بررسی و تبدیل معادله دیفرانسیل ریکاتی در سیستمهای LQR

جلال نظر زاده *
دانشجوی دکترا

سید کمال الدین نیکروش *
استاد

محسن رزاقی * *
استاد

*دانشکده برق، دانشگاه صنعتی امیرکبیر
* *دانشکده ریاضی، دانشگاه می سی سی پی

چکیده

در سیستمهای خطی با ضرایب ثابت، طراحی کنترل کننده بهینه به منظور حداقل سازی تابع معیار درجه دوم، منجر به حل معادله دیفرانسیل ریکاتی غیر خطی میگردد. کالمن شرایطی را بررسی نمود که در آن نشان داد اگر زمان مطالعاتی به سمت بی نهایت میل نماید، می توان بجای معادله دیفرانسیل غیر خطی ریکاتی از معادله جبری ریکاتی استفاده نمود. در این مقاله، با تغییر در نمایش معادله ریکاتی، نمایش خطی از معادله ریکاتی تعیین میگردد سپس با استفاده از شکل جدید معادلات، مقادیر ویژه معادلات را تعیین نموده و پاسخ معادله دیفرانسیل ریکاتی در دوره گذرا مورد بررسی قرار می گیرد. در نهایت شرط مطرح شده توسط کالمن به صورت دقیق تری به دست می آید. اگر زمان مطالعاتی از حد مشخص افزونتر شود، میتوان بجای حل معادله دیفرانسیل ریکاتی از معادله جبری آن استفاده نمود.

The Solution of the Matrix Riccati Differential Equations in LQR Systems

J. Nazarzadeh*
Ph.D Student

K. Y. Nikravesh*
Professor

M. Razaghi**
Professor

* Elect. Eng. Dept. Amirkabir Univ.
** Mathematic Dept, Missisipi State Univ.

Abstract

This paper deals with the solution of the finite time matrix Riccati differential equation. The solution of the matrix Riccati differential equation, is given by using the solution of the algebraic form of the Riccati eation. Using this method, the transient time of matrix Riccati equation can also be determined . A numerical example for the proposed method is also presented.

لغات کلیدی

کنترل بهینه خطی LQR، معادله ریکاتی، ضرب کننده کرونکر و معادله لیاپانف.

مقدمه

طراحی کنترل کننده بهینه خطی LQR توسط حل معادله دیفرانسیل غیرخطی ریکاتی صورت میپذیرد که منجر به فیدبک حالت متغیر با زمان می گردد. جهت سادگی کاربرد تحت شرایطی که توسط کالمن ارائه گردید می توان بجای فیدبک متغیر با زمان از فیدبک حالت باگین ثابت استفاده نمود [۱]. در صورتی که زمان مطالعاتی محدود باشد، لازم است معادله دیفرانسیل غیرخطی ریکاتی آنالیز گردد. مقالات بی شماری در زمینه حل معادله ریکاتی جبری و دیفرانسیل غیر خطی به صورت عددی ارائه گردیده است [۴، ۳].

در اینجا با استفاده از تغییر متغیرهای لازم، شکل جدیدی برای معادلات ریکاتی مطرح می گردد. معادلات جدید به صورت خطی ظاهر می شوند. سپس با استفاده از نظریه سیستمهای خطی، می توان نتایج جالبی نظیر تعیین زمان گذرای معادله ریکاتی، پاسخ بسته معادله ریکاتی و شرط دقیق تبدیل معادله کنترل بهینه با فیدبک متغیر به فیدبک ثابت را تعیین نمود.

کنترل بهینه LQR

سیستم خطی زیر را در نظر می گیریم.

$$x'(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t) \qquad (۱)$$

تابع معیار مورد نظر جهت حداقل سازی به شکل زیر بیان میگردد.

$$J = \frac{1}{2} x^T(t_f) \cdot H \cdot X \cdot (t_f) + \frac{1}{2}\int_0^{t_f} (x^T(t) \cdot Q \cdot X(t) + u^T(t) \cdot R \cdot u(t))\, dt \qquad (۲)$$

زمان نهایی t_f مشخص بوده و ماتریسهای $H \geq 0$ و $Q \geq 0$ و $R > 0$ می باشند پاسخ بهینه J منجر به فیدبک حالت متغیر با زمان زیر می گردد [۲].

