توسعهٔ تحلیلی آنالیز سیگنال‌های ارتعاشی بوسیلهٔ سیستم موجک‌های چندگانه DGHM برای تشخیص عیوب موضعی و پدیده‌های گذرا در سیستم‌های مکانیکی

سیامک اسماعیل زاده خادم
دانشیار

مهندس موسی رضائی
دانشجوی دکتری

بخش مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس

چکیده

در این مقاله با استفاده از سیستم موجک‌های چندگانه[1]، آنالیز سیگنال‌های ارتعاشی برای تشخیص عیوب موضعی و پدیده‌های گذرا توسعه یافته است. برخلاف سیستم موجک‌های اسکالر[2] که ضرائب تبدیل آنها در مقیاس‌های مختلف پارامترهای اسکالر می‌باشند، ضرائب تبدیل در سیستم موجک‌های چندگانه پارامترهای برداری هستند و بدست آوردن آنها مستلزم بکارگیری تکنیک‌های محاسباتی خاصی می‌باشد. در تحقیق حاضر با ایده گرفتن از نحوه محاسبه ضرائب تبدیل درسیستم موجک‌های اسکالر و با در نظر گرفتن خاصیت متعامد بودن توابع مقیاس[3] و توابع موجک[4] در سیستم‌های موجک‌های چندگانه، ضرائب تبدیل موجک‌های چندگانه در مقیاس‌های مختلف محاسبه شده است. برای اطمینان از صحت نتایج بدست آمده از آنالیز موجک‌های چندگانه، بعد از تجزیه سیگنال مورد نظر به تصاویر آن در سطوح مختلف توابع مقیاس و توابع موجک، سهم سیگنال در سطوح مختلف فضاهای توابع مقیاس و توابع موجک با هم ترکیب شده و سیگنال اولیه بازسازی شده است که این امر صحت بکارگیری روش را نشان می‌دهد. نتایج حاصل از آنالیز سیگنال‌های مختلف نشان می‌دهد که سیستم موجک‌های چندگانه، سیگنال را به بازه‌های فرکانسی بیشتری تجزیه کرده و امکان ردیابی مؤثرتر تغییرات موضعی موجود در یک سیگنال ارتعاشی را که ممکن است ناشی از یک خرابی موضعی در سیستم مکانیکی مورد مطالعه باشد فراهم می‌کند و همین امر یکی از مزایای سیستم موجک‌های چندگانه نسبت به سیستم موجک‌های اسکالر می‌باشد.

کلمات کلیدی

موجک‌های چندگانه DGHM، آنالیز سیگنال‌های ارتعاشی، عیب یابی

Analytical Development of Vibration Signals Analysis Using DGHM Multiwavelet System for Local Faults and Transient Phenomena Detection

S. Esmaeilzadeh Khadem
Associate Professor

M. Rezaee
Ph.D. Student

Mechanical Engineering Department,
Tarbiat Modarres University

Abstract

In this paper vibration analysis for local faults and transient phenomena detection, using multiwavelet systems is developed. Unlike the scalar wavelet systems in which their coefficients are scalar parameters, the transformation parameters of multiwavelet systems are vector valued, and their calculation requires some special techniques. In this investigation, having considered the technique used to obtain the scalar wavelet system coefficients as well as the orthogonality of the scale and wavelet functions of multiwavelet systems, the transformation coefficients of the multiwavelet system are calculated, and then some artificial vibration signals are analyzed using the multiwavelet system. The results are compared with those obtained through the scalar wavelet systems and frequency analysis techniques. The combination of the contributions of the analyzed signal at different levels of the multiscale and multiwavelet function spaces results in original signal which shows the validity of the results. One of the main advantages of the multiwavelet systems over the scalar wavelet systems is their ability to analyze the signal in more frequency intervals. Using this property, the detection of the local and transient phenomena from the vibration signals, which may be caused by a small and local defects in a mechanical system, may be performed more efficiently.

Keywods

DGHM Multiwavelets, Vibration Signature Analysis, Fault Detection

مقدمه

در یک دههٔ گذشته سیستم های موجک به عنوان یک روش نوظهور برای آنالیز سیگنال ها معرفی شده و کاربردهای وسیعی را در زمینه های مختلف تحلیلی و تجربی پیدا کرده است. یکی از مهمترین سیستم های موجک عبارت از سیستم موجک های متعامد Daubechies می باشد که در آن از یک تابع مقیاس اصلی و از یک تابع موجک اصلی به عنوان توابع آنالیز کننده استفاده می شود [۱-۳]. یکی از مهمترین ویژگی های سیستم موجک یاد شده، متعامد بودن مقیاس و توابع موجک در مقیاس های مختلف می باشد.

اخیراً گروهی از محققان امکان استفاده از چند تابع مقیاس و چند تابع موجک را مورد توجه قرار داده اند. در مقابل سیستم موجک های مرسوم، به چنین سیستم هائی سیستم موجک های چندگانه اطلاق می شود. سیستم موجک های چندگانه موضوع تحقیقاتی بسیار جدیدی می باشد و اولین بار Geronimo و همکارانش [۴] دو تابع مقیاس متعامد را بدست آوردند. این توابع مقیاس دارای ویژگی های کاملاً برجسته ای نسبت به توابع مقیاس سیستم های اسکالر هستند که از آن جمله می توان به متقارن بودن[5] آنها اشاره کرد. بدست آوردن توابع موجک از توابع مقیاس چندگانه کار بسیار پیچیده تری نسبت به حالت اسکالر می باشد و اولین مجموعه از موجک های چندگانه که از توابع مقیاس چندگانهٔ معرفی شده توسط Geronimo و همکارانش بدست آمد به ترتیب توسط Strang و Strela [۵] و Donovan و همکارانش [۶] در سال های ۱۹۹۵ و ۱۹۹۶ صورت گرفت. سیستم موجک های چندگانهٔ یاد شده که از دو تابع موجک اصلی تشکیل شده است دارای خاصیت تعامد می باشد و یکی از این توابع متقارن و دیگری پادمتقارن[6] است.

در سال های اخیر تحقیقات زیادی در زمینه های مختلف کاربرد سیستم های موجک اسکالر صورت گرفته است که از آن جمله می توان به آنالیز سیگنال های ارتعاشی دریافت شده از سیستم های مکانیکی اشاره کرد [۷-۱۳]. با ظهور سیستم های موجک های چندگانه، زمینهٔ تحقیقاتی نوینی در برابر محققان قرار گرفته و فصل جدیدی بر تکنیک آنالیز موجک اضافه شده است و در این میان محققان در صدد ارتقاء توانائی سیستم های موجک در کاربردهای متعدد هستند. اخیراً مقالات متعددی در زمینهٔ سیستم موجک های چندگانه و بویژه موجک های چندگانهٔ DGHM، و استفاده از آنها در کاربردهائی نظیر فشرده سازی پردازش تصویر[7]، نویز زدائی و نیز در زمینهٔ پیش پردازش داده ها به منظور اعمال تبدیلات موجک چندگانه منتشر شده است که از آن جمله می توان به مراجع [۱۴-۲۳] اشاره کرد.

باید یادآور شد که علی رغم تحقیقاتی که در سال های اخیر در زمینهٔ استفاده از سیستم های موجک های اسکالر برای آنالیز سیگنال های ارتعاشی دریافت شده از سیستم های مختلف مکانیکی صورت گرفته است و عمدتاً از سیستم موجک های متعامد Daubechies استفاده شده است (که از میان تحقیقات انجام شده در زمینهٔ آنالیز سیگنال های ارتعاشی می توان به مقالات [۷-۱۳] اشاره کرد)، ولی هیچ تحقیقی در زمینهٔ امکان استفاده از سیستم موجک های چندگانه برای آنالیز سیگنال های ارتعاشی انجام نگرفته است.

در این مقاله برای اولین بار آنالیز سیگنال های ارتعاشی با استفاده از سیستم موجک های چندگانهٔ DGHM توسعه یافته و در جهت تشخیص عیوب موضعی و پدیده های گذرا در سیستم های مکانیکی بکار گرفته شده است. برداشت ما این است که با توجه به توانائی سیستم های موجک های چندگانه، استفاده از این سیستم ها در آنالیز سیگنال های ارتعاشی نیز جایگاه مناسبی را در آینده پیدا خواهد کرد.

در مقاله حاضر ابتدا به تحلیل تئوری سیستم موجک های چندگانه پرداخته شده است. بدین منظور روش آنالیز چنددقتی[8] در مورد توابع مقیاس و توابع موجک چندگانه ذکر شده است و سپس نحوهٔ توسعهٔ دیدگاه آنالیز چنددقتی از سیستم های موجک های اسکالر به سیستم های موجک های چندگانه مورد بررسی قرار گرفته است.

تفاوت اساسی در بیان آنالیز چند دقتی برای سیستم های موجک اسکالر و چندگانه به تعداد زیر فضاهای گسترده شده توسط توابع مقیاس و توابع موجک در سیستم های یاد شده بستگی دارد بدین معنی که برخلاف حالت اسکالر که فضای سیگنال توسط انتقال و اتساع یک تابع مقیاس اصلی و یک تابع موجک اصلی گسترده می شود در مورد موجک های چندگانه، برای دستیابی به این منظور از چند تابع مقیاس اصلی و چند تابع موجک اصلی استفاده می شود. برای نمونه، در مورد سیستم موجک های چندگانهٔ متعامد DGHM، دو تابع مقیاس اصلی و دو تابع موجک اصلی در تشکیل فضاهای یاد شده دخیل هستند.

