# تعیین اندازه انباشته در مسائل چند مرحله ای با محدودیت ظرفیت تولید در هر مرحله

سیّد محمّد تقی فاطمی قمی
دانشیار
دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه صنعتی امیرکبیر

سیّد مسعود میرکاظمی
استادیار
دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه امام حسین(ع)

## چکیده

در این مقاله یك مدل سیستم تولید چند مرحله ای با محدودیت منابع (ظرفیت) مورد مطالعه قرار می گیرد. با تعیین ماکزیمم فلو (مقدار تولید) در هر مرحله و با دخالت دادن هزینه هایی چون راه اندازی، نگهداری در هر مرحله و تکیه بر مدل برنامه ریزی پویا اقدام به توسعه یك روش ابتکاری شده است. در هر مرحله با استفاده از معادله برگشتی و به روش پس روی حداقل مجموع هزینه های ممکن در یك افق برنامه ریزی محدود محاسبه می شود. در نهایت چند مسئله کوچك به عنوان نمونه طرح و نتایج محاسبات که توسط یك برنامه کامپیوتری منطبق با مدل بدست آمده، ارائه می گردد.

# *Lot size Determination in Capacitated Multi-Stage Production Planning Problem*

S. M.T. Fatemi Ghomi
Associate Professor
Department of Industrial Engineering,
Amirkabir University of Technology

S. M. Mirkazemi
Assistant Professor
Department of Industrial Engineering,
Imam Hossein University

## Abstract

*This paper presents a model for capacitated multi-stage production planning problem. A heuristic approach is developed which is based on a dynamic programing formulation. To present this formulation, the maximum flour (production quantity) in each stage is determined. The relevant costs in each stage are set-up costs and holding inventory costs. Using recursive equation and backward pass procedure, the minimum attainable total costs over a finite planning horizon is computed. To facilitate the necessary computations, a computer program is developed. Finally , some small size problems are designed and the numerical results of each problem, solved by the developed program, are presented.*

## مقدمه

تعیین اندازه انباشته از دیرباز مورد توجه محققین و پژوهشگران بوده و مدیرانی که برنامه ریزی میان مدت به عهده آنهاست از جمله افرادی می باشند که به مسئله تعیین اندازه انباشته توجه داشته و موضوعات مربوطه را دنبال می نمایند. علیرغم تحقیقات قابل توجهی که در این زمینه صورت گرفته، به دلیل گستردگی زمینه تحقیق هنوز موضوعاتی وجود دارد که ادامه راه تحقیق آنها بسته نشده و بعضی از مقالات موجود به شکل های مختلف به بررسی مطالعات انجام شده در این زمینه پرداخته و موضوعات جدید مطالعاتی را پیشنهاد کرده اند؛ که در زیر به تعدادی از آنها اشاره می گردد.

در سال ۱۹۸۷ بهل و ریتزمن [4] پس از تشریح برنامه ریزی های بلند مدت، میان مدت و کوتاه مدت به دسته بندی مطالعات انجام شده در زمینه تعیین اندازه انباشته در برنامه ریزی میان مدت پرداخته وطی یک بررسی بر حسب مرحله (یک مرحله ای یا چند مرحله ای) و نیز بر حسب محدودیت یا عدم محدودیت درمنابع به خصوص ظرفیت تولید، مقالاتی را ارائه داده اند. در این مطالعه با در نظرگرفتن عواملی چون زمان اجرای کامپیوتر، عمومیت داشتن، بهینه سازی، قابلیت ادراک، قدرت مقابله با سایر تکنیکها (در مقیاس بزرگ) به ارزیابی مقالات در هر یک از دسته های فوق الذکر پرداخته و تحقیقات آتی را مشخص کرده اند. لازم به تذکر است حتی در سال های اخیر هم منابعی وجود دارد که به صحت مقاله فوق تأکید می کند، از جمله می توان به مقاله کوئیک سالمون، وان واسن هو ومیز [13] در سال ۱۹۹۳ اشاره نمود. در سال ۱۹۸۸ ماس و وان واسن هو [14] روش های به کار برده شده در زمینه مسائل تک مرحله ای که دارای تنوع در محصول می باشند را مورد مطالعه قرار داده و روش های ابتکاری که دارای کاربرد اختصاصی یا عمومی هستند را بررسی نموده اند. این مقاله همچنین مروری نسبتاً وسیع به روش های محاسباتی داشته و آنها را مورد آزمایش و ارزیابی قرار داده است.

