کاربرد تئوری اغتشاشات برای آنالیز ارتعاشات غیرخطی سیم تحت اثر گشتاورهای خمشی

سیامک اسماعیل زاده خادم
دانشیار

مهندس موسی رضائی
دانشجوی دکتری

بخش مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس

چکیده

در این مقاله ارتعاشات غیر خطی سیم با دامنه زیاد مورد بررسی قرار گرفته است؛ کشش اولیه سیم، دامنه ارتعاش عرضی، قطر و مدول الاستیسیته سیم از عوامل عمده و تأثیر گذار بر فرکانسهای طبیعی سیم مرتعش هستند. با افزایش دامنه ارتعاش عرضی، فرض ثابت بودن مقدار نیروی کششی سیم، اعتبار خود را از دست می دهد بنابراین معادلات کلاسیك ارتعاشات سیم با دامنه کم در این مورد صادق نخواهند بود. از طرف دیگر هر چه قطر سیم بزرگتر باشد (به عبارت بهتر، هر چه سفتی خمشی سیم، EI، بیشتر باشد) نمی توان اثرات گشتاور خمشی را که به صورت عامل بازگرداننده سیم به وضعیت تغییر شکل نیافته، عمل می کنند نادیده گرفت.

در این مقاله، معادله غیر خطی حاکم بر ارتعاشات عرضی با دامنه زیاد سیم با در نظر گرفتن اثر گشتاورهای خمشی، استخراج شده است که بخش زمانی آن دارای فرم معادله Duffing می باشد. سپس معادله حاصل با استفاده از تئوری اغتشاشات حل شده است. اثرات متقابل عوامل مؤثر بر فرکانس های طبیعی، مورد بررسی قرار گرفته است و نتایج حاصل در نمودارهایی منعکس شده اند. میزان تغییرات فرکانسهای طبیعی ارتعاشات عرضی سیم، با در نظر گرفتن عوامل غیر خطی و فرکانس های طبیعی ارتعاشات خطی سیم و نخ با هم مقایسه شده اند.

کلمات کلیدی

ارتعاشات غیر خطی، سیم، نخ، تئوری اغتشاشات، گشتاور خمشی

Application of Perturbation Theory to the Non-linear Vibration Analysis of a String Including the Bending Moment Effects

S. Esmaeilzadeh Khadem
Associate Professor

M. Rezaee
Ph.D. Student

Mechanical Engineering Department,
Tarbiat Modarres University

Abstract

In this paper the large amplitude and non - linear vibration of a string is considered. The initial tension, lateral vibration amplitude, diameter and the modulus of elasticity of the string have main effects on its natural frequencies. Increasing the lateral vibration amplitude makes the assumption of constant initial tension invalid. In this case, therefore, it is impossible to use the classical equation of string with small amplitude transverse motion assumption. On the other hand, by increasing the string diameter, the bending moment effect will increase dramatically, and acts as an impressive restoring moment.

Considering the effects of the bending moments, the nonlinear equation governing the large amplitude transverse vibration of a string is derived. The time dependent portion of the governing equation has the from of Duffing equation. This equation is solved using the perturbation theory. The results of the analysis are shown in appropriate graphs, and the natural frequencies of the string due to the non-linear factors are compared with the natural frequencies of the linear vibration of a string without bending moment effects.

Keywords

Non- linear vibration, wire, string, perturbation theory, Bending Moment.

مقدمه

مسأله بررسی ارتعاش آزاد عرضی نخ با دامنهٔ کوچک و کشش اولیهٔ زیاد به بیش از دویست سال پیش برمی گردد و بررسی ارتعاشات غیر خطی نخ اولین بار توسط Kirchhoff در سال ۱۸۷۶ صورت گرفت. محققین دیگری نیز با روش های متعددی ارتعاشات نخ تحت شرایط مرزی و بارگذاری های مختلف را مورد مطالعه قرار داده اند، ولی در همهٔ مقالات ارائه شده از تأثیر گشتاورهای خمشی صرفنظر شده است. برای مثال Carrier [۱و۲] حرکت ارتعاشی نخ را به صورت ترکیبی از حرکت عرضی و طولی در نظر گرفته و دو معادله حرکت را در دو جهت یاد شده و بدون در نظر گرفتن اثر گشتاورهای خمشی، بد ست آورده است.

اخیراً Leissa و Saad [۳] نیز تحقیقی در زمینهٔ ارتعاشات نخ با دامنهٔ زیاد انجام داده اند که حاصل این تحقیق منجر به دو معادلهٔ دیفرانسیل غیر خطی همزمان شده که با روش گالرکین حل شده است. حل معادلات اخیر تعیین کنندهٔ ارتعاشات عرضی و طولی نخ در بعد مکان و زمان می باشد. به منظور بررسی صحت روش یاد شده، جواب های بدست آمده از روش گالرکین با جواب های بدست آمده از روش تفاضلات متناهی (finite difference) مقایسه شده است. نتایج عددی مقاله در مورد نخی که به طور عرضی به یک نیم موج سینوسی تغییر مکان می یابد و از حالت سکون رها می شود برای سه حالت مختلف از نظر تغییر مکان عرضی و تغییر مکان نسبی طولی نخ اعمال شده است. در این مقاله نیز تأثیر گشتاورهای خمشی در نظر گر فته نشده است.

Zhu و همکارانش [۴] ارتعاشات بالونی نخ را مورد بررسی قرار داده اند. در مقالهٔ یاد شده پاسخ دینامیکی غیر خطی نخ که در یک مرز ثابت بوده و در مرز دیگر تحت حرکت دایره ای و با سرعت ثابت می باشد، مورد مطالعه قرار گرفته است.

Tan و Ying [۵] رفتار ارتعاشی نخ با حرکت محوری را بررسی کرده اند. در این مقاله یک روش حل برای پاسخ خطی و عرضی نخ با حرکت محوری ارائه شده است. روش حل مورد نظر در حوزهٔ فرکانس استخراج شده و بر حسب توابع انتشار موج تفسیر شده است. در این مقاله نیز اثر خمشی در نظر گرفته نشده است.

Zhu و همکارانش [۶] توزیع مجانبی مقادیر ویژهٔ نخ مقید با حرکت انتقالی را با استفاده از یک روش جدید آنالیز طیفی مورد مطالعه قرار داده اند. قید به صورت یک سیستم جرم - فنر - دمپر که در یک موقعیت دلخواه در طول نخ قرار دارد مدل شده است. حل های مجانبی برای مقادیر ویژه از معادله مشخصهٔ سیستم نخ و قید و برای پارامترها مختلف قید تعیین می شود.

Xiong و Hutton [۷] ارتعاشات با دامنهٔ کم نخی را که دارای حرکت دایره ای مقید شده توسط فنرهای نقطه ای و توزیع شده می باشد مورد مطالعه قرار داده اند. معادلهٔ حاکم و شرایط مرزی مسأله با استفاده از اصل هامیلتون استخراج شده و حل تحلیلی برای ارتعاشات آزاد و چند حالت خاص مورد بحث قرار گرفته است.

Terumichi و همکارانش [۸] نیز تحقیقی در زمینهٔ ارتعاشات ناپایای نخ که دارای طول متغیر با زمان بوده و یک سیستم جرم و فنر به انتهای پائینی آن متصل شده است انجام داده اند. در این تحقیق نخ به صورت آویزان در نظر گرفته شده است و انتهای فوقانی آن توسط تغییر مکان افقی سینوسی تحریک می شود.

در زمینهٔ اندازه گیری و کنترل ارتعاشات نخ نیز تحقیقاتی صورت گرفته است. در مقاله ای که Achkire و همکارانش [۹] ارائه داده اند، یک روش اندازه گیری غیر تماسی را برای ارتعاش عرضی کابل و نخ با استفاده از یک سنسور آنالوگ ردیاب موقیعیت شرح داده اند.

