روش ترکیب رتبه بندی بسیار سریع گزینه ها با راه حل (های) بهینه سراسری براساس روش جایگشت

محمد جواد اصغر پور
دانشیار
دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه علم و صنعت ایران

کورش قاسمی
دانشجوی دکترای
مهندسی صنایع واحد علوم و تحقیقات دانشگاه آزاد اسلامی

چکیده

روش جایگشت (Permutation) یکی از روش های تصمیم گیری برای مدل های MADM بوده که براساس ماتریس تصمیم گیری و اوزان شاخص ها، رتبه بندی خطی گزینه ها را مشخص می نماید. این روش کلیه حالت های عملی از ارجحیت گزینه ها را به کمک آزمونی موسوم به «تست T» مورد بررسی و ارزیابی قرار می دهد. سرانجام رتبه بندی نهایی از ارجحیت گزینه های موجود چنان انتخاب می گردد که حداکثر مقدار آزمون را داشته باشد. در روش جایگشت با افزایش تعداد اندکی به گزینه ها، مدت زمان یافتن راه حل بهینه به شدت (بطور نمایی) افزایش می یابد. لذا کاربرد این روش را بسیار محدود کرده و یا به ناچار از روش های ابتکاری (Heuristic) برای حل اینگونه مسایل استفاده می گردد. اما روش جدید ترکیب (Combination) با اعمال شرایط بهینگی در فرایند محاسباتی و کاهش دایمی فضای جستجو، ضمن ارایه راه حل (های) بهینه سراسری (دقیقاً معادل روش جایگشت) از کارایی و سرعت عملیاتی بسیار بالایی نیز برخوردار است. بگونه ایی که در محاسبات آزمایشی برای رتبه بندی ده گزینه، بطور متوسط حدود یکصدو بیست هزار (۱۲۰،۰۰۰) برابر سریعتر از روش جایگشت است. ضمناً برای حل برخی از مسایل رتبه بندی خطی (مانند: مسایل فروشنده دوره گرد، سیستم رای گیری ترجیحی، توالی عملیاتی (Scheduling) یك ماشین و یا یك کار) می توان از مفاهیم و رویکرد روش ترکیب استفاده نمود.

کلمات کلیدی

روش ترکیب، روش جایگشت (پرموتاسیون)، رتبه بندی گزینه ها، ارجحیت ترتیبات خطی، تصمیم گیری چند مشخصه ای.

Combination Method: Very Fast Ranking Procedure with Global Solution(s) Based on Permutation Method

M. J. Asgharpour
Associate Professor
Department of Industrial Engineering
Iran University of Science & Technology

K. Ghassemi
Ph. D. Student
Industrial Engineering Department of
Industrial Engineering Science &
Research Campus Islamic Azad University

Abstract

Permutation method is one of the MADM techniques. This method can find and determine the best linear ordering of the alternatives on the basis of maximizing a test called "T" test. Unfortunately, to reach the final result by PM, needs termendous amount of CPU-time and increases exponentially as the number of the alternatives increases. Therefore it can be categorized as NP-Hard. There are many heuristic methods in literratures which try to find local solutions of the permutation method. The following new combination method applies to optimization conditions during the calculating process (by defining two main rules). It reduces the searching space continuously and computes the final global optimal solutions with respect to value functions properties. The new combination method is about 120,000 times faster than permutation method with the same conditions and 10 alternatives and based on empirical data. Combination method can be developed for other linear ordering problems such as traveling salesman, one machine or one job scheduling and preferential voting system.

Keywords

Permutation; Combination; MADM; Ranking; Linear ordering; Value function; NP-Hard problem; Global optimal solution.

مقدمه

رتبه بندی و یا انتخاب گزینه ها از میان حالت های عملی، براساس معیارها و شاخص های تعریف شده، یک نوع روش تصمیم گیری چند مشخصه ایی (MADM = Multiple Attribute Decision Making) [۱،۲] می باشد. روش جایگشت (Permutation) نیز یکی از روش های تصمیم گیری چند مشخصه ایی بوده که در جستجوی یافتن ترتیب مطلوبی از ارجحیت کلیه گزینه ها براساس معیارهای از پیش تعریف شده ایی می باشد[۳]. بنابراین بمنظور تعیین راه حل بهینه می بایست تمامی حالت های ممکن از ارجحیت رتبه بندی گزینه ها را مورد آزمون قرار داد. این آزمون مبتنی بر مقایسات دوبدوی گزینه ها تحت هر شاخص، براساس هر ترکیب اولویت بندی مفروض از گزینه ها می باشد. مآلاً رتبه بندی از ارجحیت گزینه ها انتخاب می گردد که، بیشترین هماهنگی و کمترین ناهماهنگی با ترتیب مشخصه های گزینه ها را داشته باشد. بعبارت دیگر از میان راه حل هایی عملی، ترتیبی از ارجحیت گزینه ها برگزیده می شود که حداکثر مقدار آزمون را دارا باشد. برای استفاده از این روش صرفاً نیاز به ماتریس تصمیم گیری و اوزان شاخص ها بوده و هیچگونه ضرورتی به تبدیل کیفی به کمی و یا بی بعد کردن (Scaleless) مقادیر گزینه ها تحت هر شاخص نمی باشد. فرایند عملیات محاسباتی روش جایگشت بسیار ساده بود و به لحاظ جستجو در کل فضای عملی که بسته و محدود شده است، نسبت به دسترسی به راه حل بهینه سراسری اطمینان کامل وجود دارد. اما مشکل اصلی این روش در حجم بسیار بالای عملیاتی و صرف زمان بسیار زیاد محاسباتی برای جستجو در کل فضای عملی بوده، بگونه ایی که از مصادیق مشهور مسایل NP-HARD می باشد. در نتیجه روش های ابتکاری (Heuristic) متعددی برای حل مسایل گوناگون جایگشت پیشنهاد و بکار گرفته شده اند. بعنوان نمونه می توان به روش های ابتکاری بکارگیری برنامه ریزی پویا در آلگریتم ژنتیک[۴]، آلگریتم شاخه و کران[۵]، آلگریتم شبیه آنیله کردن (Simulated Annealing) [۶] را نام برد. جانزوکوبیلانکسی [۷] بطور اخص یک روش ابتکاری برای حل مسایل رتبه بندی خطی ارایه نموده و متوجه شده اند که یک قرینگی (Symmetry) در اینگونه مسایل وجود دارد. به عبارت دیگر راه حل بهینه برای مسایل با تابع هدف بیشینه، در صورت معکوس کردن ترتیبات ارجحیت گزینه ها، راه حل بهینه برای تابع هدف کمینه مشابه خواهد بود. نکته بسیار مهم در تمامی راه حل های پیشنهادی، در ارایه راه حل های بهینه محلی (Local) در مقابل ارایه راه حل (های) بهینه سراسری (Global) می باشد. اما یک روش جدید تحت عنوان روش ترکیب (Combination) با حفظ ویژگی ها، منطق و روح حاکم بر روش جایگشت (بطور اخص تأکید بر ارایه راه حل بهینه سراسری) و حذف نقیصه انجام محاسبات بسیار زیاد، در این مقاله معرفی و تشریح گردیده است. بدین ترتیب امکان مقایسه روش ترکیب با برخی از روش های تصمیم گیری چند مشخصه ایی نظیر تخصیص خطی، فرایند سلسله مراتب تحلیلی (AHP) و الکتر (ELECTRE) فراهم می گردد.

روش تخصیص خطی (Linear Assignment) [۸] مبتنی بر حداکثر نمودن ارزش کل استقرار هر گزینه در رتبه بندی باوزن بیشتر (بگونه ای که کل بهینه گردد) تعیین می گردد. بعبارت دیگر هر گزینه تحت هر شاخص نسبت به سایر گزینه ها، دارای رتبه ای است و وزن آن شاخص (که جزء داده های ورودی است) به رتبه گزینه مربوط تعلق می گیرد. سرانجام تأثیر سایر شاخص ها نیز براساس حاصل جمع اوزان شاخص های منظور شده برای هر گزینه، تحت هر رتبه بندی تعیین می گردد[۱]. داده های ورودی روش تخصیص خطی و روش ترکیب مشابه بوده و نتایج هر دو نیز بصورت رتبه ای می باشد. اما روش تخصیص خطی مقایسات زوجی بین گزینه ها را به هیچوجه در نظر نمی گیرد. درروش تخصیص خطی این فرض ضمنی وجود دارد که فاصله بین رتبه بندی برای هر شاخص مساوی است. حال آنکه این فرض لزوماً همیشه صادق نیست. در صورتیکه روش ترکیب، براساس مقایسات زوجی گزینه ها تحت هر شاخص، نوعی اندازه گیری فاصله ای را ایجاد می کند که امکان جمع پذیری ارزش ها بین شاخص ها را فراهم می آورد.

روش فرایند سلسله مراتب تحلیلی (Analytical Hierarchy Process = AHP) [۹] به لحاظ مقایسات زوجی گزینه ها تحت هر شاخص با مفاهیم روش ترکیب نزدیک است. البته در روش AHP شدت مقایسات ($a_{ij} = \frac{W_i}{W_j}$) برای تبیین میزان ارجحیت در نظر گرفته می شود (روش AHP براین فرض بنیاد نهاده شده که تصمیم گیرنده می تواند نرخ نهایی جانشینی بین دو گزینه و یا دو شاخص را تعیین و ارایه نماید). در صورتیکه در روش ترکیب شدت ارجحیت مقایسات در نظر گرفته نمی شود و لذا کاربرد آنرا محدود می کند. ضمناً روش AHP با انجام پیش فرض هایی (وجود ثبات قابل قبول در تصمیمات مقایسات زوجی) و اتخاذ تدابیری درراستای جمع پذیری وزن هر شاخص (نرمالیزاسیون ستونی و میانگین سطری ماتریس تصمیم گیری)، امکان کاهش شدید حجم محاسبات را فراهم کرده است. البته این خود سبب بروز مشکل عکس پذیری رتبه ها (Rank Reversal) و عدم حصول اطمینان از رتبه بندی

واقعی گزینه ها در روش AHP می گردد. از نقاط ضعف دیگر روش AHP می توان به مشکلات افزایش تعداد گزینه ها (ویا شاخص ها) به لحاظ مقایسات زوجی و تعیین تعداد بسیار زیاد نرخ های نهایی جانشینی گزینه ها نسبت بهم، اشاره نمود. پیچیدگی مراحل قضاوت بین ارجحیت گزینه ها، مشکلات عدیده ناسازگاری (Inconsistency) را بهمراه دارد. بدلیل آنکه طبق تعریف، نسبت ثبات (CR) پروفسور ساعتی[۹] $\text{Consistency Ratio (CR)} = \frac{\text{Consistency Index (CI)}}{\text{Random Index (RI)}}$ با افزایش تعداد گزینه ها (بیش از ۱۳ گزینه) مقدار شاخص تصادفی (RI) تقریباً ثابت می ماند ولی شاخص ثبات (CI) به لحاظ امکان تناقض در تصمیمات (بدلیل مقایسات زوجی) بشدت افزایش خواهد یافت. حال آنکه در روش ترکیب بدون تعیین نسبت وزن $\frac{W_i}{W_j}$ (که برای تعداد زیاد گزینه ها مشکل آفرین خواهد شد) طرفاً با تشخیص بزرگتر و مساوی (≥) و یا کوچکتر و مساوی (≤) و بدون تناقض انتقال پذیری (Transitivity)، برای تعداد زیاد گزینه ها از کارایی بهتری نسبت به روش AHP برخوردار است. ضمناً روش ترکیب، در شرایط افزایش تعداد گزینه ها به لحاظ ایجاد یک فضای کیفی مقایسه ایی، بطور تلویحی (نه تصریحی) قادر به اعمال شدت ارجحیت گزینه ها تحت هر شاخص خواهد بود.

روش ELECTRE[۱۰]،[۱۱] و[۱۲] نیز همانند روش ترکیب از اوزان شاخص ها (W_j) بعنوان داده های ورودی استفاده کرده و دو زیر مجموعه متمایز هماهنگ و ناهماهنگ را تشکیل داده و سرانجام نیز رتبه بندی ارجحیت گزینه ها تحت هر معیار کمی ارایه می نماید[۲]. اما در روش ELECTRE تلاش می گردد که بگونه ایی شدت ارجحیت گزینه ها را بدون شاخص (r_{ij}) نیز در نظر گرفته شود. ضمناً با انجام یک مجموعه از محاسبات، بدون عمل جستجو، راه حل نهایی ارجحیت گزینه ها تعیین می گردد. البته اشکال این روش در مقام مقایسه با روش ترکیب در عدم وجود معیار و شاخص نهایی (مانند «تست T») بوده و تعیین اعتبار راه حل بهینه سراسری آن در هاله ای از ابهام است. در روش ELECTRE با افزایش تعداد گزینه ها امکان تشکیل گره (عدم امکان تصمیم گیری ارجحیت گزینه ها) بشدت افزایش می یابد، بگونه ای که برای رتبه بندی ارجحیت کلیه گزینه ها، بکارگیری آن از حیظ انتفاع خارج می گردد. البته آلگریتم هایی برای اصلاح و بهبود روش ELECTRE پیشنهاد گردیده اما سهولت و سادگی روش اصلی را کاهش داده اند.

در ادامه، نخست روش جایگشت از زوایای گوناگون مورد بررسی و تجزیه و تحلیل قرار گرفته و به ویژگی ها، نقاط ضعف و دامنه کاربرد آن تأکید شده است. سپس روش ترکیب بطور تفصیلی تشریح و علت قواعد بیان گردیده و در پی آن نیز الگوریتم ونمونه محاسباتی آن آمده است. سرانجام اقدام به مقایسه دو روش ترکیب و جایگشت گردیده وبا جمع بندی، پیشنهادهای مقتضی مطرح گردیده است.

۱- روش جایگشت

در روش جایگشت کلیه حالت های ممکن از ترکیب رتبه بندی ارجحیت گزینه ها مورد توجه قرار می گیرد. سپس براساس معیاری بنام «تست T» ترتیب ارجحیت گزینه ها بگونه ای انتخاب خواهند شد که دارای حداکثر مقدار T (یعنی T_{max}) باشند[۱].