در سال ۱۹۹۰ گویال و گوناسکاران [8] بررسی مقالات دیگری انجام داده و با در نظر گرفتن تنوع در مراحل تولید و محصول و تعداد ماشین ها در هر مرحله اقدام به ارزیابی و دسته بندی مطالعات انجام شده برحسب توابع هدف و تکنیک های به کاربرده شده در حل مسائل پرداخته و فهرست هایی را ارائه داده اند. در سال ۱۹۹۳ زاپفل و میس بائر [22] مفاهیم جدید برنامه ریزی و کنترل تولید را مورد بحث قرار داده و به تشریح علل و ضعف های مدل های مبتنی بر MRP پرداخته اند و در مقابل مؤثر بودن مفاهیم جدیدی چون Kanban, JIT, OPT, MRP II, work load control را برحسب شرایطی چون کمیت تولید، ساختار، تنوع محصولات، تکنولوژی ساخت و تقاضا مورد بررسی قرار داده و فهرستی از مقالات در هر زمینه ارائه شده و تحقیقات آتی پیرامون مقایسات غیرکمّی (کیفی) جهت پاسخگویی به پیچیدگی ها ارائه گردیده است. نوعی دیگر بررسی در زمینه موضوع تولید تک محصول بدون در نظر گرفتن محدودیت منابع است که در سال ۱۹۹۵ توسط والسی [19] صورت گرفته که در آن به بررسی سیر تکنیک های به کاربرده شده در حل اینگونه مسائل طی سه مقطع زمانی (۱۹۷۵-۱۹۵۸)، (۱۹۸۷ - ۱۹۷۵) و (۱۹۹۵ - ۱۹۹۰) پرداخته و فهرستی از مقالات را در هر زمینه ارائه داده است. طی بررسی های انجام شده عواملی را که باعث وسعت مسائل برنامه ریزی تولید شده اند گاهی نوع تصمیم گیری (کوتاه مدت، میان مدت و درازمدت)، یک مرحله ای یا چند مرحله ای بودن، شکل تولید (سری، مونتاژ یا حالت کلی MRP)، در نظر گرفتن پارامترهایی از جمله زمان یا هزینه راه اندازی، هزینه نگهداری و سفارشات عقب افتاده، ایستایی یا پویایی در تقاضا، محدود بودن یا نبودن افق برنامه ریزی، تک محصولی یا چند محصولی، قطعی یا احتمالی بودن بعضی از پارامترها از جمله تقاضا یا از کار افتادن تجهیزات تولیدی، محدودیت ظرفیت یا سایر منابع و ... را می توان نام برد. از طرف دیگر تعرف تابع هدف نیز به نوبه خود به گستردگی و تنوع مسائل کمک می کند، که می توان به عنوان مثال به بهینه نمودن هزینه یا زمان تولید اشاره نمود.

برحسب شرایط فوق تکنیک های مختلفی ارائه گردیده که عموماً مسائل با مقیاس کوچک با بهینه سازی توأم بوده و در مسائل با مقیاس بزرگ روش های ابتکاری توسعه داده شده اند. از جمله تکنیک ها می توان به برنامه ریزی خطی ویا غیرخطی، برنامه ریزی پویا، شبیه سازی، استفاده از تئوری شبکه، Tabu search, lagrangean relaxation, simulated annealing، انشعاب و تحدید، تئوری صف و نیز بسیاری از روش های ابتکاری اشاره نمود.

در این قسمت به نمونه هایی از سوابق کارهای انجام شده در زمینه سیستم های تولید چند مرحله ای پرداخته می شود.

بلاک بورن و میلن در سال ۱۹۸۴ [5] یک مدل برنامه ریزی تولید چند مرحله ای با افق نامحدود و با در نظر گرفتن محدودیت ظرفیت برای تولید یک محصول را ارائه دادند. در این مدل با حداقل نمودن مجموع هزینه ها در واحد زمان، مقدار بهینه فاصله سفارش در هر مرحله تعیین می شود. در سال ۱۹۸۴ افنتاکیس، گاویش و کارمارکار [2] اقدام به فرمولە نمودن یک سیستم مونتاژی براساس مفهوم Echelon نموده که در بهینه سازی مسائل بدون محدودیت در منابع کاربرد دارد. آنها همچنین با استفاده از ضرایب لاگرانژ مسئله را تجزیه نموده و در نهایت با تعیین حد پایین و با بکارگیری یک روش انشعاب و تحدید به حل ۱۲۰ مسئله تصادفی پرداخته اند. در همان سال زاهوریک و توماس [20] بدون در نظر گرفتن هزینه راه اندازی اقدام به برنامه ریزی خطی یک مسئله چند مرحله ای با چند محصول نموده و نشان دادند که یک مسئله سه پریود، یک موضوع شبکه است و این مورد اساس توسعه مدل ابتکاری آنها برای T پریود شده است. در سال ۱۹۸۶ افنتاکیس و گاویش [1] با تکیه و بکارگیری مفهوم Echelon بدون در نظر گرفتن محدودیت منابع، اقدام به ارائه مدلی برای سیستم های تولیدی پیچیده (حالت کلی MRP) نموده و با بکارگیری ضرائب لاگرانژ و بهبود بخشیدن آنها در مراحل تکرار و با تعریف یک حد پایین به توسعه یک روش انشعاب و تحدید پرداخته اند. در همان سال ویکری و مارکلند [17] در یک سیستم سری تولید قرص با بکارگیری یک روش ابتکاری و با در نظر گرفتن تابع هدف چند منظوره یک مسئله با مقیاس بزرگ را حل نموده اند. در سال ۱۹۸۷ هوآن و مینگ لین [11] با بکارگیری مفهوم Echelon در یک سیستم تولید چند مرحله ای و تک محصولی و با در نظر گرفتن مفروضاتی اقدام به ارائه یک برنامه ریزی پویا نموده که درسیستم های مونتاژی نیز قابل استفاده است. در سال ۱۹۸۹ تامورا [15] با بکارگیری یک مدل برنامه ریزی عدد صحیح مختلط و با تکیه بر اصل تجزیه دانتزینگ ـ ولف یک روش تقریب خطی ارائه نموده و در پایان مقاله با توسعه دو الگوریتم به حل تعدادی مسئله و مقایسه زمان CPU کامپیوتری آنها پرداخته است. در سال ۱۹۹۰ نیز کلارک و آرمنتانو [6] با تکیه بر مفهوم Echelon و با بکارگیری نامساوی های صفحه برش در یک سیستم تولید مونتاژی یک الگوریتم ۴ مرحله ای ارائه نموده که در آن از روش انشعاب و تحدید نیز بهره جسته اند. گوناسکاران و گوپال [9]در سال ۱۹۹۱ یک مدل تحلیلی برای تعیین تولید اقتصادی چند محصول در یک سیستم چند مرحله ای با وجود تعدادی ماشین در هر مرحله را مورد مطالعه قرار داده که در آن هدف، حداقل نمودن مجموع هزینه های راه اندازی، نگهداری و انتظار انباشته بین مراحل است. در سال ۱۹۹۲ گوناسکاران و گوپال [10] یک مدل کاربردی در یک کارخانه ریسندگی ارائه نمودند که در آن تولید چند محصول متفاوت در چند مرحله و در هر مرحله توسط چند ماشین صورت گرفته به طوری که حداقل هزینه ممکن حاصل شود ودر نهایت جواب های حاصله با وضعیت فعلی به مقایسه و ارزیابی قرار داده شده است. در همان سال کریمی [12] با زمانبندی محصول در یک سیستم تولید سری و با تقاضای ثابت و افق برنامه ریزی نامحدود و با هدف حداقل نمودن مجموع هزینه های راه اندازی و نگهداری اقدام به تعیین سیکل های قابل تکرار تولید و توقف نموده است. در ادامه مقاله سه الگوریتم ابتکاری و یک الگوریتم انشعاب و تحدید توسعه داده و به ارزیابی نتایج پرداخته است.