Fung و همکارانش [۱۰] کنترل ارتعاشات نخ را با استفاده از روش VSC (Variable Structure Control) بررسی کرده اند. نخ مورد مطالعه در این تحقیق دارای حرکت محوری می باشد و هدف این مقاله محدود کردن ارتعاشات نخ در یک مدت کوتاه ذکر شده است.

در همه تحقیقات ذکر شده، تئوری کلاسیک ارتعاشات نخ و یا تئوری های ارتعاشات غیر خطی نخ بکار برده شده و از اثر مقاومت خمشی صرفنظر شده است و برای حل معادلات حاصل که با در نظر گرفتن شرایط مرزی و اعمال قیدهای حاکم بر مسأله بدست می آیند عمدتاً از روش های عددی استفاده شده است.

هدف اصلی این مقاله بررسی ارتعاشات غیر خطی نخ با دامنه زیاد می باشد که تأثیر مقاومت خمشی نیز در آن لحاظ شده است. به منظور اجتناب از تکرار عبارت طولانی «ارتعاشات غیر خطی نخ با دامنهٔ زیاد و با در نظر گرفتن اثر مقاومت خمشی» از عبارت «ارتعاشات غیر خطی سیم» استفاده خواهد شد. بر این اساس، در مقاله حاضر معادلهٔ حاکم بر ارتعاشات غیر خطی سیم با دامنهٔ زیاد استخراج شده و مورد تحلیل قرار گرفته است. نتایج حاصل از تحلیل به صورت منحنی هایی نشان داده شده است. پارامترهای مهم در ارتعاشات غیر خطی سیم، از جمله تأثیر افزایش دامنهٔ ارتعاش، افزایش قطر سیم و افزایش کشش اولیهٔ سیم بر فرکانس های طبیعی مورد بررسی قرار گرفته اند و نتایج

بدست آمده از تحلیل ارتعاشات غیر خطی سیم، با سه تئوری؛ تئوری کلاسیک ارتعاشات نخ، ارتعاشات غیر خطی نخ و ارتعاشات خطی سیم مقایسه شده است.

۱- استخراج معادلهٔ حاکم بر ارتعاشات سیم با دامنهٔ زیاد

فرضیاتی که در تئوری کلاسیک ارتعاشات نخ در نظر گرفته می شوند بدین صورت هستند:

۱- حرکت نخ صرفاً عرضی بوده و در یک صفحه صورت می گیرد.

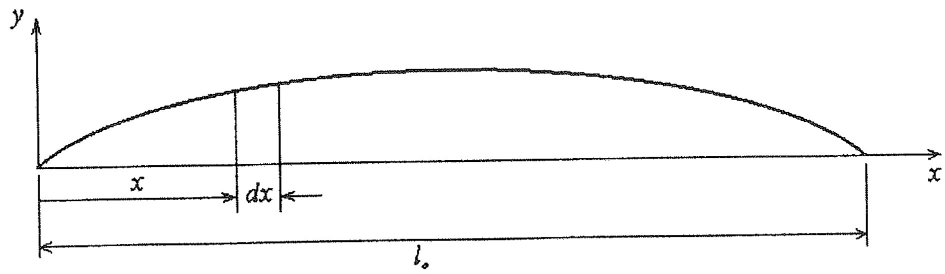
۲- کشش اولیهٔ نخ در حالت تعادل استاتیکی زیاد بوده و تغییر مکان عرضی در حین ارتعاش، کوچک می باشد بنابراین می توان فرض کرد که در حین ارتعاش نخ، نیروی کشش ثابت باقی می ماند.

۳- شیب نخ در تمام نقاط در حین ارتعاش، کوچک می باشد.

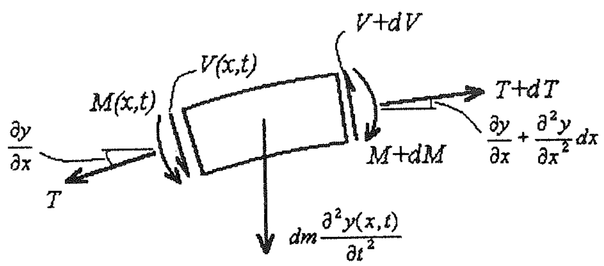
۴- جرم واحد طول نخ در حین ارتعاش ثابت است.

۵- مقاومت خمشی نخ قابل صرفنظر کردن می باشد.

بر اساس فرضیات اخیر، معادلهٔ حاکم بر ارتعاش عرضی نخ منجر به معادلهٔ موج یک بعدی می شود که برای حل آن می توان به مراجع متعددی از جمله مرجع [۱۱] مراجعه کرد. اگر دامنهٔ ارتعاش نخ بیشتر شود، فرض دوم اعتبار خود را از دست می دهد و فرض ثابت بودن کشش نخ در حین ارتعاش، صادق نخواهد بود که در چنین حالتی مسألهٔ ارتعاشات غیر خطی نخ مطرح می شود. در تئوری کلاسیک ارتعاشات نخ و یا در تئوری ارتعاشات غیر خطی نخ، از مقاومت خمشی صرفنظر می شود؛ حال اگر ارتعاشات سیم مدنظر باشد، فرض پنجم صادق نخواهد بود از طرف دیگر با افزایش دامنهٔ ارتعاش و قطر سیم، فرض های دوم و پنجم کاملاً مردود خواهند بود بنابراین در چنین مواردی تئوری کلاسیک ارتعاشات نخ و یا ارتعاشات غیر خطی نخ معتبر نخواهند بود لذا اولین گام برای بررسی این مسألهٔ، استخراج معادلهٔ حاکم بر ارتعاشات غیر خطی سیم می باشد. بدین منظور مطابق شکل (۱)، المانی از سیم به طول dx را در نظر می گیریم. نیروها و گشتاورهای وارد شده بر این المان، در شکل (۱- ب) نشان داده شده اند.



(الف)



(ب)

شکل (۱) نیروها و گشتاورهای وارد شده بر المانی از سیم در حال ارتعاش.

با توجه به اینکه همهٔ نیروها کانسرواتیو هستند لذا اصل هامیلتون به صورت زیر در می آید [۱۲]:

$$\delta \int_{t_1}^{t_1} (K - V)\, dt = 0 \qquad (۱)$$

در رابطهٔ اخیر k انرژی جنبشی و V انرژی پتانسیل سیستم است، با توجه به اینکه ارتعاشات عرضی مورد نظر است بنابراین انرژی جنبشی سیستم را می توان به صورت زیر بدست آورد:

$$dK\,(t) = \frac{1}{2}\, dm \left(\frac{\partial y\,(x,t)}{\partial t}\right)^2 \qquad (۲)$$

که در آن dm جرم المان می باشد، اگر جرم واحد طول سیم را با $\rho\,(x)$ که تابعی از x می باشد در نظر بگیریم خواهیم داشت:

$$K\,(t) = \frac{1}{2} \int_0^{l_0} \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 \rho\,(x)\, dx \qquad (۳)$$

