

# حل مدل دینامیکی غیرخطی مفاصل بدن انسان با روش معادلات دیفرانسیل اضافی و کمینه

محمد خضرای  
دانشجوی کارشناسی ارشد

علی مقداری  
استاد

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شریف

## چکیده

در این مقاله دو روش جدید برای حل مسایل دینامیکی غیرخطی مراتب بالا که در مدل‌سازی دینامیکی مفاصل بدن ظاهر می‌شوند، یعنی روش معادلات دیفرانسیل اضافی (E.D.E) و روش معادلات دیفرانسیل کمینه (Minimal Differential Equations (M.D.E)) معرفی می‌گردند. سپس با ایجاد یک مدل دینامیکی سه بعدی برای مفصل زانو و با فرض لیگامنت‌ها به عنوان فنرهای الاستیک غیرخطی و نیروی تحریک با پالس مستطیلی و سینوسی کاهش یابنده برای عضلات چهار سررانی پاسخ دینامیکی مفصل زانو توسط دو روش مذکور ارزیابی می‌گردند.

## *Solving Nonlinear Dynamics Model of Joints in Human Body By E.D.E. and M. D.E. Methods*

A. Meghdari  
Professor

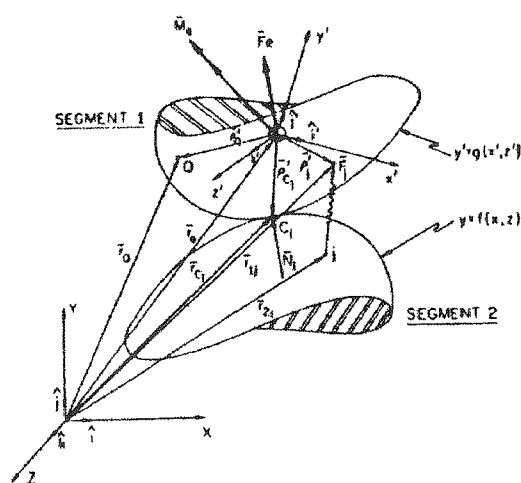
M. Khazraie  
M.Sc. Student

Biomechanics Eng. Dept., School of Mech. Eng. Univ. Sharif<sup>\*</sup>

### Abstract

*This paper presents two innovative methods for solving the highly nonlinear dynamics equations associated with Joint biomechanics. These methods are named as the Excess Differetial Equations (E.D.E), and the Minimal Differetial Equations (M.D.E.). Furthermore, by creating a 3 - Dimensional model of the knee joint, its response for rectangular and sinusoidal pulses have been studied and presented.*

مفصل شامل نیروهای عکس‌العملی در سطوح تماس اجزاء و نیروهای ناشی از لیگامنت‌ها در نقاط تماس لیگامنت‌ها با اجزاء مفصل می‌باشند. علاوه بر این نیروها که به عنوان نیروهای داخلی به حساب می‌آیند، نیروهای خارجی نیز توسط وتر عضلات، جاذبه و از این قبیل بر استخوان‌هایی که انتهای دیستال یا پروگزیمال آنها اجزاء مفصل را تشکیل می‌دهند، نیز وجود دارد که به صورت نیروها و ممان‌های خارجی بر مرکز جرم استخوان‌ها اثر می‌کنند.



شکل (۱) مفصل دو جزئی سه بعدی در حالت کلی

در شکل ۱ یک مفصل با دو جزء و در حالت سه بعدی نشان داده شده است. در این شکل فرض بر این است که جزء یک دارای حرکت نسبی نسبت به جزء مشخص شده با شماره دو است که این حرکت در اثر اعمال نیروی خارجی  $\vec{F}_e$  و ممان خارجی  $\vec{M}_e$  مؤثر بر مرکز جرم استخوانی که انتهای دیستال آن جزء شماره دو است به وجود می‌آید. دستگاه‌های مختصات مطلق و نسبی نیز به ترتیب به جزء شماره دو و جزء شماره یک متصل شده‌اند. به عبارت دیگر جزء شماره دو ثابت فرض شده است و جزء شماره یک نسبت به آن متحرک می‌باشد.

معادله سطح جزء ۱ با تابع ریاضی  $y' = g(x', z')$  در دستگاه مختصات نسبی  $x', y', z'$  و معادله سطح جزء دو با تابع ریاضی  $y = f(x, z)$  در دستگاه مختصات مطلق  $x, y, z$  مشخص شده‌اند.  $F_j$  و  $N_j$  به ترتیب مبین نیروهای وارد بر لیگامنت  $z$  و نیروی عکس‌العمل تماسی در نقطه تماس  $C_j$  می‌باشند.

تدوین معیارهای پیش‌بینی تخریب و طراحی و توسعه پروتزهای بدن ایجاب می‌کند که ابتدا یک مدل دینامیکی از رفتار مکانیکی و پاسخ بدن به نیروهای خارجی آماده شود. دقت چنین مدل بستگی زیادی به دقت تشریح بیومکانیک مناسب بدن و مفاصل دارد.

در سال ۱۹۸۱ دکتر معین زاده [۱] اولین مدل دینامیکی دو بعدی یک مفصل با دو سطح تماس و نیروهای قیدی لیگامنت را معرفی کرد. معادلات ریاضی برای این مدل مفصل به شکل معادلات دیفرانسیل مرتبه دو غیرخطی همراه با شرایط مرزی جبری غیرخطی است. در این دستگاه معادلات، معادلات دیفرانسیل حرکت با استفاده از روش دیفرانسیل تقریبی به یک گروه از معادلات جبری همزمان غیرخطی تبدیل شده و با استفاده از روش تکرار نیوتن - رفسون این دستگاه معادلات به یک گروه از معادلات جبری خطی همزمان تبدیل می‌شوند. این فرآیند حل تکراری تا حاصل شدن شرط همگرایی در جواب‌های متوالی ادامه می‌یابد. بعدها یک مدل دو بعدی برای مفصل زانوی انسان، (معین زاده و دیگران ۱۹۸۳) [۲]، برای بررسی حرکت دینامیکی میان فمور و تیبیا و محاسبه نیروهای تماسی ساخته شد. حل چنین مدلی مستلزم عملیات ریاضی پیچیده و حذف ترم‌های مرتبه دوم معادلات می‌باشد. به علاوه روند حل عددی معادلات زمان زیادی لازم دارد و پاسخ زانو در این مدل تنها برای زمان کمی از حرکت صدق می‌کند و پاسخ حاصل نیز تغییرات سریعی را در نیروی کششی لیگامنت‌ها نشان می‌دهد.

به این علت ضرورت توسعه یک روش کارآمد و مؤثر برای حل مدل دینامیکی مفاصل انسان به ویژه مدل سه بعدی مفاصل احساس می‌گردد. در این مقاله با ایجاد یک مدل دینامیکی سه بعدی برای مفاصل بدن انسان در حالت کلی روش‌های حل معادلات دیفرانسیل اضافی (E.D.E) و معادلات دیفرانسیل کمینه (M.D.E) معرفی می‌گردند و سپس از این مدل برای ایجاد یک مدل دینامیکی سه بعدی برای مفاصل زانو استفاده شده و دو روش جدید در مورد آن به کار برده می‌شود.

### مدل سه بعدی مفصل در حالت کلی

یک مفصل در حالت کلی از دو جزء تشکیل شده است که توسط لیگامنت‌هایی با ضرایب ارتجاعی غیر خطی با یکدیگر مربوط می‌شوند. نیروهای وارد بر اجزاء یک

## معادلات حاکم

شرط تماسی بین دو سطح مفصل نیز ایجاب می‌کند که بردارهای نرمال بر سطوح مفصلی فمور و تیپیا در نقطه تماس هم امتداد باشند. بنابراین خواهیم داشت:

$$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \vec{0} \quad \text{at} \quad \begin{cases} x = x_c, & z = z_c \\ x' = x'_c, & z' = z'_c \end{cases} \quad (10)$$

که در آن:

$$\vec{n}_1 = \frac{\left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \right)}{\left| \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \right|} \left[ 1 + \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right)^2 \right]^{-1/2} \left[ - \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) \hat{i} + \hat{j} - \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right) \hat{k} \right] \quad (11)$$

و

$$\vec{n}_2 = \frac{\left( \frac{\partial^2 g}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial z'^2} \right)}{\left| \frac{\partial^2 g}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial z'^2} \right|} \left[ 1 + \left( \frac{\partial g}{\partial x'} \right)^2 + \left( \frac{\partial g}{\partial z'} \right)^2 \right]^{-1/2} \left[ \left( \frac{\partial g}{\partial x'} \right) \hat{i} + \hat{j} + \left( \frac{\partial g}{\partial z'} \right) \hat{k} \right] \quad (12)$$

و

$$\begin{pmatrix} \hat{i}' \\ \hat{j}' \\ \hat{k}' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \hat{i} \\ \hat{j} \\ \hat{k} \end{pmatrix} \quad (13)$$

که در معادله بالا [T] تانسور تبدیل بوده و عبارت است از:

$$[T] = \begin{bmatrix} T_{11} = c\theta, c\psi & T_{12} = c\theta, s\psi & T_{13} = -s\theta \\ T_{21} = c\psi, s\theta + s\psi, s\theta, c\psi & T_{22} = c\psi, c\theta + s\psi, s\theta, s\psi & T_{23} = s\psi, c\theta \\ T_{31} = s\theta, s\psi + c\psi, s\theta, c\psi & T_{32} = s\psi, c\theta + c\psi, s\theta, s\psi & T_{33} = c\psi, c\theta \end{bmatrix} \quad (14)$$

در این رابطه s و c به ترتیب مبین sin و cos است.

