مماسی  $K_T$  در هر مرحله رابطه (۴۵) باید مورد استفاده قرار گیرد. بنابراین برای هر نمون نیرو داریم:

$$d_D = \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{E}{1+\nu} a_1 + M_1 \\ \frac{E}{1+\nu} a_2 + M_1 \\ G_{a3} \\ \frac{E}{1+\nu} a_4 + M_4 \end{Bmatrix}, \quad M_1 = \frac{E\nu(a_1 + a_2 + a_4)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (39)$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$d_D = \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{E}{1+\nu} a_1 + M_2 \\ \frac{E}{1+\nu} a_2 + M_2 \\ G_{a3} \\ \frac{E}{1+\nu} a_4 + M_2 \end{Bmatrix}, \quad M_2 = \frac{E\nu(a_1 + a_2)}{1-\nu^2} \quad (40)$$

$$\Delta\Psi = \int_{\Omega} B^T \Delta\sigma d\Omega - (\Delta f + \int_{\Omega} N^T \Delta b d\Omega) \quad (46)$$

اگر به جای  $\Delta\sigma$  از رابطه (۲۲) استفاده نمائیم در این صورت

$$\Delta\Psi = K_T d \cdot \left[ \Delta f + \int_{\Omega} N^T \Delta b d\Omega \right] \quad (47)$$

که در آن:

$$K_T = \int_{\Omega} B^T D_{ep} B d\Omega \quad (48)$$

رابطه (۴۷) را به طور اصولی یک سیستم از نیروهای باقیمانده می توان فرض نمود که با استفاده از ترکیبی از روش نیوتن - رافسون و نمو بار می توان در هر مرحله آنرا حل نمود.

## ۸- رفتار الاستو - پلاستیک صفحه سوراخدار تحت کشش

از کاربردهای عملی صفحه سوراخدار می توان در اتصالات پیچ و پرچ قابهای فلزی و اتصالات پوسته فلزی بدنه هواپیما و کشتی نام برد. علاوه بر کاربردهای عملی، این مسأله در تئوری الاستیسیته یکی از مسائل نمونه دو بعدی تنش صفحه ای است که خوشبختانه نتایج آزمایشگاهی آن چه در حالت الاستیک و چه در حالت پلاستیک موجود است. برنامه کامپیوتری تهیه شده، در مورد این مسأله بکار گرفته شده و حالت‌های مختلف را مورد بررسی قرار داده است.

$a_1, a_2, a_3, a_4$  مؤلفه های بردار  $a_D$  می باشند .

## ۷- برنامه کامپیوتری روش اجزاء محدود در پلاستیسیته

با استفاده از قانون کار مجازی اگر یک جسم جامد دارای تنش های داخلی  $\sigma$ ، توزیع نیروهای داخلی بر واحد حجم  $b$  و نیروی خارجی وارد شده  $f$  را دارا بوده و در شرایط تعادل دارای تغییر مکان مجازی به مقدار  $\delta\varepsilon^*$  و تغییر مکان داخلی  $\delta u^*$  باشد خواهیم داشت:

$$\int_{\Omega} (\delta\varepsilon^{*T} \sigma - \delta u^{*T} b) d\Omega - \delta d^{*T} f = 0 \quad (41)$$

حال با استفاده از روش المانهای محدود تغییر مکان مجازی و تغییر شکل نسبی مجازی را می توان به صورت زیر در آورد:

$$\delta u^* = N \delta d^*, \quad \delta\varepsilon^* = B \delta d^* \quad (42)$$

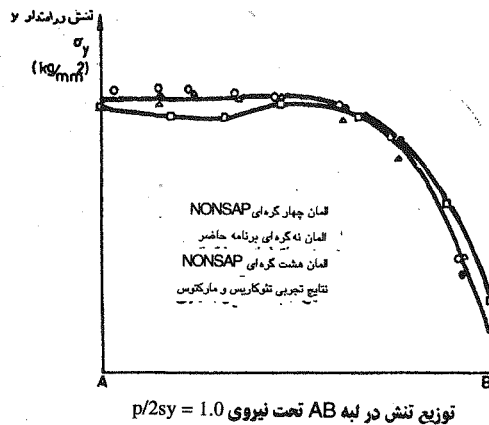
که  $B$  و  $N$  به ترتیب ماتریسهای تابع شکلی و تغییر شکل نسبی الاستیک می باشند که در این حالت رابطه فوق برابر خواهد بود با

$$\int_{\Omega} \delta d^{*T} (B^T \sigma - N^T b) d\Omega - \delta d^{*T} f = 0 \quad (43)$$