در سال ۱۹۹۳ النجداوی و کلیندورفر [3] مدلی برای سیستم تولید چند مرحله ای چند محصولی در یک افق برنامه ریزی نامحدود مورد مطالعه قرار داده که در این مدل با حداقل نمودن مجموع هزینه ها اقدام به تعیین زمان سیکل تولید و مقدار تولید هر محصول نموده است. در همان سال کلارک و آرمنتانو [7] با در نظر گرفتن Lead time و با تکیه بر مفهوم Echelon اقدام به فرموله کردن یک سیستم تولید مونتاژی نموده و در توسعه آن سیستم های پیچیده را نیز مد نظر قرار داده اند. وروس [18] در سال ۱۹۹۵ به نوعی دیگر مطالعه در زمینه سیستم تولید سری پرداخته است، بدین ترتیب که با ثابت نگهداشتن هزینه بهینه اقدام به تعیین حدود تغییرات هزینه راه اندازی مراحل در هر پریود نموده به طوری که جواب بهینه تغییر نکند.

آنچه مسلم است و در بسیاری از مقالات از جمله مقالات فوق الذکر بدان اشاره گردیده این نکته است که موضوع سیستم های تولید چند مرحله ای به خصوص با در نظر گرفتن محدودیت ظرفیت یک مسئله NP-hard است. آنچه در این مطالعه مد نظر قرار داده شده یک

سیستم تولید چند مرحله‌ای سری است که در هر مرحله با محدودیت ظرفیت تولید روبرو هستیم. برای تشریح مدل ابتدا به تعریف پارامترها پرداخته وبه ترتیب فرمول‌های لازم ارائه می‌گردد. لازم به تذکر است هزینه متغیر تولید همانطور که زنگویل [21] (به علت اینکه محصول بایستی تمام مراحل را طی نماید) در نظر نگرفته، لذا در این مقاله نیز از آن صرف نظر شده است.

## تعریف پارامترها و شرح مدل

$T$ افق برنامه ریزی $t = 1, 2, \dots, T$

$M$ تعداد مراحل $j = 1, 2, \dots, M$

$D_t$ تقاضای پریود tام (محصول نهائی یا خروجی آخرین مرحله)

$A_j$ هزینه راه‌اندازی مرحله jام

$C_j$ ظرفیت موجود در مرحله jام

$H_j$ هزینه نگهداری در مرحله jام

$N_{j,t}$ ماکزیمم فلو ورودی به گره $(j, t)$

$O_{j,t}$ ماکزیمم فلوئی که می‌تواند از گره $(j, t)$ خارج شود.

$F(j, t)$ ماکزیمم فلوئی که می‌تواند باتوجه به منطق مدل از گره $(j, t)$ بگذرد.

$R(t)$ مقداری از فلو که می‌بایستی از پریود t به پریود $t + 1$ فرستاده شود.

$K(j, t, Q)$ حداقل هزینه ممکن وقتی که مقدار $Q$ فلو از گره $(j, t)$ بگذرد.

$V(j, t, Q)$ مقداری از $Q$ که در حالت بهینه بایستی به گره $(j + 1, t)$ فرستاده شود.

در جهت تشریح مدل ابتدا شرایط لازم به منظور حفظ حل ممکن مورد نظر قرار می‌گیرد. باتوجه به محدودیتی که در ظرفیت تولید در مراحل مختلف وجود دارد، علی القاعده حداقل یکی از مراحل دارای ظرفیت کمتری نسبت به بقیه مراحل می‌باشد و در واقع نقش گلوگاه را بازی می‌کند. لذا بر این اساس می‌توان حداقل فلوئی که می‌بایست از پریود tام ارسال شود تا حل ممکن به دست آید را توسط $R(t)$ و به شکل زیر محاسبه نمود.

$$P = \mathrm{Min}\{C_1, C_2, \dots, C_M\}$$

$$R(t) = \begin{cases} 0 & \text{If } t = T \\ \mathrm{Max}\{0, D_{t+1} + R(t+1) - P\} & \text{If } t < T \end{cases}$$

الف) محاسبه ماکزیمم فلوئی که می‌تواند از گره $(j, t)$ بگذرد.

الف ـ ۱) محاسبه ماکزیمم ورودی

$$N_{j,t} = \{\mathrm{Min}\ [C_1, C_2, \dots, C_j]\} \times t - \sum_{i=1}^{t-1} D_i$$

الف ـ ۲) محاسبه ماکزیمم خروجی

$$O_{j,t} = \left\{\mathrm{Min} \sum_{i=1}^{T} D_i, \{\mathrm{Min}\ [C_{j+1}, C_{j+2}, \dots, C_M] \times (T - t + 1)\}\right\}$$

الف ـ ۳) محاسبه مقدماتی ماکزیمم فلوئی که می‌تواند از گره $(j, t)$ بگذرد.

$$IF(j, t) = \mathrm{Min}\{N_{j,t}, O_{j,t}\} \qquad 1 \le J \le M \qquad 1 \le t \le T$$

الف ـ ۴) محاسبه نهائی ماکزیمم فلوئی که می‌تواند از گره $(j, t)$ بگذرد.