با جایگذاری معادله ۱۴ در معادله ۱۳ و با جایگزینی  $\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}'$  در معادله ۱۲ و ترکیب، آن به همراه معادله ۱۱ در معادله ۱۰ و حل دستگاه حاصل خواهیم توانست توابعی برای  $x'_c, z'_c$  بر حسب  $x_c, z_c$  به دست آوریم که همان دو شرط تماسی می‌باشد. یعنی:

معادلات حاکم در این مسأله با مقدار اولیه شامل شش معادله دیفرانسیل غیرخطی مرتبه دوم به اضافه دو شرط تماسی (با فرض اینکه دو نقطه در تماس هستند) و سه شرط هندسی می‌باشد که یک مجموعه از ۱۱ معادله دیفرانسیل و جبری غیرخطی را تشکیل می‌دهد. یک مدل دو بعدی صورت نازل یافته‌ای از ۱۱ معادله مذکور است که شامل سه معادله حرکت یک شرط تماسی و دو شرط سازگاری هندسی که تشکیل یک دستگاه شش معادله دیفرانسیل و جبری را می‌دهند، می‌باشد. در هر حال اهمیت این روش بیشتر برای حالت مدل سه بعدی است. باتوجه به شکل ۱ شش معادله دیفرانسیل حرکت را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$m \ddot{x}_0 + a_1 N = F_1 \quad (1)$$

$$m \ddot{y}_0 + a_2 N = F_2 \quad (2)$$

$$m \ddot{z}_0 + a_3 N = F_3 \quad (3)$$

$$(I_z - I_y) \ddot{\psi} \dot{\Phi} + I_x \ddot{\theta} + a_4 N = F_4 \quad (4)$$

$$(I_x - I_z) \dot{\Phi} \ddot{\theta} + I_y \ddot{\psi} + a_5 N = F_5 \quad (5)$$

$$(I_y - I_x) \ddot{\psi} \dot{\theta} + I_x \ddot{\Phi} + a_6 N = F_6 \quad (6)$$

که در روابط فوق  $a_i$  کسینوس های هادی بردار نیرو و ممان نرمال بر سطح در نقطه تماس بوده و  $F_i$  نیز بردار نیرو و ممان خارجی وارد بر مفصل در راستای محورهای مختصات اینرسی می‌باشند.

طبیعت شرایط هندسی بین سطوح مفصلی یک و دو اجازه می‌دهد که بتوانیم بیانی برای  $x_0, y_0, z_0$  به صورت جملاتی از  $x_c, z_c, x'_c, z'_c$  (مختصات نقطه تماس در اجزاء یک و دو) و  $\theta, \psi, \Phi$  (موقعیت زاویه ای دستگاه مختصات متصل به جزء دو) به صورت زیر داشته باشیم:

$$x_0 = f'_x(x_c, z_c, x'_c, z'_c, \theta, \psi, \Phi) \quad (7)$$

$$y_0 = f'_y(x_c, z_c, x'_c, z'_c, \theta, \psi, \Phi) \quad (8)$$

$$z_0 = f'_z(x_c, z_c, x'_c, z'_c, \theta, \psi, \Phi) \quad (9)$$

$$\dot{y}_0 = \frac{\partial f_y}{\partial x_c} \dot{x}_c + \frac{\partial f_y}{\partial z_c} \dot{z}_c + \frac{\partial f_y}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial f_y}{\partial \psi} \dot{\psi} + \frac{\partial f_y}{\partial \phi} \dot{\phi}$$

$$\dot{z}_0 = \frac{\partial f_z}{\partial x_c} \dot{x}_c + \frac{\partial f_z}{\partial z_c} \dot{z}_c + \frac{\partial f_z}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial f_z}{\partial \psi} \dot{\psi} + \frac{\partial f_z}{\partial \phi} \dot{\phi} \quad (20)$$

برای شتاب نیز خواهیم داشت:

$$\ddot{x}_0 = \lambda_x \ddot{x}_c + \lambda_z \ddot{z}_c + \lambda_\theta \ddot{\theta} + \lambda_\psi \ddot{\psi} + \lambda_\phi \ddot{\phi} + \lambda_c \quad (21)$$

$$\ddot{y}_0 = \mu_x \ddot{x}_c + \mu_z \ddot{z}_c + \mu_\theta \ddot{\theta} + \mu_\psi \ddot{\psi} + \mu_\phi \ddot{\phi} + \mu_c \quad (22)$$

$$\ddot{z}_0 = \eta_x \ddot{x}_c + \eta_z \ddot{z}_c + \eta_\theta \ddot{\theta} + \eta_\psi \ddot{\psi} + \eta_\phi \ddot{\phi} + \eta_c \quad (23)$$

که در آن  $\lambda, \mu, \eta$  توابعی از  $x_c, z_c, \theta, \psi, \phi$  و مشتقات زمانی مرتبه اول آنها می باشند.

دستگاه معادلات ۱ تا ۶ به همراه دستگاه معادلات ۲۱ تا ۲۳ تشکیل یک دستگاه معادلات دیفرانسیل شامل نه معادله دیفرانسیل غیرخطی را می دهند که با حل همزمان این دستگاه با یکی از روش های تخمین انتگرال عددی (به عنوان مثال روش اولر)  $\theta, \psi, \phi, z_c, x_c, y_0, x_0, N$  به عنوان پاسخ دینامیکی مدل سه بعدی مفصل در حالت کلی به دست می آید. روشی که ذکر شد همان روش معادلات دیفرانسیل اضافی می باشد. اکنون به تشریح روش معادلات دیفرانسیل اضافی کمینه M.D.E خواهیم پرداخت. در این روش با حل  $N$  از معادله ۶ و جایگزینی آن در معادلات ۱ تا ۵ و همچنین با جایگزینی  $\ddot{x}_0, \ddot{y}_0, \ddot{z}_0$  از معادلات ۲۱ و ۲۲ و ۲۳ در معادلات ۱ تا ۵ خواهیم داشت:

$$K_{1x} \ddot{x}_c + K_{1z} \ddot{z}_c + K_{1\theta} \ddot{\theta} + K_{1\psi} \ddot{\psi} + K_{1\phi} \ddot{\phi} = K_1$$

$$K_{2x} \ddot{x}_c + K_{2z} \ddot{z}_c + K_{2\theta} \ddot{\theta} + K_{2\psi} \ddot{\psi} + K_{2\phi} \ddot{\phi} = K_2$$

$$K_{3x} \ddot{x}_c + K_{3z} \ddot{z}_c + K_{3\theta} \ddot{\theta} + K_{3\psi} \ddot{\psi} + K_{3\phi} \ddot{\phi} = K_3$$

$$K_{4x} \ddot{x}_c + K_{4z} \ddot{z}_c + K_{4\theta} \ddot{\theta} + K_{4\psi} \ddot{\psi} + K_{4\phi} \ddot{\phi} = K_4$$

$$K_{5x} \ddot{x}_c + K_{5z} \ddot{z}_c + K_{5\theta} \ddot{\theta} + K_{5\psi} \ddot{\psi} + K_{5\phi} \ddot{\phi} = K_5$$

در نهایت با حل دستگاه معادلات بالا خواهیم داشت:

$$x'_c = h_1(x_c, z_c, \phi, \psi, \theta) \quad (15)$$

$$z'_c = h_2(x_c, z_c, \phi, \psi, \theta) \quad (16)$$

با ترکیب معادلات ۱۵ و ۱۶ با معادلات شرط هندسی ۷ و ۸ و ۹ خواهیم داشت:

$$x_0 = f_x(x_c, z_c, \phi, \psi, \theta) \quad (17)$$

$$y_0 = f_y(x_c, z_c, \phi, \psi, \theta) \quad (18)$$

$$z_0 = f_z(x_c, z_c, \theta, \psi, \phi) \quad (19)$$

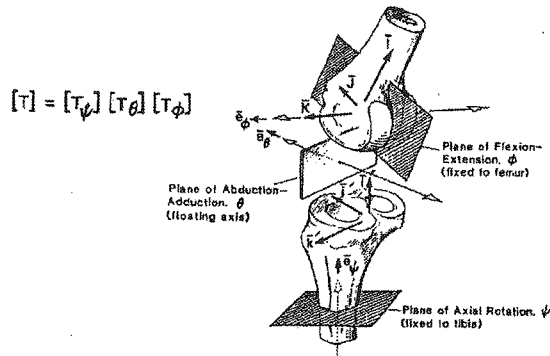
مدل دینامیکی مفصل در حالت کلی در اینجا و با بیان شرایط اولیه برای  $\theta, \psi, \phi, z_c, x_c$  که به عنوان مختصات مستقل عمومی انتخاب شده اند و مشتقات زمانی مرتبه اول آنها برای  $t = t_0$  کامل می شود.