$$u(t) = -R^{-1} \cdot B^T \cdot K(t) \cdot x(t) \qquad (۳)$$

که در آن:

$$K'(t) = -K(t) \cdot A - A^T \cdot K(t) + K(t) \cdot B \cdot R^{-1} \cdot B^T \cdot K(t) - Q \qquad (۴)$$

شرط مرزی معادله دیفرانسیل K (t) عبارت است از:

$$K(t_f) = H \qquad (۵)$$

اگر ماتریس H=0 و سیستم کاملاً کنترل پذیر باشد، در آن صورت اگر $t_f \to \infty$ پاسخ بهینه از حل معادله جبری ریکاتی زیر تعیین می گردد [۲].

$$0 = -K_s \cdot A - A^T \cdot K_s + K_s \cdot B \cdot R^{-1} \cdot B^T \cdot K_s - Q \qquad (۶)$$

در معادله (۶)، K_s پاسخ ماندگار معادله دیفرانسیل ریکاتی (۴) می باشد.

روش های متنوعی برای حل معادله جبری ریکاتی (۶) ارائه گردیده است به طور مثال، می توان به روش عددی [۳] و با روش تجزیه [۴] اشاره نمود.

نمایش خطی معادله دیفرانسیل ریکاتی

معادله دیفرانسیل (۴) از نوع غیرخطی بوده و همواره توسط روش های عددی آنالیز می گردد. برای نمایش خطی معادله دیفرانسیل ریکاتی لازم است تغییراتی در نمایش آن صورت پذیرد برای این منظور به صورت زیر عمل می گردد. تفاضل معادلات (۴) و (۶)

برابر است با:

$$-K'(t)=A^T.(K(t)-K_s)+(K(t)-K_s).A-K(t).Q_1.K(t)+K_s.Q_1.K_s \quad (۷)$$

که در عبارت فوق

$$Q_1=B.R^{-1}.B^T \quad (۸)$$

با ساده سازی رابطه (۷) خواهیم داشت:

$$-\widehat{K}'(t)=A_c^T.\widehat{K}(t)+\widehat{K}(t).A_c-\widehat{K}(t).Q_1.\widehat{K}(t) \quad (۹)$$

که در آن

$$A_c=A-Q_1.K_s \quad (۱۰)$$

$$\widehat{K}(t)=K(t)-K_s \quad (۱۱)$$

شرط مرزی (رابطه ۹) برابر است با:

$$\widehat{K}(t_f)=H-K_s \quad (۱۲)$$

در اینجا نیز شکل جدید معادله ریکاتی (رابطه ۹) دارای جمله غیر خطی است. برای خطی سازی معادله دیفرانسیل (۹) تغییر متغیر زیر در نظر گرفته می شود.

$$P^{-1}(t)=\widehat{K}(t) \quad (۱۳)$$

با مشتق گیری از عبارت فوق خواهیم داشت:

$$\widehat{K}'(t)=-P^{-1}(t).P'(t).P^{-1}(t) \quad (۱۴)$$

با جایگزینی روابط (۱۳) و (۱۴) در رابطه (۹) خواهیم داشت:

$$p'(t)=P(t).A_c^T+A_c.P(t)-Q_1 \quad (۱۵)$$

معادله دیفرانسیل (۱۵) از نوع معادله دیفرانسیل خطی لیاپانف می باشد. شرط مرزی معادله (۱۵) عبارت است از:

$$P(t_f)=(H-K_s)^{-1} \quad (۱۶)$$

می توان با تغییر متغیر زمان از t به t- به جای شرط مرزی (رابطه ۱۶)، معادله (۱۵) را با شرط اولیه آنالیز نمود. در آن صورت معادلات (۱۵) و (۱۶) به شکل زیر تغییر می یابند.

$$P'(t)=-P(t).A_c^T-A_c.P(t)+Q_1 \quad (۱۷)$$

$$P(0)=(H-K_s)^{-1} \quad (۱۸)$$

معادله (۱۷) با شرایط اولیه (۱۸) به شکل معادله دیفرانسیل خطی تبدیل می گردد. با استفاده از ضرب کننده کرونکر می توان معادله دیفرانسیل (۱۷) را به صورت معادله حالت استاندارد نمایش داد [۵]. با اعمال تعریف ضرب کننده کرونکر به معادله (۱۷) خواهیم داشت:

$$P_v'(t)=-[A_c\otimes I+I\otimes A_c].P_v(t)+Q_{IV} \quad (۱۹)$$

در عبارت فوق $P_v(t)$ و Q_{lv} به ترتیب شکل برداری ماتریس های $P(t)$ و Q_1 می باشند. $\otimes$ ضرب کننده کرونکر می باشد. در اینجا معادله (۱۹) به معادله حالت استاندارد تبدیل شده است. واضح است، باتوجه به تقارن ماتریس $P(t)$، مرتبه معادله دیفرانسیل (۱۹) به $n(n+1)/2$ قابل کاهش می باشد. (n مرتبه معادله حالت (۱) می باشد.)