انرژی پتانسیل ذخیره شده در سیم در اثر سه عامل وجود کشش اولیهٔ سیم، افزایش نیروی کشش ناشی از اضافه طول سیم در اثر منحرف شدن از وضعیت تعادل و انرژی پتانسیل ذخیره شده در اثر پدیدهٔ خمش می باشد. حال انرژی ذخیره شده در سیم در اثر هر یک از عوامل ذکر شده را به طور جداگانه بدست می آوریم؛ چنانکه بیان شد در ارتعاشات با دامنهٔ زیاد، نمی توان نیروی کششی سیم را ثابت فرض کرد چرا که در اثر خارج شدن سیم از وضعیت تعادل خود، طول آن از مقدار اولیهٔ l_0 به l افزایش می یابد و نیروی کشش، از مقدار اولیهٔ T_0 به T می رسد، اگر جنس سیم دارای خاصیت الاستیک خطی بوده و از قانون هوک تبعیت کند نیروی کشش سیم در هر لحظه را می توان به صورت رابطهٔ (۴) بیان کرد:

$$T\,(t) = T_0 + \frac{EA}{l_0}\, \Delta l_0\,(t) \qquad (۴)$$

که در آن E مدول الاستیسیته، A سطح مقطع سیم و $\Delta l_0(t)$ تغییر طول سیم از حالت اولیه (l_0) در زمان t می باشد.
اگر تابع خیز در زمان t را با y(x,t) نشان دهیم، مقدار تغییر طول سیم در زمان t به صورت زیر قابل محاسبه خواهد بود:

$$\Delta l_0\,(t) = \int_0^{l_0} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y\,(x,t)}{\partial x}\right)^2}\, dx - l_0 \qquad (۵)$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$T\,(t) = T_0 + \frac{EA}{l_0} \left[\int_0^{l_0} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y\,(x,t)}{\partial x}\right)^2}\, dx - l_0\right] \qquad (۶)$$

با استفاده از رابطهٔ (۶) و با توجه به ثابت بودن نیروی کشش اولیه T_0، انرژی پتانسیل ذخیره شده در سیم (در اثر نیروی کشش اولیه و تغییرات کشش ناشی از تغییر طول سیم) را می توان به صورت زیر بیان کرد:

$$d\,V_T\,(t) = \left\{T_0 + \frac{1}{2}\,\frac{EA}{l_0}\left[\int_0^{l_0} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}\, dx - l_0\right]\right\} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}\, dx - dx\right) \qquad (۷)$$

با انتگرال گیری از رابطهٔ اخیر در طول سیم و بسط عبارت زیر رادیکال، انرژی پتانسیل ناشی از کشش سیم به صورت زیر در می آید:

$$V_T\,(t) = \frac{1}{2}\left[T_0 + \frac{EA}{2l_0} \int_0^{l_0} \frac{1}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 dx\right] \int_0^{l_0} \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 dx \qquad (۸)$$

از طرفی انرژی پتانسیل ذخیره شده در سیم در اثر گشتاورهای خمشی را می توان به صورت زیر محاسبه کرد [۱۳]:

$$V_B\,(t) = \frac{1}{2} \int_0^{l_0} EI\,(x) \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^2 dx \qquad (۹)$$

با قرار دادن $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ روابط (۳)، (۸) و (۹) در رابطهٔ (۱) و بعد از ساده کردن خواهیم داشت:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_0^{l_0} \rho\,(x)\, \frac{\partial y}{\partial x}\, \delta\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) dx - \left[T_0 + \frac{EA}{2l_0} \int_0^{l_0} \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 dx\right] \int_0^{l_0} \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) \delta\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) dx - \int_0^{l_0} EI\,(x) \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right) \delta\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right) dx \right\} dt = 0 \qquad (۱۰)$$

با بکار بردن روش حساب تغییرات و انتگرال جزء به جزء و با فرض ثابت بودن دو انتهای سیم، معادلهٔ حاکم بر ارتعاشات غیر خطی سیم همراه با شرایط مرزی به صورت زیر بدست

می‌آیند:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\left[\rho(x)\dfrac{\partial y}{\partial t}\right] - \left[T_0 + \dfrac{EA}{2l_0}\displaystyle\int_0^{l_0}\left(\dfrac{\partial y}{\partial x}\right)^2 dx\right]\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\left[EI(x)\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right] = 0 \\ EI(x)\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}\,\delta\left(\dfrac{\partial y}{\partial x}\right)\Big|_0^{l_0} = 0 \end{cases}$$

(۱۱)

حال اگر سیم را با یک جنس و سطح مقطع ثابت در نظر بگیریم معادلهٔ حاکم بر ارتعاشات سیم با دامنهٔ زیاد و شرایط مرزی به صورت زیر خواهند بود:

$$\begin{cases} EI\dfrac{\partial^4 y}{\partial x^4} - \left[T_0 + \dfrac{EA}{2l_0}\displaystyle\int_0^{l_0}\left(\dfrac{\partial y}{\partial x}\right)^2 dx\right]\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \rho\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \\ EI\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}\,\delta\left(\dfrac{\partial y}{\partial x}\right)\Big|_{x=0,\ x=l_0} = 0 \end{cases}$$

(۱۲ ـ الف و ب)

۲ـ حل معادلهٔ حاکم

برای حل معادلهٔ (۱۲ ـ الف) همراه با ارضاء شرایط (۱۲ـب)؛ مشاهده می شود که در معادلهٔ دیفرانسیل (۱۲ـ ب) ضریب ترم تابعی از y می باشد و این معادله تنها زمانی جداپذیر است که جواب $y(x, t)$ به صورت زیر در نظر گرفته شود:

$$y(x,t) = G(t)\, c \sin \beta_r x \qquad (۱۳)$$

در رابطهٔ اخیر c و β_r ضرائب ثابتی هستند.
مشاهده می شود که در نظر گرفتن جواب معادلهٔ (۱۲ـ الف) به شکل رابطهٔ (۱۳) موجب جداپذیر شدن معادلهٔ (۱۲ـ الف) می شود و از طرف دیگر بخش مکانی رابطهٔ (۱۳) یعنی $y(x)=c \sin \beta_r x$ بایستی شرایط مرزی (۱۲ـ ب) را ارضاء کند؛ روشن است که شرط مرزی در موقعیت $x=0$ به طور اتوماتیک ارضاء می شود و در مورد شرط مرزی در $x=l_0$ داریم:

$$-EIc\,\beta_r^2 \sin \beta_r l_0 = 0 \qquad (۱۴)$$

در معادلهٔ فوق زمانی جوابهای غیر صفر برای β_r قابل حصول است که داشته باشیم:

$$\beta_r = \frac{r\pi}{l_0}\ ,\ r = 1, 2, \ldots \qquad (۱۵)$$

بنابراین می توان گفت که رابطهٔ (۱۳) زمانی حل معادلهٔ (۱۲ـالف) است که نوع تکیه گاه های سیم در دو انتها از نوع تکیه گاه ساده باشند و همین امر یکی از موارد متمایز کنندهٔ مسأله حاضر از مسألهٔ ارتعاشات عرضی نخ می باشد که در آن از اثر گشتاورهای خمشی صرفنظر می شود.
با قرار دادن رابطهٔ (۱۳) در معادلهٔ (۱۲ـ الف) خواهیم داشت:

$$EIcG(t)\,\beta_r^4\, x \sin \beta_r x - \left[T_0 + \frac{EA}{2l_0}\left(\frac{1}{2} G^2(t)\, c^2\, \beta_r^2\, l_0\right)\right]$$

$$\left[-\beta_r^2\, c\, G(t) \sin \beta_r x\right] + \rho\, c \sin \beta_r x\ \ddot{G}(t) = 0 \qquad (۱۶)$$

با تقسیم رابطهٔ اخیر بر $c \sin \beta_r x$ و مرتب کردن معادلهٔ حاصل، خواهیم داشت:

$$\ddot{G}(t) + \frac{EA\, c^2\, \beta_r^4}{4\rho} G^3(t) + \beta_r^2\left(\frac{T_0 + EI\,\beta_r^2}{\rho}\right) G(t) = 0$$

(۱۷)

۲ـ۱ـ استفاده از تئوری اغتشاشات برای حل معادلهٔ (۱۷)