### معرفی روش های E.D.E و M.D.E

دو روش جدید مورد بحث قرار می گیرد. روش اول که روش معادلات دیفرانسیل اضافی E.D.E نامیده می شود، مستلزم تعویض معادلات قیدی جبری به معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی مرتبه دوم می باشد. فرض اصلی در اینجا این است که اگر مشتق مرتبه دوم نسبت به زمان معادلات قیدی ارضاء شوند، خود معادلات قیدی نیز ارضاء خواهند شد. در حالت سه بعدی ما با این وصف نه معادله دیفرانسیل خواهیم داشت که حل همزمان این معادلات را می توان با روش تخمین انتگرال عددی (به عنوان مثال روش اولر) انجام داد. روش دوم که به روش معادلات دیفرانسیل کمینه M.D.E معروف است، فلسفه کاملاً متفاوتی نسبت به روش اول دارد. نظریه اساسی در اینجا کاهش تعداد معادلات دیفرانسیل به وسیله مشتقگیری از معادلات قیدی و جایگزینی آنها در معادلات دیفرانسیل و ترکیب معادلات دیفرانسیل حاصل و حل تنها نتایج معادلات دیفرانسیل غیرخطی به وسیله انتگرال گیری عددی است. با مشتقگیری زمانی از معادلات ۱۷ و ۱۸ و ۱۹ سرعت مرکز جرم جزء یک به صورت زیر محاسبه می گردد:

$$\dot{x}_0 = \frac{\partial f_x}{\partial x_c} \dot{x}_c + \frac{\partial f_x}{\partial z_c} \dot{z}_c + \frac{\partial f_x}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial f_x}{\partial \psi} \dot{\psi} + \frac{\partial f_x}{\partial \phi} \dot{\phi}$$

شده‌اند. یک تعریف عمومی حرکت مفصل برحسب سیستم سه زاویه محوری اولر می‌باشد. زاویه فلکسیون - اکستنسیون ( $\phi$ ) حول محور Lateromedially که از کندیل فمورال عبور می‌کند و دوران محوری ( $\psi$ ) که حول محور تنه ساق با اندازه‌گیری می‌شود. (شکل ۳):



شکل (۳) تشریح حرکت مفصل برحسب زوایای اولر

محور سوم (که به عنوان محور شناور نیز تعریف می‌گردد) بر محور اول عمود بوده و  $\theta$  (Abduction - adduction) را اندازه‌گیری می‌کند. این محور هنگام حرکت از وضعیت خنثی نسبت به محور دوم نامتعامل است. بنابراین سرعت زاویه‌ای و شتاب زاویه‌ای را می‌بایست برحسب یکی از مختصات‌های متعامد مطلق (که در اینجا به فمور متصل است) یا نسبی (که در اینجا به ساق یا متصل است) بیان نمود. سرعت زاویه‌ای سیستم متحرک نسبت به سیستم ثابت می‌تواند به عنوان جمع برداری سه سرعت زاویه‌ای منطبق بر به ترتیب فلکسیون - اکستنسیون، Abduction - adduction و دوران درونی و بیرونی بیان شود، در نتیجه سرعت زاویه‌ای به صورت زیر خواهد بود:

$$\vec{\omega} = \dot{\phi} \hat{e}_\phi + \dot{\theta} \hat{e}_\theta + \dot{\psi} \hat{e}_\psi \quad (24)$$

که در آن بردارهای واحد  $\hat{e}_\phi$  و  $\hat{e}_\theta$  و  $\hat{e}_\psi$  مبین سیستم محورهای واسطه می‌باشند. از آنجایی که مؤلفه‌های بردار به دست آمده برای  $\vec{\omega}$  در معادله ۲۴ متعامد نیستند، بردارهای واحد  $\hat{e}_\phi$  و  $\hat{e}_\theta$  و  $\hat{e}_\psi$  باید برای مؤلفه‌های در طول بردارهای واحد محورهای متعامد دوباره حل شوند. بنابراین سرعت زاویه‌ای نسبت به محورهای ثابت برحسب جملاتی از زوایای اولر عبارت است از [۳]:

$$\ddot{x}_c = H_x(x_c, z_c, \theta, \psi, \phi, \dot{x}_c, \dot{z}_c, \dot{\theta}, \dot{\psi}, \dot{\phi}, t)$$

$$\ddot{z}_c = H_z(x_c, z_c, \theta, \psi, \phi, \dot{x}_c, \dot{z}_c, \dot{\theta}, \dot{\psi}, \dot{\phi}, t)$$

$$\ddot{\theta} = H_\theta(x_c, z_c, \theta, \psi, \phi, \dot{x}_c, \dot{z}_c, \dot{\theta}, \dot{\psi}, \dot{\phi}, t)$$

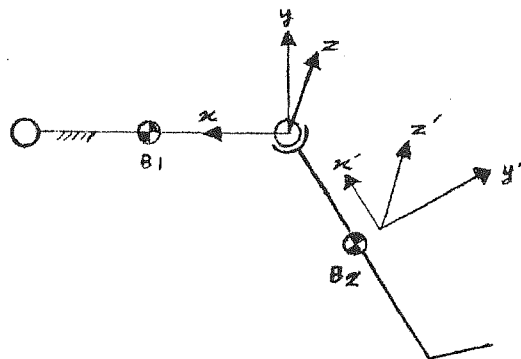
$$\ddot{\psi} = H_\psi(x_c, z_c, \theta, \psi, \phi, \dot{x}_c, \dot{z}_c, \dot{\theta}, \dot{\psi}, \dot{\phi}, t)$$

$$\ddot{\phi} = H_\phi(x_c, z_c, \theta, \psi, \phi, \dot{x}_c, \dot{z}_c, \dot{\theta}, \dot{\psi}, \dot{\phi}, t)$$

اکنون می‌توان با انتگرال‌گیری از دستگاه معادلات بالا  $x_c, z_c, \theta, \psi, \phi$  را به عنوان پاسخ دینامیکی مدل سه بعدی از یک مفصل در حالت کلی به دست آورد. نیروی تماسی N نیز به طور مستقیم از معادله ۶ به دست می‌آید.

### مدل سه بعدی مفصل زانو

اندام تحتانی به عنوان یک سیستم مکانیکی شامل دو عضو صلب  $b_1$  منطبق بر استخوان آن و  $b_2$  منطبق بر استخوان‌های ساق پا و پا مدل شده‌اند (شکل ۲):



شکل (۲)

یک سیستم محور مختصات به هر جزء عضو ثابت شده و با آن حرکت می‌کند. محور طول‌های مثبت در امتداد فوقانی محور عرض‌های مثبت در امتداد قدامی و محور z‌های مثبت از مبدأ به سمت نیمه‌چپ بدن امتداد یافته‌اند. مرکز مختصات هر عضو نیز به مرکز جرم آن متصل شده است، مگر اعضاء ثابت (که در اینجا استخوان ران است) که مرکز مختصات آن به یک نقطه دلخواه متصل شده است. ضرایب اصطکاک بین سطوح مفصلی بسیار کم است، یعنی 0.001-0.005 [۳] در نتیجه سطوح مفصلی بین اجزاء بدون اصطکاک فرض

$$\begin{cases} F_m = K_m (L_m - I_m)^2 & \text{for } L_m > I_m \\ F_m = 0 & \text{for } L_m \leq I_m \end{cases} \quad (29)$$

که در آن  $K_m$  و  $L_m$  و  $I_m$  به ترتیب سختی، طول جاری و طول اولیه لیگامنت  $m$  می باشند. مقادیر سختی لیگامنت ها نیز در جدول زیر داده شده اند [۲]:

جدول (۲) سختی چهار لیگامنت اصلی زانو

Ligament	$K_m$ (N/mm <sup>2</sup> )
LC	15
MC	15
AC	30
PC	35

طول اولیه لیگامنت ها نیز با توجه به اینکه نیروی داخلی لیگامنت ها تحت زاویه های ۵۵ درجه برابر صفر می باشند، محاسبه می گردند [۲]:

مختصات نقاط الحاقی لیگامنت ها در هر دو تیبیا و فمور از مطالعات آناتومی مفصل زانو محاسبه می شوند. این مختصات روی تیبیا توسط بردار  $\vec{p}_m$  و روی فمور توسط  $\vec{r}_{2m}$  مشخص می گردند. مقادیر استفاده شده در این مقاله در جدول زیر داده شده اند [۲]:

جدول (۳) موقعیت نقاط الحاقی لیگامنت ها با فمور و تیبیا (مقادیر بر حسب متر می باشند)

Ligament	Leg			Femur		
	$X'_m$	$Y'_m$	$Z'_m$	$X_m$	$Y_m$	$Z_m$
LC	0.179	-0.008	0.025	0.010	-0.008	0.025
MC	0.194	-0.005	-0.025	-0.005	-0.005	-0.025
AC	0.229	0.025	0	-0.005	0.023	0
PC	0.224	-0.025	0	0	-0.032	0