برای آنکه بتوان از سیستم های موجک های چندگانه برای آنالیز سیگنال های ارتعاشی استفاده کرد نیاز به محاسبهٔ ضرائب تبدیل موجک چندگانه می باشد ولی محاسبهٔ این ضرائب در مورد موجک های چندگانه به مراتب پیچیده تر از محاسبهٔ ضرائب تبدیل موجک در سیستم های موجک اسکالر متعامد می باشد. بدین منظور در تحقیق حاضر برای محاسبهٔ ضرائب تبدیل موجک های چندگانه متعامد از ایدهٔ محاسبهٔ ضرائب تبدیل موجک اسکالر استفاده شده است و برای تعمیم

روش موجود به سیستم موجک های چندگانه، یک سیگنال دلخواه را بر حسب تصاویر آن در فضاهای مختلف توابع مقیاس و توابع موجک بیان کرده و با اعمال شرط تعامد توابع مقیاس و توابع موجک چندگانه، و با روش خاصی ضرائب تبدیل را بدست آورده ایم. در ادامه، سیگنال های متعددی را با استفاده از سیستم موجک های چندگانه DGHM و با اعمال روش پیشنهاد شده مورد تحلیل قرار داده ونتایج را با آنالیز فرکانسی و آنالیز موجک اسکالر Daubechies مقایسه کرده ایم.

۱- توابع مقیاس چندگانه

همچون حالت اسکالر، موجک های چندگانه با استفاده از توابع مقیاس چندگانه ایجاد می شوند. این موضوع را می توان بر اساس تعمیم آنالیز چند دقتی در مورد موجک های یگانه بیان کرد. اگر Φ یک تابع برداری باشد که المان های آن توابع $\varphi_r, r \in N$ باشند:

$$\Phi = \left[\varphi_1 \ \varphi_1 \ \dots \ \varphi_r\right]^T \tag{۱}$$

و فضای ایجاد شده توسط انتقال و اتساع توابع اخیر را با V_j نشان دهیم خواهیم داشت:

$$V_j = \overline{\text{span}\left\{2^{j/2}\ \varphi_i\ (2^j\ t - k): 1 \le i \le r,\ k \in Z\right\}} \tag{۲}$$

اگر فضای تعریف شده در رابطهٔ (۲) دارای شرایط زیر باشد در آن صورت Φ یک تابع مقیاس چندگانه خواهد بود [۴و۲۰]:

(الف) $\dots \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \ \dots$

(ب) $\bigcup_{j \in Z} V_j = L^2\ (R)$

(ج) $\bigcap_{j \in Z} V_j = \{0\}$

(د) $f(t) \in V_j \Leftrightarrow f(2t) \in V_{j+1} \quad \forall j \in Z$

(۳)

بنابراین تابع مقیاس چندگانه Φ یک آنالیز چنددقتی با ضریب r را برای $L^2\ (R)$ تولید می کند. همچنین با توجه به برقراری شرط:

$$\varphi_1\ (t), \ \dots\ ,\ \varphi_r(t) \in V_0 \subset V_1 \tag{۴}$$

می توان نتیجه گرفت که یک توالی از ماتریس های $\{G_k\}_{k \in z}$ $\in l^2(Z)^{r\times r}$ وجود دارند بطوریکه:

$$\Phi\ (t) = \sum_{k \in Z} G_k\ \ \Phi\ (2t - k) \tag{۵}$$

به عبارت دیگر رابطهٔ آنالیز چنددقتی برای توابع مقیاس چندگانه را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{bmatrix} \varphi_1\ (t) \\ \varphi_2\ (t) \\ \vdots \\ \varphi_r\ (t) \end{bmatrix} = \sum_{k \in Z} \begin{bmatrix} g_{11}^k & g_{12}^k & \dots & g_{1r}^k \\ g_{21}^k & g_{22}^k & \dots & g_{2r}^k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_{r1}^k & g_{r2}^k & \dots & g_{rr}^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1\ (2t - k) \\ \varphi_2\ (2t - k) \\ \vdots \\ \varphi_r\ (2t - k) \end{bmatrix} \tag{۶}$$

می توان نشان داد که رابطهٔ اخیر در فضای فوریه به صورت زیر خواهد بود [۲۴]:

$$\begin{aligned} \widehat{\Phi}\ (\omega) &= \sum_k G_k \int_{-\infty}^{\infty} \Phi\ (2t - k)\ e^{-j\omega t}\ dt \\ &= \widehat{G}\ (\frac{\omega}{2})\ \ \widehat{\Phi}\ \ (\frac{\omega}{2}) \end{aligned} \tag{۷}$$

که در آن $\widehat{G}\,(\frac{\omega}{2})$ به صورت زیر تعریف شده است:

$$\widehat{G}\ (\frac{\omega}{2}) = \frac{1}{2}\ \sum_k G_k\ \ e^{-j\,(\frac{\omega}{2})k} \tag{۸}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\widehat{\Phi}\ \ (2\omega) = \widehat{G}\ (\omega)\ \ \widehat{\Phi}\ \ (\omega) \tag{۹}$$

از طرف دیگر با نوشتن رابطهٔ (۵) بر حسب پارامترهای مختلف x-l که $l \in Z$، رابطهٔ آنالیز چنددقتی به شکل مفیدتری قابل بیان است [۲۴]:

$$\begin{aligned} &\vdots \\ \Phi\ (t + 1) &= \sum_{k \in Z} G_k\ \ \Phi\ (2\ (t + 1) - k) \\ \Phi\ (t) &= \sum_{k \in Z} G_k\ \ \Phi\ (2t - k) \\ \Phi\ (t - 1) &= \sum_{k \in Z} G_k\ \ \Phi\ (2\ (t - 1) - k) \\ &\vdots \end{aligned} \tag{۱۰}$$

روابط اخیر را می توان به صورت ماتریسی زیر بیان کرد:

$$\begin{bmatrix} \vdots \\ \Phi\ (t + 1) \\ \Phi\ (t) \\ \Phi\ (t - 1) \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \dots & G_1 & G_2 & G_3 & \dots \\ \dots & G_{-1} & G_0 & G_1 & \dots \\ \dots & G_{-3} & G_{-2} & G_{-1} & \dots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ \Phi\ (2t + 1) \\ \Phi\ (2t) \\ \Phi\ (2t - 1) \\ \vdots \end{bmatrix} \tag{۱۱}$$

که در آن G_iها ماتریس های مربعی $r \times r$ می باشند.
اولین قدم برای بدست آوردن توابع مقیاس چندگانه، تعیین ماتریس های G_i می باشد که اولین بار یک سری از این ماتریس ها توسط Geronimo و همکارانش [۴] با استفاده از توابع فراکتال[9] بدست آمد که به صورت زیر می باشند:

$$G_0 = \begin{bmatrix} 3/5 & 4\sqrt{2}/5 \\ -1/10\sqrt{2} & -3/10 \end{bmatrix}, G_1 = \begin{bmatrix} 3/5 & 0 \\ 9/10\sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$$

$$G_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 9/10\sqrt{2} & -3/10 \end{bmatrix}, G_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1/10\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} \quad (۱۲)$$

توابع مقیاسی که با استفاده از این ماتریس ها و رابطهٔ آنالیز چنددقتی بدست می آید دو تابع مقیاس $\varphi_1(x)$ و $\varphi_2(x)$ می باشد که به ترتیب در محدوده های $0<x<1$ و $0<x<2$ دارای مقدار غیر صفر هستند. این توابع همراه با طیف های فرکانسی آنها، در شکل (۱) نشان داده شده اند. چنانچه از شکل های (۱-ج) و (۱-د) مشاهده می شود تابع مقیاس φ_1 به صورت یک فیلتر پائین گذر عمل می کند در صورتیکه تابع مقیاس φ_2 رفتار یک فیلتر میان گذر را از خود نشان می دهد.
یکی از ویژگی های مهم این توابع عبارت از متقارن بودن آنها می باشد که این امر در حالت اسکالر ناممکن است، در حالیکه در توابع مقیاس چندگانه به علت وجود درجات آزادی بیشتر، می توان علاوه بر ارضاء شرایطی که برای توابع مقیاس یگانه اعمال می شوند به خاصیت تقارن نیز دست یافت.

۲- موجک های چندگانه

بدست آوردن موجک های چندگانه از توابع مقیاس چندگانه، بسیار پیچیده تر از بدست آوردن توابع موجک واحد از تابع مقیاس واحد می باشد. در حالت اسکالر، ضرائب معادلهٔ آنالیز چنددقتی برای تابع موجک را می توان به راحتی با تغییر دادن ترتیب و علائم ضرائب تابع مقیاس بدست آورد [۳و۵]، ولی این روش در مورد موجک های چندگانه کارآئی ندارد بنابراین روش جدیدی برای ایجاد توابع موجک مورد نیاز است.
اگر V_j فضای ایجاد شده توسط توابع مقیاس چندگانه باشد در آن صورت می توان فضای مکمل W_j برای هر $j \in Z$ را طوری تعیین کرد که داشته باشیم:

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j \quad (۱۳)$$

اگر Ψ، بردار موجک های چندگانه را به صورت:

$$\Psi = \left[\psi_1 \ \psi_2 \ \dots \ \psi_r\right]^T \in L^2(R)^r \quad (۱۴)$$

در نظر بگیریم در آن صورت فضای W_j ایجاد شده توسط این تابع به صورت رابطهٔ زیر خواهد بود:

$$W_j = \overline{\text{span}\left\{2^{j/2}\ \psi_i\ (2^j\ t - k): 1 \le i \le r, k \in Z\right\}} \quad (۱۵)$$