معادلهٔ (۱۷) که بخش زمانی و جدا شده از معادلهٔ (۱۲ـ الف) است یک معادلهٔ غیر خطی است و مناسبترین روش حل آن استفاده از تئوری اغتشاشات می باشد ولی به صورت حاضر با این روش قابل حل نیست چرا که ضریب ترم غیر خطی عدد بزرگی می باشد لذا در معادلهٔ (۱۷) تغییر متغیری به صورت رابطهٔ (۱۸) در نظر می گیریم:

$$\frac{T_0 + EI\,\beta_r^2}{\rho}\, G_r(t) = g_r(t) \qquad (۱۸)$$

حال معادلهٔ (۱۷) بعد از ساده سازی بر حسب متغیر جدید $g_r(t)$ به صورت زیر در می آید:

$$\ddot{g}_r(t) + \frac{EA\,\rho\, c^2\, \beta_r^4}{4(T_0 + EI\,\beta_r^2)^2}\, g_r^3(t) +$$

$$\beta_r^2\left(\frac{T_0 + EI\,\beta_r^2}{\rho}\right) g_r(t) = 0,\ r = 1, 2, \ldots \qquad (۱۹)$$

با توجه به اینکه ضرائب معادلهٔ (۱۹) به ازای هر r دارای مقادیر معینی هستند لذا جوابهای جداگانه ای برای $g(t)$ متناظر با هر r بدست می آید، بنابراین توابع یاد شده به صورت $g_r(t)$ نشان داده شده اند. اگر ضرائب $g_r(t)$ و $g_r^3(t)$ را به ترتیب با p_r و ε_r نشان دهیم خواهیم داشت:

$$\ddot{g}_r(t) + \varepsilon_r\, g_r^3(t) + p_r\, g_r(t) = 0 \qquad (۲۰)$$

اگر مقطع سیم را دایره ای به قطر D و جرم حجمی جنس سیم را با ρ_v و تغییر طول اولیهٔ سیم (l_0 منهای طول آزاد سیم) را با Δ نشان دهیم، ضرائب p_r و ε_r در معادلهٔ (۲۰) به صورت زیر قابل محاسبه خواهند بود:

$$p_r = \frac{Er^2\pi^2}{\rho_v l_0^4}\left[l_0\,\Delta + \left(\frac{r\pi D}{4}\right)^2\right] \qquad \text{(۲۱-الف)}$$

$$\varepsilon_r = \frac{\rho_v c^2 (r\pi)^4}{4\, l_0^4\, E\left[\frac{\Delta}{l_0} + \left(\frac{r\pi D}{4 l_0}\right)^2\right]^2} \qquad \text{(۲۱-ب)}$$

اگر در معادلهٔ (۲۰) از ترم غیر خطی صرفنظر کنیم به وضوح قابل مشاهده است که p_r برابر با مجذور فرکانس طبیعی مد rام ارتعاشات خطی (ω_{or}) می باشد یعنی:

$$p_r = (\omega_0 r)^2 \qquad \text{(۲۲)}$$

معادلهٔ غیر خطی (۲۰) به معادلهٔ Duffing معروف می باشد که برای حل آن می توان از تکنیک های ارائه شده در مراجعی مانند [۱۴] و [۱۵] سود جست.

اگر فرض کنیم که سیم در زمان t=0 از حالت اولیه با شکل موج سینوسی و دامنهٔ c به صورت $Y_r(x) = c\sin\beta_r x$ و سرعت اولیهٔ صفر رها شود در آن صورت می توان نوشت:

$$y_r(x,t) = G_r(t)\, c \sin\beta_r x$$

$$\begin{cases} y_r(x,t)\Big|_{t=0} = c\sin\beta_r x & \Rightarrow G_r(0) = 1 \\ \dot{y}_r(x,t)\Big|_{t=0} = 0 & \Rightarrow \dot{G}_r(0) = 0 \end{cases}$$

(۲۳-الف و ب)

با توجه به شرایط اولیهٔ فوق و رابطهٔ (۱۸) خواهیم داشت:

$$\begin{cases} g_r(0) = \dfrac{T_0 + EI\beta_r^2}{\rho} \\ \dot{g}_r(0) = 0 \end{cases} \qquad \text{(۲۴-الف و ب)}$$

در رابطهٔ (۲۰)، p_r و ε_r ضرائبی هستند که همواره مثبت می باشند و از طرف دیگر ε_r پارامتر کوچکی می باشد که اثرات غیر خطی بودن را در معادله وارد می کند لذا می توان در هر مد ارتعاشی جواب $g_r(t)$ و فرکانس طبیعی ارتعاشات غیر خطی مربوط به همان مد را (ω_r) به صورت سری هایی از توان های صعودی ε_r به صورت زیر بسط داد:

$$\begin{cases} g_r(t) = g_{0r}(t) + \varepsilon_r g_{1r}(t) + \varepsilon_r^2 g_{2r}(t) + \ldots \\ \omega_r^2 = \omega_{0r}^2 + \varepsilon_r\alpha_1 + \varepsilon_r^2\alpha_2 + \ldots \end{cases}$$

(۲۵و۲۶)

در روابط (۲۵) و (۲۶)، $g_{ir}(t)$ و α_i مجهول می باشند.

اگر $g_r(t)$ و ω_r^2 را تا دو جمله بسط دهیم و در معادلهٔ (۲۰) قرار دهیم خواهیم داشت:

$$\ddot{g}_{or}(t) + \varepsilon_r \ddot{g}_{1r}(t) + \varepsilon_r(g_{or}^3 + 3\varepsilon_r g_{or}^2 g_{1r} + \ldots) + (\omega_r^2 - \varepsilon_r\alpha_1)(g_{or} + \varepsilon_r g_{1r}) = 0 \qquad \text{(۲۷)}$$

با مساوی صفر قرار دادن ضرائب توان های مختلف ε_r، به مجموعه معادلات زیر می رسیم:

$$\ddot{g}_{or} + \omega_r^2 g_{or} = 0 \qquad \text{(۲۸-الف)}$$

$$\ddot{g}_{1r}(t) + \omega_r^2 g_{1r} = \alpha_1 g_{1r} - g_{or}^3 \qquad \text{(۲۸-ب)}$$

با اعمال شرایط اولیه و حل معادلات اخیر خواهیم داشت:

$$g_{or}(t) = \frac{T_0 + EI\beta_r^2}{\rho}\cos\omega_r t \qquad \text{(۲۹)}$$

$$g_{1r}(t) = \frac{(T_0 + EI\beta_r^2)^3}{32\rho^3\omega_r^2}(\cos 3\omega_r t - \cos\omega_r t) \qquad \text{(۳۰)}$$

$$\alpha_1 = \frac{3}{4}\left(\frac{T_0 + EI\beta_r^2}{\rho}\right)^2 \qquad \text{(۳۱)}$$

با قرار دادن روابط (۲۹) و (۳۰) در معادلهٔ (۲۵) و با استفاده از تغییر متغیر (۱۸) خواهیم داشت:

$$g_r(t) = \frac{T_0 + EI\beta_r^2}{\rho}\cos\omega_r t + \frac{\varepsilon_r(T_0 + EI\beta_r^2)^3}{32\rho^3\omega_r^2}(\cos 3\omega_r t - \cos\omega_r t)$$

(۳۲-الف)

$$G_r(t) = \cos\omega_r t + \frac{\varepsilon_r p_r^2 l_0^4}{32\,\omega_r^2 (r\pi)^4}(\cos 3\omega_r t - \cos\omega_r t)$$

(۳۲-ب)

بنابراین جواب $y_r(x,t)$ به صورت رابطهٔ (۳۳) خواهد بود:

$$y_r(x,t) = c \sin\frac{r\pi x}{l_0}\left\{\cos\omega_r t + \frac{\varepsilon_r p_r^2 l_0^4}{32\omega_r^2 (r\pi)^4}(\cos 3\omega_r t - \cos\omega_r t)\right\} \qquad (۳۳)$$

با قرار دادن رابطه (۳۱) در (۲۶)، فرکانس های طبیعی زاویه های ارتعاشات غیر خطی سیم به صورت زیر بدست می آید:

$$\omega_r^2 = (\omega_{or})^2 + \frac{3\varepsilon_r}{4}\left(\frac{T_0 + EI\,\beta_r^2}{\rho}\right)^2$$

$$= p_r + \frac{3\varepsilon_r p_r^2 l_0^4}{4(r\pi)^4} \qquad (۳۴)$$

بنابراین فرکانس طبیعی ارتعاشات غیر خطی سیم در مد rام بر حسب هرتز به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$f_r = \frac{1}{2\pi}\sqrt{p_r + \frac{3\varepsilon_r p_r^2 l_0^4}{4(r\pi)^4}} \qquad (۳۵)$$

در روابط اخیر ε_r و p_r از روابط (۲۱-الف) و (۲۱-ب) بدست می آیند.