### سطوح مفصلی

سطح مفصلی فمورال به صورت یک برآمدگی کروی با شعاع ۴۰ میلیمتر و سطح مفصلی تیبیال به صورت یک حفره کروی با شعاع ۴۰ میلیمتر انتخاب شده اند [۵]. بنابراین معادله سطح مفصلی فمورال به صورت زیر است:

$$\vec{\omega} = [\dot{\psi} - \dot{\phi} \sin \theta] \hat{i} + [\dot{\theta} \cos \psi + \dot{\phi} \sin \psi] \hat{j} + [\dot{\phi} \sin \psi - \dot{\theta} \sin \psi] \hat{k} \quad (25)$$

مؤلفه های شتاب زاویه ای  $\omega_x$  و  $\omega_y$  و  $\omega_z$  را می توان به طور مستقیم یا مشتقگیری از مؤلفه های سرعت زاویه ای  $\omega_x$  و  $\omega_y$  و  $\omega_z$  محاسبه نمود:

$$\omega_x = \dot{\psi} - \dot{\phi} \sin \theta + \dot{\phi} \dot{\theta} \cos \theta \quad (26)$$

$$\omega_y = \dot{\theta} \cos \psi - \dot{\theta} \dot{\psi} \sin \psi + \dot{\phi} \dot{\psi} \cos \theta - \dot{\phi} \dot{\theta} \sin \theta \sin \psi + \dot{\phi} \dot{\psi} \cos \psi \sin \theta \quad (27)$$

$$\omega_z = \dot{\phi} \dot{\psi} \cos \theta - \dot{\theta} \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\phi} \dot{\psi} \sin \psi \cos \theta - \dot{\theta} \dot{\psi} \sin \psi - \dot{\phi} \dot{\psi} \cos \phi \quad (28)$$

طول، جرم، مرکز جرم و شعاع های ژیراسیون ساق پا با استفاده از جداول آنترپومتری برای مردی به طول متوسط (۱۸۰ سانتیمتر) [۴] به صورت زیر در نظر گرفته می شود:

جدول (۱) ویژگی های هندسی ساق پا

طول لینک ساق پا و پا:	۵۱/۳ سانتیمتر
طول مرکز جرم ساق پا و پا از انتهای پروگزیمال:	۲۶/۹ سانتیمتر
وزن ساق پا و پا:	۵/۹ سانتیمتر
شعاع ژیراسیون ساق پا و پا در صفحات مختلف نیز به صورت زیر است:	
حرکت در صفحه ساجیتال:	۱۴/۴ سانتیمتر
حرکت در صفحه فرونتال:	۱۴/۴ سانتیمتر
حرکت در صفحه افقی:	۴/۱ سانتیمتر
بنابراین ممان اینرسی ساق پا و پا در صفحات مختلف به صورت زیر خواهد شد:	
حرکت در صفحه ساجیتال:	۰/۱۲۲ کیلوگرم متر مربع
حرکت در صفحه فرونتال:	۰/۱۲۲ کیلوگرم متر مربع
حرکت در صفحه افقی:	۰/۰۱۰ کیلوگرم متر مربع

### نیروهای لیگامنت

چهار لیگامنت اصلی زانو در نظر گرفته می شوند. این لیگامنت ها عبارتند از: لترال - کلترال (LC)، مدیال کلترال (MC)، صلیبی قدامی (AC) و صلیبی خلفی (PC). لیگامنت ها به صورت فنرهای الاستیک غیرخطی مدل شده اند. رابطه نیروی کشش - تغییر مکان برای هر لیگامنت به صورت زیر فرض می شود:

$$R = 0.040$$

همچنین:

$$F_1 = F_q \sin \theta \cos \phi + \sum F_m (x_{1m} - x_{2m}) / L_m$$

$$F_2 = -mg + F_q \sin \phi \cos \theta + \sum F_m (y_{1m} - y_{2m}) / L_m$$

$$F_3 = F_q \sin \theta + \sum F_m (z_{1m} - z_{2m}) / L_m$$

$$F_4 = M_{qx} + \sum M_{Ixm}$$

$$F_5 = M_{qy} + \sum M_{Iym}$$

$$F_6 = M_{qz} + \sum M_{Izm}$$

که در آن:

$$F_m = K_m (L_m - I_m)^2 U (L_m - I_m) \quad \text{و}$$

نیروی کششی لیگامنت  $m$  می باشد.

ترکیب شرایط هندسی و تماسی نیز نتیجه می دهد:

$$x_0 = -0.269 \cos \theta \cos \phi$$

$$y_0 = -0.269 \cos \theta \sin \phi$$

$$z_0 = -0.269 \sin \theta$$

که با دوبار مشتقگیری از آن رابطه شتاب مرکز جرم ساق پا به دست می آید:

$$\ddot{x}_0 = 0.269 [\ddot{\theta} \sin \theta \cos \phi + \ddot{\phi} \cos \theta \sin \phi + (\dot{\phi}^2 + \dot{\theta}^2) \cos \theta \cos \phi - 2\dot{\phi} \dot{\theta} \sin \theta \sin \phi] \quad (32)$$

$$\ddot{y}_0 = 0.269 [\ddot{\theta} \sin \theta \sin \phi - \ddot{\phi} \cos \theta \cos \phi + (\dot{\phi}^2 + \dot{\theta}^2) \cos \theta \sin \phi - 2\dot{\phi} \dot{\theta} \sin \theta \cos \phi] \quad (33)$$

$$\ddot{z}_0 = 0.269 [\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta] \quad (34)$$

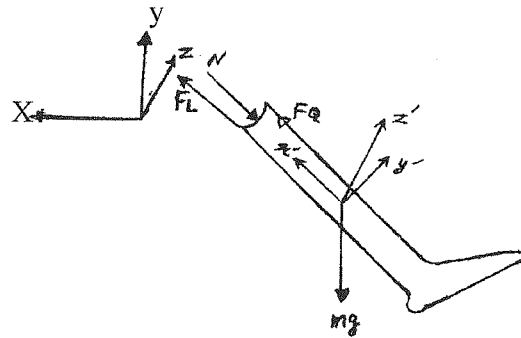
$$x = f(y, z) = -\sqrt{0.0016 - (y^2 + z^2)} \quad (30)$$

و معادله سطح مفصلی تیپبال به صورت زیر خواهد بود:

$$x' = g(y', z') = 0.279 - \sqrt{0.0016 - (y'^2 + z'^2)} \quad (31)$$

### معادلات حاکم

دیاگرام آزاد ساق پا برای یک لحظه از حرکت، بار دیگر در شکل زیر نمایش داده شده است:



شکل (۴)

بار دیگر معادلات ۱ تا ۶ را در نظر می گیریم. در این معادلات به جای  $\dot{\phi}$ ,  $\ddot{\phi}$ ,  $\dot{\theta}$ ,  $\ddot{\theta}$  مقادیر  $\dot{x}$  و  $\dot{y}$  و  $\dot{z}$  از معادلات ۲۶ و ۲۷ و ۲۸ قرار می گیرند. برای لحظه نامعین  $t$  از حرکت نیز خواهیم داشت:

$$a_1 = x_c / R$$

$$a_2 = y_c / R$$

$$a_3 = z_c / R$$

$$a_4 = a_3 (y_c - y_0) - a_2 (z_c - z_0)$$

$$a_5 = a_1 (z_c - z_0) - a_3 (x_c - x_0)$$

$$a_6 = a_2 (x_c - x_0) - a_1 (y_c - y_0)$$

که در آن:

$$x_c = -\sqrt{0.0016 - (y_c^2 + z_c^2)}$$

برای هر دو روش معادلات دیفرانسیل اضافی و کمینه توسط نرم افزار کوبیک بیسیک و با بکار بردن روش انتگرال گیری عددی اولر برای مدل سه بعدی زانوی انسان برنامه نویسی شده است. نیروی عضله چهار سررانی به دو صورت پالس مستطیلی با معادله:

$$F_q = A [U(t) - U(t - t_0)]$$

و پالس سینوسی کاهش یابنده نمایی با معادله:

$$F_q = A e^{-4.73(t/t_0)^2} \sin(\pi t/t_0)$$

برای دامنه (A = 20, 60, 100 N) و زمان پالس (t<sub>0</sub> = 50, 100, 150 msec) زانو در اشکال ۵ تا ۲۸ با استفاده از روش های E.D.E و M.D.E رسم شده اند.

اشکال ۵ تا ۱۵ مربوط به روش E.D.E و اشکال ۱۶ تا ۲۸ مربوط به روش M.D.E می باشند. در دیاگرام های فوق N نیروی تماسی برحسب نیوتن و (X<sub>0</sub>, Y<sub>0</sub>, Z<sub>0</sub>) مختصات مرکز جرم ساق پا و FI, TET, SAI و زوایای اولر و FPC, FAC, FMC, FLC کششی در لیگامنت های به ترتیب لترال - کلترال، مدیال - کلترال، صلیبی قدامی و صلیبی خلفی هستند.