حال اگر شرط $V_j \perp W_j$ برقرار باشد و مجموعه $\{2^{j/2}\psi_i(2^j t-k): 1 \le i \le r, k \in Z\}$ پایهٔ پایداری برای W_j باشد و همچنین اگر ψ_i ها به انتقال های صحیح خود عمود باشند، یعنی داشته باشیم:

$$\int \psi_i\ (t)\ \psi_j\ (t-n)\ dt = \delta_{ij}\delta_n \quad (۱۶)$$

در آن صورت مجموعهٔ ψ_iها موجک های چندگانهٔ متعامد یکه ای را تشکیل می دهند که شرط زیر را ارضا می کنند:

$$\left\langle \Psi\ (2^j t - n), \Psi\ (2^k t - m) \right\rangle = \delta_{jk}\ \delta_{nm}\ I \quad j,k,m,n \in Z \quad (۱۷)$$

که در آن I ماتریس واحد $r \times r$ می باشد.
بر خلاف سیستم های موجک های اسکالر، ضرائب رابطهٔ چنددقتی برای بدست آوردن موجک های چندگانه، ماتریس های $r \times r$ هستند [۵]:

$$\Psi\ (t) = \sum_{k \in Z} H_k\ \Phi\ (2t - k) \quad (۱۸)$$

رابطهٔ (۱۸) را می توان به صورت ماتریسی نیز بیان کرد [۲۴]:

$$\begin{bmatrix} \vdots \\ \Psi\ (t+1) \\ \Psi\ (t) \\ \Psi\ (t-1) \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \dots & H_1 & H_2 & H_3 & \dots \\ \dots & H_{-1} & H_0 & H_1 & \dots \\ \dots & H_{-3} & H_{-2} & H_{-1} & \dots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ \Psi\ (2t+1) \\ \Psi\ (2t) \\ \Psi\ (2t-1) \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (۱۹)$$

بدست آوردن توابع موجک چندگانه، مستلزم معلوم بودن ماتریس های H_i است. ماتریس های اخیر اولین بار برای حالت $r=2$ توسط Strang و Srela [۵] و همچنین توسط Donovan و همکارانش [۶] به صورت زیر بدست آمد:

$$H_0 = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & -3 \\ 1 & 3\sqrt{2} \end{bmatrix},\ H_1 = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 9/\sqrt{2} & -10 \\ -9 & 0 \end{bmatrix}$$

$$H_2 = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 9\sqrt{2} & -3 \\ 9 & -3\sqrt{2} \end{bmatrix},\ H_3 = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

(۲۰)

توابع موجک ψ_1 و ψ_2 براساس ماتریس های فوق، از رابطهٔ زیر قابل محاسبه هستند:

$$\begin{bmatrix} \psi_1\ (t) \\ \psi_2\ (t) \end{bmatrix} = \sum_{k=0}^{3} \begin{bmatrix} h_{11}^k & h_{12}^k \\ h_{21}^k & h_{22}^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1\ (2t-k) \\ \varphi_2\ (2t-k) \end{bmatrix} \qquad (۲۱)$$

که در آن $\begin{bmatrix} h_{11}^k & h_{12}^k \\ h_{21}^k & h_{22}^k \end{bmatrix} = H_k$ می باشد.

توابع موجک ψ_1 و ψ_2 بدست آمده از رابطهٔ (۲۱) همراه با طیف فرکانسی آنها، در شکل (۲) نشان داده شده اند. توابع اخیر فقط در محدودهٔ $0<t<2$ دارای مقادیر غیر صفر هستند.

همانطوری که از این شکل ها نیز دیده می شود دو تابع موجک ψ_1 و ψ_2 به ترتیب توابع متقارن و پادمتقارن می باشند که حصول این ویژگی در مورد موجک های اسکالر امکان پذیر نیست. با بررسی دیاگرام های طیف فرکانسی توابع موجک ψ_1 و ψ_2 مشاهده می شود که هر دو تابع موجک از نظر فرکانسی همانند فیلترهای میان گذر عمل می کنند.

۳ـ تعمیم روش تبدیل موجک اسکالر گسسته به سیستم موجک های چندگانه

با داشتن یک سیستم آنالیز چند دقتی با r تابع مقیاس، می توان یک تابع $f_0 \in L^2(R)$ را برحسب ضرائب موجک های چندگانهٔ مربوطه بیان کرد. اگر $f_0 \in V_0$ باشد در آن صورت با توجه به تعریف آنالیز چند دقتی و اعمال رابطهٔ (۱۳)، فضای V_0 را می توان به صورت زیر بیان کرد [۲۴]:

$$V_0 = V_{-1} \oplus W_{-1} = V_{-2} \oplus W_{-2} \oplus W_{-1} =$$

$$\ldots = V_{-L} \oplus W_{-L} \oplus W_{-L+1} \ \ldots \oplus W_{-1} \qquad (۲۲)$$

که در آن L یک عدد صحیح بزرگتر از صفر می باشد.

بنابراین هر تابع $f_0 \in V_0$ را می توان به صورت جمع تصاویر آن تابع در یک فضای توابع مقیاس و فضاهای توابع موجک بیان کرد:

$$f_0 = f_{-1} \oplus g_{-1} = f_{-2} \oplus g_{-2} \oplus g_{-1} = \ldots$$

$$= f_{-L} \oplus g_{-L} \oplus g_{-L+1} \ \ldots \oplus g_{-1} \qquad (۲۳)$$

در رابطهٔ فوق f_{-j} و g_{-j} به ترتیب تصاویر f_0 در فضاهای V_{-j} و W_{-j} می باشند، یعنی:

$$f_{-j}(t) = \sum_{k\in Z}\sum_{i=1}^{r} c_i^{k,-j}\ \varphi_i\ (2^{-j}\ t-k) = \sum_{k\in Z}(C_k^{-j})^T\ \Phi\ (2^{-j}\ t-k)$$

(۲۴)

$$g_{-j}(t) = \sum_{k\in Z}\sum_{i=1}^{r} d_i^{k,-j}\ \psi_i\ (2^{-j}\ t-k) = \sum_{k\in Z}(D_k^{-j})^T\ \Psi\ (2^{-j}\ t-k)$$

(۲۵)

بنابراین $f_0 \in V_0$ را می توان به صورت زیر بسط داد [۲۴]:

$$f_0(t) = \sum_{k\in Z}(C_k^0)^T\Phi\ (t-k)$$

$$= \sum_{k\in Z}\left\{(C_k^{-L})^T\ \Phi\ (2^{-L}\ t-k) + (D_k^{-1})^T\ \Psi\ (2^{-1}\ t-k) + \ldots + (D_k^{-L})^T\ \Psi\ (2^{-L}\ t-k)\right\}$$

(۲۶)

برای بدست آوردن روابطی بین C_kها و D_kها در دو سطح متوالی؛ از معادلهٔ چنددقتی برای محاسبهٔ $\Phi(t)$ استفاده می کنیم:

$$\Phi\ (t) = \sum_{n\in Z} G_n\,\Phi\ (2t-n) \qquad (۲۷)$$

اگر در رابطهٔ اخیر t را به 2^jt-k تبدیل کرده و در معادلهٔ حاصل شده، تغییر متغیر $m=2k+n$ را اعمال کنیم خواهیم داشت [۲۴]:

$$\Phi\ (2^j\ t-k) = \sum_m G_{(m-2k)}\,\Phi\ (2^{j+1}t-m) \qquad (۲۸)$$

با توجه به اینکه مجموعهٔ توابع $\Phi(2^jt-k), k \in Z$، تشکیل دهندهٔ فضای V_j هستند بنابراین هر تابع $f(t) \in V_{j+1}$ را می توان به صورت زیر بسط داد:

$$f\ (t) = \sum_{k\in Z}(C_k^{j+1})^T\Phi\ (2^{j+1}t-k) \qquad (۲۹)$$

حال با توجه به خاصیت چنددقتی فضاهای V_j و W_j رابطهٔ

فوق را می توان در دو فضای V_j و W_j بیان کرد:

$$V_{j+1}=V_j \oplus W_j$$

$$f(t)=\sum_k (C_k^j)^T\Phi(2^jt-k)+\sum_k (D_k^j)^T\Psi(2^jt-k) \qquad (۳۰)$$

با در نظر گرفتن تعامد توابع مقیاس و توابع موجک در یک سیستم موجک متعامد، رابطهٔ (۳۰) را می توان برای حالتی که r تابع مقیاس و r تابع موجک موجود باشد به صورت زیر بیان کرد [۲۴]:

$$f(t)=\sum_k \begin{bmatrix} c^j_{k,1} & c^j_{k,2} & \dots & c^j_{k,r}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varphi_1\ (2^jt-k)\\ \varphi_2\ (2^jt-k)\\ \vdots \\ \varphi_r\ (2^jt-k)\end{bmatrix}+$$

$$\sum_k \begin{bmatrix} d^j_{k,1} & d^j_{k,2} & \dots & d^j_{k,r}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\psi_1\ (2^jt-k)\\ \psi_2\ (2^jt-k)\\ \vdots \\ \psi_r\ (2^jt-k)\end{bmatrix} \qquad (۳۱)$$