۳- بررسی نتایج بدست آمده از تحلیل ارتعاشی سیم کشیده با دامنهٔ زیاد و مقایسهٔ آن با تئوری های ارتعاشات خطی و غیر خطی نخ و ارتعاشات خطی سیم

روابط (۳۳) و (۳۵) به ترتیب بیان کنندهٔ حرکت ارتعاشی سیم با دامنهٔ زیاد و فرکانس طبیعی آن در مد rام هستند. دو رابطهٔ اخیر با در نظر گرفتن اثرات خمش و افزایش دامنهٔ ارتعاش که موجب غیر خطی شدن معادلهٔ حاکم می شود بدست آمده اند، بنابراین با ساده کردن آنها می توان به نتایج تئوری کلاسیک ارتعاشات نخ، ارتعاشات غیر خطی نخ و ارتعاشات خطی سیم کشیده نیز دست یافت؛ اگر ضریب ترم غیر خطی یعنی ε_r را برابر صفر قرار دهیم نتایج بدست آمده بیان کنندهٔ رفتار ارتعاشات خطی سیم کشیده خواهد بود و اگر اثر خمش را نادیده بگیریم ($EI \approx 0$)، در آن صورت رفتار ارتعاشات غیر خطی نخ حاصل می شود و در نهایت اگر از اثرات هر دو عامل ذکر شده صرفنظر کنیم به معادلات کلاسیک ارتعاشات نخ می رسیم.

در شکل (۲) تأثیر افزایش دامنهٔ ارتعاش بر میزان غیر خطی بودن ارتعاشات سیم در مد سوم نشان داده شده است و رفتار آن با تئوری های مختلف (تئوری کلاسیک ارتعاشات نخ، ارتعاشات خطی سیم و ارتعاشات غیر خطی نخ) مقایسه شده است. در اینجا سیم از جنس فولاد ($\rho_v = 7860\ \mathrm{kg/m^3}$, $E = 210\ \mathrm{GPa}$) با قطر $D=5\mathrm{mm}$ و طول آن در حالت تعادل استاتیکی $l_0=1\mathrm{m}$ در نظر گرفته شده است، افزایش طول سیم (l_0 منهای طول آزاد سیم) $\Delta=0.2\ \mathrm{mm}$ فرض شده است. در شکل (۲-الف) به وضوح دیده می شود، که در حالتی که دامنهٔ ارتعاش کوچک باشد ($c=0.5\mathrm{mm}$) از اثرات غیر خطی می توان صرفنظر کرد، در چنین حالتی تئوری کلاسیک ارتعاشات نخ با ارتعاشات غیر خطی نخ و ارتعاشات غیر خطی سیم با ارتعاشات خطی سیم منطبق می باشند ولی با افزایش دامنهٔ ارتعاش، رفتار ظاهر شده در هر یک از چهار تئوری ذکر شده کاملاً متفاوت می باشند که این امر در شکل (۲-د) کاملاً مشهود است.

در شکل (۳) تأثیر افزایش دامنهٔ ارتعاش بر فرکانس های طبیعی در چهار مد اول بررسی شده است. در تمام مدهای ارتعاشی با افزایش دامنهٔ ارتعاش، فرکانس طبیعی بدست آمده از تئوری کلاسیک ارتعاشات نخ و ارتعاشات خطی سیم ثابت باقی می مانند در صورتیکه فرکانس های طبیعی بدست آمده از تئوری ارتعاشات غیر خطی نخ و ارتعاشات غیر خطی سیم افزایش می یابند، اختلاف در فرکانس های طبیعی بدست آمده از هر یک از چهار تئوری در هر دامنهٔ ارتعاشی معین، از اثرات غیر خطی افزایش دامنهٔ ارتعاش و اثرات گشتاورهای خمشی ناشی می شود.

در شکل (۴) تأثیر افزایش قطر بر فرکانس های طبیعی بدست آمده از چهار تئوری یاد شده را در مدهای مختلف با دامنهٔ ارتعاشی زیاد ($c=5\ \mathrm{mm}$) نشان می دهد. در اینجا نکتهٔ قابل توجه این است که در تمام مدهای ارتعاشی، زمانی که قطر کوچک باشد، تئوری کلاسیک ارتعاشات نخ با ارتعاشات خطی سیم، و ارتعاشات غیرخطی نخ با ارتعاشات غیر خطی سیم منطبق می شوند؛ این امر بیان می کند که اگر قطر سیم بسیار اندک باشد می توان از اثرات گشتاورهای خمشی در رفتار ارتعاشی سیم صرفنظر کرد ولی اگر قطر سیم زیاد باشد چنین فرضی به هیچ وجه قابل اعمال نیست.

در شکل (۵) تأثیر افزایش کشش اولیه (طول آزاد $- l_0 = \Delta$) بر فرکانس های طبیعی نخ و سیم در مدهای مختلف با دامنهٔ ارتعاشی $c=4\ \mathrm{mm}$ نشان داده شده است. در این شکل دیده می شود که تحت یک دامنهٔ ارتعاشی یکسان، با افزایش شمارهٔ مد ارتعاشی (r)، تئوری های مختلف اختلاف فاحشی از یکدیگر دارند و این امر ناشی از کشش اضافی و افزایش اثرات خمش در مدهای بالاتر می باشد؛ به عبارت دیگر در مدهای ارتعاشی بالاتر اثر غیر خطی بودن و اثر گشتاورهای خمشی

نیز افزایش می یابد.
نکته دیگری که از شکل (۵) بر می‌آید این است که بر اساس تئوری کلاسیک ارتعاشات نخ، فرکانس طبیعی نخ بدون کشش اولیه صفر است (یعنی نخ بدون کشش اولیه، قادر به ارتعاش نیست) در صورتیکه بر اساس سه تئوری دیگر، فرکانس طبیعی در حالت اخیر مخالف صفر می باشد یعنی نخ و سیم، حتی بدون کشش اولیه نیز مرتعش می شود و مطابق واقعیات فیزیکی است.

٤ـ نتیجه گیری و بحث

چنانکه از نتایج مقالهٔ حاضر بر می آید اثر گشتاورهای خمشی مهمترین عامل متمایز کنندهٔ رفتار ارتعاشی سیم از رفتار ارتعاشی نخ می باشد، در ارتعاشات سیم کشیده، افزون بر وجود نیروی کششی که تنها عامل بازگردانندهٔ نخ به حالت اولیه است گشتاورهای خمشی نیز به عنوان یک عامل بازگرداننده به حالت تعادل عمل می کنند. زمانی که قطر سیم و دامنهٔ ارتعاش سیم کوچک باشد با دقت قابل قبولی می توان از تئوری کلاسیک ارتعاشات خطی نخ برای مدل کردن رفتار ارتعاشات سیم استفاده کرد ولی با افزایش قطر سیم، اختلاف فاحشی در نتایج بدست آمده از تئوری کلاسیک ارتعاشات نخ و ارتعاشات غیر خطی سیم برای فرکانس های طبیعی ناشی می شود و با یک دامنهٔ ارتعاشی یکسان، در مدهای ارتعاشی بالاتر این اختلاف بیشتر و بیشتر می شود (شکل ۴).