از دو فرمولاسیون ارائه شده روش معادلات دیفرانسیل کمینه معتبرتر است. چرا که معادلات قیدی در هر مرحله از انتگرال گیری مستقیم تر ارضاء می شوند تا مشتقات آنها در روش معادلات دیفرانسیل اضافی. هر دو فرمولاسیون ابتدا توسط یک پالس نیروی مستطیلی روی ساق پا با دامنه و مدت زمان متغیر و سپس به وسیله یک پالس سینوسی با کاهش نمایی با دامنه و مدت زمان های مشابه آزمایش شده اند. نمودارهای نتایج محاسبات نشان می دهند که هر دو فرمولاسیون به یک پاسخ پایدار با یک تفاوت کوچک و معقولی معادل حداکثر ۲/۵ درصد می رسند. الگوریتم حل روش معادلات دیفرانسیل کمینه به صورتی است که برای مسایل پیچیده تر ممکن است کاهش تعداد معادلات غیرممکن باشد. بنابراین در اینگونه مسایل روش معادلات دیفرانسیل اضافی به همراه یک روش انتگرال گیری مناسب می تواند پاسخ بهتری داشته باشد. نتایج بالا را می توان با روش تکراری (معین زاده و

دیگران ۱۹۸۳) که یک مدل دو بعدی را برای زانوی انسان پیشنهاد کرده بود، نیز مقایسه نمود. هر دو روش معادلات دیفرانسیل کمینه و اضافی تطابق خوبی را با پاسخ های به دست آمده از روش حل تکراری ارائه شده توسط معین زاده نشان می دهند. باتوجه به الگوریتم روش تکراری که مستلزم تقریب مشتقات زمانی است روش های E.D.E و M.D.E می تواند راحت تر، دقیق تر و کارآمدتر باشد.

در پایان نمودارهای نیروی تماسی و لیگامنت ها برای روش معادلات دیفرانسیل کمینه که به نظر می رسد دقت بیشتری دارند، به صورت سه بعدی به عنوان توابعی از زوایای فلکسیون و دور شدن زانو رسم شده اند. توضیح اینکه از تغییرات زاویه چرخش به علت کوچک بودن آن صرف نظر شده و نمودارهای سه بعدی داده شده برای تغییرات این زاویه در طی زمان حرکت می باشند.

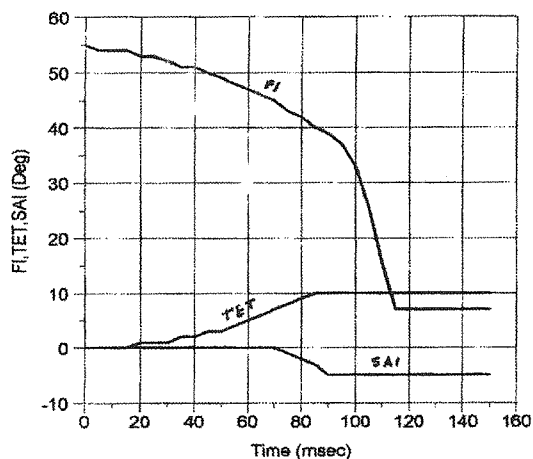
### فهرست علائم

- {X, Y, Z} : دستگاه مختصات اینرسی
- {X', Y', Z'} : دستگاه مختصات نسبی
- $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$  : بردارهای واحد در دستگاه مختصات اینرسی
- $\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}'$  : بردارهای واحد در دستگاه مختصات نسبی
- $\{\vec{r}_Q\}$  : بردارهای موقعیت یک نقطه دلخواه Q نسبت به دستگاه مختصات اینرسی xyz
- $\{\vec{r}'_Q\}$  : بردار موقعیت یک نقطه دلخواه Q نسبت به دستگاه مختصات نسبی x' y' z'
- $\{\vec{T}_0\}$  : بردار موقعیت مرکز دستگاه مختصات نسبی نسبت به دستگاه مختصات اینرسی xyz
- [T] : تانسور دوران دستگاه مختصات نسبی نسبت به دستگاه مختصات اینرسی
- {n} : بردار واحد نرمال اینرسی
- {F} : بردار نیرو
- N : نیروی نرمال بر سطح (نیروی تماسی)
- {M} : بردار ممان
- t : اسکالر زمان
- {ω} : بردار سرعت زاویه ای
- {ω'} : بردار شتاب زاویه ای
- LC : لیگامنت لترال کلترال زانو
- MC : لیگامنت مدیال کلترال زانو
- AC : لیگامنت صلیبی قدامی زانو
- PC : لیگامنت صلیبی خلفی زانو



g: شتاب ثقل زمین  
 $X_o, Y_o, Z_o$ : مختصات مرکز جرم ساق پا  
 $FI, TET, SAI$ : زوایای اولر  
 $A$ : دامنه پالس نیرو در عضله چهار سر رانی  
 $TP$ : طول پالس نیرو در عضله چهار سر رانی

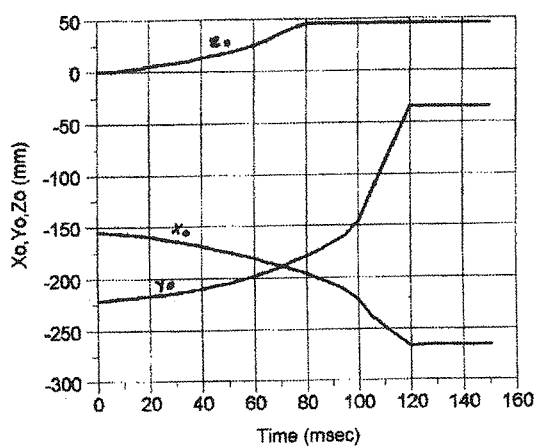
FLC: نیروی کششی در لیگامنت لترال کلترال زانو  
 FMC: نیروی کششی در لیگامنت مدیال کلترال زانو  
 FAC: نیروی کششی در لیگامنت صلیبی قدامی زانو  
 FPC: نیروی کششی در لیگامنت صلیبی خلفی زانو  
 $m$ : جرم ساق پا  
 $\{I\}$ : تانسور ممان اینرسی ساق پا



شکل (۷) دیاگرام تغییرات زوایای اولر بر حسب

زمان  $t$  -  $(FI, TET, SAI)$

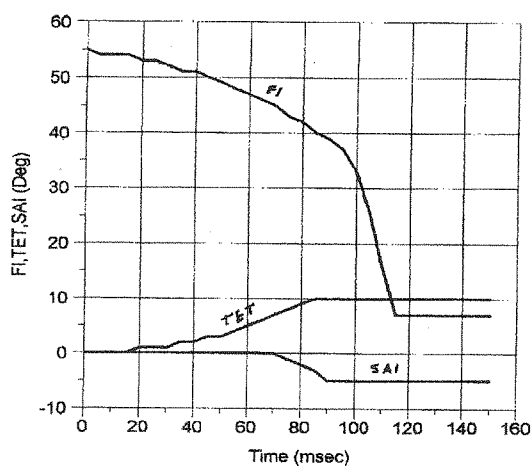
روش حل: روش معادلات دیفرانسیل اضافی (E.D.E)  
 ویژگی نیروی عضله چهار سر رانی:  
 نوع: پالس مستطیلی  
 دامنه:  $A = 60\text{ N}$   
 طول:  $TP = 150\text{ msec}$



شکل (۵) دیاگرام تغییرات مرکز جرم ساق پا بر حسب

زمان  $t$  -  $(X_o, Y_o, Z_o)$

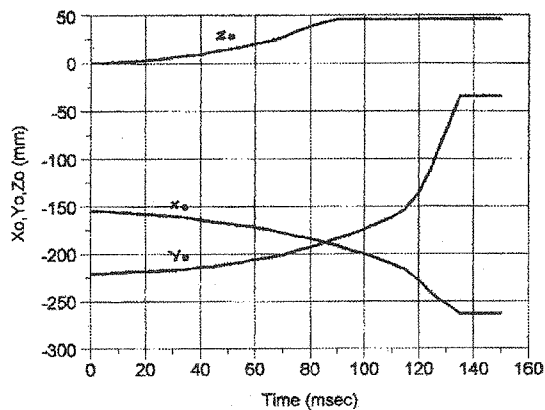
روش حل: روش معادلات دیفرانسیل اضافی (E.D.E)  
 ویژگی نیروی عضله چهار سر رانی:  
 نوع: پالس مستطیلی  
 دامنه:  $A = 60\text{ N}$   
 طول:  $TP = 150\text{ msec}$