۱-۱- اصول و معادلات

در روش جایگشت هر رتبه بندی عملی از m گزینه موجود مورد تست و آزمون قرار می گیرد. تعداد حالت های عملی معادل !m (ام فاکتوریل) خواهد بود. سرانجام ترتیب گزینه ها با بیشترین مقدار آزمون تابع هدف، بعنوان راه حل (های) بهینه انتخاب می گردد. داده های ورودی روش جایگشت، ماتریس تصمیم گیری $D = \|r_{ij}\|$ و اوزان (W_j) به ازای شاخص های موجود با فرض $\sum_j W_j = 1$ می باشد. آلگوریتم روش جایگشت بشرح زیر جمع بندی می گردد:

مرحله نخست) جایگشت های ممکن از m گزینه موجود تشکیل می گردد $P_i = \{A_k, A_l, A_m, \ldots\}$

مرحله دوم) به ترتیب در هر محله از انتقال، یکی از جایگشت ها را انتخاب کرده و یک مجموعه فرعی هماهنگ (S_{kl}) و یک مجموعه فرعی ناهماهنگ (R_{kl}) به صورت ذیل تشکیل می گردد.

$S_{kl} = \{A_k \geq A_l, A_k \geq A_m, A_l \geq A_m, \ldots\}$ =مجموعه فرعی هماهنگ

$R_{kl} = \{A_k \leq A_l, A_k \leq A_m, A_l \leq A_m, \ldots\}$ =مجموعه فرعی ناهماهنگ

مرحله سوم) با توجه بر آنکه $A_k \geq A_l$، بدان مفهوم است که گزینه A_k ارجح یا حداقل هم ارز با گزینه A_l است، اگر $A_k \geq A_l$ در رتبه بندی فرعی باشد، آنگاه واقعیت $r_{kj} \geq r_{lj}$ با W_j+ وزن دهی گردیده و واقعیت $r_{kh} \leq r_{lh}$ با W_h- وزن دهی می گردد.

مرحله چهارم) یک معیار (T_i) برای تست رتبه بندی جایگشت iام (P_i) بصورت زیر تعریف می گردد:

$$T_i = \sum_{j \in S_{kl}} W_j \sum_{j \in R_{kl}} W_j \quad ; i=1,2,3, \ldots ,m! \qquad (1)$$

بطوریکه: $\begin{cases} S'_{kl} = \{j \mid r_{kj} \geq r_{lj}\} \; ; k, l=1,2,3, \ldots,m; \; k \neq l \\ R'_{kl} = \{j \mid r_{kj} \geq r_{lj}\}; k, l=1,2,3, \ldots,m; \; k \neq l \end{cases}$

یعنی مجموعه هماهنگ S'_{kl} (منشعب از S_{kl}) نشان دهنده زیر مجموعه حاصل از کلیه شاخص هایی است که برای آنها $r_{kj} \geq r_{lj}$ است و زیر مجموعه R'_{kl} (منشعب از R_{kl}) نشان

دهنده مجموعه شاخص های ناهماهنگ با رتبه بندی فرعی موجود از هر جایگشت ام (P_i) است.

مرحله پنجم) شناسایی و یافتن بیشینه مقدار ($\max T_i : i = 1, 2, 3, \ldots, m!$) T_i که از آنجا مناسب ترین رتبه بندی(ها) جهت اولویت بندی گزینه های موجود حاصل خواهد شد.

۱-۲- تحلیلی از مزایا و محدودیت ها

درروش جایگشت نیازی به بی بعد کردن ارزش هر گزینه تحت هر شاخص (r_{ij}) نمی باشد. بنابراین ضرورتی به تبدیل شاخص های کیفی به کمی وجود ندارد. بدین ترتیب اصالت دیدگاه های تصمیم گیرنده به همان شکل خود حفظ می گردد. تابع هدف آن نیز حداکثر نمودن رضایت (ارزش) تصمیم گیرنده است. ضمناً به لحاظ ماهیت مقایسات زوجی ارجحیت گزینه ها تحت هر شاخص(r_{ij}) ، عملاً بطور مستقیم، شدت ارجحیت گزینه ها نسبت به هم در نظر گرفته نشده و به لحاظ عدم نیاز به نرمالیزاسیون، مشکل عکس پذیری رتبه ها (Rank Reversal) بسیار کاهش می یابد.

البته روش جایگشت بر اساس تابع ارزشی (Value Function) خطی عمل نموده و فقط در شرایط اطمینان و قطعیت تصمیمات بکار می رود. بعلاوه مقادیر وزن شاخص ها (W_i) بعنوان داده های ورودی تلقی می گردند که خود باعث کاهش قابلیت بکارگیری یکپارچه وموزون این روش در فرایند سلسله مراتبی شاخص ها و زیر شاخص ها و سرانجام گزینه ها خواهد بود. بعبارت دیگر عدم یکنواختی در تعمیم این روش در سایر سطوح وجود دارد.

روش جایگشت به لحاظ منطق محاسباتی آن، تمام فضای جستجو را بررسی می کند و می تواند راه حل (های) بهینه سراسری را بیابد. اما با افزایش اندکی بر تعداد گزینه ها، بشدت حجم محاسبات افزایش می یابد بگونه ای که از مصادیق مشهود مسایل NP-HARD می باشد. ضمنا در مقایسات زوجی شدت ارجحیت ارزش گزینه ها تحت هر شاخص (مقصود r_{ij} است) بطور صریح لحاظ نمی گردد و عدم تجانس میزان دقت بین اوزان شاخص ها (W_i) و مقادیر کمی ارزش هر گزینه تحت هر شاخص (r_{ij}) وجود دارد.

۲- روش ترکیب

روش ترکیب (Combination) براساس اصول و مفاهیم روش جایگشت بنیاد گذارده شده، اما با این تفاوت که شرایط بهینگی را در فرایند جستجو اعمال می نماید. علت نام گذاری این روش نیز بر خواسته از ماهیت تعداد ترکیبات مقایسات زوجی گزینه ها (جهت محاسبه وزن ارجحیت) و همچنین تعیین ارزش هر گزینه در فضای جستجوی محدود شده، از طریق جمع جبری اوزان ارجحیت گزینه های انتخاب شده، می باشد.

۱-۳- اصول و معادلات

فرایند محاسباتی روش ترکیب با هر ترتیب دلخواهی از ارجحیت گزینه ها شروع گردیده و همانند روش جایگشت براساس وضعیت هماهنگی و یا ناهماهنگی ارجحیت مقایسات زوجی گزینه ها در پیش فرض اولیه (مانند: $A_i \succ A_j$) ارزش نسبی هر دو گزینه تحت هر شاخص ماتریس تصمیم گیری (مانند: $r_{ik} > r_{jk}$) تعیین می گردد. در صورت هماهنگی، وزن شاخص مربوطه با علامت مثبت (مانند: $+W_k$) و در صورت ناهماهنگی وزن شاخص مربوطه با علامت منفی (مانند: $-W_k$) درنظر گرفته می شود. در شرایط تساوی مقادیر ارزش هر دو گزینه تحت هر شاخص ماتریس تصمیم گیری (مانند: $r_{ik} = r_{jk}$) وزن شاخص با مقدار صفر در نظر گرفته می شود. بدین ترتیب با جمع جبری مقادیر اوزان شاخص ها برای هر مقایسه زوجی از گزینه ها (مانند: A_i و A_j)، مقادیر اوزان ارجحیت ($W_{SR}(i,j)$) محاسبه می گردد (همانند روش جایگشت، وزن شاخص ها جزء داده های ورودی می باشند).

$$A_i \succ A_j \Rightarrow W_{SR}(i,j) = \sum_{r_{ik} > r_{jk}} W_k - \sum_{r_{jk} > r_{ik}} W_k \quad ; k=1, \ldots, n$$

(معادله تعیین اوزان ارجحیت)

(۲)

بدین ترتیب با محاسبه مقادیر اوزان ارجحیت ($W_{SR}(i,j)$) عملا رابطه نسبی (برتری و یا پست تری) بین دو گزینه تعیین می گردد. محاسبه مقادیر اوزان ارجحیت صرفا یک دفعه در کل محاسبات انجام می شود. علامت مثبت $W_{SR}(i,j)$ بیانگر این واقعیت است که واقعاً گزینه i ام (A_i) برگزینه j ام (A_j) ارجح است. به همان دلیل علامت منفی $W_{SR}(i,j)$ بیانگر ارجحیت A_j بر A_i می باشد. مقدار صفر اوزان ارجحیت دو گزینه بیانگر بی تفاوتی در رتبه بندی تقدم A_i و A_j می باشد. ضمنا لازم به تأکید است که ماتریس W_{SR} بالا مثلثی است. جمع جبری کلیه مقادیر اوزان ارجحیت مقایسات زوجی گزینه ها معادل همان «تست T» روش جایگشت می باشد. معادله شماره (۳) دقیقاً معادل معادله شماره (۱) برای «تست T» روش جایگشت است.

$$T_{(tst)} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j>i}^{m} (W_{SR}(i,j) - W_{SR}(j,i)); \quad i=1,\ldots,m \ \& \ j>i$$

(معادله آزمون "T" روش ترکیب)

(۳)

در معادله شماره (۳) فقط یکی از دو مقادیر $W_{SR}(i,j)$ و $W_{SR}(j,i)$، غیر از صفر می تواند باشد.

در روش ترکیب ارجحیت گزینه ها باید بگونه ای مستقر شوند که حتی الامکان مقادیر $W_{SR}(i,j)$ مثبت باشد. در شرایط خاص اگر بتوان با جابجایی رتبه بندی گزینه ها، تمام مقادیر اوزان ارجحیت مقایسات زوجی گزینه ها را مثبت نمود، آنگاه انتقال پذیری (Transitivity) بین رتبه بندی خطی وجود داشته و خود یک راه حل بهینه سراسری است[۱۳]. اما در اکثر مواقع بین رتبه بندی استقرار ارجحیت گزینه ها تبادلاتی برای شرایط بهینگی کل مقایسات زوجی گزینه ها وجود دارد.

اگر تعداد گزینه ها معادل m باشد، هر گزینه m-1 دفعه مورد مقایسه قرار می گیرد. بنابراین با استناد به اعتبار تابع ارزش (Value Function) و وجود شرط استقلال متقابل در حالت جمع پذیری و از همه مهم تر میزان «ارزش تصمیم گیرنده» بعنوان واحد سنجش مشترک و یگانه، بنابراین ارزش هر یک از گزینه ها در مقام مقایسه با سایر گزینه ها بطور جداگانه براساس معادله شماره (۴) محاسبه می گردد:

$$VA_i = \sum_{j=1}^{m} W_{SR}(i,j) - \sum_{j=1}^{m} W_{SR}(j,i) \quad ; \; i=1,...,m \;\&\; i\#j$$

(معادله تعیین ارزش هر گزینه)

(۴)

در معادله تعیین ارزش هر گزینه، مقادیر اوزان ارجحیت گزینه ها ($W_{SR}(i,j)$) یکبار با علامت مثبت (برای محاسبه ارزش گزینه i ام (VA_i)) و یکبار با علامت منفی (برای محاسبه ارزش گزینه j ام (VA_j)) جهت تعیین ارزش گزینه ها بکار می روند. بنابراین جمع جبری ارزش گزینه ها معادل صفر خواهد شد. در نتیجه امکان تفکیک گزینه ها به دو مجموعه هماهنگ و ناهماهنگ رتبه بندی گزینه ها همانند مفاهیم روش جایگشت وطبق معادله شماره (۱)، فراهم می گردد. بعبارت دیگر گزینه هایی با ارزشی مثبت و صفر بسوی انتخاب برترین گزینه ها (بیشینه تابع هدف ارزش برای تصمیم گیرنده از لحاظ رتبه بندی نهایی) و گزینه هایی با ارزش منفی و صفر بسوی انتخاب پست ترین گزینه ها (کمینه تابع هدف ارزشی برای تصمیم گیرنده از لحاظ رتبه بندی نهایی) هدایت می گردند. علت این امر خواص مقایسات زوجی گزینه ها، تعریف تابع هدف و جمع پذیری روش ترکیب بوده که یک نوع رتبه بندی خطی با خواص قرینگی را ایجاد می کند[۷]. البته این نکته لازم به تأکید است که در روش ترکیب هیچگونه الزام و اجباری به تفکیک گزینه ها در دو جهت و انجام عملیات همزمان نیست بلکه می توان از هر دو طرف بطور جداگانه ویا توأماً اقدام به جایگذاری گزینه ها درمحل های استقرار مناسب نمود ونتایج کاملاً مشابه خواهد بود. البته جایگذاری دو طرفه می تواند زمان محاسباتی کمتری را به خود اختصاص دهد. ذکر این نکته خود شاهدی در عمومیت منطق حاکم بر روش محاسباتی ترکیب است.

محاسبه ارزش هر گزینه در فضای جستجو نکته کلیدی روش ترکیب بوده و قواعد تصمیم گیری استقرار گزینه ها در جایگاه های مناسب نیز بستگی به مقادیر آن دارد. این رویکرد نوین در غربال کردن گزینه ها در هر مرحله محاسباتی و جداسازی آنها در دو دسته بندی مختلف بسیار مفید و ضروری می باشد. دو قاعده اصلی برای تعیین و استقرار گزینه های غالب (Dominant Alternatives) در موتور جستجوی (Search Engine) روش ترکیب بکار می رود. طبق تعریف، گزینه غالب بطور قطعی برترین شرایط را نسبت به سایر گزینه ها درهر جایگاه رتبه بندی نهایی را در بر خواهد داشت.[۱]،[۲] و[۱۳] جابجایی گزینه غالب با هر گزینه دیگر در محل تعیین شده منجر به کاهش تابع هدف ارزشی خواهد شد.

دو قاعده اصلی تعریف شده، منطبق با جهت هماهنگ (Concordance Direction) می باشند. برای جهت ناهماهنگ بدلیل خواص قرینگی روش ترکیب، تابع هدف معکوس گردیده (یعنی تابع هدف ارزشی بیشینیه تبدیل به کمینه می گردد) وبطور منطقی دو قاعده اصلی نیز معکوس خواهند شد. اگر در عملیات جستجوی راه حل بهینه، به هر دلیلی امکان بکارگیری دو قاعده اصلی مهیا نباشد، فرایند جداسازی (Screening) و کاهش مستمر فضای جستجو پیگیری گردیده تا سرانجام دو گزینه داوطلب (Candidate) برای استقرار در یک محل تعیین گردند. در چنین شرایطی کلیه محاسبات بعدی و استقرار سایر گزینه ها در محل های مناسب برای هر دو گزینه بطور همزمان انجام می شود. پس از استقرار کلیه گزینه ها در جایگاه های مربوطه اقدام به محاسبه آزمون "T" برای راه حل های پیشنهادی گردیده که بهترین رتبه بندی تعیین می گردد.

۳-۲- قواعد تصمیم گیری:

در روش ترکیب دو قاعده اصلی و یک قاعده مکمل (Complementary) و یک قاعده جداسازی (Screening) به شرح زیر بکار برده می شوند. لازم به تأکید است که کلیه قواعد زیر براساس جهت هماهنگ (یعنی بیشینه کردن تابع هدف ارزشی) درج شده اند.