اگر سیستم توابع موجک و توابع مقیاس، یک سیستم متعامد یکه باشند در آن صورت ضرائب $c_{k,i}^j$ و $d_{k,i}^j$ را می توان به صورت رابطهٔ (۳۲) بدست آورد [۲۴]:

$$c^j_{k,i}=2^j\ \langle f\ (t),\ \varphi_i\ (2^jt-k)\rangle \qquad (۳۲\ الف)$$

$$d^j_{k,i}=2^j\ \langle f\ (t),\ \psi_i\ (2^jt-k)\rangle \qquad (۳۲\ ب)$$

و بقیهٔ ضرائب نیز به روش فوق قابل محاسبه هستند. از طرفی رابطهٔ (۲۸) برای سیستمی با r تابع مقیاس را می توان بدین صورت نوشت [۲۴]:

$$\begin{bmatrix}\varphi_1\ (2^jt-k)\\ \varphi_2\ (2^jt-k)\\ \vdots \\ \varphi_r\ (2^jt-k)\end{bmatrix}=\sum_m \begin{bmatrix} g^{(m-2k)}_{11} & g^{(m-2k)}_{12} & \dots & g^{(m-2k)}_{1r}\\ g^{(m-2k)}_{21} & g^{(m-2k)}_{22} & \dots & g^{(m-2k)}_{2r}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ g^{(m-2k)}_{r1} & g^{(m-2k)}_{r2} & \dots & g^{(m-2k)}_{rr}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\varphi_1\ (2^{j+1}t-m)\\ \varphi_2\ (2^{j+1}t-m)\\ \vdots \\ \varphi_r\ (2^{j+1}t-m)\end{bmatrix} \qquad (۳۳\text{-}الف)$$

$$\varphi_2\ (2^jt-k)=\sum_m\left[g^{(m-2k)}_{21}\ \varphi_1\ (2^{j+1}t-m)+g^{(m-2k)}_{22}\ \varphi_2\ (2^{j+1}t-m)+\dots+g^{(m-2k)}_{2r}\ \varphi_r\ (2^{j+1}t-m)\right],$$

$$\varphi_1\ (2^jt-k)=\sum_m\left[g^{(m-2k)}_{11}\ \varphi_1\ (2^{j+1}t-m)+g^{(m-2k)}_{12}\ \varphi_2\ (2^{j+1}t-m)+\dots+g^{(m-2k)}_{1r}\ \varphi_r\ (2^{j+1}t-m)\right],$$

$$\varphi_r\ (2^jt-k)=\sum_m\left[g^{(m-2k)}_{r1}\ \varphi_1\ (2^{j+1}t-m)+g^{(m-2k)}_{r2}\ \varphi_2\ (2^{j+1}t-m)+\dots+g^{(m-2k)}_{rr}\ \varphi_r\ (2^{j+1}t-m)\right].$$

(۳۳-ب)

با جایگذاری رابطهٔ (۳۳-ب) در (۳۲) خواهیم داشت:

$$c^j_{l,1}=2^j\left[\left\langle f(t),\sum_m g^{(m-2l)}_{11}\ \varphi_1\ (2^{j+1}t-m)\right\rangle+\dots+\left\langle f(t),\sum_m g^{(m-2l)}_{1r}\ \varphi_r\ (2^{j+1}t-m)\right\rangle\right]$$

$$\Rightarrow c^j_{l,1}=2^j\left[\sum_m g^{(m-2l)}_{11}\ \langle f(t),\varphi_1\ (2^{j+1}t-m)\rangle+\dots+\sum_m g^{(m-2l)}_{1r}\ \langle f(t),\varphi_r\ (2^{j+1}t-m)\rangle\right]$$

$$c^j_{l,1}=\frac{1}{2}\sum_m \begin{bmatrix} g^{(m-2l)}_{11} & g^{(m-2l)}_{12} & \dots & g^{(m-2l)}_{1r}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} c^{j+1}_{m,1}\\ c^{j+1}_{m,2}\\ \vdots \\ c^{j+1}_{m,r}\end{bmatrix} \qquad (۳۴)$$

به روشی مشابه، بقیهٔ ضرائب $c^j_{l,i}$ را می توان بدست آورد. حال اگر روابط بدست آمده برای $c^j_{l,i}$ ها را به صورت فشرده بیان کنیم خواهیم داشت [۲۴]:

$$\begin{bmatrix} c^j_{l,1}\\ c^j_{l,2}\\ \vdots \\ c^j_{l,r}\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\sum_m \begin{bmatrix} g^{(m-2l)}_{11} & g^{(m-2l)}_{12} & \dots & g^{(m-2l)}_{1r}\\ g^{(m-2l)}_{21} & g^{(m-2l)}_{22} & \dots & g^{(m-2l)}_{2r}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ g^{(m-2l)}_{r1} & g^{(m-2l)}_{r2} & \dots & g^{(m-2l)}_{rr}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} c^{j+1}_{m,1}\\ c^{j+1}_{m,2}\\ \vdots \\ c^{j+1}_{m,r}\end{bmatrix}$$

(۳۵ - الف)

رابطهٔ فوق را می توان به صورت فشرده نیز بیان کرد:

$$C^j_L=\frac{1}{2}\sum_m G_{(m-2l)}\ C^{j+1}_m \qquad (۳۵\text{-}ب)$$

و به روشی مشابه می توان ثابت کرد که ضرائب توابع موجک در یک مقیاس پائین تر از طریق رابطهٔ زیر به ضرائب توابع موجک در یک مقیاس بالاتر ارتباط پیدا می کنند [۲۴]:

$$D^j_l=\frac{1}{2}\sum_m H_{(m-2l)}\ C^{j+1}_m \qquad (۳۶)$$

روابط اخیر نحوهٔ تجزیهٔ یک سیگنال و بدست آوردن تصاویر آن در فضاهائی با مقیاس پائین تر را نشان می دهد. حال نحوهٔ بازسازی سیگنال را از طریق جمع تصاویر آن در فضاهائی با مقیاس پائین تر مورد بررسی قرار می دهیم. سیگنالی را که در فضای تابع مقیاس j+1 می باشد در نظر می گیریم:

$$f(t) \in V_{j+1} \qquad (۳۷)$$

سیگنال $f(t)$ را می توان به صورت زیر بر حسب توابع مقیاس بیان کرد:

$$f(t) = \sum_k (C_k^{j+1})^T \, \Phi\,(2^{j+1}t - k) \qquad (۳۸)$$

اگر تابع اخیر را در یک مقیاس پائین تر بیان کنیم نیاز به توابع موجک نیز خواهیم داشت یعنی [۲۴]:

$$f(t) = \sum_k (C_k^{j})^T \, \Phi\,(2^{j}t - k) + \sum_k (D_k^{j})^T \, \Psi\,(2^{j}t - k) \qquad (۳۹)$$

با قرار دادن روابط چنددقتی در (۳۹) و بعد از ساده سازی و اعمال تغییر متغیر مناسب، به رابطهٔ زیر می رسیم [۲۴]:

$$\sum_k (C_k^{j+1})^T \, \Phi\,(2^{j+1}t - k) = \sum_k (C_k^{j})^T \sum_m G_{m-2k}\, \Phi\,(2^{j+1}t - m)$$

$$+ \sum_k (D_k^{j})^T \sum_m H_{m-2k}\, \Phi\,(2^{j+1}t - m) \qquad (۴۰)$$

با ضرب طرفین رابطهٔ فوق در $\varphi_l\,(2^{j+1}t - l)$ و انتگرال گیری از رابطهٔ حاصل شده، خواهیم داشت [۲۴]:

$$c_{k,1}^{j+1}\left(\frac{1}{2^{j+1}}\right)\delta_{kl} = \sum_m (c_k^j)^T \begin{bmatrix} g_{11}^{(m-2k)}\left(\frac{1}{2^{j+1}}\right)\delta_{ml} \\ g_{21}^{(m-2k)}\left(\frac{1}{2^{j+1}}\right)\delta_{ml} \\ \vdots \\ g_{r1}^{(m-2k)}\left(\frac{1}{2^{j+1}}\right)\delta_{ml} \end{bmatrix}$$

$$+ \sum_k (D_k^j)^T \begin{bmatrix} h_{11}^{(m-2k)}\left(\frac{1}{2^{j+1}}\right)\delta_{ml} \\ h_{21}^{(m-2k)}\left(\frac{1}{2^{j+1}}\right)\delta_{ml} \\ \vdots \\ h_{r1}^{(m-2k)}\left(\frac{1}{2^{j+1}}\right)\delta_{ml} \end{bmatrix} \qquad (۴۱)$$

با ساده کردن رابطهٔ فوق خواهیم داشت:

$$c_{L,1}^{j+1} = \sum_k (C_k^j)^T \begin{bmatrix} g_{11}^{(l-2k)} \\ g_{21}^{(l-2k)} \\ \vdots \\ g_{r1}^{(l-2k)} \end{bmatrix} + \sum_k (D_k^j)^T \begin{bmatrix} h_{11}^{(l-2k)} \\ h_{21}^{(l-2k)} \\ \vdots \\ h_{r1}^{(l-2k)} \end{bmatrix} \qquad (۴۲)$$

به طریقهٔ مشابه می توان روابطی را برای $c_{1,2}^{j+1}$، ... و $c_{1,r}^{j+1}$ بدست آورد که با جمع بندی آنها می توان به رابطهٔ کلی زیر دست یافت [۲۴]:

$$(C_l^{j+1})^T = \sum_k (C_k^j)^T\, G_{(l-2k)} + \sum_k (D_k^j)^T H_{(l-2k)} \qquad (۴۳)$$

رابطهٔ فوق نحوهٔ بدست آوردن ضرائب تبدیل موجک در یک مقیاس بالاتر را با استفاده از ضرائب تبدیل موجک در یک مقیاس پائین تر بیان می کند و امکان بازسازی سیگنال اولیه را با استفاده از جمع تصاویر آن سیگنال در مقیاس های پائین تر فراهم می آورد.

حال که اصول تئوری موجک های چندگانه تعیین شد و ضرائب تبدیل موجک چندگانه بدست آمد، نیاز به بهره گیری از سیستم موجک های چندگانه در آنالیز سیگنال های مختلف می باشد. بدین منظور در بخش های بعدی، سیگنال های متعددی را با استفاده از سیستم موجک های چندگانه DGHM مورد تحلیل قرار خواهیم داد. برای آنکه توانائی سیستم موجک های چندگانه نسبت به سیستم موجک های اسکالر و نسبت به آنالیز طیفی در تشخیص عیوب موضعی و پدیده های گذرا روشن شود، نتایج حاصل از آنالیز توسط موجک های چندگانه را با نتایج بدست آمده از آنالیز طیفی و آنالیز موجک های اسکالر مورد مقایسه قرار می دهیم.