شکل (۸) دیاگرام تغییرات زوایای اولر بر حسب

زمان  $t$  -  $(FI, TET, SAI)$

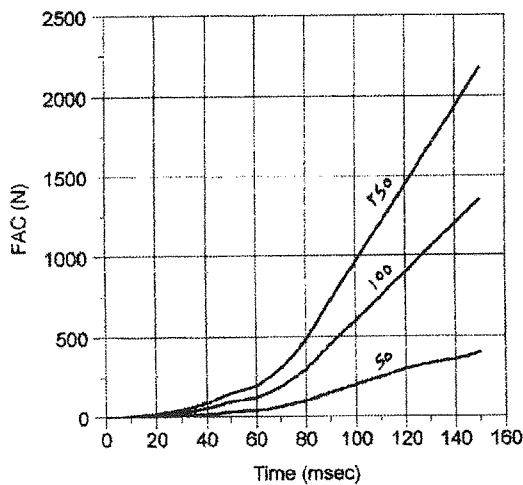
روش حل: روش معادلات دیفرانسیل اضافی (E.D.E)  
 ویژگی نیروی عضله چهار سر رانی:  
 نوع: پالس سینوسی با کاهش لگاریتمی  
 دامنه:  $A = 60\text{ N}$   
 طول:  $TP = 150\text{ msec}$



شکل (۶) دیاگرام تغییرات مرکز جرم ساق پا بر حسب

زمان  $t$  -  $(X_o, Y_o, Z_o)$

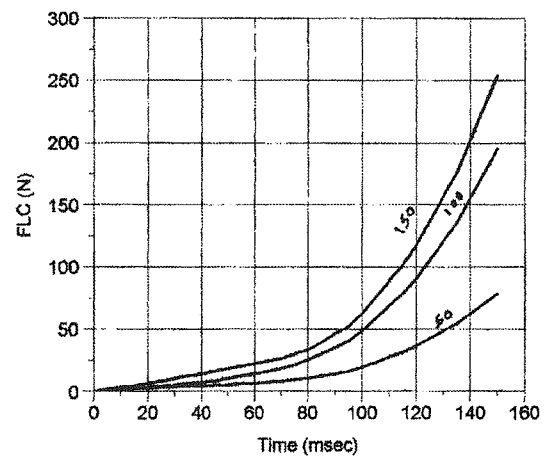
روش حل: روش معادلات دیفرانسیل اضافی (E.D.E)  
 ویژگی نیروی عضله چهار سر رانی:  
 نوع: پالس سینوسی با کاهش لگاریتمی  
 دامنه:  $A = 60\text{ N}$   
 طول:  $TP = 150\text{ msec}$



شکل (۱۱) دیاگرام تغییرات نیرو در لیگامنت بر حسب

زمان  $t$  - FMC

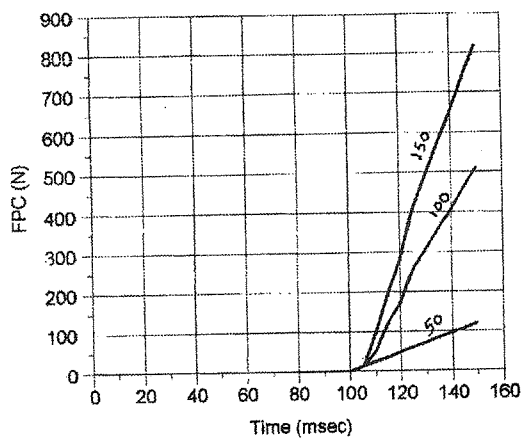
روش حل: روش معادلات دیفرانسیل اضافی (E.D.E)  
ویژگی نیروی عضله چهار سر رانی:  
نوع: پالس مستطیلی  
دامنه:  $A = 60 \text{ N}$   
طول: متغیر بر حسب میلی ثانیه



شکل (۹) دیاگرام تغییرات نیرو در لیگامنت بر حسب

زمان  $t$  - FLC

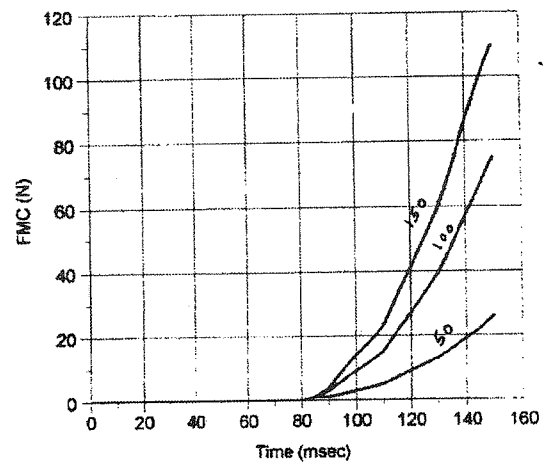
روش حل: روش معادلات دیفرانسیل اضافی (E.D.E)  
ویژگی نیروی عضله چهار سر رانی:  
نوع: پالس مستطیلی  
دامنه:  $A = 60 \text{ N}$   
طول: متغیر بر حسب میلی ثانیه



شکل (۱۲) دیاگرام تغییرات نیرو در لیگامنت بر حسب

زمان  $t$  - FPC

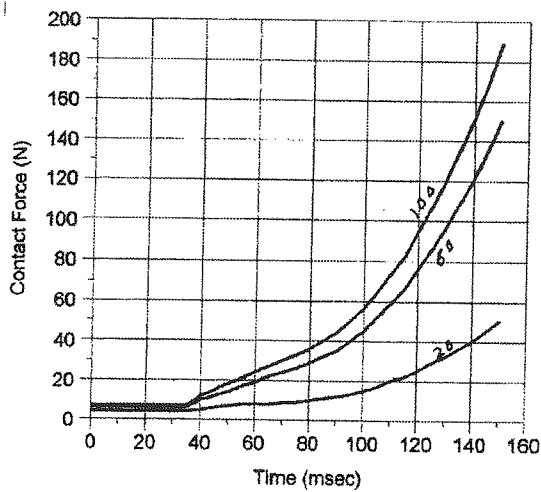
روش حل: روش معادلات دیفرانسیل اضافی (E.D.E)  
ویژگی نیروی عضله چهار سر رانی:  
نوع: پالس مستطیلی  
دامنه:  $A = 60 \text{ N}$   
طول: متغیر بر حسب میلی ثانیه



شکل (۱۰) دیاگرام تغییرات نیرو در لیگامنت بر حسب

زمان  $t$  - FMC

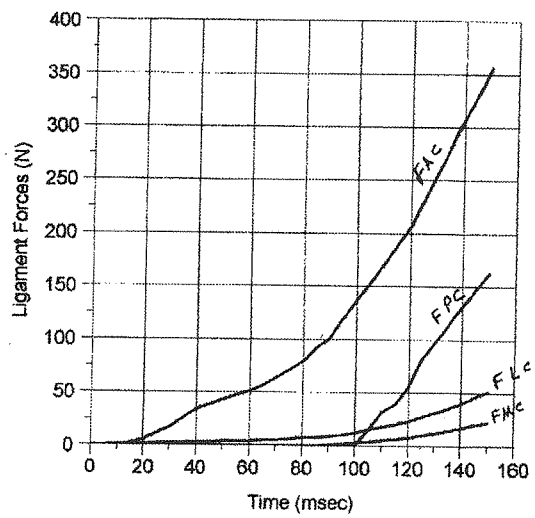
روش حل: روش معادلات دیفرانسیل اضافی (E.D.E)  
ویژگی نیروی عضله چهار سر رانی:  
نوع: پالس مستطیلی  
دامنه:  $A = 60 \text{ N}$   
طول: متغیر بر حسب میلی ثانیه



شکل (۱۵) دیاگرام تغییرات نیروی تماسی

بر حسب زمان  $N - t$

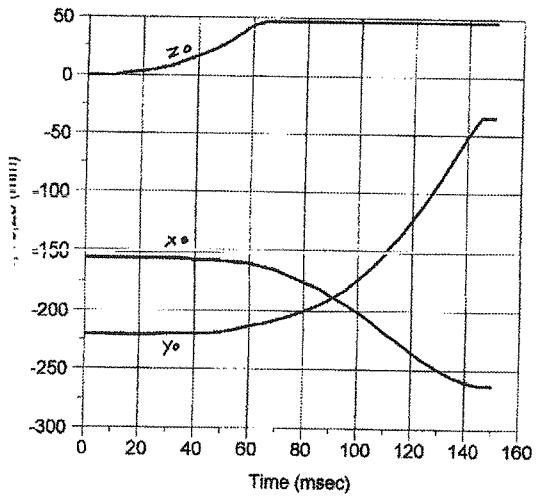
روش حل: روش معادلات دیفرانسیل اضافی (E.D.E)  
ویژگی نیروی عضله چهار سر رانی:  
نوع: پالس سینوسی با کاهش لگاریتمی  
دامنه: متغیر بر حسب نیوتن  
طول:  $TP = 150 \text{ msec}$



شکل (۱۳) دیاگرام تغییرات نیرو در لیگامنت های

چهارگانه بر حسب زمان

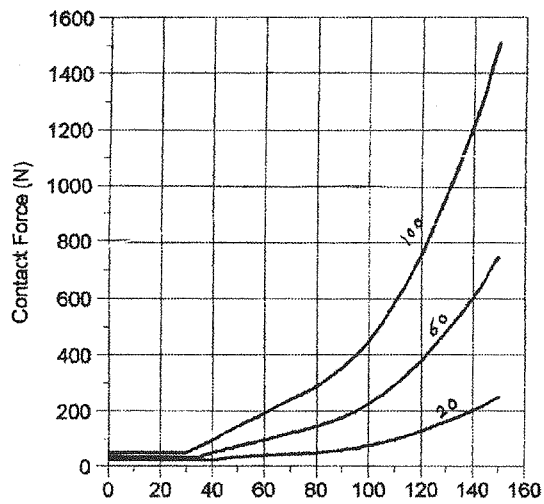
روش حل: روش معادلات دیفرانسیل اضافی (E.D.E)  
ویژگی نیروی عضله چهار سر رانی:  
نوع: پالس سینوسی با کاهش لگاریتمی  
دامنه:  $A = 60 \text{ N}$   
طول:  $TP = 150 \text{ msec}$