عامل دیگری که بر فرکانس های طبیعی سیم مرتعش تأثیر می گذارد دامنهٔ ارتعاش سیم می باشد؛ افزایش دامنهٔ ارتعاش موجب افزایش ε_r (ضریب ترم غیر خطی) و در نهایت موجب افزایش فرکانس طبیعی سیم می شود. تأثیر افزایش دامنهٔ ارتعاشی در مدهای بالاتر بسیار محسوس می باشد. برای مثال، چنانکه از شکل (۳ ـ الف) معلوم می شود فرکانس طبیعی سیم فولادی به طول ۱ متر و قطر ۵ میلی متر با کشش اولیه ۲/۰ میلی متر در مد اول و دامنهٔ ارتعاشی ۵/۰ میلی متر در حدود ۳۸ هرتز می باشد (که تقریباً منطبق بر فرکانس طبیعی ارتعاشات خطی سیم است) در صورتی که فرکانس طبیعی همان سیم در مد ارتعاشی یکسان با دامنهٔ ۴/۵ میلی متر به ۴۱ هرتز افزایش می یابد. بنابراین در مد ارتعاشی اول، افزایش دامنهٔ ارتعاشی به اندازهٔ ۴ میلی متر، موجب افزایش فرکانس طبیعی سیم به اندازهٔ ۳ هرتز می شود. حال تأثیر افزایش دامنهٔ ارتعاش بر فرکانس طبیعی سیم با مشخصات ذکر شده در مد چهارم با دامنه ارتعاشی ۵/۰ میلی متر تقریباً ۲۲۲ هرتز می باشد در صورتی که فرکانس طبیعی سیم در همان مد و با دامنهٔ ارتعاشی ۴/۵ میلی متر به حدود ۳۳۵ هرتز افزایش می یابد که اختلاف بسیار زیادی با فرکانس طبیعی سیم با دامنهٔ کم دارد؛ بنابراین به هیچ عنوان نمی توان تأثیر افزایش دامنهٔ ارتعاشی و افزایش قطر سیم را در بدست آوردن فرکانس های طبیعی نادیده گرفت.

سومین عاملی که در فرکانس طبیعی سیم اثر می گذارد کشش اولیه سیم است؛ چنانکه از شکل (۵) بر می آید با افزایش کشش اولیه (Δ) نتایج بدست آمده از هر چهار تئوری برای فرکانس های طبیعی در تمام مدهای ارتعاشی دارای رفتار صعودی هستند و با افزایش کشش اولیه، اختلاف تئوری های اخیر کمتر می شود. البته برای اطمینان از باقی ماندن سیم در محدودهٔ الاستیک، لازم است که کرنش ناشی از مجموع کشش اولیه سیم و افزایش طول ناشی از منحرف شدن سیم از حالت تعادل استاتیکی در حین ارتعاش، به حد کافی از کرنش تسلیم کمتر باشد.

با یک دید کلی به تمام منحنی های رسم شده معلوم می شود که تئوری کلاسیک ارتعاشات خطی نخ و ارتعاشات غیر خطی سیم به ترتیب حد پائین و حد بالای چهار تئوری مورد بحث هستند و در بعضی موارد، اختلاف دو تئوری در بدست آوردن فرکانس های طبیعی بیش از ۱۰۰٪ می باشد (شکل های ۳ـ د، ۴ـ د و ۵ـ د) بنابراین تقریب فرکانس های طبیعی سیم مرتعش با دامنهٔ زیاد با استفاده از تئوری کلاسیک ارتعاشات خطی نخ و حتی ارتعاشات غیر خطی سیم مجاز نمی باشد.

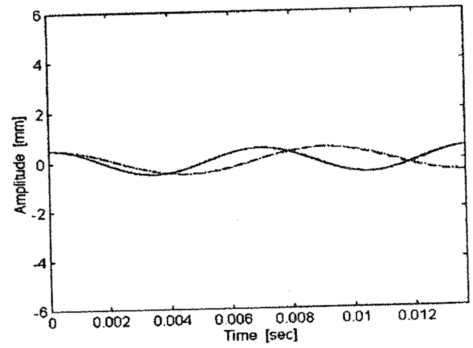
فهرست علائم و اختصارات

A	سطح مقطع
c	ضریب ثابت
D	قطر
E	مدول الاستیسیته
f_r	فرکانس طبیعی ارتعاشات غیر خطی سیم در مد rام بر حسب هرتز
$G_r(t)$	بخش زمانی جواب معادلهٔ حاکم
$g_r(t)$	تابع جدیدی از $G_r(t)$
I	ممان دوم سطح
K	انرژی جنبشی
l	طول بعد از تغییر شکل
l_0	طول اولیه
p_r	ضریب ترم $g_{r(t)}$
T	کشش بعد از تغییر شکل
T_0	کشش اولیه
V	انرژی پتانسیل
$V_B(t)$	انرژی پتانسیل ناشی از خمش

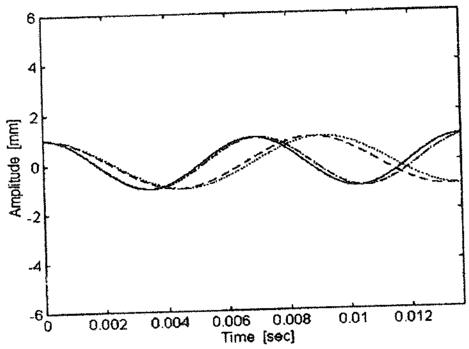
انرژی پتانسیل ناشی از کشش	$V_T(t)$	ضریب ترم $g_r^3(t)$	ε_r
بخش مکانی جواب معادلهٔ حاکم	$Y(x)$	جرم واحد طول سیم	ρ
پارامتر وابسته به فرکانس	β_r	جرم حجمی	ρ_v
تغییر طول اولیهٔ سیم	Δ	فرکانس طبیعی مد rام ارتعاشات غیر خطی	ω_r
تغییر طول از حالت اولیه	$\Delta l_0(t)$	فرکانس طبیعی مد rام ارتعاشات خطی	ω_{or}

$L_0 = 1$ [m] , $D = 5$ [mm] $E = 210$ [GPa]

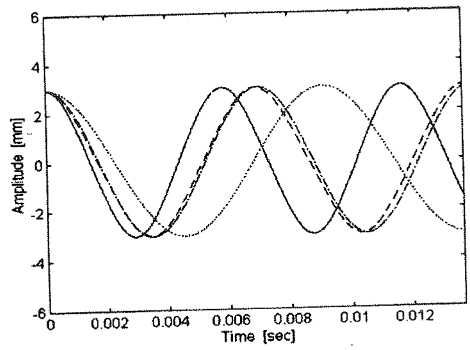
$\Delta = 0.2$ [mm] $\rho_v = 7860$ [kg/m^3]



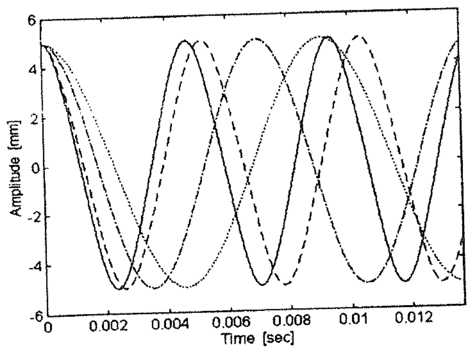
c = 0.5 [mm]   (الف)



c = 1 [mm]   (ب)



c = 3 [mm]   (ج)



c = 5 [mm]   (د)

.... ارتعاشات خطی نخ

-.-.-.-. ارتعاشات خطی سیم (اثر خمش)

- - - - ارتعاشات غیر خطی نخ

——— ارتعاشات غیر خطی سیم (اثر خمش و افزایش دامنهٔ ارتعاش)