قاعده اصلی شماره (۱)

اگر در هر فضای جستجوی محدود شده، ارزش یک گزینه قاطعانه مثبت باشد و ارزش سایر گزینه ها قاطعانه منفی باشد، گزینه با ارزش مثبت غالب است و بعنوان برترین گزینه انتخاب می گردد.

بیان ریاضی:

$$\forall A_i, A_j, A_k, \ldots, A_l \in A,$$

$$\text{If } (VA_i > 0 \wedge VA_j < 0 \wedge VA_k < 0 \wedge \ldots \wedge VA_l < 0)$$

Then: Select A_i as the best alteranative.

اثبات قاعده اصلی شماره (۱) براساس اصل استقراء ریاضی در پیوست شماره (۱) آمده است.

قاعده اصلی شماره (۲)

اگر فقط دو گزینه دارای ارزش غیر منفی درفضای جستجوی محدود شده باشند و گزینه با ارزش بیشتر دارای وزن ارجحیت مقایسه زوجی مثبتی هم باشد، آنگاه این گزینه غالب بوده و بعنوان برترین گزینه انتخاب می گردد.

بیان ریاضی:

$$\forall A_i, A_j, A_k, \ldots, A_l \in A,$$

$$\text{If } (VA_i > VA_j \geq 0 \wedge VA_k < 0 \wedge \ldots \wedge VA_l < 0 \wedge W_{SR}(i,j) > 0)$$

Then: Select A_i as the best alteranative.

اثبات قاعده اصلی شماره (۲) براساس اصل استقراء ریاضی در پیوست شماره (۲) آمده است.

قاعده مکمل

اگر فقط دو گزینه دارای ارزش های غیر منفی در فضای جستجوی محدود شده باشند، اما شرایط قاعده اصلی شماره (۲) صادق نباشد، هر دو گزینه داوطلب استقرار در یک جایگاه رتبه بندی می باشند. بنابراین کلیه محاسبات بعدی و استقرار سایر گزینه های باقیمانده بطور همزمان برای هر دو گزینه انجام خواهد شد. سرانجام بوسیله آزمون تابع هدف راه حل (های) بهینه مشخص می گردد.

هیچگونه تصمیم گیری در استقرار گزینه غالب در قاعده مکمل انجام نمی شود. قاعده مکمل صرفاً جهت تشریح و تعیین وضعیت عدم پیروی از قواعد اصلی می باشد. بعبارت دیگر اگر امکان استقرار گزینه غالب طبق دو قاعده اصلی شماره (۱) و (۲) مهیا گردید، فضای جستجو برای مراحل بعدی جای گذاری گزینه محدود شده و سرعت دسترسی به راه حل (های) بهینه تسریع می گردد. در غیر این صورت طبق قاعده مکمل، کلیه محاسبات بعدی برای آخرین دو گزینه داوطلب (Candidate) بطور همزمان انجام می شود.

قاعده جداسازی

اگر بیشتر از دو گزینه در مجموعه هماهنگ (یعنی گزینه های با ارزش های غیر منفی) وجود داشته باشند، آنگاه عملیات جداسازی انجام می شود. بدان معنی که مجموعه هماهنگ موجود بعنوان یک فضای محدود شده جدید تلقی گردیده و ارزش های جدید گزینه ها در این فضای محدود شده، محاسبه می گردند. بکارگیری مجموعه های هماهنگ نوعی جداسازی پویا بوده، اما جداسازی می تواند بطور ایستا نیز باشد. اندازه بزرگی جداسازی روی تعداد و مقدار راه حل های نهایی اثر می گذارد. عملیات جداسازی آنقدر ادامه می یابد که یکی از دو قاعده اصلی ویا قاعده مکمل بکار برده شود.

از لحاظ مفهومی در قاعده جداسازی هیچگونه تصمیم گیری قاطعی جهت جایگزینی گزینه ها صورت نمی گیرد. شرایط جداسازی می بایست بگونه ای تنظیم گردد که امکان حذف راه حل بهینه وجود نداشته باشد. جداسازی پویا راهکار مناسبی بوده که در این مقاله به تفصیل تشریح شده است.

۳-۳- راه حل (های) بهینه سراسری

روش ترکیب، بوسیله محاسبه آزمون "T" (معادله شماره (۳)) برای کلیه راه حل های پیشنهادی به اتمام می رسد. بیشترین ارزش آزمون "T" (T_{max}) تعیین کننده بهترین رتبه بندی ترتیبی (Ordinal) گزینه ها می باشد. امکان وجود راه حل های بهینه «معادل» نیز وجود دارد.

سئوال اساسی این است که چگونه روش ترکیب بسوی راه حل های بهینه سراسری (Global Optimal Solution (s)) همگرایی دارد.

اثبات: فضای جستجو در روش ترکیب بسته و محدود شده(Closed & Bounded) با راه حل (های) بهینه درونی (Interior) می باشد. براساس پیوست های شماره (۱) و (۲) که قواعد اصلی اثبات گردیده اند، بخوبی مشخص می گردد

که در هر فضای جستجوی محدود شده صرفاً گزینه غالب (Dominant) شناسایی و در محل رتبه بندی مناسب خود قرار داده می شود. طبق تعریف گزینه غالب، این گزینه بطور منحصر بفرد بهترین شرایط را نسبت به سایر گزینه هابمنظور تأمین بیشترین مقدار تابع هدف را بدنبال خواهد داشت- به عبارت دیگر هیچ گزینه دیگری وجود نخواهد داشت که بتواند به اندازه گزینه غالب باعث افزایش تابع هدف گردد. درروش ترکیب هیچگونه قاعده ایی برای گزینه های غیر غالب وجود ندارد. بنابراین در هر مرحله (Iteration) تلاش درراستای یافتن و تعیین گزینه غالب در ترتیب ارجحیت گزینه ها می باشد. گزینه های غالب قاطعانه منجر به افزایش تابع هدف شده و لذا می توان آنها را در مراحل بعدی محاسبات و استقرار سایر گزینه ها در محل مناسب خود از فضای جستجو حذف نمود. در صورتی که براساس دو قاعده اصلی روش ترکیب، امکان تشخیص گزینه غالب وجود نداشته باشد، محاسبات بعدی برای هر دو گزینه داوطلب بطور همزمان انجام می شود. بعبارت دیگر شرایط غیر غالب حاکم بوده و امکان تصمیم گیری قاطعانه میسر نمی باشد. بنابراین در روش ترکیب دو حالت وجود دارد یا اطمینان کامل از وجود شرایط بهینگی (گزینه غالب) محرز شده و فضای جستجو در مراحل بعدی محدود می گردد و یا اینکه بطور همزمان محاسبات برای گزینه های داوطلب انجام می شود. در نتیجه امکان حذف راه بهینه وجود ندارد. بدین ترتیب قضیه اثبات می گردد. ضمناً لازم به تأکید است که یکی از دلایل وجود راه حل های بهینه سراسری معادل نیز به لحاظ شرایط غیر غالب است. یکی از ویژگی های بسیار ارزشمند روش ترکیب نیز در تعیین راه حل های بهینه سراسری معادل (در صورت وجود) و ارایه برخی از راه حل های بهینه محلی در همسایگی (Neighbourhood) بهینه سراسری می باشد.

٤ـ الگوریتم و نمونه محاسبات روش ترکیب

فرایند انجام محاسبات و منطق استنتاج های روش ترکیب جهت انتخاب اصلح گزینه ها، بشرح زیر جمع بندی گردیده و نمودار آن ترسیم شده است. پس از آن نیز نمونه ایی از مراحل تعیین رتبه بندی پنج گزینه به تفصیل تشریح گردیده است.

٤ـ١ـ الگوریتم روش ترکیب

گام نخست) براساس ماتریس تصمیم گیری و اوزان هر یک از شاخص ها که جزء داده های ورودی هستند، بوسیله مقایسات زوجی، مقادیر $W_{SR}(i,j)$ برای هر ترکیبی از گزینه ها (فقط برای یک دفعه)، محاسبه می گردد. اگر تعداد m گزینه جهت اولویت بندی مورد نظر باشد، تعداد $\frac{m(m-1)}{2}$ از مقایسات دوبدوی گزینه ها وجود خواهد داشت. تعیین مقادیر W_{SR} بین گزینه iام و گزینه jام با فرض ارجحیت گزینه iام بر گزینه jام ($A_i \succ A_j$)، از طریق جمع جبری اوزان شاخص هایی که تحت آن شاخص، گزینه iام برتر از گزینه jام (یعنی $r_{ik} \succ r_{jk}$) با علامت مثبت وبر عکس با علامت منفی و در حالت مساوی با مقدار صفر محاسبه می گردد. جمع جبری کلیه مقادیر W_{SR} معادل معیار "T" برای تست رتبه بندی روش جایگشت بوده که می بایست در شرایط بهینگی به حداکثر مقدار خود برسد. در شرایط خاص تمام مقادیر ماتریس بالا مثلثی W_{SR} می توانند مثبت باشند. اما عمدتاً بدلیل تناقض ارجحیت گزینه ها (عدم انتقال پذیری کامل) نیاز به انجام تبادلات (Trade Off) برای دستیابی به شرایط بهینگی T_{max} الزامی می باشد. تمام تلاش و مساعی روش ترکیب برای درک و شناخت مفهوم تبادلات رتبه بندی گزینه ها بوده که در گام های دوم الی ششم نهفته است.

گام دوم) با حذف گزینه های غالبی که محل استقرار آنها مشخص گردیده، فضای جستجوی محدود شده (Bounded Search Space = BSS) از گزینه های باقی مانده، تشکیل می گردد. بعبارت دیگر به ازای تعداد گزینه ها، محل هایی جهت استقرار گزینه های متنخب در نظر گرفته می شود. درهر مرحله جستجو یک و یا دو گزینه در محل مناسب خود قرار می گیرند. شرط بهینگی T_{max} از طریق محاسبه ارزش گزینه ها در فضای جستجو محدود شده در فرایند محاسبات اعمال می گردد. لذا امکان حذف ارزش گزینه های غالب جایابی شده در هر مرحله از فرایند جستجو وجود دارد. بدین ترتیب فضای جستجو در هر مرحله جایابی بشدت کاهش می یابد.

گام سوم) ارزش هر گزینه، با استناد به اعتبار توابع ارزشی (Value Function)، در فضای جستجوی محدود شده (BSS) طبق معادله شماره (٣) تعیین می گردد. در صورتی که تعداد گزینه های فضای جستجوی محدود شده برابر با "Z" باشد، به تعداد "Z-1"، مقدار برای W_{SR} هر گزینه وجود خواهد داشت. برای مثال اگر برای تعیین ارزش A_i، در پیش فرض اولیه، ارجحیت گزینهi ام برتر از گزینه jام باشد (یعنی $A_i \succ A_j$)، می بایست مقدار $W_{SR}(i,j)$ را در یک (+1) ضرب کرد. در غیر این صورت اگر تعیین ارزش گزینه jام (A_j) در کل فضای جستجوی محدود شده (BSS) مورد نظر باشد، ضروری است که مقدار $W_{SR}(i,j)$ در منهای یک (-1) ضرب گردد. سرانجام مقادیر مثبت و منفی W_{SR} هر گزینه، جمع می گردد. بدیهی است که جمع جبری ارزش کل گزینه ها در هر فضای جستجوی محدود شده، مساوی صفر است.

گام چهارم) گزینه های با ارزش مثبت و صفر بسمت انتخاب

برترین گزینه (یا هماهنگ ترین ترتیب ارجحیت طبق مفهوم روش جایگشت) و گزینه های با ارزش منفی و صفر بسمت انتخاب پست ترین گزینه (یا ناهماهنگ ترین ترتیب ارجحیت طبق مفهوم روش جایگشت) هدایت می گردد. انجام این مهم خود به منزله اعمال یک شرط بهینگی کلی در فرایند جستجو است.

گام پنجم) اگر فقط یک گزینه مثبت در سمت هماهنگ ویا یک گزینه منفی در سمت ناهماهنگ وجود داشته باشد، گزینه مربوطه غالب بوده و جایگزینی برحسب مورد در جهت مثبت و یا منفی محقق می گردد و ادامه جایگزینی برای جاهای بعدی پیگیری خواهد شد. بدین ترتیب نخستین قاعده (Rule) تصمیم گیری برای استقرار گزینه غالب، در جای مناسب، که در کل می تواند، ترتیب ارجحیت گزینه ها رابهینه نماید، اعمال می گردد.

گام ششم) اگر فقط دو گزینه غیر منفی در سمت هماهنگ باقی مانده و سایرین منفی باشد، نسبت به تطابق ویا عدم تطابق ارزش فعلی گزینه ها و قضاوت اولیه (یا وزن ارجحیت = $W_{SR}(i,j)$) اظهار نظر می گردد. اگر این دو معیار با هم تطابق داشته باشند، گزینه مربوطه غالب بوده و جایگزینی برحسب مورد در جهت مثبت ویا منفی محقق می گردد و ادامه جایگزینی برای جاهای بعدی پیگیری خواهد شد. بدین ترتیب دومین قاعده (Rule) تصمیم گیری گزینه غالب، در جای مناسب خود، که در کل می تواند، ترتیب ارجحیت گزینه ها را بهینه نماید، اعمال می گردد.

اگر عدم تطابق بین دو شاخص فوق الذکر(یعنی ارزش فعلی و قضاوت اولیه گزینه ها) وجود داشته باشد، هر دو گزینه داوطلب، قابل جایگزین خواهند بود. بعبارت دیگر امکان اجرای دومین قاعده وجود ندارد. اما بخوبی مشخص است که فقط دو کاندید برای محل خاص وجود دارد. بنابراین طبق قاعده مکمل کلیه محاسبات برای هر دو گزینه (خواه در جهت هماهنگ ویا خواه در جهت ناهماهنگ ویا خواه درهر دو جهت) ادامه داده خواهد شد و معیار انتخاب نهایی ترکیب مناسب ارجحیت گزینه ها همان T_{max} روش جایگشت خواهد بود.

گام هفتم) اگر تعداد گزینه های کاندید از دو بیشتر باشد، عملیات جداسازی (Screening) انجام شده و به گام دوم برگشت نموده و در فضای جستجو محدود شده (BSS) در سمت هماهنگ و یا ناهماهنگ آنقدر ادامه می شود تا سرانجام تصمیم گیری نهایی استقرار گزینه مناسب، براساس گام های پنجم و یا ششم اتخاذ گردد.

در شکل شماره (۱) نمودار فرایند عملیاتی روش ترکیب ترسیم شده است.