اساس روش ابتکاری ارائه شده بر محور این مطلب است که در هر پریود (مثلاً پریود t ام) در صورتی که تولید صورت گیرد، برای تعیین مقدار تولید (اگر امکان داشته باشد) علاوه بر تولید $D_t$ مقدار $R(t+1) + D_{t+1}$ نیز مورد بررسی قرار می‌گیرد و در صورتی که این امکان در پریود t ام میسر نباشد، به مقدار تولید $D_t + R(t)$ بسنده می‌گردد. لذا برای وصول این موضوع $F(j, t)$ را به شرح زیر محاسبه می‌نماییم.

برای حالت $t = T$ داریم:

$$F(j, t) = \begin{cases} D_t & \text{If } j = M \\ \mathrm{Min}\{C_{j+1}, F(j+1, T)\} & \text{If } 1 \le j \le M-1 \end{cases}$$

برای حالت $t < T$ داریم:

$$F(j, t) = \begin{cases} IF(j, t) & \text{If } [IF(j, t) \ge D_t + D_{t+1} + R(t+1)] \text{ AND } \\ & [IF(j, t) \le \mathrm{Min}\{C_{j+1}, F(j+1, t)\} + F(j, t+1)] \\ & \text{OR } [j = M] \\ \mathrm{Min}\{IF(j, t), \mathrm{Min}\{C_{j+1}, F(j+1, t)\} + \mathrm{Max}\{0, F(j, t+1) - P\}\} & \text{else} \end{cases}$$

باتوجه به بدست آمدن ماکزیمم فلوئی که می‌تواند از هر گره بگذرد تا فرضیات مدل محقق شود، می‌توان با ارائه یک روش برنامه ریزی پویا و با روش پس روی و با حداقل نمودن مجموع هزینه راه‌اندازی و نگهداری به حل مدل پرداخت. مراحل کار به ترتیب به شرح ذیل آمده است.

**ب ـ محاسبه K (j, t, Q)**

ب ـ ۱) برای حالت J = M خواهیم داشت:

$$K(M,t,Q)=\begin{cases}0 & \text{If} \quad Q \le D_t\\ [Q-D_t]\times H_M & \text{If} \quad D_t < Q \le F(M,t)\end{cases}$$

ب ـ ۲) برای حالت 1 ≤ j < M خواهیم داشت:

$$D_t + Y \le Q \le \mathrm{Max}\{D_t + R(t), F(j,t)\} \rightarrow \begin{cases} Y = R(t) & \text{If} \quad j=1\\ Y=0 & \text{else}\end{cases}$$

$$\text{If } Q \le D_t + R(t) \Rightarrow K(j,t,Q) = \underset{BB}{\mathrm{Min}} \{A_{j+1} + BB \times H_j + K(j+1, t, D_t + R(t) - BB)\}$$

$$0 \le BB \le \mathrm{Min}\{Q, \mathrm{Max}\{0, F(j,t+1) - P\}\}$$

$$\text{If } D_t + R(t) < Q \le D_t + D_{t+1} + R(t+1) \Rightarrow K(j,t,Q) = \underset{B}{\mathrm{Min}} \{A_{j+1} + (Q-B) \times H_j + K(j+1,t,B)\}$$

$$D_t \le B \le Q$$

$$\text{If } Q \ge D_t + D_{t+1} + R(t+1)$$

$$K(j,t,Q) = \underset{B}{\mathrm{Min}} \{A_{j+1} + K(j+1,t,B) + (Q-B) \times H_j \times (E-t+1) + K(j, E+1, Q-B)\}$$

که در آن E, B به شکل زیر عمل می نمایند.

$$t+1 \le E \le T$$

$$B = D_t + R(t) + \left[\sum_{i=t+1}^{E} (D_i + R(i) - R(i-1))\right]$$

$$\text{AND } B \le C_{j+1}$$

$$\text{AND } B \le F(j+1,t)$$

$$\text{AND } (Q-B) \le F(j,t+1)$$

ب ـ ۳) محاسبه آخرین مرحله هزینه ها

$$K(0,t,Q) = A_1 + K(1,t,B) + K(0,E+1,Q-B)$$

که در آن E, B به شکل زیر عمل می نمایند.

$$B = D_t + R(t) + \left[\sum_{i=t+1}^{E} (D_i + R(i) - R(i-1))\right]$$

$$\text{AND} \quad B \le \mathrm{Min}\{C_1, Q, F(1,t)\}$$

در تمامی مراحل محاسبه هزینه به ازاء هر تعداد در هر گره (j ,t) مقدار بهینه B را مساوی V (j, t, Q) قرار داده و آن را حفظ می نماییم.

حال با توجه به موارد فوق به قدم های الگوریتم می پردازیم.

قدم ۱ ـ چک نمودن آنکه آیا جواب ممکن برای مسئله وجود دارد یا نه، برای حصول این مطلب به ازاء تمامی مقادیر t بایستی رابطه زیر برقرار باشد.

$$\sum_{i=1}^{t} D_i \le P \times t \qquad t = 1, 2, \dots, T$$

در غیر این صورت مسئله جواب نداشته و متوقف می شویم.