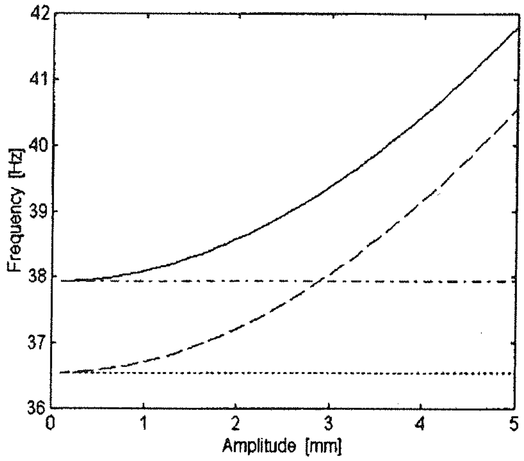
$l_0 = 1$[m], $D=5$[mm] $E = 210$ [GPa]

$\Delta = 0.2$[mm] $\rho_v = 7860$ [kg/m^3]

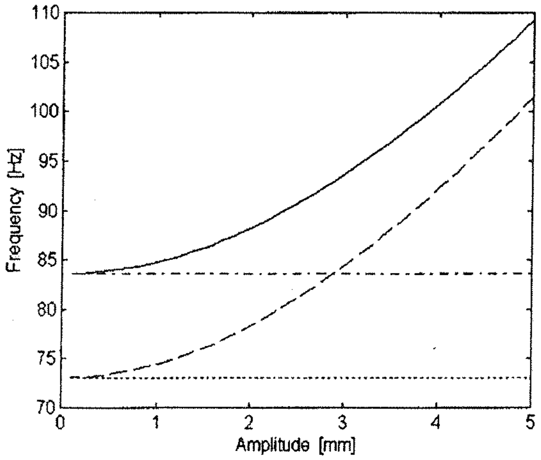
شکل (۲) تأثیر افزایش دامنه ارتعاش بر میزان غیر خطی بودن ارتعاشات سیم (مد سوم).

$E = 210$ [GPa] $\qquad L_0 = 1$ [m] , D=5 [mm]

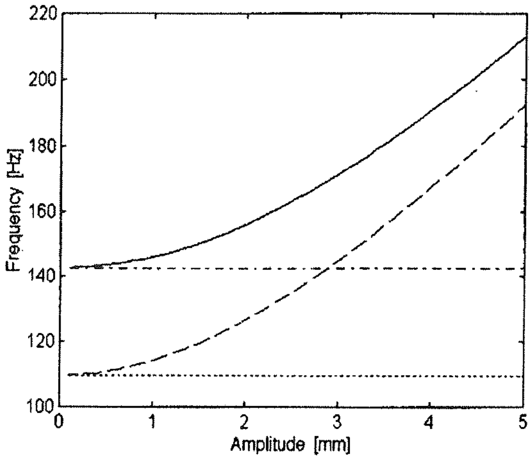
$\rho_v = 7860$ [kg/m^3] $\qquad \Delta = 0.2$ [mm]



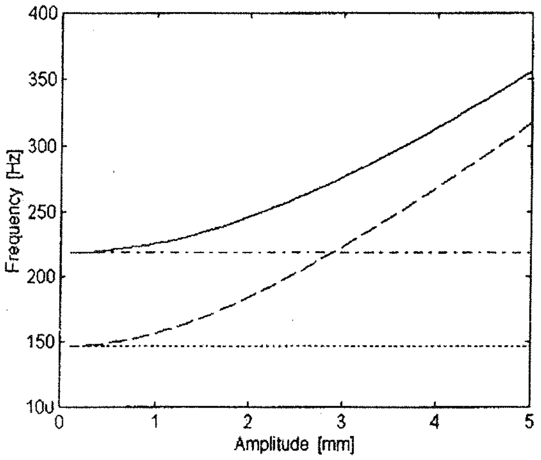
(الف) – مُد اول



(ب) – مُد دوم



(ج) – مُد سوم



(د) – مُد چهارم

.... ارتعاشات خطی نخ

-.-.-.- ارتعاشات خطی سیم (اثر خمش)

- - - - ارتعاشات غیر خطی نخ

——— ارتعاشات غیر خطی سیم (اثـر خمـش و افزایش دامنهٔ ارتعاش)

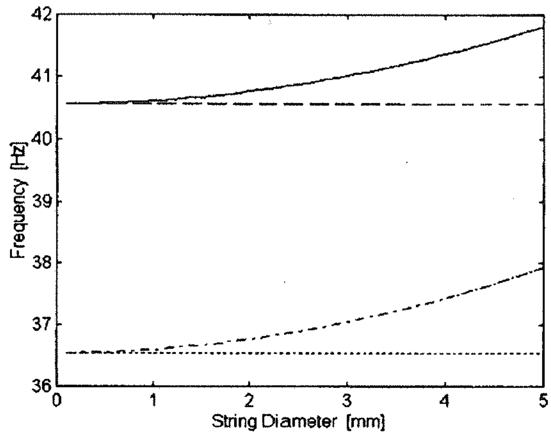
$E = 210$ [GPa] $\qquad l_0 = 1$[m], D=5[mm]

$\rho_v = 7860$ [kg/m^3] $\qquad \Delta = 0.2$[mm]

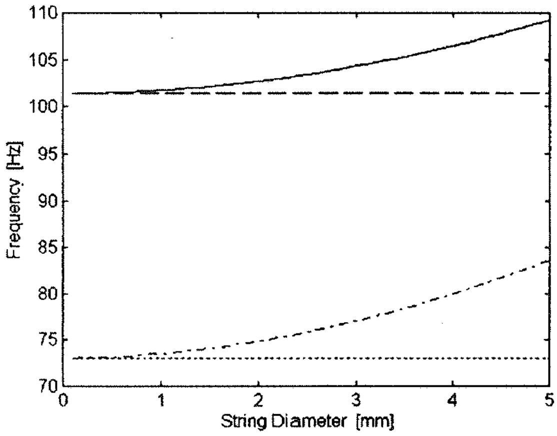
شکل (۳) تأثیر افزایش دامنه ارتعاش بر فرکانسهای طبیعی در مدهای مختلف.

$E = 210\ [GPa]$ $\quad L_0 = 1\ [m]\ ,\ c = 5\ [mm]$

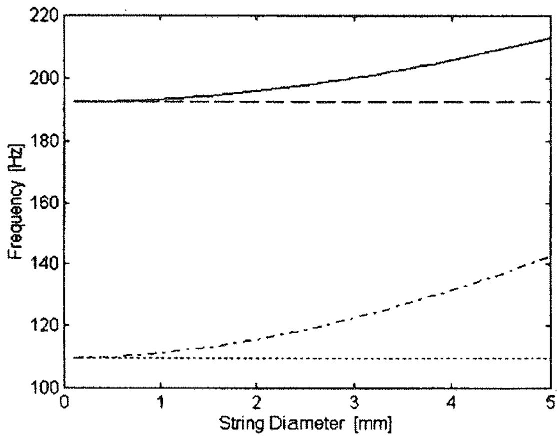
$\rho_v = 7860\ [kg/m^3]$ $\quad \Delta = 0.2\ [mm]$



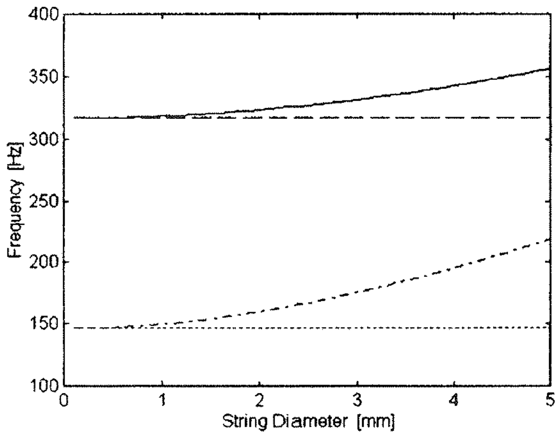
(الف) – مُد اول



(ب) – مُد دوم



(ج) – مُد سوم



(د) – مُد چهارم

.... ارتعاشات خطی نخ

- . - . - . ارتعاشات خطی سیم (اثر خمش)