٤-۲- نمونه محاسبات

داده های ورودی مشتمل بر ماتریس تصمیم گیری (D) برای پنج گزینه و هفت شاخص و اوزان شاخص ها (W_j) و سرانجام پیش فرض اولیه ارجحیت گزینه ها بشرح زیر می باشند.

اوزان شاخص ها(W_j)= (.05, .15, .3, .25,.1,.05,.1)

= پیش فرض اولیه ارجحیت گزینه ها

(I) دو جایگزینی نخست

گام نخست) برای محاسبه $W_{SR}(i,j)$ مقادیر هر یک از گزینه های A_i و A_j تحت شاخص k ام مقایسه می گردد (یعنی مقایسه r_{jk},r_{ik}). اگر ترتیب ارجحیت گزینه ها طبق پیش فرض اولیه یعنی $A_i \succ A_j$ صادق بود (یعنی $r_{ik} > r_{jk}$ باشد) مقدار وزن شاخص kام با علامت مثبت و بر عکس با علامت منفی و در شرایط تساوی با مقدار صفر برای $W_{SR}(i,j)$ ثبت خواهد گردید. مثلاً اگر طبق نمونه محاسبات، $r_{11}<r_{21}$ بنابراین معادل وزن شاخص kام (W_1 = .05) با علامت منفی در محاسبه $W_{SR}(1,2)$ در نظر گرفته می شود. سایر محاسبات بشرح زیر می باشند:

$A_1 \succ A_2 \Rightarrow W_{SR}(1,2)$=-.05-.15+.3+.25+.1-.05-.1=(+.3)
$A_1 \succ A_3 \Rightarrow W_{SR}(1,3)$=-.05-.15+.3+.25+.1+.05+.1=(+.6)
$A_1 \succ A_4 \Rightarrow W_{SR}(1,4)$=-.05-.15+.3-.25+.1-.05+.1=(+.1)
$A_1 \succ A_5 \Rightarrow W_{SR}(1,5)$=-.05-.15+.3+.25+.1+.0+.1=(+.55)
$A_2 \succ A_3 \Rightarrow W_{SR}(2,3)$=-.05+.15-.3+.25-.1+.05+.1=(+.1)
$A_2 \succ A_4 \Rightarrow W_{SR}(2,4)$=+.05+.15-.3-.25-.1+.05+.1=(-.3)
$A_2 \succ A_5 \Rightarrow W_{SR}(2,5)$=.05+.0-.3+.25-.1+.05+.1=(+.05)
$A_3 \succ A_4 \Rightarrow W_{SR}(3,4)$=.05+.15+.3-.25+.1-.05-.1=(+.2)
$A_3 \succ A_5 \Rightarrow W_{SR}(3,5)$=.05-.15+.3-.25+.1-.05-.1=(-.1)
$A_4 \succ A_5 \Rightarrow W_{SR}(1,4)$=-.05-.15-.3+.25+0+.05+.1=(-.1)

ضمناً یادآوری می گردد که مقادیر $W_{SR}(i,j)$ فقط یک دفعه محاسبه می گردند.

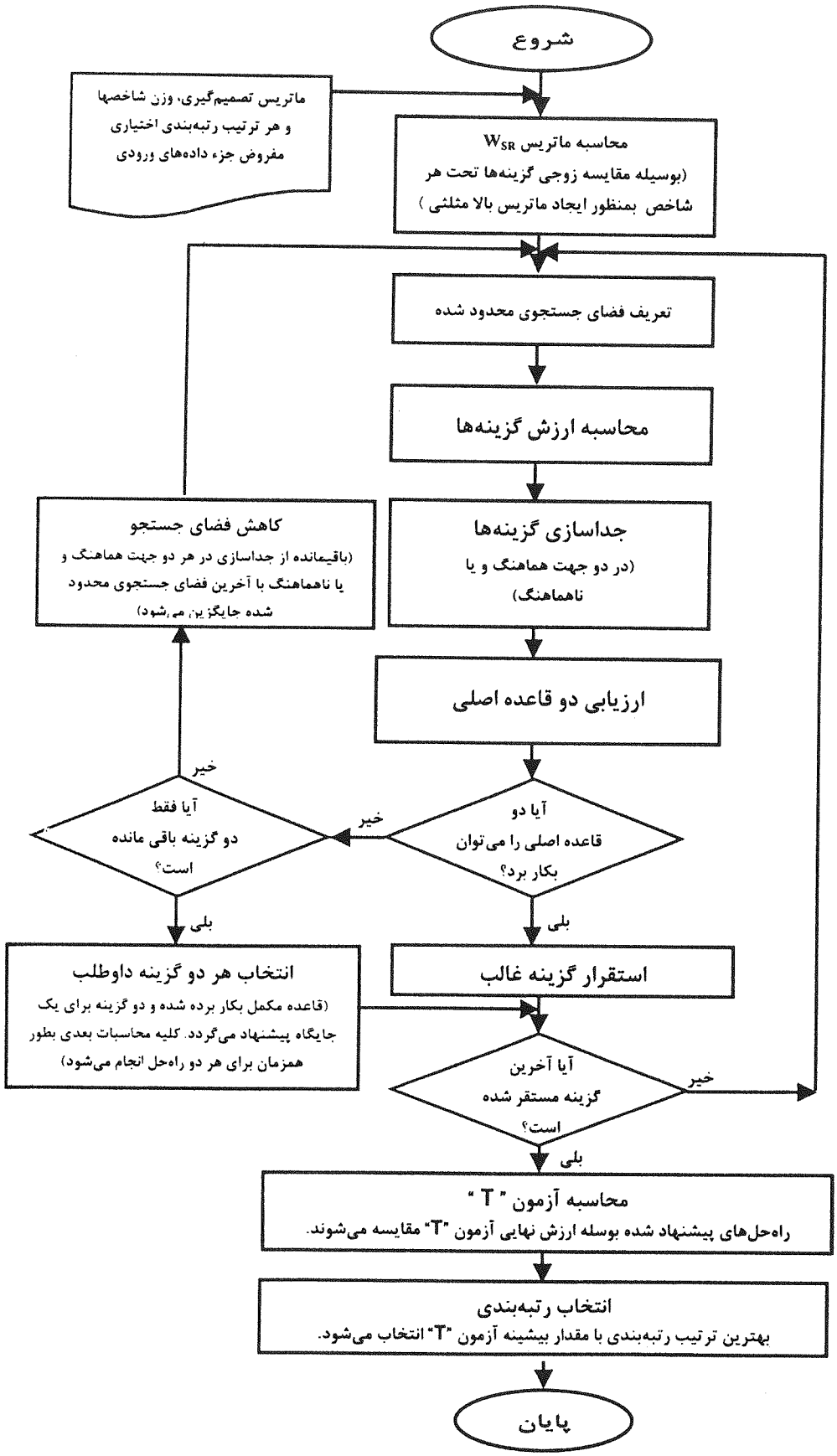
گام دوم) بدلیل آنکه نخستین دفعه جایگذاری گزینه ها می باشد، بنابراین فضای جستجوی محدود شده شامل کل گزینه های A_1, A_2, A_3, A_4 و A_5 خواهد بود.

BSS={A_1,A_2, A_3,A_4,A_5}

گام سوم) تعیین ارزش گزینه ها در فضای جستجوی محدود

= پیش فرض اولیه ارجحیت گزینه‌ها

A_1	A_2	A_3	A_4	A_5



شکل شماره (۱) نمودار فرایند عملیاتی روش ترکیب.

شده. روش محاسبات بدینگونه است که برای هر گزینه، مقادیر W_{SR} مربوطه با هم جمع می گردند. بعنوان نمونه برای گزینه A_2 در مقایسه با A_1, A_3 و A_4 و A_5 به ترتیب مقادیر W_{SR} مربوطه (+.3), (+.1), (-.3) و (+.05) محاسبه گردیده است. اما ترتیب پیش فرض ارجحیت A_1 بر A_2 وجود داشته و لذا برای تعیین ارزش گزینه A_2 می بایست $W_{SR}(1,2)$ در عدد منهای یک (-1) ضرب گردد (مستقل از آنکه مقدار عددی W_{SR} مربوطه مثبت و یا منفی و یا صفر باشد). با جمع جبری مقادیر W_{SR} که مرتبط با گزینه A_2 می باشد، ارزش گزینه A_2 در فضای جستجوی محدود شده تعیین می گردد. مشخص است که جمع جبری ارزش کل گزینه ها در هر فضای جستجوی محدود شده (BSS) معادل صفر خواهد بود.

$VA_1 = +.3+.6+.1+.55 = (+1.55)$
$VA_2 = -.3+.1+.3+.05 = (-1.45)$
$VA_3 = -.6-.1+.2+.1 = (-.6)$
$V_4 = .'+.3+.2+.1 = (-.1)$
$VA_5 = -.55+.1+.1+.1 = (-.4)$
(0.00)

گام چهارم) گزینه A_1 با ارزش مثبت به سمت ارزش برترین (هماهنگ ترین) و گزینه های A_2, A_3, A_4 و A_5 بسمت تعیین گزینه پست ترین (ناهماهنگ ترین) هدایت می گردند.

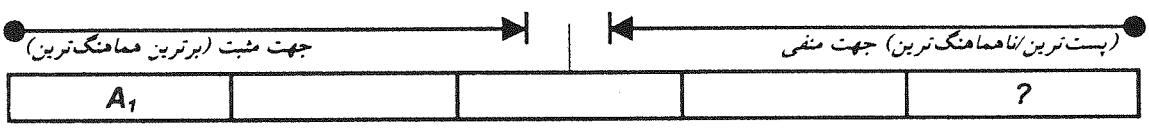
گام پنجم) براساس نخستین قاعده اصلی، گزینه A_1 بدلیل آنکه تنها گزینه داوطلب جایگزینی در سمت مثبت است، بنابراین نخستین محل را بخود اختصاص می دهد.

گام پنجم ویا گام ششم تصمیم گیری بدلیل تعداد بیش از دو گزینه کاندید برای سمت منفی اعمال نمی گردند ولذا ادامه تجزیه و تحلیل ها و محاسبات برای سمت منفی (در راستای تعیین پست ترین / ناهماهنگ ترین گزینه ها) طبق **گام هفتم**، تکرار خواهد شد.

گام دوم سمت منفی) گزینه های فضای جستجوی محدود شده (BSS) در سمت منفی A_2, A_3, A_4 و A_5 می باشند.

گام سوم سمت منفی) تعیین ارزش گزینه ها در فضای جستجوی محدود شده با حذف کلیه W_{SR} مرتبط با گزینه A_1 که محل استقرار مناسب آن تعیین گردیده، انجام می شود.

$VA_2' = +.1-.3+.05 = (-.15)$
$VA_3' = -.1+.2-.1 = (0)$
$VA_4' = +.3-.2-.1 = (0)$
$VA_5' = -.05+.1+.1 = (+.15)$
(0.00)



گام چهارم سمت منفی) بدلیل آنکه عملیات در سمت منفی انجام می شود، بنابراین گزینه ها A_2, A_3 و A_4 بعنوان فضای جستجوی محدود شده تلقی می گردند و بدین ترتیب گزینه A_5 از سمت منفی حذف می شود.

$BSS = \{A_2, A_3, A_4\}$

گام پنجم و یا ششم سمت منفی بدلیل آنکه سه گزینه کاندید جایگزینی هستند، اجرا نمی گردند و بنابراین مجدداً طبق **گام هفتم**، به گام دوم برگشت داده می شوند. باحذف گزینه های A_1 و A_5، فضای جستجوی محدود شده (BSS) گزینه های A_2, A_3 و A_4 خواهند بود. براساس گام سوم ارزش گزینه های کاندید در محل مناسب پست ترین (ناهماهنگ ترین) محاسبه می گردد.

$VA_2'' = +.1-.3 = (-.2)$; $VA_3'' = -.1+.2 = (+.1)$; $VA_4'' = +.3-.2 = (+.1)$

گام پنجم سمت منفی) بدلیل آنکه صرفاً گزینه دوم تنها گزینه ای است که با ارزش منفی در سمت منفی تصمیم گیری قرار دارد، بنابراین بعنوان پست ترین (ناهماهنگ ترین) جایگزینی انتخاب می گردد.

A_1				A_2

گام هفتم) تکرار محاسبات از گام دوم به بعد برای تعیین یک و یا دو گزینه مناسب، در جای مناسبی که جمع کل ارزش های گزینه ها (T_{max}) بهینه سراسری (Global Optimization) گردد.

(II) دو جایگزینی دوم

با استقرار دو گزینه A_1 و A_2، فضای جستجو محدود شده (BSS) فقط شامل گزینه های A_3, A_4 و A_5 خواهد بود که ارزش هر یک از آنها بشرح زیر محاسبه می گردد.

$BSS = \{A_3, A_4, A_5\}$

$VA_3 = +.2-.1 = (+.1)$; $VA_4 = -.2-.1 = (-.3)$; $VA_5 = .1-.1 = (+.2)$

بنابراین دو گزینه A_3 و A_5 به لحاظ آنکه ارزش آنها در فضای جستجوی محدود شده، مثبت است بسمت برترین (هماهنگ ترین) گزینه هدایت می گردند. گزینه A_4 به لحاظ آنکه تنها گزینه ای است که دارای ارزش منفی می باشد، براساس

نخستین قاعده، در محل دوم از جهت منفی (پست ترین / ناهماهنگ ترین) مستقر می گردد.

A_1			A_4	A_2

بدلیل آنکه در سمت مثبت صرفاً دو گزینه A_3 و A_5 باقی مانده است، تصمیم گیری پیرامون رتبه بندی جایگزینی آنها براساس قاعده اصلی شماره (۲) بین وزن ارجحیت (قضاوت اولیه ماتریس $W_{SR}(i,j)$) و رابطه VA_3 و VA_5 انجام می شود. بدلیل آنکه درهر دو معیار تصمیم گیری، گزینه A_5 بزرگتر و برتر از گزینه A_3 می باشد، لذا تصمیم گیری در سمت مثبت با انتخاب A_5 همراه می باشد.

(III) آخرین جایگزینی

سرانجام گزینه A_3 در تنها جای باقی مانده (در وسط) مستقر می گردد.

ترتیب نهایی ارجحیت گزینه ها بشکل زیر خواهد بود.

A_1	A_5	A_3	A_4	A_2

در این حالت که راه حل بهینه سراسری (Global Optimal Solution) رتبه بندی پنج گزینه تعیین گردیده است، حداکثر مقدار تست "T" رتبه بندی گزینه ها، طبق روش جایگشت برابر با $T_{max} = 2.1$ می باشد.