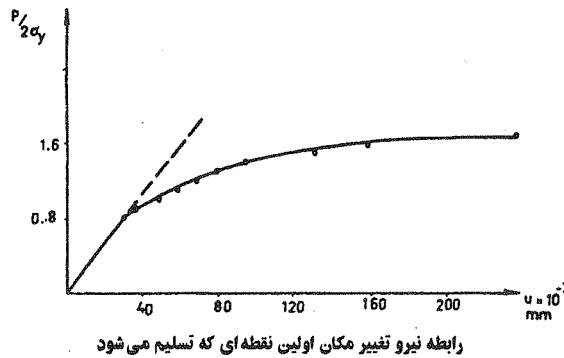
چون این رابطه برای کلیه  $\delta d^*$  باید صادق باشد، بنابراین باید

$$\int_{\Omega} B^T \sigma d\Omega - f - \int_{\Omega} N^T b d\Omega = 0 \quad (44)$$

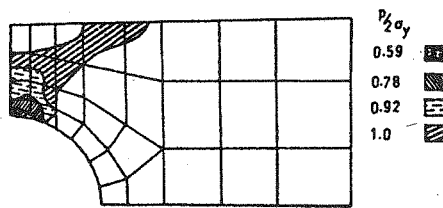
نیرو - تغییر مکان اولین نقطه ای که به تسلیم می رسد را در مورد این مسأله تحت نمو تدریجی نیروها نشان می دهد.



شکل (۳)



شکل (۴)



شکل (۵)

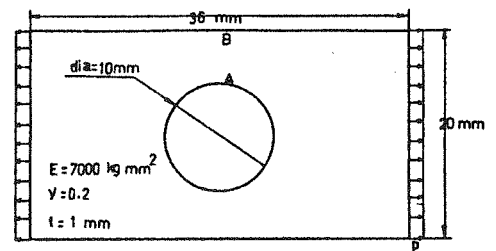
به طور خلاصه رفتار الاستو- پلاستیک صفحه سوراخدار را می توان این چنین تشریح نمود که نقطه A که در محل بیشترین تمرکز تنش قرار دارد، اولین محلی است که تنش آن به حد تسلیم می رسد. در صورت افزایش بار پس از وقوع اولین نقطه تسلیم در این محل، تنش این نقطه دیگر چندان افزایش نمی یابد. بلکه در امتداد لبه و در امتداد نشان داده شده در جریان پلاستیک شدن، تنشها شروع

در حل این مسأله فرض شده است که مصالح از معیار تسلیم فون مایسس با سخت شوندگی ایزوتریپیک پیروی می نماید و المان انتخاب شده از نوع نه گره ای هم پارامتر می باشد، مش بندی و مشخصات هندسی و مصالح در شکل های (۱) و (۲) نشان داده شده است، علاوه بر این، مشخصات زیر نیز در محاسبات در نظر گرفته شده است.

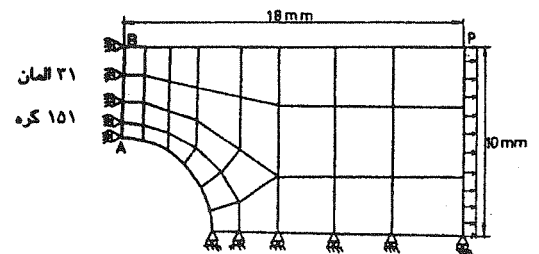
$$\sigma_y = 24.3 \text{ Kg/mm}^2$$

$$ET = 225 \text{ Kg/mm}^2$$

این مشخصات در حل تمام مسائل تا پایان، ثابت نگاهداشته شده اند که مقایسه هندسی مسائل با یکدیگر میسر باشد.