شکل (۱۶) دیاگرام تغییرات مرکز جرم ساق با

بر حسب زمان  $(X_0, Y_0, Z_0) - t$

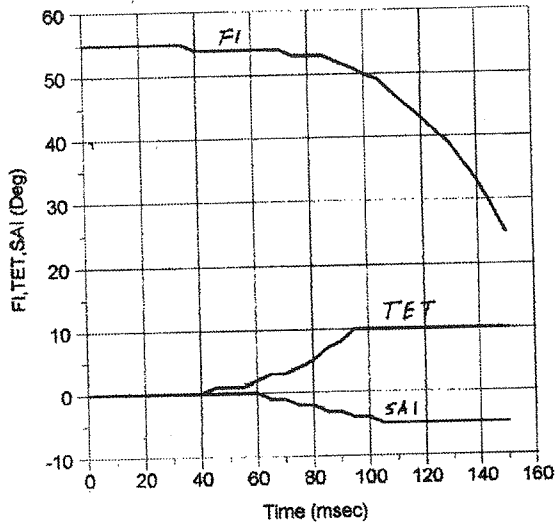
روش حل: روش معادلات دیفرانسیل کمینه (M.D.E)  
ویژگی نیروی عضله چهار سر رانی:  
نوع: پالس مستطیلی  
دامنه:  $A = 60 \text{ N}$   
طول:  $TP = 150 \text{ msec}$



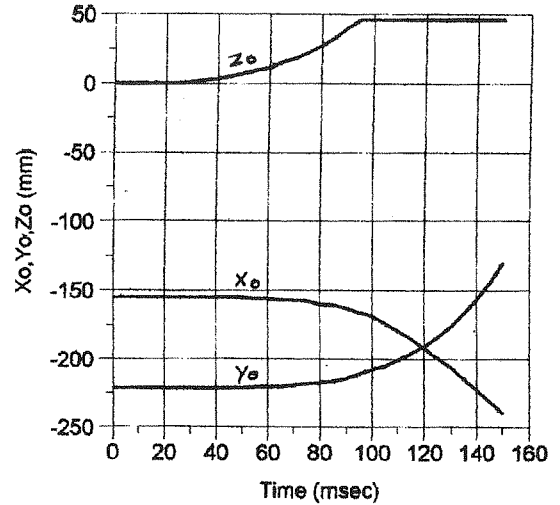
شکل (۱۴) دیاگرام تغییرات نیروی تماسی بر حسب

زمان  $N - t$

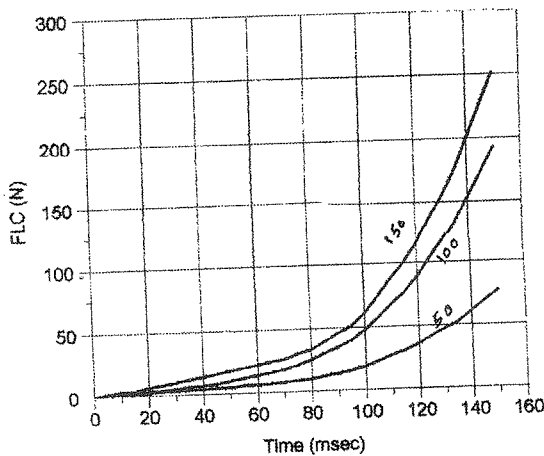
روش حل: روش معادلات دیفرانسیل اضافی (E.D.E)  
ویژگی نیروی عضله چهار سر رانی:  
نوع: پالس مستطیلی  
دامنه: متغیر بر حسب نیوتن  
طول:  $TP = 150 \text{ msec}$



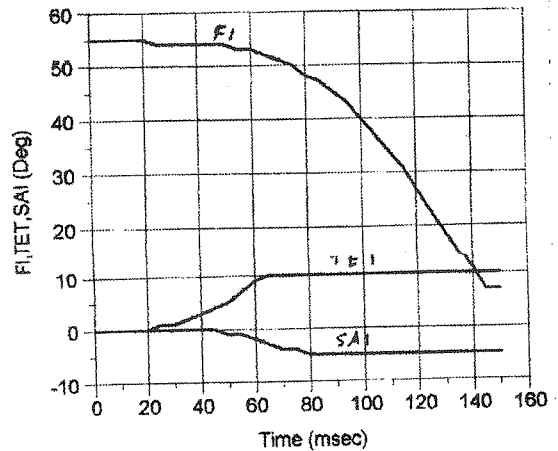
شکل (۱۹) دیاگرام تغییرات زوایای اولر  
برحسب زمان  $t$  -  $(F1, TET, SAI)$   
روش حل: روش معادلات دیفرانسیل کمینه (M.D.E)  
ویژگی نیروی عضله چهار سر رانی:  
نوع: پالس سینوسی با کاهش لگاریتمی  
دامنه:  $A = 60 \text{ N}$   
طول:  $TP = 150 \text{ msec}$



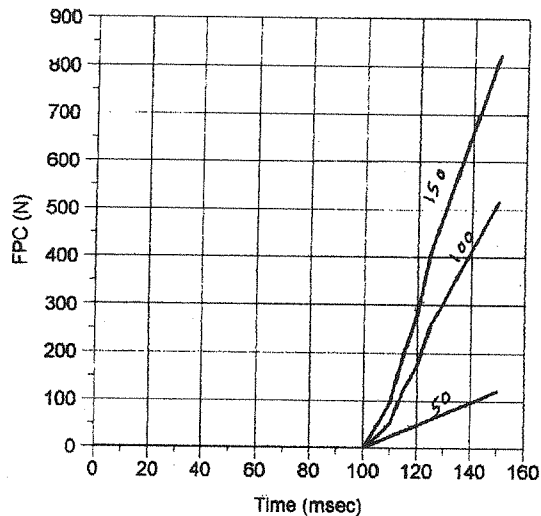
شکل (۱۷) دیاگرام تغییرات مرکز جرم ساق پا  
برحسب زمان  $t$  -  $(X0, Y0, Z0)$   
روش حل: روش معادلات دیفرانسیل کمینه (M.D.E)  
ویژگی نیروی عضله چهار سر رانی:  
نوع: پالس سینوسی با کاهش لگاریتمی  
دامنه:  $A = 60 \text{ N}$   
طول:  $TP = 150 \text{ msec}$



شکل (۲۰) دیاگرام تغییرات نیروی لیگامنت  
برحسب زمان  $t$  -  $FLC$   
روش حل: روش معادلات دیفرانسیل کمینه (M.D.E)  
ویژگی نیروی عضله چهار سر رانی:  
نوع: پالس مستطیلی  
دامنه:  $A = 60 \text{ N}$   
طول: متغیر بر حسب میلی ثانیه



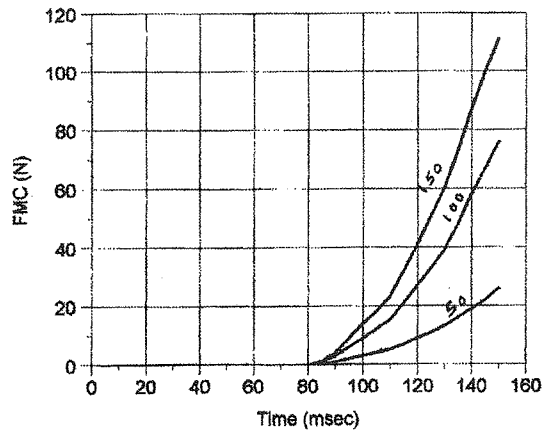
شکل (۱۸) دیاگرام تغییرات زوایای اولر  
برحسب زمان  $t$  -  $(F1, TET, SAI)$   
روش حل: روش معادلات دیفرانسیل کمینه (M.D.E)  
ویژگی نیروی عضله چهار سر رانی:  
نوع: پالس مستطیلی  
دامنه:  $A = 60 \text{ N}$   
طول:  $TP = 150 \text{ msec}$