٤ـ مقایسه دو روش ترکیب و جایگشت

دو روش ترکیب و جایگشت از لحاظ داده های ورودی و نتایج خروجی کاملاً مشابه هم هستند. تنها تفاوت آنها در فرایند اجرایی اعمال شرایط بهینگی می باشد. در روش جایگشت، از میان کل فضای عملی، ترتیب. ارجحیت هایی از گزینه ها بعنوان بهینه سراسری برگزیده و استخراج می گردند که دارای بیشترین مقدار آزمون "T" (T_{max}) باشند. اما در روش ترکیب شرایط بهینگی در اثنای جستجو اعمال می گردد. بدین ترتیب در هر مرحله از عملیات، با یافتن گزینه غالب، فضای جستجو محدودتر شده و لذا امکان دسترسی بسیار سریع به راه حل(های) بهینه سراسری را فراهم می نماید. بنابراین یکی از معایب اساسی روش جایگشت از طریق روش ترکیب بخوبی مرتفع می گردد.

در ادامه نخست بطور کمی سرعت و دقت انجام محاسبات برای یک نمونه آزمایشی تشریح گردیده و پس از آن تفاوت های عملیات اجرایی این دو روش از دیدگاه مقایسات زوجی، فضای جستجو و استخراج نهایی مورد بررسی و مقایسه قرار می گیرد.

٤ـ۱ـ مقایسه سرعت ودقت انجام محاسبات دو روش

درروش جایگشت تعداد گزینه ها بشدت (بطور نمایی) در گستردگی فضای جستجو، سرعت عملیات، و تعیین نتیجه نهایی تأثیر می گذارد. افزایش زمان محاسبات برای روش جایگشت کمی بیشتر از فاکتوریل تعداد گزینه ها (m!) می باشد. البته تحقیق پیرامون تعیین دقیق رابطه زمان محاسبات و تعداد گزینه ها در این روش نیازمند مطالعات جداگانه ای است. اما در اجرای آزمایشی بخوبی آشکار گردیده که اگر برای تعیین ارجحیت هشت (۸) گزینه حدود ۶۶ ثانیه و برای ده (۱۰) گزینه حدود سه ساعت زمان نیاز داشته باشد، با حفظ همان شرایط پیش بینی می گردد که برای ۱۲ گزینه مدت ۲۰ روز زمان محاسباتی مورد نیاز خواهد بود. حال آنکه براساس روش ترکیب ضمن ارایه راه حل های بهینه سراسری، در کمتر از چند دهم ثانیه محاسبات و استنتاج ها انجام شده و نتیجه نهایی قابل ارائه خواهد بود.

جهت مقایسه دقت و سرعت دو روش ترکیب و جایگشت، ماتریس تصمیم گیری با هشت و ده گزینه ایی وهر کدام با هفت شاخص در نظر گرفته وبراین اساس نتیجه خروجی از لحاظ تعداد و مقدار جواب های بهینه و زمان محاسبات هر دو روش مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته است.

(I) ماتریس تصمیم گیری آزمایشی

ماتریس تصمیم گیری زیر صرفاً جهت آزمایش دو روش ترکیب و جایگشت با راه حل های بهینه سراسری متعدد طراحی گردیده است. کلیه ارزش ها تحت هر شاخص با اعداد کمی مشخص گردیده اند، حال آنکه در این دو روش نیازی به تبدیل کیفی و کمی ویا بدون بعد کردن ماتریس تصمیم گیری وجود ندارد.

*گزینه های شماره ۹ و ۱۰ (A_9, A_{10}) در شرایطی به مجموعه گزینه ها اضافه خواهند شد که انجام مقایسات دو روش برای ده گزینه مورد توجه باشد. ضمناً بطور موردی، امکان نقد و بررسی پیرامون عکس پذیری رتبه ها (Rank Reversal) را نیز فراهم می آورد.

(II) اوزان آزمایشی شاخص ها

به لحاظ ماهیت محاسباتی روش جایگشت که صرفاً ارجحیت ارزش هر گزینه تحت هر شاخص ($r_{ik} > r_{jk}$) را مورد توجه قرار می دهد (بعبارت دیگر شدت ارجحیت گزینه ها بطور صریح در نظر گرفته نمی شوند)، لذا برای ایجاد تنوع در نتایج محاسبات وارزیابی صحت وکارایی روش ترکیب، میزان تأثیر

ونقش تغییر در اوزان شاخص ها، مهمتر از تغییر در ارزش هر گزینه تحت هر شاخص (r_{ij}) است. بدین ترتیب تحت پنج حالت آزمایشی، اوزان شاخص ها تغییر داده شده و نتایج محاسبات برای ماتریس های تصمیم گیری با هشت و ده گزینه در جدول شماره (۱) جمع بندی گردیده است. لازم به تأکید است که اوزان شاخص ها قبل از شروع محاسبات نرمالیزه (هر کدام از اوزان شاخص ها تقسیم بر جمع کل وزن شاخص ها) می گردند.

(III) جمع بندی نتایج محاسبات آزمایشی

در جدول شماره (۱) نتایج محاسبات حاصل از پنج حالت از اوزان شاخص ها برای ماتریس تصمیم گیری هشت و ده گزینه ای ارایه گردیده است. چندگانه بودن راه حل های بهینه سراسری هر یک از حالت ها، می تواند ناشی از وجود رابطه تساوی در مقایسات زوجی گزینه ها ($W_{SR}(i,j)=0$) باشد.

۵-۲- مقایسات زوجی

همانگونه که در بخش دوم تشریح گردیده، در روش جایگشت برای هر حالت رتبه بندی شده از گزینه ها در فضای عملی، دو مجموعه فرعی هماهنگ (S_{kl}) و ناهماهنگ (R_{kl}) از طریق جمع اوزان معیارهای ناشی از ارجحیت هرکدام از گزینه ها در مقایسات زوجی تشکیل می گردند. سپس بوسیله روش تست و یا آزمون "T"، مقدار ارزش T_i برای هر جایگشت iام پیشنهادی بدست می آید. بنابراین به تعداد فاکتوریل گزینه ها (m!) مقدار «تست T» محاسبه می شود.

$$T_i = \sum_{j \in S'_{kl}} W_j - \sum_{j \in R'_{kl}} W_j \quad ;i=1,2,.....,m! \qquad (۱)$$

حال آنکه در روش ترکیب که در بخش سوم به تفصیل تشریح گردیده، بطور مستقیم اوزان ناشی از مقایسه دوبدوی گزینه ها بدست می آید.

$$A_i \succ A_j \Rightarrow W_{SR}(i,j) = \sum_{r_{ik} > r_{jk}} W_k - \sum_{r_{jk} > r_{ik}} W_k \quad ; k=1, \ldots, n \qquad (۲)$$

بعبارت دیگر در روش ترکیب برای هر مقایسه زوجی دو گزینه، وزن آن براساس حاصل جمع جبری اوزان شاخص های برتری و یا پست تری نظیر به نظیر هر گزینه مشخص و محاسبه می گردد. در مقایسه زوجی دو گزینه تحت یک شاخص Kام (r_{ik}, r_{jk}) اگر ارجحیت مطابق با فرض

	$X1^+$	$X2^+$	$X3^+$	$X4^+$	$X5^+$	$X6^+$	$X7^+$
A_1	30	1	.9	700	9	.5	-3.1
A_2	50	7	.2	600	3	.9	-2.8
A_3	60	5	.8	400	7	.3	-5.4
A_4	15	3	.3	900	5	.7	-3.8
A_5	35	7	.4	500	5	.5	-4.9
A_6	25	9	.1	900	1	.4	-1.1
A_7	70	1	.6	200	5	.3	-3.8
A_8	10	5	.8	500	9	.0	-6.4
* A_9	30	7	.8	900	5	.4	-3.8
* A_{10}	70	9	.4	900	7	.9	-3.1

نرمالیزه (شرایط پایه) $\Sigma W^1 = 1$	(۰/۱۰ و ۰/۰۵ و ۰/۱۰ و ۰/۲۵ و ۰/۳۰ و ۰/۱۵ و ۰/۰۵)	W^1 =
$W^2{}_3 = 0$; $\Sigma W^2 = 0.70$	(۰/۱۰ و ۰/۰۵ و ۰/۱۰ و ۰/۲۵ و ۰ و ۰/۱۵ و ۰/۰۵)	W^2 =
نرمالیزه حالت دوم اوزان شاخصها	(۰/۱٤ و ۰/۰۷ و ۰/۱٤ و ۰/۳۷ و ۰ و ۰/۲۱ و ۰/۰۷)	W'^2 =
$W^3{}_3 = 0$; $W^3{}_4 = 0$; $\Sigma W^3 = .45$	(۰/۱۰ و ۰/۰۵ و ۰/۱۰ و ۰ و ۰ و ۰/۱۵ و ۰/۰۵)	W^3 =
نرمالیزه حالت سوم اوزان شاخصها	(۰/۲۲ و ۰/۱۱ و ۰/۲۲ و ۰ و ۰ و ۰/۳٤ و ۰/۱۱)	W'^3 =
(تغییر اساسی) $\Sigma W^4 = 1.85$	(۰/٤۰ و ۰/۲۰ و ۰/۱ و ۰/۵۰ و ۰/۳۰ و ۰/۳۰ و ۰/۰۵)	W^4 =
نرمالیزه حالت چهارم اوزان	(۰/۲۲ و ۰/۱۱ و ۰/۰۵ و ۰/۲۷ و ۰/۱٦ و ۰/۱٦ و ۰/۰۳)	W'^4 =
i = ۱و۲و...و۷	W^5_i = ۰/۱٤۲۸٦	تمام وزن مساوی هستند	W^5 =

جدول شماره (۱) جمع بندی نتایج محاسبات آزمایشی: مقایسه دو روش ترکیب و جایگشت*

حالت‌ها	تعداد گزینه‌ها	ارجحیت رتبه‌بندی گزینه‌ها (از چپ به راست)	T_{max}	زمان محاسبه روش جایگشت (ثانیه)	روش ترکیب ** تعداد راه حلها	روش ترکیب ** زمان (ثانیه)
W^1 شرایط پایه	۸	A1 ≥ **A4** ≥ **A2** ≥ **A6** ≥ A8 ≥ **A5** ≥ A3 ≥ A7 A1 ≥ A4 ≥ **A6** ≥ **A2** ≥ A8 ≥ A5 ≥ A3 ≥ A7 A1 ≥ **A5** ≥ **A4** ≥ A2 ≥ A6 ≥ A8 ≥ A3 ≥ A7 A1 ≥ A5 ≥ A4 ≥ A6 ≥ A2 ≥ A8 ≥ A3 ≥ A7	٥/٤٥٠٠	٦٦/٤	١٤ ٢٩	٠/٠٠٦ ٠/٣٣
	۱۰	A10 ≥ A1 ≥ A9 ≥ **A4** ≥ **A2** ≥ **A6** ≥ A8 ≥ **A5** ≥ A3 ≥ A7 A10 ≥ A1 ≥ A9 ≥ A4 ≥ **A6** ≥ **A2** ≥ A8 ≥ A5 ≥ A3 ≥ A7 A10 ≥ A1 ≥ A9 ≥ **A5** ≥ **A4** ≥ A2 ≥ A6 ≥ A8 ≥ A3 ≥ A7 A10 ≥ A1 ≥ A9 ≥ A5 ≥ A4 ≥ A6 ≥ A2 ≥ A8 ≥ A3 ≥ A7	١٢/٥٥٠٠	١٠٨٩٩	١٦ ٨٥	٠/٠١١ ١/٥٤
W^2 حذف شاخص سوم $W^2_3 = 0$	۸	A6 ≥ **A4** ≥ **A1** ≥ **A2** ≥ A5 ≥ A8 ≥ A3 ≥ A7 A6 ≥ **A2** ≥ **A4** ≥ **A1** ≥ A5 ≥ A8 ≥ A3 ≥ A7 A6 ≥ **A4** ≥ **A2** ≥ **A1** ≥ A5 ≥ A8 ≥ A3 ≥ A7	١١/٦٤٢٩	٦٦/٤	٣ ٤٣	٠/٠٠٥ ٠/٤٩
	۱۰	A10 ≥ A6 ≥ A9 ≥ **A4** ≥ **A1** ≥ **A2** ≥ A5 ≥ A8 ≥ A3 ≥ A7 A10 ≥ A6 ≥ A9 ≥ **A2** ≥ **A4** ≥ **A1** ≥ A5 ≥ A8 ≥ A3 ≥ A7 A10 ≥ A6 ≥ A9 ≥ **A4** ≥ **A2** ≥ **A1** ≥ A5 ≥ A8 ≥ A3 ≥ A7	٢٠/٧٨٥٧	١١٠٨٣	٨ ١٣٩	٠/٠٠٦ ٢/٤٧
W^3 حذف شاخص سوم و چهارم $W^3_3 = 0$ و $W^3_4 = 0$	۸	A6 ≥ A2 ≥ **A1** ≥ **A5** ≥ A3 ≥ A8 ≥ A4 ≥ A7 A6 ≥ A2 ≥ **A5** ≥ **A1** ≥ A3 ≥ A8 ≥ A4 ≥ A7 (بدلیل آنکه A9 حضور ندارد، لذا فقط ارجحیت A1= A5)	٧/٦٦٦٧	٦٦/٤	٦ ٣٨	٠/٠٠٦ ٠/٤٤
	۱۰	A10 ≥ A6 ≥ A2 ≥ **A1** ≥ **A5** ≥ **A9** ≥ A3 ≥ A8 ≥ A4 ≥ A7 A10 ≥ A6 ≥ A2 ≥ **A5** ≥ **A1** ≥ **A9** ≥ A3 ≥ A8 ≥ A4 ≥ A7 A10 ≥ A6 ≥ A2 ≥ **A1** ≥ **A9** ≥ **A5** ≥ A3 ≥ A8 ≥ A4 ≥ A7	١٦/١١١١	١١١٨٧	٣ ٦٧	٠/٠٠٥ ١/١٥
W^4 تغییر اساسی در وزن شاخصها	۸	A6 ≥ A2 ≥ A4 ≥ **A1** ≥ A5 ≥ A3 ≥ A8 ≥ A7 (بدلیل آنکه A9 حضور ندارد فقط یک راه حل بهینه دارد.)	٩/٩٤٥٩	٦٦/٣	٤ ١٦	٠/٠٠٥ ٠/٢٢
	۱۰	A10 ≥ A6 ≥ **A1** ≥ **A9** ≥ A2 ≥ A4 ≥ A5 ≥ A3 ≥ A8 ≥ A7 A10 ≥ A6 ≥ **A9** ≥ A2 ≥ A4 ≥ **A1** ≥ A5 ≥ A3 ≥ A8 ≥ A7	١٧/٧٠٢٧	١١٢٤٢	١٢ ٦٤	٠/٠١٦ ١/٣٢
W^5 وزن مساوی شاخصها	۸	A2 ≥ A1 ≥ A5 ≥ A6 ≥ A3 ≥ A4 ≥ A8 ≥ A7	٥/٨٥٧١	٦٦/٣	٣ ٤٢	٠/٠٠٥ ٠/٤٤
	۱۰	A10 ≥ A2 ≥ A1 ≥ A9 ≥ A5 ≥ A6 ≥ A3 ≥ A4 ≥ A8 ≥ A7	١٣/١٤٢٩	١١٢٧١	٦ ٩٨	٠/٠١٦ ١/٦٥

*به منظور مقایسه زمان محاسبه هر دو روش جایگشت و ترکیب، هر دو روش به زبان QBASIC، به لحاظ سادگی و سهولت دسترسی، برنامه نویسی گردیده و با کامپیوتر پنتیوم II و با سرعت ۴۰۰ مگاهرتز اجرا گردیده‌اند.