تعیین مقادیر ویژه معادله ریکاتی

معادله دیفرانسیل (۱۹) را به صورت زیر نمایش می دهیم:

$$P_v'(t)=A_k.P_v(t)+Q_{IV} \quad (۲۰)$$

که در آن

$$A_k=-[A_c\otimes I+I\otimes A_c] \quad (۲۱)$$

مقادیر ویژه ماتریس A_k مشخص کننده کلیه مدهای

$P(t)$ می‌باشند. با تعیین پاسخ گذاری $P(t)$ می‌توان با استفاده از روابط (۱۱) و (۱۳) پاسخ گذاری $k(t)$ را تعیین نمود. مقادیر ویژه ماتریس A_k به مقادیر ویژه ماتریس A_c بستگی دارند. اگر مقادیر ویژه ماتریس A_c را با $\lambda_i (A_c)$ نمایش دهیم در آن صورت مقادیر ویژه ماتریس A_k را با ترکیب مقادیر ویژه A_c می‌توان تعیین نمود [۵].

$$\lambda_{i,j} (A_k) = -[\lambda_i (A_c) + \lambda_j (A_c)] \quad i, j = 1, 2, ..., n \qquad (۲۲)$$

بنابر این با توجه به رابطه فوق مشاهد می‌گردد مقادیر ویژه A_k، ترکیب دو جمله‌ای از مقادیر ویژه A_c می‌باشند.

همچنین باتوجه به آنکه ماتریس A_c بیانگر سیستم حلقه بسته بهینه جبری است، بنابراین اگر $[C, A]$ رویت پذیر باشد (که در آن $Q=C^T . C$ می‌باشد) در آن صورت تمامی مقادیر ویژه A_c پایدار می‌باشند. در نتیجه طبق رابطه (۲۲) تمامی مقادیر ویژه معادله (۲۱) ناپایدار خواهند گردید. این امر باعث میگردد، پاسخ گذاری ناشی از $P_v(t)$ با رشد زمان افزایش یابد. ولی از آنجایی که دوره گذاری مطالعه دینامیک $P_v(t)$ مشخص است، جهت تعیین پاسخ معادله ریکاتی کافی است، پاسخ معادله دیفرانسیل (۲۰) فقط در دوره گذرای آن مورد مطالعه قرار گیرد. از رابطه (۲۲) می‌توان نتیجه گرفت بزرگترین ثابت زمانی موجود در دینامیک $P_v(t)$، (و یا $K(t)$) نصف بزرگترین ثابت زمانی A_c می‌باشد. بنابر این در صورتی که زمان مطالعاتی در نامساوی زیر صدق نماید،

$$t_f \geq \frac{7.5}{|\lambda_{min} (A_c)|} \qquad (۲۳)$$

پاسخ بهینه سیستم (۱) باتوجه به تابع معیار (۲) از معادله جبری ریکاتی (۶) به دست می‌آید.

نتایج شبیه سازی

سیستم خطی را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$x'(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

تابع معیار مورد نظر عبارت از:

$$J = 2.5 x_1^2 (t_f) + \frac{1}{2} \int_0^{t_f} \left[x_1^2 (t) + 2x_2^2 (t) + u^2 (t) \right] dt$$

پاسخ معادله ریکاتی و سیستم کنترل بهینه از حل عددی معادلات دیفرانسیل سیستم و (۴) در شکل (۱) نشان داده شده است. برای استفاده از روش جدید ابتدا با استفاده از روابط (۶ و ۱۰) ماتریس K_s و A_c تعیین می‌گردد.