شکل (۲۳) دیاگرام تغییرات نیروی لیگامنت

برحسب زمان  $t$  - FPC

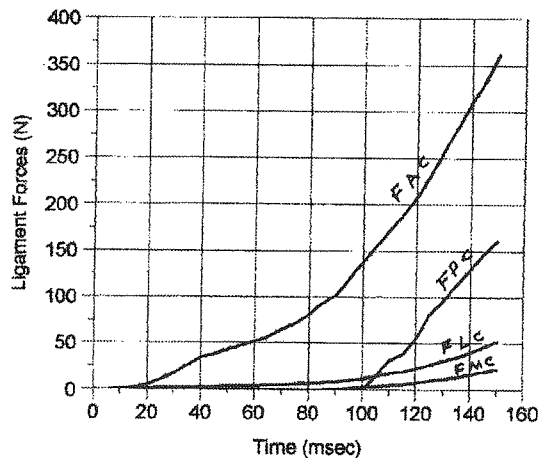
روش حل: روش معادلات دیفرانسیل کمیته (M.D.E)  
ویژگی نیروی عضله چهار سر رانی:  
نوع: پالس مستطیلی  
دامنه:  $A = 60 \text{ N}$   
طول: متغیر بر حسب میلی ثانیه



شکل (۲۱) دیاگرام تغییرات نیروی لیگامنت

برحسب زمان  $t$  - FMC

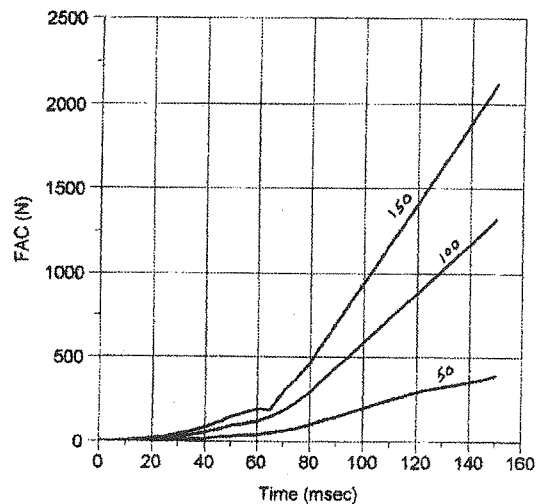
روش حل: روش معادلات دیفرانسیل کمیته (M.D.E)  
ویژگی نیروی عضله چهار سر رانی:  
نوع: پالس مستطیلی  
دامنه:  $A = 60 \text{ N}$   
طول: متغیر بر حسب میلی ثانیه



شکل (۲۲) دیاگرام تغییرات نیرو در لیگامنت های

چهارگانه برحسب زمان

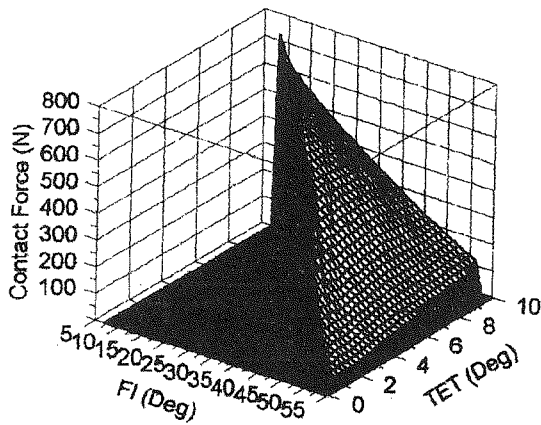
روش حل: روش معادلات دیفرانسیل کمیته (M.D.E)  
ویژگی نیروی عضله چهار سر رانی:  
نوع: پالس سینوسی با کاهش لگاریتمی  
دامنه:  $A = 60 \text{ N}$   
طول:  $TP = 150 \text{ msec}$



شکل (۲۲) دیاگرام تغییرات نیروی لیگامنت

برحسب زمان  $t$  - FAC

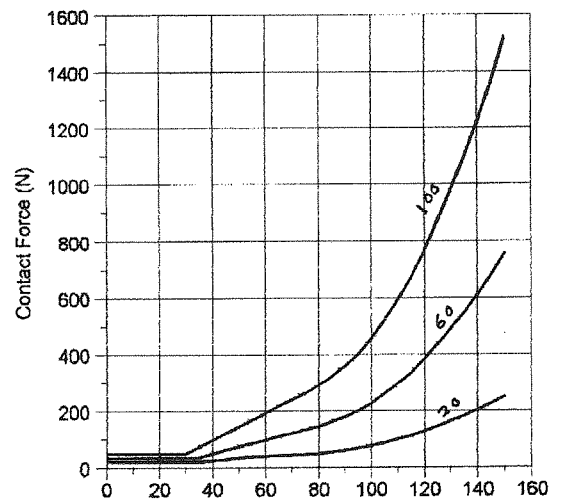
روش حل: روش معادلات دیفرانسیل کمیته (M.D.E)  
ویژگی نیروی عضله چهار سر رانی:  
نوع: پالس مستطیلی  
دامنه:  $A = 60 \text{ N}$   
طول: متغیر بر حسب میلی ثانیه



شکل (۲۷) دیاگرام تغییرات نیروی تماسی بر حسب زمان

N - (FI, TET)

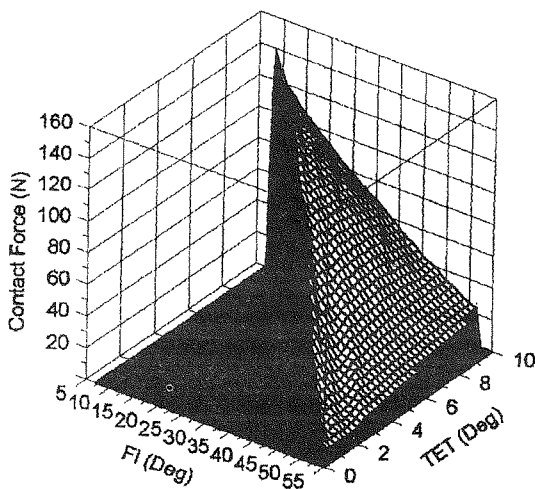
روش حل: روش معادلات دیفرانسیل کمینه (M.D.E)  
ویژگی نیروی عضله چهار سر رانی:  
نوع: پالس مستطیلی  
دامنه:  $A = 60 \text{ N}$   
طول:  $TP = 150 \text{ msec}$



شکل (۲۵) دیاگرام تغییرات نیروی تماسی

بر حسب زمان N - t

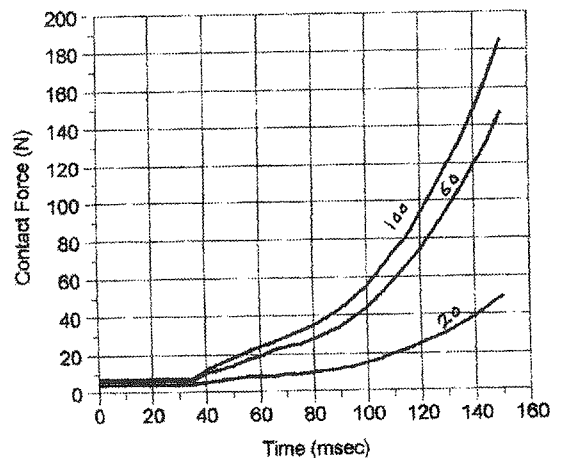
روش حل: روش معادلات دیفرانسیل کمینه (M.D.E)  
ویژگی نیروی عضله چهار سر رانی:  
نوع: پالس مستطیلی  
دامنه: متغیر بر حسب نیوتن  
طول:  $TP = 150 \text{ msec}$



شکل (۲۸) دیاگرام تغییرات نیروی تماسی بر حسب زمان

N - (FI, TET)

روش حل: روش معادلات دیفرانسیل کمینه (M.D.E)  
ویژگی نیروی عضله چهار سر رانی:  
نوع: پالس سینوسی با کاهش لگاریتمی  
دامنه:  $A = 60 \text{ N}$   
طول:  $TP = 150 \text{ msec}$



شکل (۲۶) دیاگرام تغییرات نیروی تماسی

بر حسب زمان N - t

روش حل: روش معادلات دیفرانسیل کمینه (M.D.E)  
ویژگی نیروی عضله چهار سر رانی:  
نوع: پالس سینوسی با کاهش نمایی  
دامنه: متغیر بر حسب نیوتن  
طول:  $TP = 150 \text{ msec}$

- [1] A. E. Engin, S.T. Tumer - "An Innovative Approach to the Solution of Highly Nonlinear Problems Associated with Joint Biomechanics" Proc. of the 1991 ASME Biomechanics Symposium.
- [2] M. H. Moeinzadeh, A. E. Engin, N. Akkas "Two-Dimensional Dynamic Modeling of Human Knee Joint Journal of Biomechanics, Vol. 16, No 4, pp. 253-254, 1983.
- [3] K. R. Kaifman, E. Y. S. Chao-"A Comparison of Intersegmental Joint Dynamics to Isokinetic Dynamometer Measurements" Journal of Biomechanics, Vol. 28, No. 10, pp. 1243-1256, 1995.
- [4] D. B. Chaffin, G. B. J. Andersson - "Occupational Biomechanics" John Wiley, U.S.A, 1991.
- [5] م. خضرائی، حل مدل دینامیکی غیرخطی مفاصل بدن انسان با روش معادلات دیفرانسیل اضافی و کمیته «پایان نامه کارشناسی ارشد مهندسی پزشکی (بیومکانیک)، دانشگاه صنعتی شریف، دانشکده مهندسی مکانیک، تهران ۱۳۷۶.