٤ـ آنالیز یک موج سینوسی ساده همراه با یک پالس باند پهن بوسیلهٔ موجک های چندگانهٔ DGHM و مقایسهٔ نتایج با آنالیز طیفی و آنالیز با موجک اسکالر D_4 [٢٤]

در این بخش یک سیگنال سینوسی را در موقعیت زمانی t=0.8 Sec با یک پالس باند پهن ترکیب شده است با استفاده از سیستم موجک چندگانه DGHM مورد تحلیل قرار می دهیم. سیگنال یاد شده در حوزهٔ زمان در شکل (۳ ـ الف) نشان داده شده است. قبل از انجام آنالیز توسط موجک های چندگانه، سیگنال اخیر را توسط روش آنالیز طیفی مورد مطالعه قرار می دهیم. در شکل (۳ـ ب) طیف توان سیگنال نشان داده شده است. چنانکه از این شکل دیده می شود دیاگرام طیفی فقط دارای یک پیک در فرکانس 2 Hz می باشد ولی نمی توان به تأثیر پالس ترکیب شده در سیگنال با استفاده از آنالیز طیفی پی برد. شکل (۳ـ ج) تبدیل موجک چندگانه

سیگنال یاد شده را نشان می دهد. برای آنالیز سیگنال توسط موجک چندگانه نیاز به تأمین ورودی به صورت برداری هستیم که این مسأله را با تکرار سیگنال ورودی تأمین می کنیم. سیگنال تکرار شده در قسمت فوقانی شکل (۳ـ ج) نشان داده شده است. تبدیل موجک چندگانه نشان داده شده در شکل اخیر اطلاعات چندان مفیدی را در اختیار قرار نمی دهد لذا برای تأمین اطلاعات مفیدتر و جامعتر، می توانیم سیگنال را به سطوح مختلف و در مقیاس های متعدد تجزیه کنیم. نحوهٔ تجزیهٔ سیگنال به سطوح مختلف در شکل (۳ـ د) نشان داده شده است.

با توجه به اینکه در تجزیهٔ سیگنال از دو تابع مقیاس و دو تابع موجک استفاده شده است لذا در هر سطحی دو منحنی وجود دارد. برای اثبات صحت روش تجزیهٔ سیگنال به سطوح مختلف، اجزای سیگنال در تمام سطوح با هم ترکیب شده و منحنی $f(t)$ که به صورت خط چین در روی سطح صفر نشان داده شده بدست می آید. در شکل اخیر دیده می شود که برخلاف روش آنالیز طیفی، تأثیر پالس در سیگنال، خود را به صورت تغییراتی در محدودهٔ کوچکی از زمان در $t=0.8$ Sec و در سطوح ۴ تا ۷ نشان داده است و از همین جا می توان نتیجه گرفت که اغتشاش موجود در موقعیت زمانی یاد شده ناشی از یک پدیدهٔ موضعی باند پهن می باشد.

برای آنکه مقایسه ای بین نحوهٔ آنالیز سیگنال توسط موجک های چندگانه و موجک اسکالر صورت گیرد سیگنال اخیر را با استفاده از موجک اسکالر D_4 نیز مورد آنالیز قرار می دهیم که سیگنال ورودی همراه با تبدیل موجک D_4 آن در شکل (۴ـ الف) نشان داده شده است. در شکل (۴ـ ب) سیگنال ورودی با استفاده از تبدیل موجک D_4 به سطوح مختلف تجزیه شده است. از این شکل دیده می شود که اثر پالس موضعی به صورت تغییراتی در سطوح ۵ تا ۷ آشکار شده است در حالیکه سیگنال سینوسی عمدتاً درسطوح ۱ تا ۳ ظاهر شده است. با مقایسهٔ شکل اخیر با شکل (۳ـ د) دیده می شود که آنالیز موجک چندگانه تأثیر پالس موضعی را به باندهای فرکانسی متنوع تری تجزیه کرده است لذا پدیده های مستتر در سیگنال که دارای باند فرکانسی کمتری می باشند با استفاده از موجک های چندگانه با دقت بیشتری قابل ردیابی خواهد بود.

۵ـ آنالیز یک سیگنال سینوسی که دارای فرکانس متغیر با زمان است [۲٤]

در شکل (۵ـ الف) یک سیگنال سینوسی که فرکانس آن با زمان تغییر می کند نشان داده شده است. این سیگنال در ابتدا با استفاده از آنالیز فرکانسی مورد تحلیل قرار گرفت، در شکل (۷ـ ب) طیف dB سیگنال اخیر نشان داده شده است. آنچه که از این شکل آشکار می شود این است که سیگنال مورد نظر دارای باند فرکانسی خاصی است که تقریباً محدودهٔ فرکانسی صفر تا پنجاه هرتز را می پوشاند. ولی این دیاگرام هیچگونه اطلاعاتی را در زمینهٔ موقعیت زمانی فرکانس ها در اختیار نمی گذارد.

در شکل (۷ـ ج) سیگنال ورودی تکرار شده همراه با تبدیل موجک چندگانهٔ آن نشان داده شده است و شکل (۷ـ د) نشان دهنده مؤلفه های سیگنال مورد نظر در سطوح مختلف می باشد. از این شکل کاملاً معلوم است که سیگنال مورد نظر دارای محدودهٔ فرکانسی وسیعی است، و مهمتر از آن اینکه موقعیت زمانی بخش فرکانس پائین سیگنال به نقطهٔ شروع سیگنال نزدیکتر می باشد در حالیکه با افزایش فرکانس، موقعیت فرکانس بالا به سمت انتهای سیگنال تغییر مکان می دهد.

۶ـ آنالیز یک سیگنال سینوسی همراه با ترکیبی از نویز و ضربهٔ باند پهن [۲٤]

سیگنال بعدی که قصد داریم مورد تحلیل قرار دهیم یک سیگنال سینوسی آلوده شده توسط نویز سفید است که با یک ضربهٔ باند پهن ترکیب شده است. این سیگنال در شکل (۶ـ الف) نشان داده شده است. نتایج حاصل از آنالیز طیفی در شکل (۶ـ ب)، که به صورت دیاگرام طیف دامنه می باشد، نشان داده شده است. از بررسی دیاگرام اخیر، محدودهٔ فرکانسی موج سینوسی باند باریک، به وضوح قابل مشاهده است و وجود نویز نیز آشکار است در حالیکه به هیچ وجه نمی توان از طریق این روش آنالیز به وجود پالس و موقعیت زمانی آن پی برد. دیاگرام سیگنال ورودی تکرار شده همراه با تبدیل موجک چندگانه DGHM آن در شکل (۶ـ ج) نشان داده شده اند و در شکل (۶ـ د) تا (۶ـ و) سیگنال اخیر به سطوح مختلف تجزیه شده است. بابررسی دو شکل (۶ـ ه) و (۶ـ و) مشاهده می شود که عمده ترین بخش سیگنال گذرای باند پهن در سطوح ۶ و ۷ تابع موجک ψ_2 ظاهر می شود و بعلاوه با بررسی شکل (۶ـ د) مشاهده می شود که سیگنال گذرای باند پهن که با استفاده از موجک های چندگانه آنالیز شده است به باندهای فرکانسی بیشتری تجزیه شده است در حالی که در موجک های اسکالر چنین امری امکان پذیر نیست. در شکل های (۶ـ ز) و (۶ـ ح) به ترتیب دیاگرام میانگین مربعات[۱۰] سه بعدی کلی و دیاگرام کانتور کلی در تمام سطوح نشان داده شده است. از این شکل نیز وجود نویز و ضربهٔ باند پهن قابل تشخیص است و بعلاوه همهٔ این شکل ها رفتار پریودیک غالب سیگنال را نشان می دهند.

برای آشکار شدن توانائی آنالیز توسط موجک های چندگانه نسبت به موجک های اسکالر، سیگنال یاد شده با سیستم موجک های متعامد D_4 نیز آنالیز شده است. نتایج حاصل از این تحلیل در شکل (۷) نشان داده شده است. دیاگرام سیگنال ورودی همراه با تبدیل موجک D_4 آن در شکل (۷- الف) آورده شده است و در شکل (۷- ب) تصاویر سیگنال در سطوح مختلف تابع مقیاس و تابع موجک بدست آمده است. چنانکه از این شکل دیده می شود در این روش آنالیز، تعداد باندهای مختلف نسبت به موجک های چندگانه DGHM به نصف کاهش یافته است. دیاگرام میانگین مربعات سه بعدی ودیاگرام کانتور بدست آمده از تبدیل موجک D_4 به ترتیب در شکل های (۷- ج) و (۷- د) نشان داده شده است. از مقایسهٔ دیاگرام های میانگین مربعات سه بعدی و دیاگرام های کانتور، توانائی آنالیز توسط موجک های چندگانه DGHM نسبت به موجک های اسکالر D_4 آشکارتر می شود؛ برای مثال از مقایسهٔ شکل (۶- ح) با شکل (۷- د) مشاهده می شود که موجک های چندگانه DGHM اثر پدیدهٔ گذرای ترکیب شده در سیگنال را با وضوح بیشتری نسبت به موجک های اسکالر D_4 آشکار می کنند.

۷- بحث و نتیجه گیری

چنانکه بیان شد در سیستم موجک های چندگانه، معادلات آنالیز چنددقتی به صورت معادلات ماتریسی هستند که این موضوع یکی از جنبه های تمایز اینگونه سیستم ها با سیستم موجک های اسکالر می باشد. در سیستم موجک های اسکالر، فضای سیگنال فقط با انتقال و اتساع یک تابع مقیاس اصلی و یک تابع موجک اصلی ایجاد می شود. بنابراین در تجزیهٔ سیگنال توسط اینگونه موجک ها در سطوح بالاتر، باند فرکانسی تابع موجک بسیار گسترده است، به عبارت دیگر فضای توابع موجک در مقیاس های بالاتر، باند پهن می باشد لذا اگر در سیگنال مورد نظر پدیده ای موجود باشد که در فرکانس های بالاتر رخ دهد ولی دارای باند فرکانسی محدودتری باشد در آن صورت شناسائی چنین پدیده ای از نظر دقت فرکانسی بوسیلهٔ موجک های متعامد اسکالر کمتر خواهد بود.