**نتایج روش ترکیب ضمن تطابق کامل باروش جایگشت، در دو حالت، براساس استفاده از هر دو قاعده اصلی و جایگذاری دو طرفه (اعداد بالای هر خط تقسیم نقطه چین) و همچنین بدون استفاده از قاعده دوم و جایگذاری یك طرفه (اعداد پایین هر خط تقسیم نقطه چین) انجام شده است

اولیه $A_i > A_j$ بود، وزن با علامت مثبت (W_k+) و اگر هماهنگی نداشت، وزن با علامت منفی (W_k-) و اگر حالت تساوی داشت تأثیری در محاسبات نداشته و مقدار آن صفر خواهد بود. سرانجام مقدار $W_{SR}(i,j) = S(i,j) - R(i,j)$ برای مقایسه هر دو گزینه A_i, A_j محاسبه می‌گردد. اگر مقدار $W_{SR}(i,j) > 0$ (یعنی مثبت) باشد، بیانگر این واقعیت است که گزینه iام (یعنی A_i) در مقام مقایسه با گزینه jام (یعنی A_j) برتر است و اگر مقدار $W_{SR}(i,j) < 0$ (یعنی منفی) باشد، بیانگر این است که گزینه jام (یعنی A_j) در مقام مقایسه با گزینه iام (یعنی A_i) برتر است. بدین ترتیب صرفاً یکبار وزن مقایسات زوجی گزینه ها برای هر حالت دلخواه اولیه از رتبه بندی گزینه ها، محاسبه می‌گردد. این مفهوم دقیقاً برخواسته از اجزاء تک به تک تعیین تست یا آزمون "T" در معادله شماره (۱)، برای روش جایگشت است.

بدین ترتیب جمع جبری مقادیر $W_{SR}(i,j)$ بیانگر مقدار «تست T» برای هر ترتیب رتبه بندی اولیه خواهد بود. در نتیجه

هدف روش ترکیب در شناسایی منطق و علت جابجایی محل ارجحیت گزینه ها بگونه ای است که حتی الامکان بتوان مقادیر W_{SR} را مثبت کرد (بعبارت دیگر تلاش برای ایجاد شرایطی که بیشترین هماهنگی [max:S(i,j)] و کم ترین ناهماهنگی و[min: R(j,i)] بین ارجحیت گزینه ها ایجاد گردد).

۵ـ۳ـ فضای جستجو

در روش جایگشت فضای جستجو و یا تعداد حالت های ممکن از رتبه بندی گزینه ها معادل !m (m تعداد گزینه ها می باشد)، است. در صورتی که در روش ترکیب با محاسبه ارزش هر گزینه در فضای جستجوی محدود شده (BSS) وبدون اجرای دو قاعده اصلی (عدم تعیین محل استقرار هر گزینه غالب)، فضای جستجو دربدترین شرایط $2^{(m-1)}$ حالت خواهد بود. البته با بکارگیری دو قاعده اصلی که امکان شناسایی و استقرار گزینه غالب را مهیا می نمایند، فضای جستجو باز هم به شدت کاهش می یابد. کاهش فضای جستجو در روش ترکیب تابعی از حاصل ضرب تعداد گزینه ها در تعداد راه حل های در همسایگی راه حل بهینه می باشد. بعبارت دیگر فضای جستجو وبه تبع آن زمان محاسباتی در روش ترکیب عمدتاً متأثر از تعداد راه حل های بهینه معادل و کم بودن فواصل مقادیر اختلافات بین راه حل های در همسایگی، می باشد. به همین دلیل است که روش ترکیب می تواند ماهیت افزایش نمایی زمان محاسباتی روش جایگشت را به رابطه چند جمله ای (Polynomial) تبدیل نماید. بدین ترتیب بزرگترین مشکل ماهیت NP-Hard بودن روش جایگشت توسط روش ترکیب کاملاً منتفی می گردد.

۵ـ۴ـ استخراج نتیجه نهایی

در روش جایگشت به لحاظ محاسبه کلیه حالت ها، انتخاب ترکیبی از رتبه بندی گزینه هایی که دارای بیشترین مقدار «تست T» (T_{max}) هستند، به اتمام می رسد (البته لزوماً فقط یک راه حل بهینه سراسری وجود نخواهد داشت). در روش ترکیب شرایط بهینگی در فرایند محاسباتی اعمال گردیده و راه حل بهینه سراسری (Global Optimal Solution) را همانند روش جایگشت ارایه می نماید. در این روش با توجه به منطق «تست T»، برای هر مرحله از تعیین ارجحیت گزینه ها، حداکثر دو کاندید (داوطلب) برای جایگاه برترین و حداکثر دو کاندید برای جایگاه پست ترین مشخص می گردد. همانگونه که در بخش سوم به تفصیل تشریح گردیده، بدیهی است که در روش ترکیب اگر صرفاً یک کاندید برای هر یک از جایگاه های جهت مثبت و یا منفی (برتر و یا پست تر) وجود داشته باشد، مسلماً محل مورد نظر به همان کاندید اختصاص داده می شود. اما در صورتیکه دو کاندید (داوطلب) جهت استقرار وجود داشته باشد، تطابق ویا عدم تطابق ارزش هر یک از دو گزینه در آخرین مرحله غربال و جداسازی (مقصود VA_i و VA_j) با وزن ارجحیت و قضاوت اولیه ($W_{SR}(i,j)$) جهت تصمیم گیری نهایی انتخاب گزینه مناسب بکار می رود. تطابق جهت ارجحیت این دو معیار بیانگر انتخاب قطعی گزینه مناسب (برای هر دو جهت) بوده و عدم تطابق بمنزله ادامه و تکرار محاسبات برای هر دو گزینه بوده که مآلاً با محاسبه «تست T» همانند روش جایگشت، ترتیب ارجحیت مطلوب از گزینه ها مشخص می گردد.

۶ـ جمع بندی، نتیجه گیری و پیشنهادها

روش جایگشت یکی از روش های تصمیم گیری چند مشخصه ایی بوده که بدون نیاز به تبدیل کیفی به کمی کردن و یا بی بعد کردن مقادیر گزینه ها تحت هر شاخص، امکان تعیین ارجحیت و رتبه بندی گزینه ها را مهیا می سازد.

کاربرد اصلی روش جایگشت در شرایطی است که اثرات متقابل گزینه ها در هر جایگذاری، برای بهینگی سراسری حائز اهمیت باشد.

یکی از مشکلات اساسی روش جایگشت که کاربرد آن را محدود کرده، افزایش شدید زمان محاسباتی با افزایش اندکی در تعداد گزینه ها می باشد. اما روش ترکیب با بکارگیری کلیه مفاهیم، داده های ورودی (ماتریس تصمیم گیری و اوزان شاخص ها) و روش آزمون نهایی، دقیقاً همان نتایج خروجی روش جایگشت را در مدت زمان بسیار بسیار ناچیز ارایه می نماید.

بعنوان نمونه، براساس نتایج محاسبات آزمایشی روش ترکیب، برای هشت (۸) گزینه بطور متوسط حدود هزارودویست (۱۲۰۰) برابر و برای ده (۱۰) گزینه بطور متوسط حدود یکصدوبیست هزار (۱۲۰،۰۰۰) برابر سریعتر

	i	j	k	l	m
i	0	S_{ij}-R_{ji}	S_{ik}-R_{ki}	S_{il}-R_{li}	S_{im}-R_{mi}
j	0	0	S_{jk}-R_{kj}	S_{jl}-R_{lj}	S_{jm}-R_{mj}
k	0	0	0	S_{kl}-R_{lk}	S_{km}-R_{mk}
l	0	0	0	0	S_{lm}-R_{ml}
M	0	0	0	0	0

(ماتریس مقایسات در روش ترکیب)

	i	j	k	l	m
i	0	S_{ij}	S_{ik}	S_{il}	S_{im}
j	R_{ji}	0	S_{jk}	S_{jl}	S_{jm}
k	R_{ki}	R_{kj}	0	S_{kl}	S_{km}
l	R_{li}	R_{lj}	R_{lk}	0	S_{lm}
m	R_{mi}	R_{mj}	R_{mk}	R_{ml}	0

مجموع عناصر بالا و پایین منطق این ماتریس که همانا نتیجه آزمون T نظیره نظیر ست باهم برابر می باشند.

(ماتریس مقایسات زوجی در روش جایگشت)

از روش جایگشت است.

اساس روش ترکیب مبتنی بر اعمال شرایط بهینگی در فرایند جایگذاری گزینه های غالب در محل های مناسب می باشد. بدین ترتیب با تعریف ارزش گزینه ها در هر فضای جستجوی محدود شده، تعداد گزینه های واجد شرایط، در هر مرحله جستجو کمتر و کمتر می گردند. در موارد نادری که امکان قضاوت برای جایگذاری اصلح گزینه ها وجودنداشته باشد، محاسبات با هر دو داوطلب جایگذاری، توأماً انجام می شود و سرانجام حداکثر مقدار «تست T» مطابق با روش جایگشت، رتبه بندی نهایی گزینه ها را تعیین می نماید.

رویکرد روش ترکیب، شرایط بسیار مطلوبی را برای رفع مشکلات و کاهش محدودیت های روش جایگشت را به ارمغان خواهد آورد. لذا پیشنهادهای زیر برای پژوهش های آتی ارایه می گردد:

۱ـ اوزان شاخص ها بعنوان داده های ورودی در روش ترکیب تلقی می گردند. بنابراین امکان ایجاد سلسله مراتب به لحاظ عدم سنخیت واحدهای اندازه گیری میسر نخواهد بود. در نتیجه کاربرد آن برای تصمیم گیری گروهی، ایجاد درخت تصمیم گیری و موارد مشابه محدود می گردد. اما با ایجاد یک واحد سنجش مشترک در هر سطح تصمیم گیری (مانند: ارزش برای تصمیم گیرنده) و اثبات عملیات ریاضی، می توان بطور تلویحی براساس مقایسات زوجی ارجحیت، امکان تأثیر وزن عوامل مؤثر در هر یک از سطوح تصمیم گیری در کل را محاسبه نمود (البته مبتنی بر اصول جمع پذیری). بدین ترتیب با عنایت به پیش فرض های تابع ارزشی و تجانس واحد اندازه گیری، امکان تصمیم گیری در فضای رتبه بندی مهیا می گردد. بعبارت دیگر فرایند سلسله مراتب ترجیحی (Preferential Hierarchy Process = PHP) طراحی، ایجاد و توسعه داده شود.

۲ـ روش ترکیب، برای روش رتبه ای از جایگشت، بمنظور تعیین نقاط حدی، همچنین روش مجموع ساده وزین باکنش متقابل از پروفسور کورن باخ (Interactive Simple Average Weighting Method)[1]، بمنظور تعیین گزینه های قابل جابجایی تحت شرایط بی تفاوتی تصمیم گیرنده، تعمیم و بکاربرده شود.

۳ـ تأثیر شدت میزان اهمیت مقادیر گزینه ها تحت هر شاخص، بطور صریح در محاسبات لحاظ گردد.

۴ـ روش ترکیب برای حل مسایل فروشنده دوره گرد، سیستم رأی گیری ترجیحی بکار گرفته شده و با نتایج روش های ابتکاری (Heuristic) موجود، مقایسه گردد.

پیوست شماره (۱)

قاعده اصلی شماره (۱)

اگر در هر فضای جستجوی محدود شده، ارزش یک گزینه قاطعانه مثبت باشد و ارزش سایر گزینه ها قاطعانه منفی باشد، آنگاه این گزینه، ارزش مثبت غالب بوده و بعنوان برترین گزینه انتخاب می گردد.

بیان ریاضی:

$$\forall A_i, A_j, A_k, \ldots, A_l \in A,$$

$$\text{If } (VA_i > 0 \ \hat{} \ VA_j \geq 0 \ \hat{} \ VA_k < 0 \ \hat{} \ \ldots\ldots \ \hat{} \ VA_l < 0)$$

Then: Select A_i as the best alteranative.

تعاریف و معادلات

$$VA_i = \sum_{j=1}^{m} W_{SR}(i,j) - \sum_{j=1}^{m} W_{SR}(i,j)$$

در جایی که:

VA_i = ارزش گزینه i ام در فضای جستجوی محدود شده

$A = \{A_1,\ldots,A_i,A_j,A_k,\ldots,A_l,\ldots,A_m\}$ = مجموعه گزینه ها

$$\text{Objective Function} = T_{max} = \max:\{T_1,\ldots,T_i,\ldots,T_{m!}\}$$

$$T_i = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j>i}^{m} (W_{SR}(i,j) - W_{SR}(j,i)) \qquad i,j=1,2,\ldots,m \ \& \ i \neq j$$

$$T_i = VA_i + \sum_{j\neq k, j>i}^{m}\sum_{k>j}^{m} (W_{SR}(j,k) - W_{SR}(k,j))$$

(A_i گزینه از بخش دوم خارج شده است)

$$T_i = VA_i + \max:\{T_1', T_2', \ldots, T_j', T_k', \ldots, T_m'\}$$

(iPj)= گزینه i ام نسبت به گزینه jام ارجح است

توجه (۱): در ماتریس بالا مثلثی اوزان مقایسات زوجی (W_{SR})، اگر $W_{SR}(i,j)>0$ باشد، در نتیجه گزینه i ام نسبت به گزینه j ام ارجح است و برعکس.

توجه (۲): محاسبه ارزش هر گزینه در فضای جستجوی محدود شده، نکته کلیدی و مهمترین رویکرد روش ترکیب می باشد.