قدم ۲ ـ ماکزیمم فلوئی که می تواند از گره (j, t) بگذرد را به ترتیب با بکارگیری روابط (الف ـ ۱) تا (الف ـ ۴) به دست می آوریم.

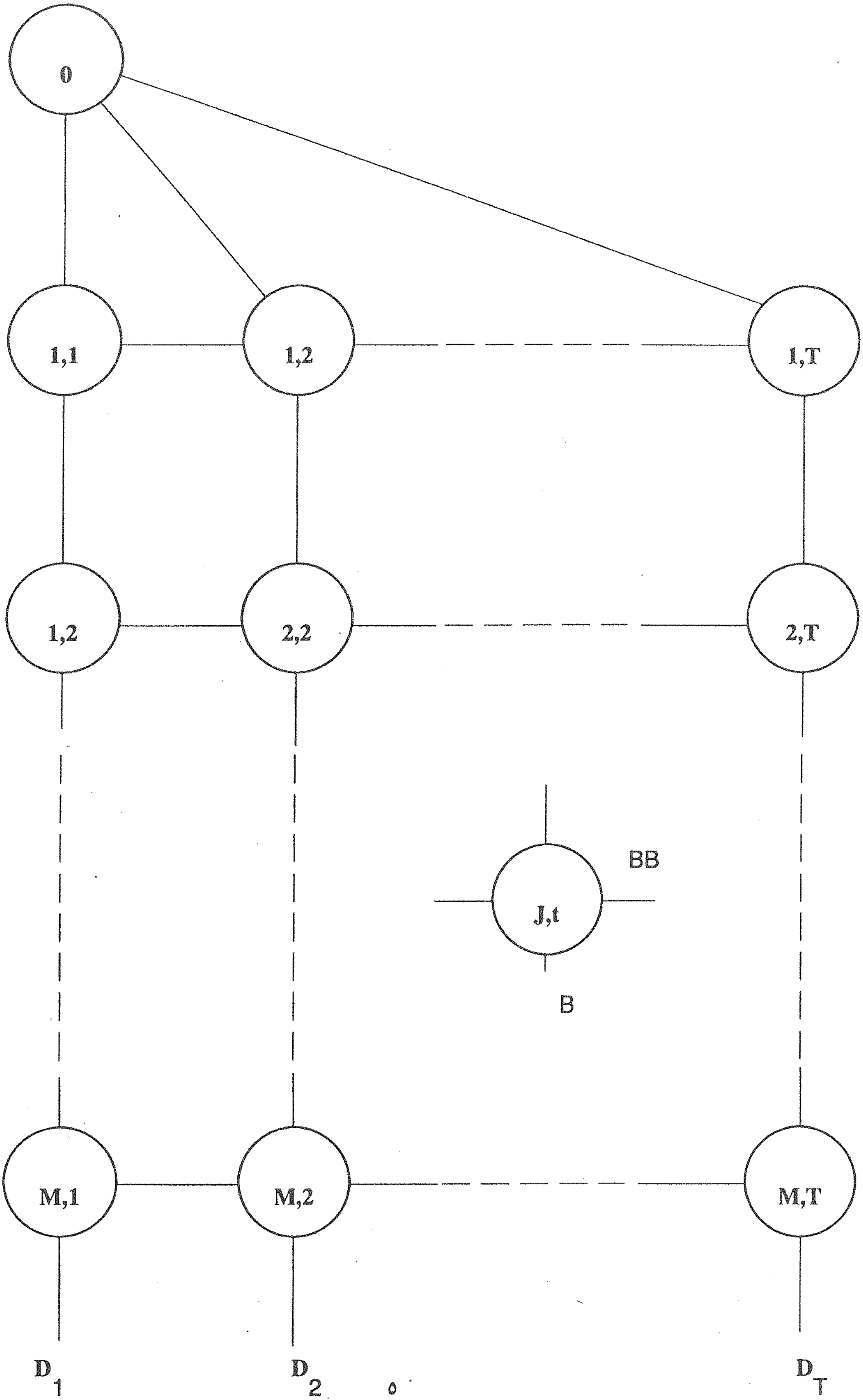
قدم ۳ ـ با بکارگیری به ترتیب روابط (ب ـ ۱) تا (ب ـ ۳) و استفاده از روش پس روی به محاسبه هزینه ها پرداخته و حداقل هزینه را به دست می آوریم.

قدم ۴ ـ با دنبال کردن جواب بهینه از انتها به ابتدا، مقادیر تولید در هر مرحله، پریود متعلق به آن و حداقل هزینه را محاسبه می نماییم.