باید یادآور شد که در آنالیز سیگنال های ارتعاشی نمی توان از وجود پدیده های یاد شده صرفنظر کرد. بنابراین تقسیم باندهای فرکانسی در مقیاس های مختلف، روش مناسبی برای شناسائی دقیق تر چنین پدیده هائی خواهد بود. بنابر آنچه که بیان شد یکی از انگیزه های مهم برای انجام این تحقیق استفاده از توانائی سیستم های موجک های چندگانه در آنالیز دقیقتر زمان- فرکانس سیگنال های ارتعاشی می باشد. برای اعمال سیستم موجک های چندگانه نیازمند محاسبه ضرائب تبدیل موجک های چندگانه به منظور آنالیز سیگنال های ارتعاشی هستیم ولی از آنجا که ماهیت روش تبدیل در سیستم موجک های اسکالر و سیستم موجک های چندگانه، به علت دخیل شدن روابط ماتریسی در سیستم موجک های چندگانه، کاملاً متفاوت می باشد لذا با ایده گرفتن از روش تبدیل موجک اسکالر، و با در نظر گرفتن خصوصیات توابع موجک چندگانه و توابع مقیاس چندگانه، ضرائب تبدیل موجک چندگانه بدست آمده است و با آنالیز سیگنال های متعدد توسط موجک های چندگانه توانائی آنها با سیستم موجک های اسکالر مقایسه شده است. با آنکه انجام آنالیز توسط موجک های چندگانه مستلزم محاسبات پیچیده تر و بیشتری است ولی جزئیات دقیقتری از سیگنال را می توان با این روش استخراج کرد. از تجزیهٔ سیگنال به مؤلفه های مختلف توابع مقیاس و توابع موجک چندگانه در سطوح مختلف، مشاهده می شود که سیستم موجک های چندگانه، سیگنال را به باندهای فرکانسی کوچکتری تجزیه می کنند و این خصوصیت می تواند بخشی از نیاز ما را در آنالیز سیگنال های ارتعاشی تأمین کند. یکی دیگر از مزایای آنالیز توسط سیستم موجک های چندگانه نسبت به سیستم موجک های اسکالر و آنالیز طیفی، دقت بیشتر این تکنیک در ردیابی پدیده های گذرای مستتر در سیگنال ارتعاشی است که ممکن است در اثر وجود یک عیب موضعی در یک سیستم مکانیکی بوجود آمده باشد. در سیستم موجک های چندگانهٔ DGHM که از دو تابع مقیاس و دو تابع موجک استفاده می شود تعداد باندهای فرکانسی بدست آمده از تجزیهٔ یک سیگنال، دو برابر تعداد باندهای فرکانسی بدست آمده از آنالیز توسط یک سیستم موجک اسکالر می باشد، و در حالت کلی اگر تعداد توابع مقیاس و توابع موجک بکار رفته برابر r باشد نسبت اخیر r برابر خواهد شد.

موضوعی که یادآوری آن حائز اهمیت می باشد این است که کلاً مبحث آنالیز موجک، یک مبحث کاملاً جدید و در حال توسعه است و در این میان سیستم موجک های چندگانه که بیش از پنج سال از معرفی آنها نمی گذرد زمینهٔ تحقیقاتی کاملاً جدیدی است. گرچه در سال ها اخیر در زمینهٔ استفاده از سیستم موجک های اسکالر برای آنالیز ارتعاشی تحقیقاتی صورت گرفته است، که می توان به اخیرترین این تحقیقات از جمله [۱۱و۱۲] اشاره کرد، ولی تاکنون هیچ تحقیقی در زمینهٔ امکان استفاده از موجک های چندگانه در آنالیز سیگنال های ارتعاشی صورت نگرفته است. در این مقاله برای اولین بار آنالیز سیگنال های ارتعاشی با استفاده از سیستم موجک های چندگانه توسعه یافته و برای تشخیص عیوب موضعی و

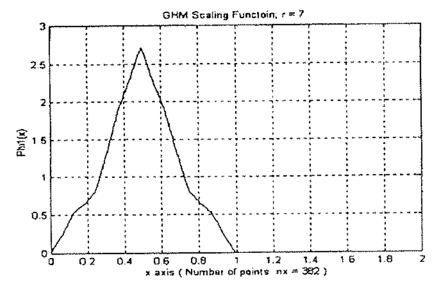
پدیده های گذرا در سیستم های مکانیکی بکار رفته است لذا انجام این تحقیق ازنظر علمی و کاربردی دارای اهمیت خاصی می باشد.

فهرست علائم و اختصارات

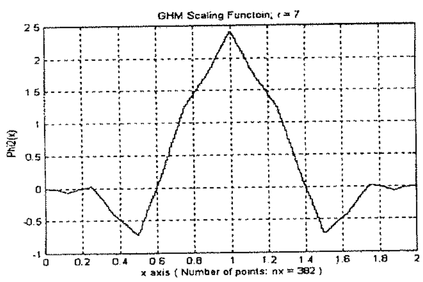
C_i^j و D_i^j	بردار ضرائب تبدیل موجک های چندگانه
c_i^j و d_i^j	المان های بردارهای D_i^j و C_i^j
$f(t)$	سیگنال در حوزهٔ زمان
G_k	ماتریس ضرائب برای محاسبهٔ توابع مقیاس
$g_{i,j}^k$	المان های ماتریس ضرائب G_k
H_k	ماتریس ضرائب برای محاسبهٔ توابع موجک
$h_{i,j}^k$	المان های ماتریس ضرائب H_k
I	ماتریس واحد
i,j,k,l	اعداد صحیح
$L^2(R)$	فضای سیگنال ها با انرژی محدود
t	پارامتر زمان
V_j	فضای ایجاد شده توسط انتقال و اتساع توابع مقیاس در سطح j
W_j	فضای ایجاد شده توسط انتقال و اتساع توابع موجک در سطح j
Z	مجموعهٔ اعداد صحیح
δ_{ij},δ_n	دلتای کرونکر
Φ	تابع برداری که المان های آن توابع مقیاس هستند
φ_i	تابع مقیاس iام
$\hat{\Phi}(\omega)$	تابع برداری Φ در حوزهٔ فرکانسی
Ψ	تابع برادری که المان های آن توابع موجک چندگانه هستند
ψ_i	تابع موجک iام

زیرنویس ها

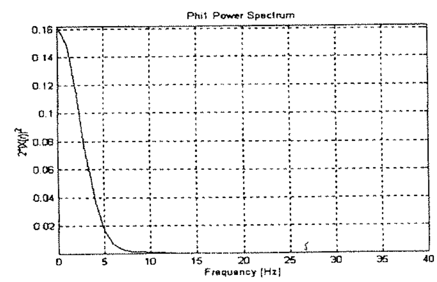
1.Multiwavelet Systems
2.Scalar Wavelets
3.Scale Functions
4.Wavelet Functions
5.Symmetric
6.Antisymmetric
7.Image Processing
8.Multiresolution Analysis
9.Fractal Functions
10.Mean Square Map



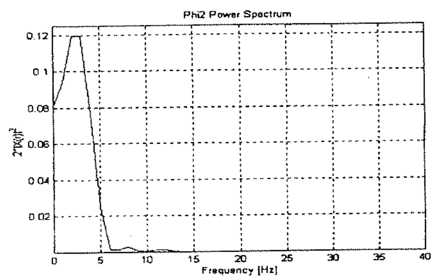
(الف) تابع مقیاس φ_1



(ب) تابع مقیاس φ_2

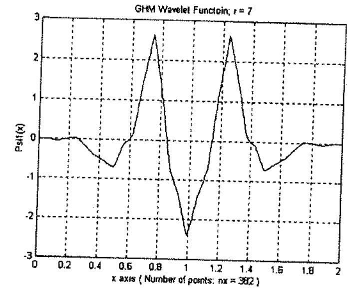


(ج) طیف توان تابع مقیاس φ_1

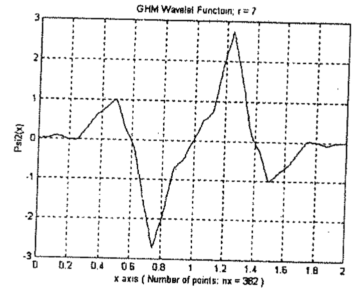


(د) طیف توان تابع مقیاس φ_2

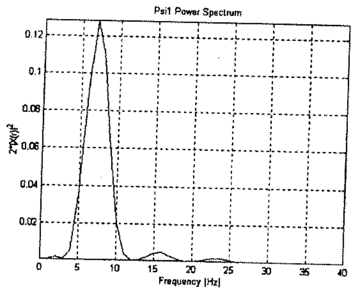
شکل (۱) توابع مقیاس GHM و طیف توان آنها.