شکل (۱)



شکل (۲)

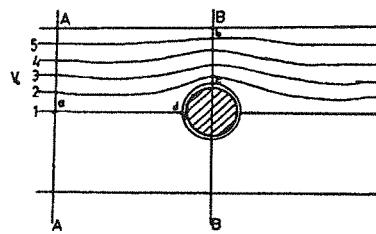
شکل (۳) نحوه توزیع تنش در لبه AB را تحت نیروی  $\frac{P}{2\sigma_y} = 1$  نشان می دهد.

اختلافی که بین نتایج عددی و اجزاء محدود از یک سو و نتایج تجربی از سوی دیگر مشاهده می شود، شاید به این علت است که مقدار تنش تسلیم مصالحی که مورد آزمایش قرار گرفته مختصری بیشتر از آنچه در حل عددی مسأله بکار رفته است، می باشد. در هر صورت نتایج برنامه کامپیوتری تهیه شده کاملاً با سایر نتایج هماهنگی دارد. شکل (۵) جریان پلاستیک شدن تدریجی المانها و شکل (۴) منحنی

به افزایش می‌کنند تا اینکه هر یک از المانهایی دیگر رفتار پلاستیک را آغاز نمایند. در نهایت صفحه در امتداد مایلی که در شکل (۵) مشخص است دچار ترک و شکست می‌گردد.

## ۹- روشهای کاهش تمرکز تنش در نقاط بحرانی

بین جریان یک سیال ایده‌ال در کانال و جریان تنش در صفحه‌ای با همان هندسه کانال، یک رابطه شباهتی وجود دارد. بعنوان مثال سرعت  $V$  در همه نقاط کانال یکنواخت است، همانطور که توزیع تنش در یک صفحه بارگذاری ثابت، یکنواخت می‌باشد. صفحه سوراخدار تحت کشش با همین مقیاس، مشابه جریان سیال در کانالی است که در وسط آن یک مانع با مقطع یکنواخت استوانه‌ای قرار گرفته باشد. همانطور که در شکل (۶) نشان داده در مقطع A-A جریان ثابت و یکنواخت بوده ولی هنگامی که خطوط جریان به مقطع B-B نزدیک می‌شوند، مسیرها وضعیت خود را به صورتی عوض می‌نمایند که مانع را دور زده تا عبور کنند. برای انجام این کار خطوط جریانی که نزدیک خط جریان هستند تغییر مسیر بیشتری می‌دهند، به طوری که هنگامی که به مقطع B-B نزدیک می‌شوند شتاب پیدا کرده و درست در همان مقطع ناگهانی کاهش شتاب می‌دهند و نتیجتاً در نقطه C حداکثر سرعت را دارا می‌باشند. هنگامی که ذرات سیال در روی خط ۱ به نقطه d می‌رسند، ناگهان سرعت عمود بر مسیر جریان پیدا می‌کنند. این نقطه در صفحه سوراخدار، درست همانجایی است که مطابق تئوری الاستیسیته و نتایج تحلیل المانهای محدود، دارای تنش فشاری می‌شود.



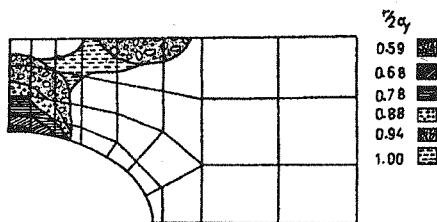
شکل (۶)

شباهت مزبور ایده‌هایی را برای کاهش میزان تمرکز تنش در اطراف سوراخ، صفحه تحت کشش، بوجود می‌آورد. چون دلیل عمده تمرکز تنش شدید، وضعیت بحرانی در نقطه C می‌باشد، پس برای کاهش تمرکز باید سعی شود تغییرات ناگهانی بوجود نیاید.

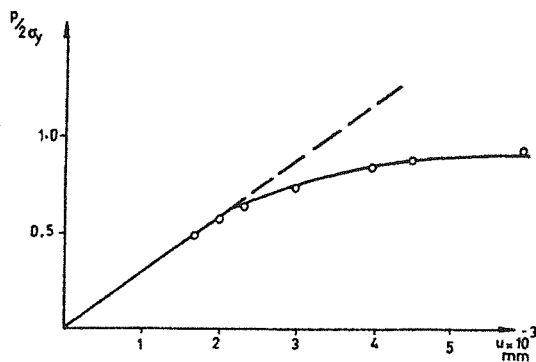
یکی از راهها، ایجاد سوراخ به صورت بیضی به جای دایره می‌باشد، اشکال زیر حالتی را که احتمالاً تغییرات سرعت و تنش در آنها به شدت حالت قبل نیست نشان می‌دهد. هر یک از حالات فوق توسط برنامه کامپیوتری، تحلیل الاستو-پلاستیک شده و نتایج آنها به ترتیب ارائه می‌شود.