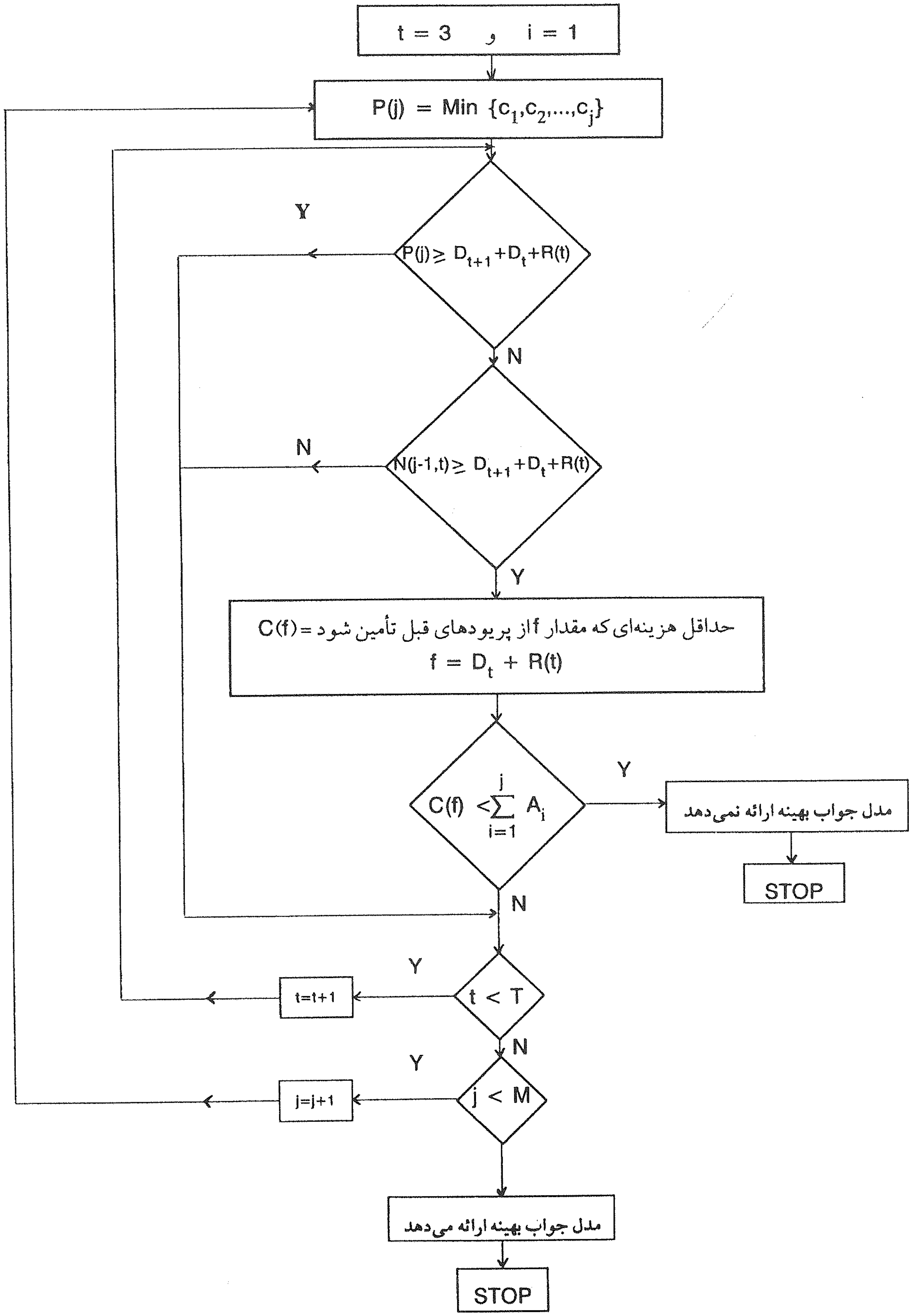
## حل چند مثال و ارزیابی نتایج

با بکارگیری قدم های الگوریتم به حل ۶ مثال پرداخته که نتایج آن همراه با شکل شبکه و مشخص شدن جواب حاصل از الگوریتم روی کمان ها ارائه شده است. از آنجا که روشی برای به دست آوردن جواب بهینه در دسترس نبوده لذا اقدام به حل مسائل کوچک نموده که بتوانیم نتایج حاصل از مدل را مورد بررسی قرار دهیم. همانطور که در شبکه مثال ها نشان داده شده نتایج مدل به وسیله اعداد روی کمان های بین مراحل و پریودها نشان داده شده است. به جز مثال های ۳ و ۶ در بقیه مثال ها جواب بهینه به دست آمده و می توان طبق روشی که فلوچارت آن در صفحه بعد آمده است، بهینه بودن یا نبودن جواب حاصل از مدل را مشخص نمود.

لازم به تذکر است برای مسائلی که دارای دو پریود می باشند، همواره جواب بهینه داریم. لذا برای چک کردن مسائل از پریود سوم به بعد شروع می کنیم.