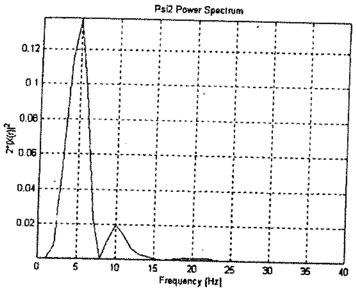
(الف) تابع موجک ψ_1



(ب) تابع موجک ψ_2

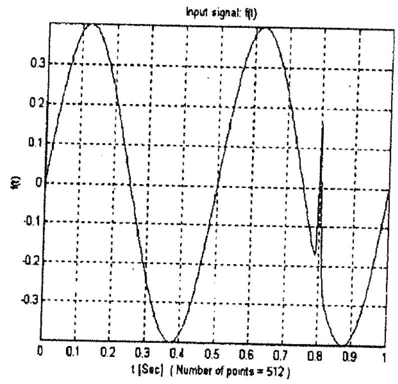


(ج) طیف توان تابع موجک ψ_1

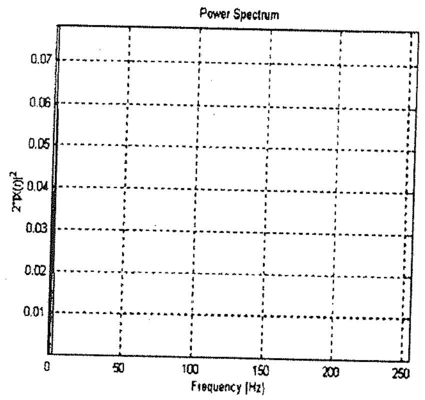


(د) طیف توان تابع موجک ψ_2

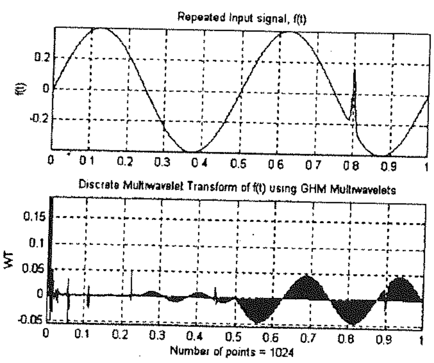
شکل (۲) توابع موجک DGHM و طیف توان آنها.



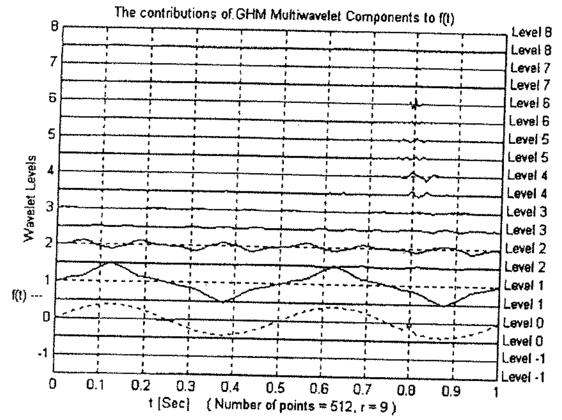
(الف) سیگنال سینوسی ترکیب شده با یک پالس باند پهن



(ب) طیف توان سیگنال سینوسی ترکیب شده با یک پالس باند پهن

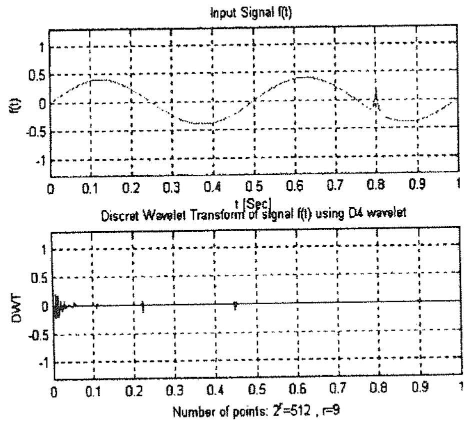


(ج) سیگنال ورودی تکرار شده و تبدیل موجک چندگانهٔ آن

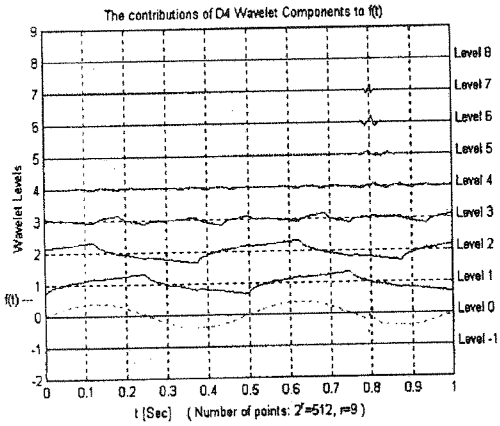


(د) تجزیهٔ سیگنال به سطوح مختلف با استفاده از تبدیل موجک چندگانهٔ DGHM

شکل (۳) آنالیز یک سیگنال سینوسی همراه با یک پالس باند پهن با استفاده از موجک های چندگانه DGHM و آنالیز طیفی.

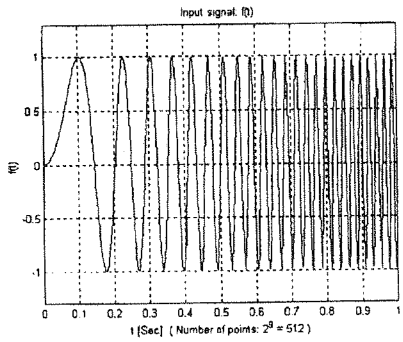


(الف) سیگنال ورودی همراه با تبدیل موجک D_4 آن

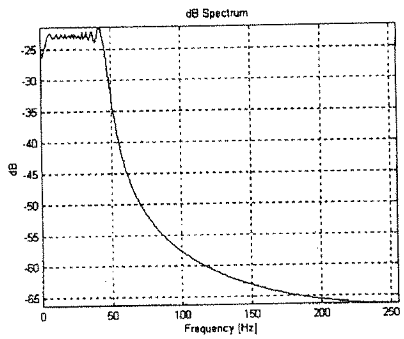


(ب) تجزیهٔ سیگنال به سطوح مختلف با استفاده از تبدیل موجک اسکالر D_4

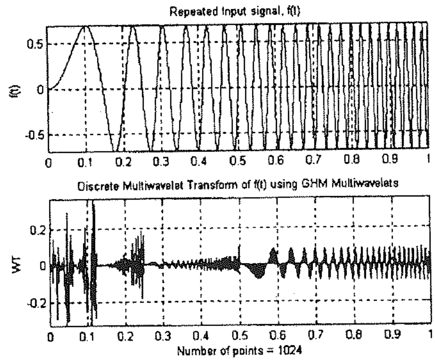
شکل (۴) آنالیز یک سیگنال سینوسی همراه با یک پالس باند پهن با استفاده از تبدیل موجک اسکالر D_4.



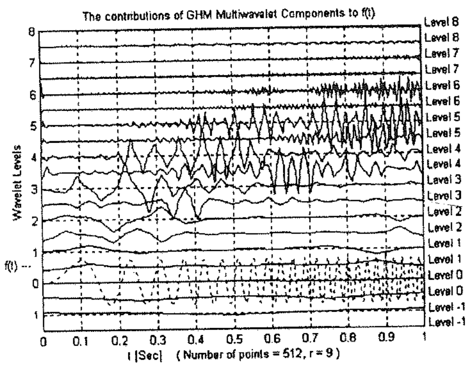
(الف) سیگنال سینوسی با فرکانس متغیر نسبت به زمان



(ب) طیف dB سیگنال سینوسی با فرکانس متغیر نسبت به زمان

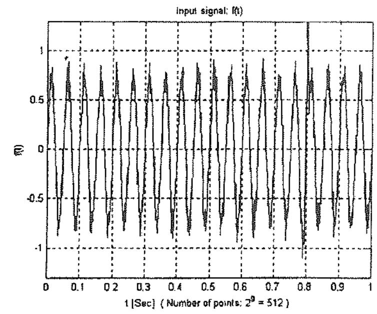


(ج) سیگنال ورودی تکرار شده و تبدیل موجک چندگانهٔ آن

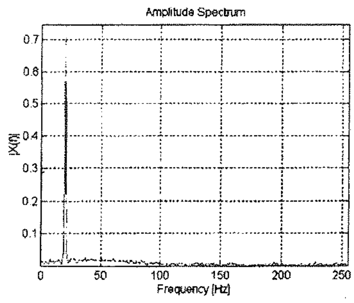


(د) تجزیهٔ سیگنال به سطوح مختلف با استفاده از تبدیل موجک چندگانهٔ DGHM

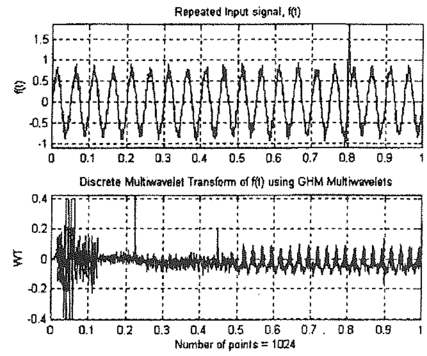
شکل (۵) آنالیز یک سیگنال سینوسی با فرکانس متغیر نسبت به زمان با استفاده از موجک چندگانه DGHM .