- - - - ارتعاشات غیر خطی نخ

——— ارتعاشات غیر خطی سیم (اثر خمش و افزایش دامنهٔ ارتعاش)

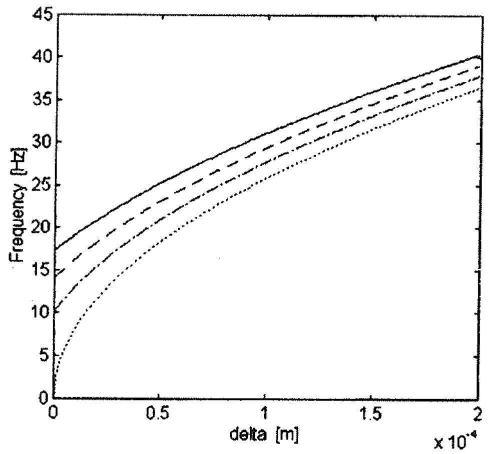
$E = 210\ [GPa]$ $\quad l_0 = 1[m],\ c=5[mm$

$\rho_v = 7860\ [kg/m^3]$ $\quad \Delta = 0.2[mm]$

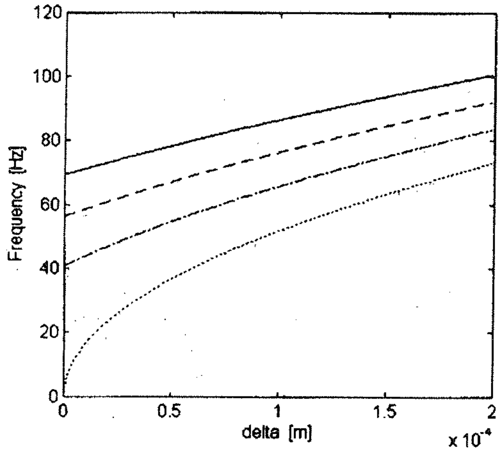
شکل (۴) تأثیر افزایش قطر بر فرکانسهای طبیعی.

$E = 210$ [GPa] $\quad L_0 = 1$ [m] , $D = 5$ [mm]

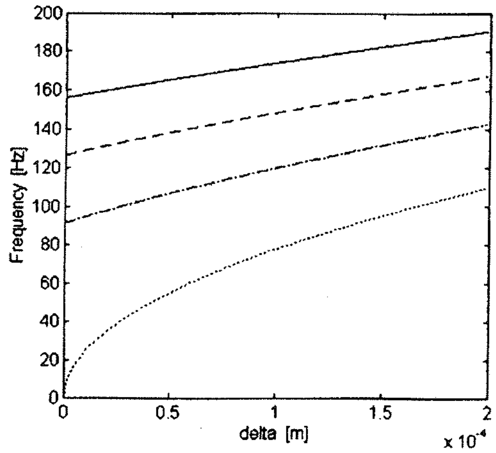
$\rho_v = 7860$ [kg/m^3] $\quad c = 4$ [mm]



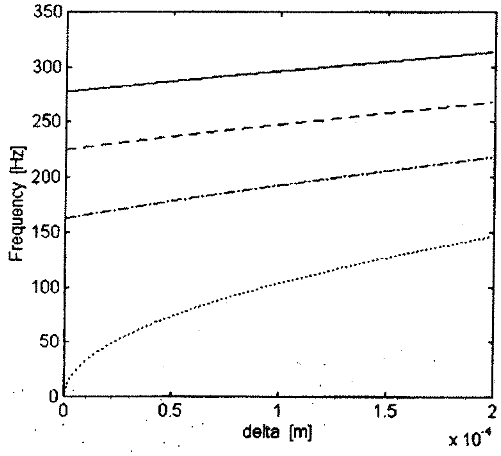
(الف) - مُد اول



(ب) - مُد دوم



(ج) - مُد سوم



(د) - مُد چهارم

.... ارتعاشات خطی نخ

-.-.-.- ارتعاشات خطی سیم (اثر خمش)

- - - - ارتعاشات غیر خطی نخ

——— ارتعاشات غیر خطی سیم (اثـر خمـش و افزایش دامنهٔ ارتعاش)

$E = 210$ [GPa] $\quad l_0 = 1$[m], D=5[mm]

$\rho_v = 7860$ [kg/m^3] $\quad c = 4$[mm]

شکل (۵) تأثیر افزایش کشش اولیه بر فرکانسهای طبیعی نخ و سیم در مدهای مختلف.

مراجع

[1] Carrier, G. F., ≤ On the Nonlinear Vibration Problem of the Elastic String, ≤ Quarterly of Applied Mathematics, Vol. 3, pp. 157-165, 1945.

[2] Carrier, G. F., ≤ A Note on the Vibrating String, ≤ Quarterly of Applied Mathematics, Vol.7,pp.97-101, 1946.

[3] Leissa, A. W. and Saad, A. M., ≤Large Amplitude Vibrations of Strings, ≤ Journal of Applied Mechanics, Vol. 61. pp. 296-301, 1994.

[4] Zhu, F., Sharma, R. and Rahn, C. D., ≤ Vibrations of Ballooning Elastic Strings, ≤ Journal of Applied Mechanics, Vol. 64, pp. 676-683, 1997.

[5] Tan, C.A. and Ying, S., ≤ Dynamic Analysis of the Axially Moving String Based on Wave Propagation, ≤ Journal of Applied Mechanics, Vol. 64, pp. 394-400, 1997.

[6] Zhu, W. D., Mote, Jr. C. D. and Guo, B. Z., ≤ Asymptotic Distribution of Eigenvalues of a Constrained Translating String, ≤ Journal of Applied Mechanics, Vol. 64, pp. 613-619, 1997.

[7] Xiong, y. and Hutton, S. G., ≤Vibration and Stability Analysis of a Multi-guided Rotating String, ≤ Journal of Sound and Vibration, Vol. 169(5), pp. 669-683, 1994.

[8] Terumichi, Y., Ohtsuka, M., Yoshizawa, M., Fukawa, Y. and Tsujioka, Y., ≤Nonstationary vibrations of a string with time-varying length and a mass-spring system attached at the lower end, ≤ Nonlinear Dynamics, Vol.12(1), pp. 39-55, 1997.

[9] Achkire, Y. and Preumont, Andre, ≤ Optical measurement of cable and string vibration, ≤ Second International Conference on Vibration Measurements, Washington, DC, USA, Proceedings of SPIE-The Interational Society for Optical Engineering, pp. 540-549, 1996.

[10] Fung, Rong-Fong, Huang, Jeng-Sheng, Wang, Yun-Chen and Yang, Rong-Tai, ≤Vibration reduction of the nonlinearly traveling string by a modified variable structure control with proportional and integral compensations,≤ Interational Journal of Mechanical Sciences, Vol. 40(6), pp. 493-506, 1998.

[11] Meirovitch, L., Analytical Methods in Vibrations, Macmillan Publishing Co., Inc., 1967.

[12] Reddy, J. N., Energy and Variational Methods in Applied Mechanics, John Wiley & Sons, 1984.

[13] Meirovitch, L., Principles and Techniques of Vibrations, Prentice-Hall International, Inc., 1997.

[14] Nayfeh, A. H., Perturbation Methods, John Wiley & Sons, 1973.

[15] Kevorkian, J. and Cole, J. D., Perturbation Methods in Applied Mathematics, Springer-Verlag New York Inc., 1981.