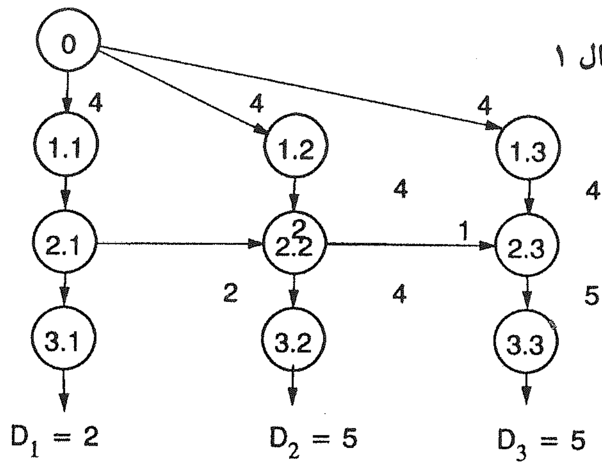



۵



چك كردن بهينه بودن جواب توسط مدل پيشنهادی

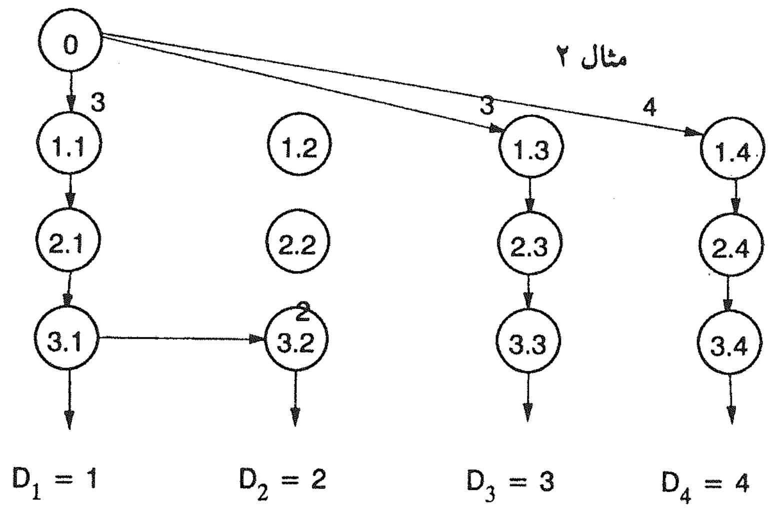
مثال ۱




| Aj | Cj | hj |
|---|---|---|
| 6 | 4 | 3 |
| 5 | 5 | 1 |
| 9 | 5 | 2 |

$Z^* = 63$

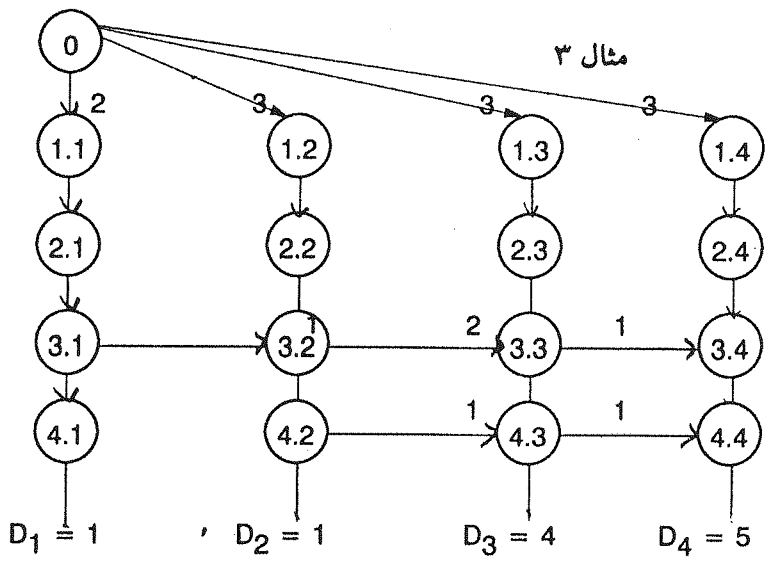
مثال ۲




| Aj | Cj | hj |
|---|---|---|
| 6 | 5 | 1 |
| 5 | 4 | 2 |
| 5 | 5 | 2 |

$Z^* = 52$

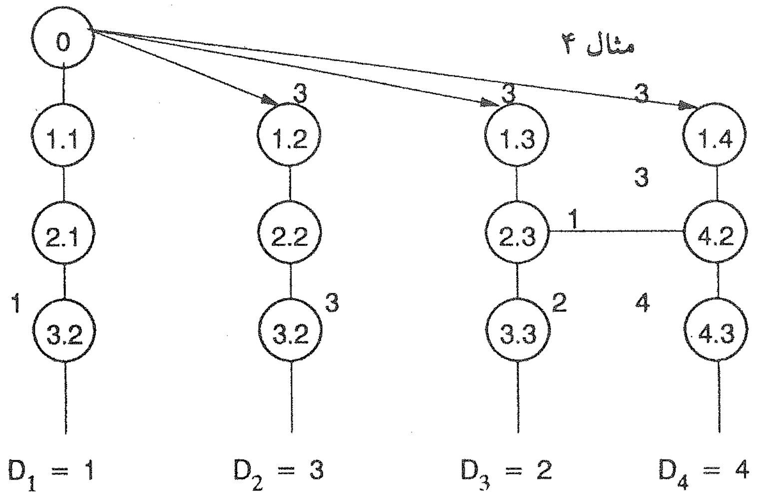
مثال ۳




| Aj | Cj | hj |
|---|---|---|
| 4 | 4 | 1 |
| 6 | 5 | 2 |
| 3 | 3 | 3 |
| 5 | 4 | 4 |