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1.4142 & -2.6131 \end{bmatrix} \quad K_s = \begin{bmatrix} 5.6955 & 0.4142 \\ 0.4142 & 4.6131 \end{bmatrix}$$

مقادیر ویژه ماتریس A_c عبارتند از:

$$\lambda (A_c) = \{-1.8478, -0.7654\}$$

با استفاده از روابط (۲۰) و (۲۱) معادله حالت خطی $P_v(t)$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$P_v'(t) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1.4142 & 2.6131 & 0 & -1 \\ 1.4142 & 0 & 2.6131 & -1 \\ 0 & 1.4142 & 1.4142 & 5.2263 \end{bmatrix} P_v(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

شرایط اولیه معادله دیفرانسیل فوق برابر است با:

$$P_v(0) = [-1.5190 \quad 0.1364 \quad 0.1364 \quad -0.2290]^T$$

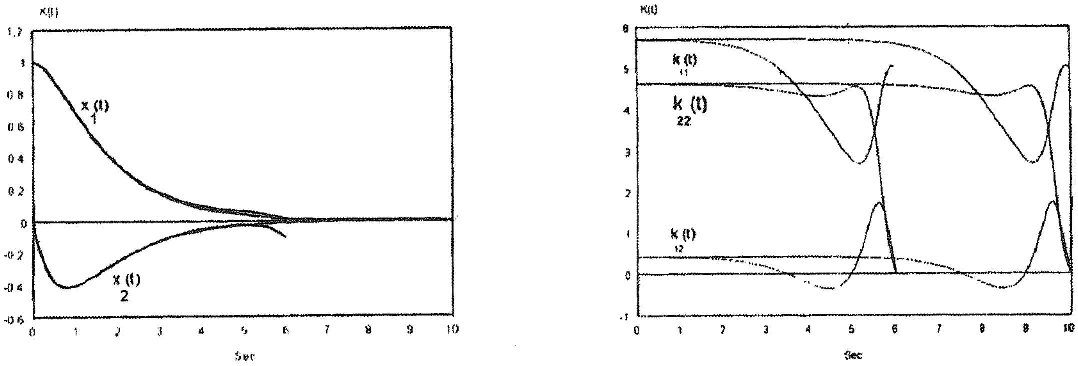
با تعیین پاسخ $P_v(t)$ می‌توان پاسخ معادله ریکاتی را تعیین نمود. از آنجایی که ماتریس $P(t)$ متقارن می‌باشد. معادله دیفرانسیل فوق را می‌توان یک مرتبه کاهش داد. با استفاده از رابطه (۲۲) می‌توان مقادیر ویژه A_k را به دست آورد.

$$\lambda (A_k) = \{1.5307, 2.6132, 3.6955, 2.6132\}$$

بنابر این شرط تبدیل کنترل فیدبک متغیر با زمان به فیدبک ثابت عبارت است از:

$$t_f \geq 9.7992 \quad sec$$

این نتیجه در شکل (۱) نشان داده شده است، مشاهده می‌گردد حالت گذرای سیستم حلقه بسته بهینه و ریکاتی به ترتیب پس از ۶ و ۴ ثانیه میرا شده‌اند.



شکل (۱) تایج معادله ریکاتی و سیستم بهینه

نتیجه‌گیری

اگر سیستم [C, A] رویت پذیر باشد $(Q=C^T.C)$ در آن صورت مقادیر ویژه متناظر با معادله ریکاتی، قطبهای معادل با ترکیب دو جمله از مقادیر ویژه Ac را دارا خواهد بود. بزرگترین مقدار ویژه معادله ریکاتی خطی دو برابر مقدار ویژه A_c می‌باشد. بنابر این حداکثر دوره گذرای معادله ریکاتی معادل نصف زمان گذرای سیستم بهینه جبری می‌گردد. در نتیجه اگر زمان نهایی از حد رابطه (۲۳) افزونتر اختیار شود، پاسخ بهینه سیستم خطی زمان محدود با پاسخ بهینه معادله جبری ریکاتی یکسان می‌شود.

منابع

[1] Kalman R. E. "Contributions to the theory of optimal control" Bol. math. 1960. PP 102-119.

[2] Kirk D. 'Introduction to optimal control theory'

[3] Purri N. and Gruver W. 'Optimal control design via successive approximation' Proc. J. Aut. control Conf. July 1967, PP 335-343.

[4] Martensson K. 'On the Riccati equation' J. Information Sciencis 1971, PP 1749.

[5] Anderson B. D. Moore J. 'Optimal control linear quadratic methods' Prentice Hall International Inc. 1989.