### الف - سوراخ بیضی:

برای بررسی این حالت، سوراخ حالت اول به بیضی تبدیل شده است. منحنی نیرو-تغییر مکان اولین نقطه تسلیم، نحوه جریان پلاستیک شدن و توزیع تنش در لبه AB در شکلهای (۷ تا ۹) نمایش داده شده و نتایج آن بدین شرح است که اولاً تمرکز تنش از  $4/5$  به حدود  $4/0.3$  یعنی حدود ده درصد، کاهش یافته ثانیاً شکل (۷) نشان می‌دهد که توزیع منطقه پلاستیک تغییر اساسی پذیرفته به طوری که منطقه پلاستیک در نیروهای زیاد، از دو طرف (از سوی سوراخ و لبه آزاد) همزمان به طرف یکدیگر گسترش می‌یابد که این امر بدان معنا است که تغییرات سریع تنش مناسب تر شده و نقاطی که قبلاً تنش زیادی نداشته، اینک کمی از بار نقاطی را که دارای تمرکز تنش شدیدتر بودند به عهده گرفته‌اند، ضمناً ظرفیت باربری نیز تا حدی افزایش یافته است.



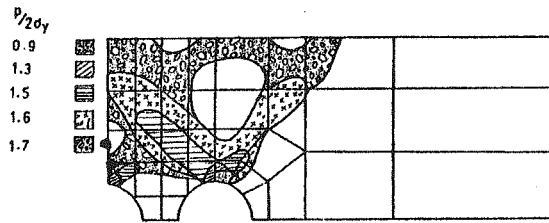
شکل (۷)



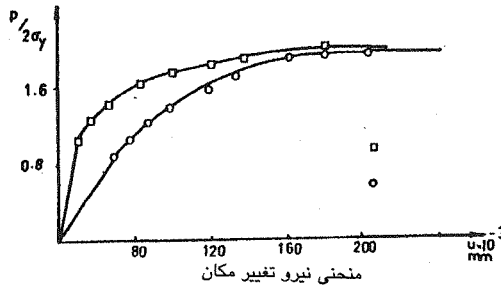
رابطه نیرو-تغییر مکان اولین نقطه‌ای که تسلیم شده.

شکل (۸)

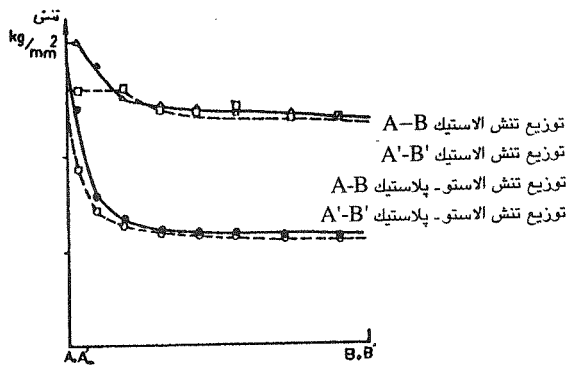




شکل (۱۰)



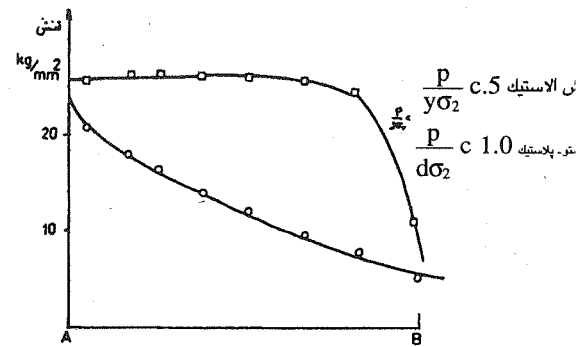
شکل (۱۱)



شکل (۱۲)