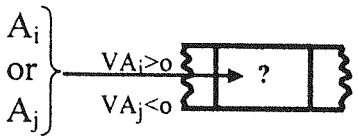
اثبات

قاعده اصلی شماره (۱) بوسیله اصل ریاضی استقراء اثبات می گردد.

حالت (۱): اگر در یک فضای جستجوی محدود شده ارزش یک گزینه قاطعانه مثبت باشد و ارزش گزینه دیگر قاطعانه منفی باشد. گزینه اولی غالب است و در نتیجه این گزینه بعنوان بهترین گزینه انتخاب می گردد.

$\forall A_i, A_j \in A$, If $(VA_i>0 \ \wedge VA_j<0)$

$\therefore$ Select A_i as the best alternative.



برای اثبات حالت (۱)، تعاریف اساسی ارزش هر گزینه و آزمون "T" بسیار مفید واقع می شوند.

فضای جستجوی محدود شده دو گزینه ایی:

$\{A_i, A_j\} = (BSS)^2$

بنابراین:

$$\left.\begin{array}{l} VA_i = W_{SR}(i,j) \ \& \ VA_i>0 \\ VA_j = -W_{SR}(i,j) \ \& \ VA_j<0 \end{array}\right\} \Rightarrow W_{SR}(i,j)>0 \quad (۱)$$

$$\& \ W_{SR}(j,i) = 0$$

$$T_i = \sum_{i=1}^{I} (W_{SR}(i,j) - W_{SR}(j,i)) = W_{SR}(i,j) > 0$$

$$\left.\begin{array}{l} (iPj): T_i^2 = W_{SR}(i,j) > 0 \ \text{(براساس معادله (۱) فوق)} \\ (jPi): T_{ji}^2 = W_{SR}(i,j) = -W_{SR}(i,j) < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow T_i^2 > T_j^2 \quad (۲)$$

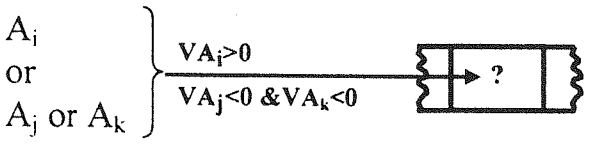
$$\therefore T_{max} = T_i^2 \Rightarrow \text{Select } A_i \text{ as the best} \quad (۳)$$

با عنایت به استنتاج معادله (۳)، حالت (۱) اثبات گردید.

حالت (۲): اگر در هر فضای جستجوی محدود شده (BSS)، ارزش یک گزینه قاطعانه مثبت باشد و دو گزینه دیگر قاطعانه منفی باشند، اولی غالب است در نتیجه این گزینه بعنوان بهترین گزینه انتخاب می گردد.

$\forall A_i, A_j, A_k \in A$,

IF $(VA_i>0 \ \wedge VA_j<0 \ \wedge VA_k<0)$ Select A_i as the best.



بدلیل نشان دادن بخش تکرارپذیر آزمون "T"، حالت (۲) روابط بصورت زیر، بازنویسی و اثبات می گردد:

$VA_i = W_{SR}(i,j) + W_{SR}(i,k) \ \& \ VA_i > 0$ (فرض شده)

$VA_j = -W_{SR}(i,j) + W_{SR}(j,k) \ \& \ VA_i > VA_j \le 0$ (فرض شده)

$VA_k = -W_{SR}(i,k) - W_{SR}(j,k) \ \& \ VA_k < 0$ (فرض شده)

بر اساس تعریف آزمون "T":

$$\left.\begin{array}{l} (iPjPk): T_i' = W_{SR}(i,j) + W_{SR}(i,k) + W_{SR}(j,k) \\ (iPkPj): T_i'' = W_{SR}(i,j) + W_{SR}(i,k) - W_{SR}(j,k) \end{array}\right\}$$

$$\therefore T_i^3 = W_{SR}(i,j) + W_{SR}(i,k) + \text{Max: } \{T_j^2, T_k^2\}$$

(۴) حداکثر ارزش آزمون "T" برای دو گزینه A_j و A_k در فضای جستجوی محدود شده = Max: $\{T_j^2, T_k^2\}$

از سوی دیگر، براساس تعریف ارزش گزینه i ام معادله (۴) به شکل زیر، بازنویسی می گردد:

$T_i^3 = VA_i + \text{Max: } \{T_j^2, T_k^2\}$

توجه (۳): در هر مرحله می بایست فقط یک جایگاه به یک گزینه اختصاص داده شود. بنابراین جایگاه های بعدی بایستی در مراحل بعدی تعیین تکلیف شوند. وقتی که در بخش دوم معادله (۴) نوشته می شود، حداکثر مقدار آزمون "T" برای دو گزینه i ام و k ام (یعنی Max: $\{T_j^2, T_k^2\}$)، طبق اثبات حالت (۱) مشخص می گردد که، حداکثر مقدار آن معادل قدر مطلق $W_{SR}(j,k)$ می باشد. بنابراین معادله (۴) بصورت زیر، بازنویسی می گردد:

$$T_i^3 = W_{SR}(i,j) + W_{SR}(i,k) + \left|W_{SR}(j,k)\right| \quad (۴')$$

با همان رویکرد مشابه برای معادله (۴)، رابطه آزمون "T"

برای گزینه های j ام و k ام بصورت زیر خواهند بود.

$$T_j^3 = -W_{SR}(i,j) + W_{SR}(j,k) + Max: \{T_i^2, T_k^2\} \quad (۵)$$

$$T_k^3 = -W_{SR}(i,k) - W_{SR}(j,k) + Max: \{T_i^2, T_j^2\} \quad (۶)$$

معادلات (۵)، (۶) براساس توجه (۳) بصورت زیر، بازنویسی می گردند:

$$T_j^3 = -W_{SR}(i,k) + W_{SR}(j,k) + \left|W_{SR}(i,k)\right| = VA_j + \left|W_{SR}(i,k)\right| \quad (۵')$$

$$T_k^3 = -W_{SR}(i,k) - W_{SR}(j,k) + \left|W_{SR}(i,j)\right| = VA_k + \left|W_{SR}(i,j)\right| \quad (۶')$$

با مراجعه به معادله (۴')، نتیجه گیری می شود که ارزش آزمون "T" برای گزینه i ام (یعنی: T_i) مستقل از ارتباطات بین ترتیب استقرار گزینه های A_j و بعد A_k و یا A_k و بعد A_j بدلیل وجود قدر مطلق $W_{SR}(j,k)$ می باشد. لذا کاملاً مشخص می گردد که به ازای تمامی مقادیر $W_{SR}(j,k)$ نامعادله $T_i^3 \geq (T_j^3 \text{ or } T_k^3)$ صادق است. اما چهار حالت با تغییر علامت وزن مقایسات زوجی $W_{SR}(i,j)$ و $W_{SR}(i,k)$ امکان پذیر است. در تمامی حالت های چهارگانه مفروضات ارزش های گزینه ها (یعنی: $VA_i<0, VA_j>0$ و $VA_k<0$) عامل محدود کننده مقادیر مقایسات زوجی $W_{SR}(i,j)$ و $W_{SR}(i,k)$ می باشند. در صورتیکه هر دو مقایسات زوجی مذکور مثبت باشند، قضیه حالت (۲) اثبات می گردد. بدلیل آنکه در آزمون "T" گزینه i ام (T_i^3) کلیه ضرایب مقایسات زوجی مذکور، مثبت یک (+1) بوده و حال آنکه برای T_k^3, T_j^3 حداقل یکی از این مقادیر منفی می باشند. از سوی دیگر امکان منفی شدن همزمان مقایسات زوجی $W_{SR}(i,j)$ و $W_{SR}(i,k)$ بدلیل نقض مفروضات ارزش گزینه ها امکان پذیر نمی باشد. بنابراین از چهار حالت مذکور، فقط دو حالت باقی می ماند. اگر یکی از مقایسات زوجی مذکور منفی باشد، بمنظور رعایت مفروضات ارزش گزینه ها مقایسه زوجی دیگری می بایست مثبت و از لحاظ قدر مطلق بزرگتر از مقایسه زوجی منفی باشد. به عبارت دیگر به هر حال مقادیر معادلات (۵') و (۶') کمتر از معادله (۴') خواهند شد. بنابراین در کلیه حالت ها اثبات گردید که:

$T_i^3 > (T_j^3 \text{ or } T_k^3)$

اثبات این نکته که ارزش آزمون "T" گزینه i ام بزرگتر از سایر گزینه ها می باشد، بیانگر غالب بودن گزینه i ام (A_i) نسبت به سایر گزینه ها در فضای جستجوی محدود شده می باشد.

حالت (۳) [اثبات عمومی برای هر تعداد از گزینه ها که فقط یک گزینه قاطعانه مثبت بوده و سایر گزینه ها قاطعانه منفی باشند]:

در صورتیکه برای k گزینه در شرایطی که $BSS^k = \{A_1, A_2, \ldots, A_i, A_j, A_k\}$، اگر $VA_i^k > 0$ و برای سایرین $VA_m^k < 0$ در جایی $m = 1,2,\ldots, j,k \;\&\; m \neq i$ آنگاه گزینه i ام (A_i) غالب است. بنابراین طبق روش استقراء ریاضی می بایست ثابت گردد که برای (k+1) گزینه در شرایطی که $BSS^{(k+1)} = BSS^l$, $\{A_1, A_2, \ldots, A_i, A_k, A_l\}$ اگر $VA_i^l < 0$ و سایرین $VA_n^l > 0$ در جایی که $n = 1,2,\ldots, j,k,l \;\&\; n \neq i$ آنگاه گزینه i ام (A_i) نیز غالب می باشد.

بیان ریاضی حالت (۳)

فرض شود وقتی که $VA_m^k<0$ و فقط $VA_i^k>0$، آنگاه A_i بهترین گزینه است. این بدان معنی است که $T_i^k > T_m^k$ در شرایطی که VA_i^k ارزش گزینه i ام بوده و T_i^k مقدار آزمون "T" همان گزینه در BSS^k می باشد. در نتیجه می بایست اثبات گردد که اگر $VA_n^l<0$ و فقط $VA_i^l > 0$ آنگاه A_i غالب است.

آزمون "T" برای گزینه i و هر گزینه دلخواهی مانند n با عنایت به BSS^l بشرح زیر خواهد بود.

$$T_i^l = VA_i^l + Max: \{T_1^k, T_2^k, \ldots, T_n^k, T_l^k\}, \quad n = 1,2,\ldots,l \;\&\; n \neq i \quad (۷)$$

$$T_n^l = VA_n^l + Max: \{T_1^k, T_2^k, \ldots, T_m^k, T_i^k, T_l^k\}, \quad m,n = 1,2,\ldots,l \;\&\; m \neq i \quad (۸)$$

با عنایت به بخش دوم معادلات فوق آزمون "T" نتیجه گیری شود که:

$T_i^k > T_m^k \Rightarrow T_i^k > (T_1^k, T_2^k, \ldots, T_m^k, \ldots, T_l^k), m=1,2,\ldots,l \;\&\; m \neq i$

بنابراین A_i نسبت به هر گزینه A_m (مانند A_l) در هر فضای جستجوی k گزینه ایی (BSS^k) برتری دارد. براساس معادله (۷) استنباط می گردد که $Max: \{T_1^k, T_2^k, \ldots, T_n^k, T_l^k\}$ در جایی که $n=1,2\ldots,l \;\&\; n \neq i$ مشخص می شود که T_i^l (یعنی: آزمون "T" برای گزینه i ام در فضای جستجوی l گزینه ایی)

مستقل از رتبه بندی سایر رتبه بندی های بعدی است. این بدان معنی است که روابط بین گزینه ها در رتبه های بعدی هیچگونه اثری روی T_i^l ندارند. بدلیل آنکه بیشترین ارزش آنها در نظر گرفته شده است. حال می توان برای دو گزینه مجاور فی المثل i و l دو حالت جابجایی فرض نمود. بعبارت دیگر آیا A_i باید مقدم باشد و یا A_l تا T_{max}

$$\therefore T_i^l = VA_i^l + T_l^k = VA_i^l + VA_l^k + T^R \qquad (۹)$$

$$\therefore T_l^l = VA_l^l + T_i^k = VA_l^l + VA_i^k + T^R \qquad (۱۰)$$

(۱۱) براساس تفاضل معادلات (۹) و (۱۰)

$$\Rightarrow T_i^l - T_l^l = (VA_i^l - (VA_i^k) - (VA_l^l - (VA_l^k) = 2W_{SR}(i,l) \qquad (۱۱)$$

از سوی دیگر براساس فرض $T_i^k > T_l^k$، نتیجه می شود که گزینه i ام (A_i) نسبت به گزینه l ام (A_l) ارجح است.

$$(۱۲) \quad \text{براساس توجه شماره (۱)} \Rightarrow W_{SR}(i,l) > 0$$

$$\text{براساس معادلات (۱۱) و (۱۰)} \Rightarrow T_i^l - T_l^l = 2W_{SR}(i,l) > 0 \Rightarrow T_i^l > T_l^l$$

سرانجام حالت (۳) بصورت کلی و عمومی اثبات گردید. در نتیجه قاعده اصلی شماره (۱) براساس اصل استقراء ریاضی اثبات گردید.

پیوست شماره (۲)

قاعده اصلی شماره (۲)

اگر فقط دو گزینه دارای ارزش غیر منفی در فضای جستجوی محدود شده باشند و گزینه با ارزش بیشتر دارای وزن ارجحیت مقایسه زوجی مثبتی هم باشد، آنگاه این گزینه غالب بوده و بعنوان برترین گزینه انتخاب می گردد.

بیان ریاضی:

$$\text{If } (VA_i > VA_j \geq 0 \ \wedge\ VA_k < 0 \ \wedge \ \dots \ \wedge\ VA_l < 0 \ \wedge\ W_{SR}(i,j) > 0)$$

Then: Select A_i as the best alteranative.

تعاریف و معادلات

$$VA_i = \sum_{j=1}^{m} W_{SR}(i,j) - \sum_{j=1}^{m} W_{SR}(j,i) \qquad i,j = 1,2,\dots,m \ \&\ i \neq j$$

در جایی که:

VA_i = ارزش گزینه i ام در فضای جستجوی محدود شده

$A = \{A_1,\dots,A_i,A_j,A_k,\dots,A_l,\dots,A_m\}$ = مجموعه گزینه ها

$$\text{Objective Function} = T_{max} = \max: \{T_1,\dots,T_i,\dots,T_{m!}\}$$

$$T_i = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j>i}^{m} (W_{SR}(i,j) - W_{SR}(j,i)) \qquad i,j = 1,2,\dots,m \ \&\ i \neq j$$

$$T_i = VA_i + \sum_{j\neq k.\ j>i}^{m} \sum_{k>j}^{m} (W_{SR}(j,k) - W_{SR}(k,j))$$

(گزینه A_i از بخش دوم: T_c خارج شده است)

$$T_i = VA_i + \max: \{T'_1, T'_2, \dots, T'_j, T'_k, \dots, T'_m\}$$

گزینه i ام نسبت به گزینه j ام ارجح است = (iPj)

توجه (۱): در ماتریس بالا مثلثی اوزان مقایسات زوجی (W_{SR})، اگر $W_{SR}(i,j) > 0$ باشد، در نتیجه گزینه i ام نسبت به گزینه j ام ارجح است و برعکس.