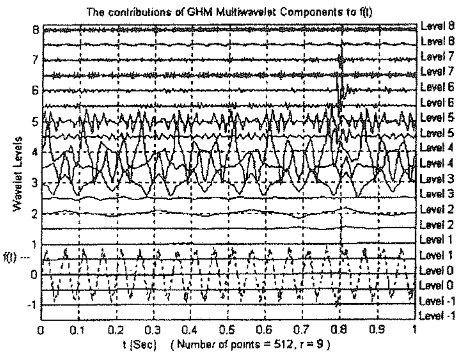
(الف) سیگنال سینوسی ترکیب شده با نویز سفید و ضربهٔ باند پهن



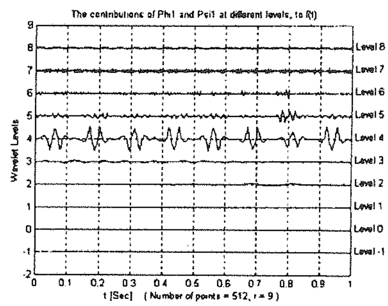
(ب) طیف دامنهٔ سیگنال



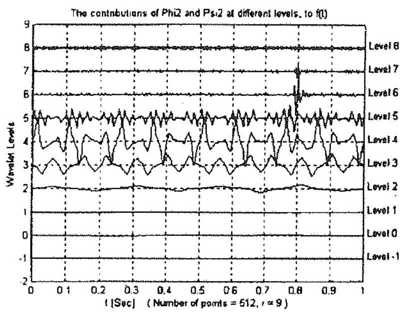
(ج) سیگنال ورودی تکرار شده و تبدیل موجک چندگانهٔ آن



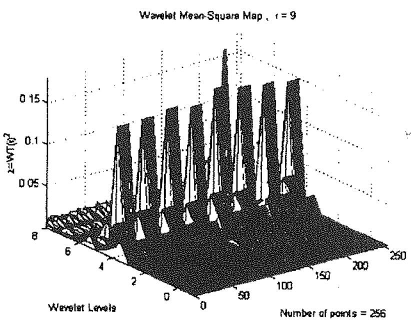
(د) تجزیهٔ سیگنال به سطوح مختلف با استفاده از تبدیل موجک چندگانهٔ DGHM



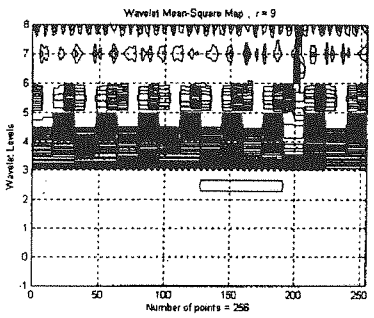
(ه) تجزیهٔ سیگنال به سطوح مختلف توابع مقیاس و موجک φ_1 ، ψ_1



(و) تجزیهٔ سیگنال به سطوح مختلف توابع مقیاس و موجک φ_2 ، ψ_2

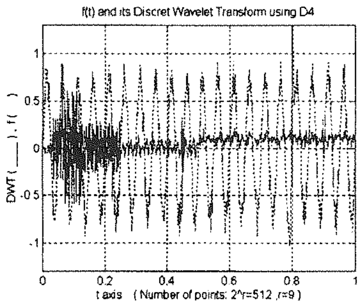


(ز) دیاگرام میانگین مربعات سه بعدی کلی در تمام سطوح مختلف توسط DGHM

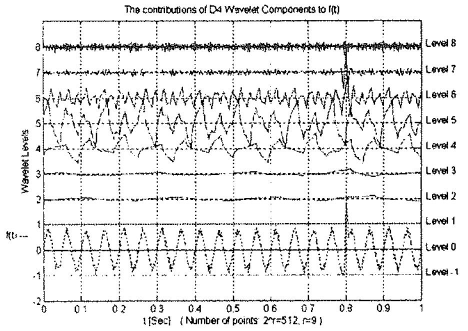


(ح) دیاگرام کانتور دو بعدی کلی در تمام سطوح مختلف توسط DGHM

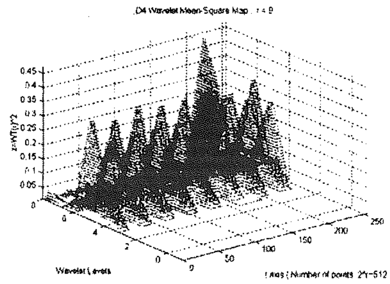
شکل (۶) آنالیز سیگنال سینوسی ترکیب شده با نویز و ضربه باند پهن با استفاده از موجک چندگانه DGHM و آنالیز طیفی.



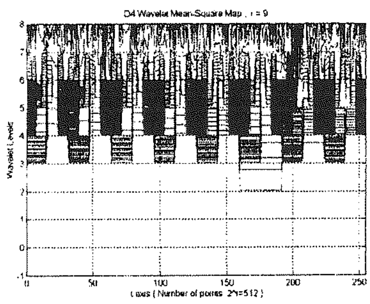
(الف) سیگنال ورودی و تبدیل موجک D_4 آن



(ب) تجزیهٔ سیگنال به سطوح مختلف با استفاده از تبدیل موجک D_4



(ج) دیاگرام میانگین مربعات سه بعدی با استفاده از تبدیل موجک D_4



(د) دیاگرام کانتور دو بعدی با استفاده از تبدیل موجک D_4

شکل (۷) تحلیل سیگنال بوسیله موجك D_4.

مراجع

[1] I. Daubechies, "The Wavelet Trtansform, Time-Frequency Localization and Signal Analysis", IEEE Transactions on Information Theory, 1990, 36, pp. 961-1005.

[2] Stephane Mallat, A Wavelet Tour of Signal Processing, Academic Press, 1998.

[3] C. Sidney Burrus, Ramesh A. Gopinath and Haitao Guo, Introduction to Wavelets and Wavelet transforms, Prentice Hall, 1998.

[4] Jeffery S. Geronimo, Douglas P. Hardin and Peter R. Massopust, "Fractal Functions and Wavelet Expansions Based on Several Scaling Functions", Journal of Approximation Theory, 1994, 78, pp. 373-401.

[5] Gilbert Strang, and Vasily Strela, "Short Wavelets and Matrix Dilation Equations", IEEE Transactions on Signal Processing, 1995, 43 (1), pp. 108-115.

[6] George C. Donovan, Jeffrey S. Geronimo, Douglas P. Hardin, and Peter R. Massopust, "Construction of Orthogonal Wavelets Using Fractal Interpolation Functions", SIAM Journal of Mathematical Analysis, 1996, 27 (4), pp. 1158-1192.

[7] D.E.Newland,"Wavelet Analysis of Vibration, Part 1: Theory", Journal of Vibration and Acoustics, 1994,116,pp. 409-416.

[8] D.E.Newland, "Wavelet Analysis of Vibration, Part 2: Wavelet Maps", Journal of Vibration and Acoustics, 1994,116,pp. 417-425.

[9] S. T. Lin & P. D. McFadden, "Vibration Analysis of Gearboxes by the Linear Wavelet Transform", Second International Conference on Gearbox Noise, Vibration, and Diagnostics, IMechE Conference Transactions, 16-17 November 1995,pp. 59-72.

[10] Yulin Yan and Taro Shimogo, "The Application of Haar Transform in Signature Extraction and Condition Monitoring of Mechanical Systems", JSME International Journal, Series III, 1990, 33 (2), pp. 191-197.

[11] G. Y. Luo, D. Osypiw, and M. Irle, "Real-Time Condtion Monitoring by Significant and Natural Frequencies Analysis of Vibration Signal with Wavelet Filter and Autocorrelation Enhancement", Journal of Sound and Vibration, 2000, 236 (3), pp. 413-430.

[12] K. Mori, N. Kasashima, T. Yoshiola and Y. Ueno,

"Prediction of Spalling on a Ball Bearing by Applying the Discrete Wavelet Transform to Vibration Signals", Wear, 1996, 195 (1-2), pp. 162-168.

[13] Roger Ghanem, and Francesco Romeo, "A Wavelet-Based Approach for the Identification of Linear Time-Varying Dynamical Systems", Journal of Sound and Vibration, 2000, 234 (4), pp. 555-576.

[14] Xiang-Gen Xia, Jeffrey S. Geronimo, Douglas P. Hardin, and Bruce W. Suter,"Design of Prefilters for Discrete Multiwavelt Transforms", IEEE Transactions on Signal Processing, 1996, 44 (1), pp. 25-35.

[15] Mariantonia Cotronei, Laura B. Montefusco, and Luigia Puccio, "Multiwavelet Analysis and Signal Processing", IEEE Transactions on Circuits and Systems - II: Analog and Digital Signal Processing, 1998, 45(8), pp. 970-987.

[16] Douglas P. Hardin, and David W. Roach, "Multiwavelet Prefilters-I: Orthogonal Prefilters Preserving Approximation Order p £ 2", IEEE Transactions on Circuits and Systems - II: Analog and Digital Signal Processing, 1998, 45(8), pp. 1106-1112.

[17] T. R. Downie, and B. W. Silverman, "The Discrete Multiple Wavelet Transform and Thresholding Methods", IEEE Transactions on Signal Processing, 1998, 46(9),pp. 2558-2561.

[18] Xiang-Gen Xia, and Bruce W. Suter, "Vector-Valued Wavelets and Vector Filter Banks", IEEE Transactions on Signal Processing, 1996, 44(3), pp. 508-518.

[19] Ivan W. Selesnick, "Balanced GHM-Like Multiscaling Functions", IEEE Signal Processing Letters, 1999, 6(5) pp. 111-112.

[20] Vasily Strela, Peter Niels Heller, Gilbert Strang, Pankaj Topiwala, and Christopher Heil, "The Application of Multiwavelet Filterbanks to Image Processing", IEEE Transactions on Image Processing, 1999,8(4)pp 548-563.

[21] Selesnick, Ivan W., "Multiwavelet Bases with Extra Approximation Properties", IEEE Transactions on Signal Processing, 1998, 46 (11), pp. 2898-2908.

[22] Ivan W. Selesnick, "Interpolating Multiwavelet Baese and the Sampling Theroem", IEEE Transactions on Signal Processing, 1999, 47 (6), pp. 1615-1621.

[23] T.D. Bui, and G. Chen,"Translation-Invariant Denoising Using Multiwavelets", IEEE Transactions on Signal Processing 1998, 46(12) pp 3414-3420.

۲۴ـ موسی رضائی، توسعه تحلیل و بررسی تجربی سیگنال های ارتعاشی برای عیب یابی بوسیلهٔ طراحی سیستم های موجک های متعامد دوگانه و چندگانه، گزارش سمینار رسالهٔ دکتری (منتشرنشده)، دانشگاه تربیت مدرس، زمستان ۱۳۷۹.