### ۱۰- نتیجه گیری

مقایسه و بررسی نتایج به دست آمده ثابت می کنند که آنچه در مورد کاهش تمرکز تنش با ایجاد سوراخهای جدید، با توجه به شباهت جریان تنش و جریان آب در کانال ذکر شد، صحیح است. شاید این نتیجه گیری ابتدا زیاد معقول به نظر نرسد، زیرا این سؤال در ذهن پیش می آید که اگر یک سوراخ باعث ایجاد تمرکز تنش می شود، ایجاد سوراخهای دیگر طبیعتاً باید موجب اختلالات بیشتری شده و تمرکز تنش را افزایش دهد، که البته این تعبیر درستی نمی باشد. ایجاد سوراخهای اضافی، اگر بزرگتر از سوراخ اول نباشد، مقاومت مقطع را از آنچه که هست کمتر نمی کند و در غن



توزیع تنش د لبه AB در سوراخ بیضی

شکل (۹)

### ب - قرار گرفتن وضعیت سوراخهای کوچک در اطراف سوراخ بزرگ:

این حالت از نظر عملی کاربرد فراوانی دارد و به همین جهت تحلیل و آنالیز و نتایج حاصل از آن با اهمیت می باشد. شکلهای (۱۰ تا ۱۲) رفتار این حالت را نشان می دهند. شکل (۱۱) تغییرات نیرو- تغییر مکان را برای دو نقطه مختلف از صفحه نشان می دهد. یکی از این نقاط، نقطه ای است که در حالت ساده، اولین نقطه ای بود که به تنش تسلیم می رسید و دیگری نقطه ای است که در این ترکیب خاص، محلی است که در آن تسلیم واقع می گردد. نقطه A رفتار خطی خود را تا نمو بالاتری از نیرو، حفظ می کند. در ضمن تغییر مکانهای نقطه A' بزرگتر از نقطه A بوده و در نموهای بالاتر نیرو، دو منحنی به یکدیگر نزدیک شده و در نهایت منطبق می گردند.

شکل (۱۲) نیز تفاوت وضعیت تنشها را با حالت ساده نمایان می سازد. نقطه A که قبلاً دارای تمرکز تنش سه برابر بود، اینک حدود ۲۵٪ از تمرکز تنش خود را از دست داده و در عوض نقطه A' جای آن را گرفته است. در فاصله کوتاهی از دو سوراخ در امتداد لبه های A'B' و AB تنشها در حالت الاستیک به سرعت یکنواخت شده و برهم منطبق می شوند. در حالت الاستو- پلاستیک نیز وضع به همین ترتیب است. در نقطه A' تنشها (مانند تغییر مکانها) در حد بالاتری از نقطه A قرار دارند، ولی در امتداد لبه های AB و A'B' به سرعت دو منحنی به یکدیگر نزدیک می شوند.

نکته دیگر این که صلبیت صفحات در اثر ایجاد سوراخهای دیگر در صفحه کاهش یافته و در نتیجه تغییر مکانها افزایش می یابند.

حال توزیع تنش را مناسب تر و یکنواخت تر می نماید. سوراخهای جدید باعث می شوند که مناطقی از صفحه که تنش کمتری دارند، دارای تنش بیشتر و مناطقی که تنش بیشتری دارند دارای تنش کمتری گردند.

#### منابع:

- [1]. Demidovich. B.P, Maron. I.A, "Computational Mathematics", MIR Publishers, 1987.
- [2]. Nayak. G.C., Zienkiewicz. O.C., "Elasto- Plastic Stress Analysis. A generalization for Various Constitutive Relations Including Strain Softening", Int. J.Num. Meth. Engng. Vol. 5. No.1, PP.113-135,1972.
- [3]. Owen. D.R.J., Hinton. E., "Finite Elements In Plasticity", Pineridye press, 1980.
- [4]. Theocaris. P.S, Marketos, E, "Elastic-Plastic Analysis of Perforated Thin Strips of a Strain Hardening Material", Journal. Mech. Phys. Solids, Vol. 12. PP. 377-390, 1964.
- [5]. Timoshenko. S.P, Goodier. J.N. "Theory of Elasticity", Third Edition, Mc Graw-Hill, 1982.
- [6]. Zienkiewicz. O.C, "The Finite Element Method", Third Edition, Mc Grow-Hill, 1977.