$Z^* = 92$

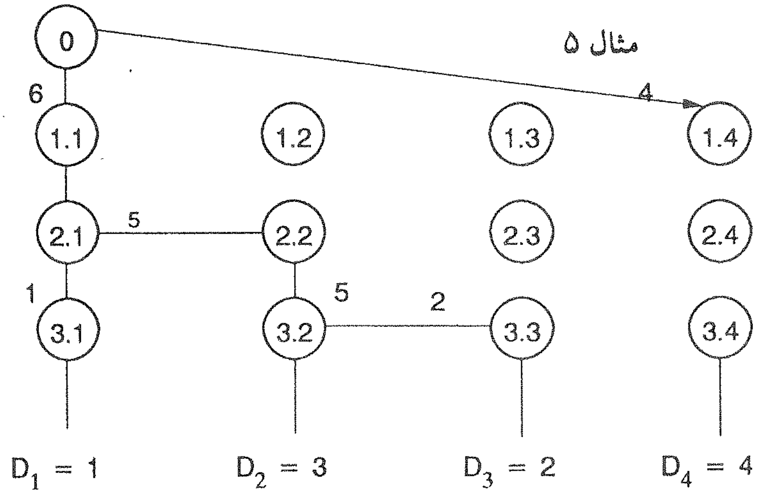
مثال ۴




| Aj | Cj | hj |
|---|---|---|
| 4 | 4 | 2 |
| 3 | 3 | 1 |
| 6 | 5 | 3 |

$Z^* = 53$

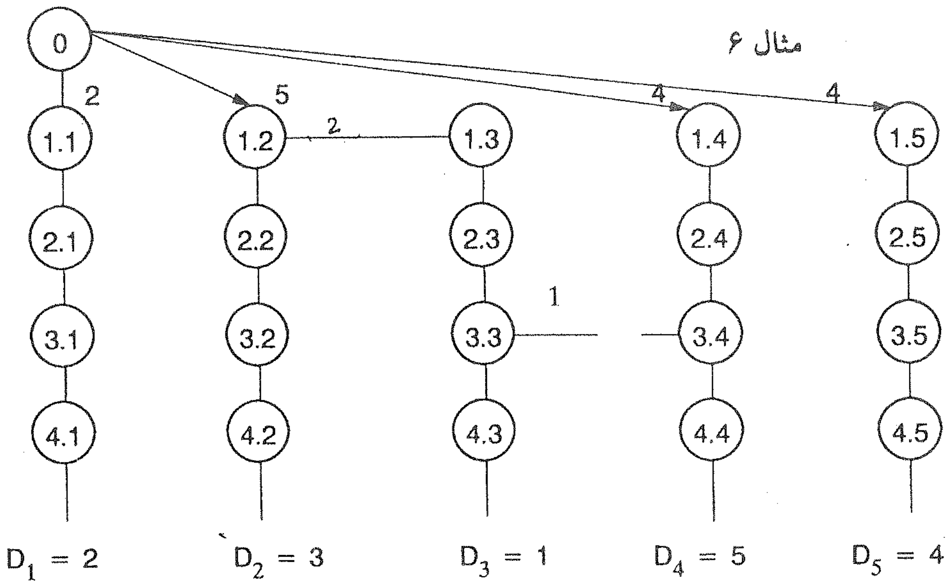
مثال ۵




| Aj | Cj | hj |
|---|---|---|
| 4 | 15 | 2 |
| 3 | 10 | 1 |
| 6 | 10 | 3 |

$Z^* = 59$

مثال ۶




| Aj | Cj | hj |
|---|---|---|
| 8 | 5 | 2 |
| 7 | 4 | 3 |
| 5 | 6 | 1 |
| 5 | 6 | 4 |

$Z^* = 122$

## مراجع


[1] Afentakis P., Gavish B., Optimal lot-sizing algorithms for complex product structures, Operations Research, Vol. 34, No. 2, March-April. 1986.

[2] Afentakis P., Gavish B., Karmrkar U., Computationally efficient optimal solutions to the lot-sizing problem in multi-stage assembly systems, Management Science, Vol. 30, No.2, February 1984.

[3] Al-Najdawi M., Kleindorfer P., Common cycle lot-size scheduling for multi-product, multi-stage production, Management Science , Vol. 39, No. 7, July 1993.

[4] Bahl H. C., Ritzman L. P., Gupta J. N. D., Determining lot sizes and resource requirments: A review, Operations Research, Vol. 35, No. 3, May-June 1987.

[5] Blackburn J., Millen R., Simultaneous lot-sizing and capacity planning in multi-stage assembly processes, European Journal of Operational Research, Vol. 16, 84-93, 1984.

[6] Clark A. R., Armentano V. A., Accelerated solutions to the multi-stage lot-sizing problem with lead time through the use of strong valid inequalities, IEEE, Ch2917, 1990.

[7] Clark A. R. , Armentano V. A., Echelon stock formulation for multi-stage lot-sizing with component lead times, International Journal of Systems Science, Vol. 24, No. 9 , 1759-1775, 1993.

[8] Goyal S. K., Gunasekaran A., Multi-stage production - inventory systems, European Journal of Operational Research, Vol. 46, 1-20, 1990.

[9] Gunasekaran A., Goyal S. K., Babu A., Ramaswamy N., Optimization of a multi-stage production-inventory system with significant set-up operation time, Inernational Journal of Systems Science, Vol. 22, No.2, 1991.

[10] Gunasekaran A., Goyal S. K., Multi-level lot-sizing in a rayon yarn company: A case study, European Journal od Operational Research, Vol. 65, 1993.

[11] Huan N., Ming Lin T., An optimal lot-sizing model for multi-stage series/assembly systems, Operations Research, Vol. 15, No.5, 1988.

[12] Karimi I. A., Optimal cycle times in multi-stage serial systems with set-up and inventory costs, Management Science, Vol. 38, No. 10, 1992.

[13] Kuik R., Salomono M., Van Wassenhove L. N., Maes J., Linear programing, simulated annealing and Tabu search heuristics for lot-sizing in bottleneck assembly systems, IIE Transactions, Vol. 25, No. 1, 1993.

[14] Maes J., Van Wassenhove L., Multi-item single - level capacitated dynamic lot-sizing heuristics: A general review, Journal of Operational Research Society, Vol. 39, No. 11, 1988.

[15] Tamura T., A procedure for a multi-item and multi-stage production planning problem, International Journal of JSME, Vol. 32, No. 1, 1989.

[16] Toklu B., Wilson J. M., A heuristic for multi-level lot-sizing problems with a bottleneck, International Journal of Production Research, Vol. 30, No. 4, 1992.

[17] Vickery S., Markland R., E., Multi-stage lot-sizing in a serial production system, International Journal of Production Research, Vol. 24, No. 3, 1986.

[18] Voros J., Setup cost stability region for the multi-level dynamic lot-sizing problem, European Journal of Operational Research, Vol. 87, 1995.

[19] Wolsey L. A., Invited review: progress with single-item lot-sizing, European Journal of Operational Research, Vol. 86, 1995.

[20] Zahorik A., Thomas L. J., Trigeiro W.W., Network programming models for production scheduling multi-stage, multi-item capacitated systems, Management Science, Vol. 30, No. 3, March 1984..

[21] Zangwill W. I., A backlogging model and a multi-echelon model of a dynamic economic lot-size production system-A network approach, Management Science, Vol. 15, No. 9, May 1969.

[22] Zapfel G., Missbauer H., New concepts for production planning and control, European journal of operational Research, Vol. 67, 1993.