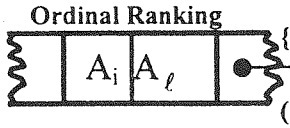
توجه (۲): محاسبه ارزش هر گزینه در فضای جستجوی محدود شده، نکته کلیدی و مهمترین رویکرد روش ترکیب می باشد.

اثبات

قاعده اصلی شماره (۲) بوسیله اصل ریاضی استقراء اثبات می گردد.

حالت (۱) : اگر در جهت هماهنگ (Concordance site)

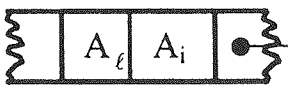
* (iPℓ) ، بفرض آنکه :



$\{A_1,\dots,A_n,\dots,A_k\}$ (where A_i and A_ℓ are excluded.)

("T" test for remainder = T^R)

** (ℓPi) ، بفرض آنکه :



$\{A_1,\dots,A_n,\dots,A_k\}$ (where A_i and A_ℓ are excluded.)

("T" test for remainder = T^R)

فقط دو گزینه دارای ارزش غیر منفی باشند، آنگاه گزینه با ارزش بیشتر که از لحاظ مقایسات زوجی ارجحیت نیز برتری دارد، بعنوان گزینه غالب انتخاب می گردد.

$$\forall A_i, A_j \in A, \text{If } (VA_i > VA_j \geq 0 \wedge W_{SR}(i,j) > 0)$$

$$\therefore \text{Select } A_i \text{ as the best one.}$$

$$\left.\begin{matrix} A_i \\ \text{or} \\ A_j \end{matrix}\right\} \xrightarrow[W_{SR}(i,j) > 0]{VA_i > VA_j \geq 0} ?$$

برای اثبات حالت (۱)، تعاریف اساسی ارزش هر گزینه و آزمون "T" بسیار مفید واقع می شوند.

فضای جستجوی محدود شده دو گزینه ایی جهت هماهنگ $(BSS)^2 = \{A_i, A_j\}$

بنابراین:

$$\left.\begin{matrix} VA_i = W_{SR}(i,j) \\ VA_j = -W_{SR}(i,j) \end{matrix}\right\} \Rightarrow VA_i = W_{SR}(i,j) > 0 > VA_j \quad (۱)$$

$$T_i = \sum_{i=1}^{I} (W_{SR}(i,j) - W_{SR}(j,i)) = W_{SR}(i,j) > 0$$

$$\left.\begin{matrix} (iPj): T_i^2 = W_{SR}(i,j) > 0 \text{ (براساس معادله (۱) فوق)} \\ (jPi): T_{ji}^2 = W_{SR}(j,i) = -W_{SR}(i,j) < 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow T_i^2 > T_j^2 \quad (۲)$$

$$\therefore T_{max} = T_i^2 \Rightarrow \text{Select } A_i \text{ as the best.} \quad (۳)$$

با عنایت به استنتاج معادله (۳)، حالت (۱) اثبات گردید.

حالت (۲): اگر در هر فضای جستجوی محدود شده (BSS)، فقط دو گزینه با ارزش غیر منفی و یک گزینه با ارزش منفی وجود داشته باشد، آنگاه گزینه با ارزش بیشتر و وزن ارجحیت مقایسه ایی برتر بعنوان گزینه غالب انتخاب می گردد.

$$\forall A_i, A_j, A_k \in A,$$

$$\text{IF } (VA_i > VA_j \geq 0 \wedge VA_k < 0 \wedge W_{SR}(i,j) > 0 \Rightarrow \text{Select } A_i \text{ as the best.}$$

$$\left.\begin{matrix} A_i \\ \text{or} \\ A_j \text{ or } A_k \end{matrix}\right\} \xrightarrow[VA_k<0 \& W_{SR}(i,j)>0]{VA_i \geq VA_j \geq 0} ?$$

بدلیل نشان دادن بخش تکرارپذیر آزمون "T"، معادلات حالت (۲) بصورت زیر، بازنویسی و اثبات می گردد:

$$VA_i = W_{SR}(i,j) + W_{SR}(i,k) \;\&\; VA_i > 0$$

$$VA_k = -W_{SR}(i,k) - W_{SR}(j,k) \;\&\; VA_k < 0$$

$$VA_j = -W_{SR}(i,j) + W_{SR}(j,k) \;\&\; VA_j < 0$$

بر اساس تعریف آزمون "T":

$$\left.\begin{matrix} (iPjPk): T_i' = W_{SR}(i,j) + W_{SR}(i,k) + W_{SR}(j,k) \\ (iPkPj): T_i'' = W_{SR}(i,j) + W_{SR}(i,k) - W_{SR}(j,k) \end{matrix}\right\}$$

$$\therefore T_i^3 = W_{SR}(i,j) + W_{SR}(i,k) + \text{Max: } \{T_j^2, T_k^2\} \quad (۴)$$

حداکثر ارزش آزمون "T" برای دو گزینه A_j و A_k در فضای جستجوی محدود شده = $\text{Max: } \{T_j^2, T_k^2\}$

از سوی دیگر، براساس تعریف ارزش گزینه i ام معادله (۴) به شکل زیر، بازنویسی می گردد:

$$T_i^3 = VA_i + \text{Max: } \{T_j^2, T_k^2\}$$

توجه (۳): در هر مرحله می بایست فقط یک جایگاه به یک گزینه اختصاص داده شود. بنابراین جایگاه های بعدی بایستی در مراحل بعدی تعیین تکلیف شوند. وقتی که در بخش دوم معادله (۴) نوشته می شود، حداکثر مقدار آزمون "T" برای دو گزینه i ام و k ام (یعنی، $\text{Max: } \{T_j^2, T_k^2\}$)، طبق اثبات حالت (۱) مشخص می گردد که، حداکثر مقدار آن معادل قدر مطلق $W_{SR}(j,k)$ می باشد. بنابراین معادله (۴) بصورت زیر، بازنویسی می گردد:

$$T_i^3 = W_{SR}(i,j) + W_{SR}(i,k) + \left|W_{SR}(j,k)\right| \quad (۴')$$

با همان رویکرد مشابه برای معادله (۴)، رابطه آزمون "T" برای گزینه های j ام و k ام بصورت زیر خواهند بود.

$$T_j^3 = -W_{SR}(i,j) + W_{SR}(j,k) + \text{Max: } \{T_i^2, T_k^2\} \quad (۵)$$

$$T_k^3 = -W_{SR}(i,k) - W_{SR}(j,k) + \text{Max: } \{T_i^2, T_j^2\} \quad (۶)$$

معادلات (۵)، (۶) براساس توجه (۳) بصورت زیر، بازنویسی می گردند:

$$T_j^3 = -W_{SR}(i,j) + W_{SR}(j,k) + \left|W_{SR}(i,k)\right| = VA_j + \left|W_{SR}(i,k)\right| \quad (۵)$$

$$T_k^3 = -W_{SR}(i,k) - W_{SR}(j,k) + \left|W_{SR}(i,j)\right| = VA_k + \left|W_{SR}(i,j)\right| \quad (۶)$$

با مراجعه به معادله (۴)، نتیجه گیری می شود که ارزش آزمون "T" برای گزینه i ام (یعنی: T_i) مستقل از ارتباطات بین ترتیب استقرار گزینه های A_j و بعد A_k و یا A_k و بعد A_j بدلیل وجود قدر مطلق $W_{SR}(j,k)$ می باشد. لذا کاملاً مشخص می گردد که به ازای تمامی مقادیر $W_{SR}(j,k)$ معادله $T_i^3 \geq (T_j^3 \text{ or } T_k^3)$ صادق است. اما دو حالت با تغییر علامت وزن مقایسات زوجی $W_{SR}(i.k)$ وجود دارد. در هر دو حالت دامنه ارزش های فرض شده برای گزینه ها (یعنی: $VA_i > VA_j \geq 0$ و $VA_k < 0$) مقادیر $W_{SR}(i,k)$ را محدود می کند. اگر مقدار $W_{SR}(i,k) \geq 0$ (غیر منفی) باشد آنگاه $T_i^3 > (T_j^3 \text{ or } T_k^3)$. اگر $W_{SR}(i,k) \leq 0$ (غیر مثبت)، آنگاه می بایست $W_{SR}(j,k) > |W_{SR}(i,k)|$ بوده تا فرض اولیه $VA_k < 0$ صادق باشد. بنابراین اثبات گردید که در تمامی شرایط نامعادله زیر صادق است. در نتیجه A_i در فضای جستجوی محدود شده گزینه غالب خواهد بود. بدین ترتیب:

$T_i^3 > (T_j^3 \text{ or } T_k^3)$

اثبات این نکته که ارزش آزمون "T" گزینه i ام بزرگتر از سایر گزینه ها می باشد، بیانگر غالب بودن گزینه i ام (A_i) نسبت به سایر گزینه در فضای جستجوی محدود شده می باشد.

حالت (۳): [اثبات عمومی برای هر تعداد از گزینه ها که فقط دو گزینه غیر منفی بوده و سایر گزینه ها قاطعانه منفی باشند]

در صورتیکه برای k گزینه در شرایطی که $BSS^k = \{A_1, A_2, \ldots, A_i, A_j, A_k\}$، اگر $VA_i^k > VA_j^k \geq 0$ و برای سایرین $VA_m^k < 0$ در جایی $m = 1,2,\ldots,k \;\&\; m \neq i,j$ آنگاه گزینه i ام (A_i) غالب است. بنابراین طبق روش استقراء ریاضی می بایست ثابت گردد که برای (k+1) گزینه در شرایطی که $BSS^{(k+1)} = BSS' = \{A_1, A_2, \ldots, A_i, A_k, A_l\}$ اگر $VA_i' > VA_j' \geq 0$ و سایرین $VA_n' < 0$ در جایی که $n = 1,2,\ldots,k,l \;\&\; n \neq i,j$، آنگاه گزینه i ام ($A_i$) نیز غالب می باشد.

بیان ریاضی حالت (۳)

فرض شود وقتی که $(VA_i^k > VA_j^k \geq 0 \;\wedge\; VA_m^k < 0)$، آنگاه A_i بهترین گزینه است. این بدان معنی است که $T_i^k > T_m^k$ در شرایطی که VA_i^k ارزش گزینه i ام در مجموعه k گزینه ای بوده و T_i^k مقدار آزمون "T" همان گزینه در BSS^k می باشد.

در نتیجه می بایست اثبات گردد که $(=l)$ k+1، اگر $VA_n' < 0$ و $VA_i' > VA_j' \geq 0$، آنگاه A_i غالب است.

آزمون "T" برای گزینه i و هر گزینه دلخواهی مانند n با عنایت به BSS' بشرح زیر خواهد بود.

$$T_i^l = VA_i^l + \text{Max: } \{T_1^k, T_2^k, \ldots, T_n^k, T_l^k\}, \quad n = 1,2,\ldots,l \;\&\; n \neq i \quad (۷)$$

$$T_n^l = VA_n^l + \text{Max: } \{T_1^k, T_2^k, \ldots, T_m^k, T_i^k, T_l^k\}, \quad m = 1,2,\ldots,l \;\&\; m \neq n,i \quad (۸)$$

با عنایت به بخش دوم معادلات فوق آزمون "T" نتیجه گیری شود که:

$T_i^k > T_m^k \Rightarrow T_i^k > (T_1^k, T_2^k, \ldots, T_m^k, \ldots, T_l^k),\ m=1,2,\ldots,l \;\&\; m \neq i$

بنابراین A_i نسبت به هر گزینه A_m (مانند A_l) در هر فضای جستجوی k گزینه ایی (BSS^k) برتری دارد.

براساس معادله (۷) استنباط می گردد که $\text{Max:}\{T_1^k, T_2^k, \ldots, T_n^k, T_l^k\}$ در جایی که $n=1,2\ldots,l \;\&\; n \neq i$ مشخص می شود که T_i^l (یعنی: آزمون "T" برای گزینه i ام در فضای جستجوی l گزینه ایی) مستقل از رتبه بندی سایر رتبه بندی های بعدی است. این بدان معنی است که روابط بین گزینه ها در رتبه های بعدی هیچگونه اثری روی T_i^l ندارند. بدلیل آنکه بیشترین ارزش آنها در نظر گرفته شده است. حال می توان برای دو گزینه مجاور فی المثل i و l دو حالت جابجایی فرض نمود. بعبارت دیگر آیا A_i باید مقدم باشد و یا A_l تا T_{max} حاصل گردد:

$$\therefore T_i^l = VA_i^l + T_l^k = VA_i^l + VA_l^k + T^R \quad (۹)$$

$$\therefore T_l^l = VA_l^l + T_i^k = VA_l^l + VA_i^k + T^R \quad (۱۰)$$

براساس تفاضل معادلات (۹) و (۱۰):

$$\therefore T_i^l - T_l^l = (VA_i^l - VA_i^k) - (VA_l^l - VA_l^l) = 2W_{SR}(i,l) \quad (۱۱)$$

از سوی دیگر براساس فرض $T_i^k > T^k{}_l$، نتیجه می شود

که گزینهi ام (A_i) نسبت به گزینه l ام (A_l) ارجح است.

$$W_{SR}(i,l) > 0 \Rightarrow \text{براساس توجه شماره (۱)} \qquad (۱۲)$$

$$T_i^l - T_l^l = 2W_{SR}(i,l) > 0 \Rightarrow T_i^l > T_l^l \Rightarrow \text{براساس معادلات (۱۱) و (۱۰)}$$

$\therefore$ Setect A_i as the best alternative.

دقیقاً با همین رویکرد فوق، بنحوی قابل اثبات است که برای دو گزینه A_i و A_j که هر دو نیز غیر منفی هستند، بدلیل فرض اولیه $W_{SR}(i,j)>0$ بازهم A_i برتر از A_j خواهد بود.

$$T_i^l - T_j^l = 2W_{SR}(i,j) > 0 \Rightarrow T_i^l > T_j^l$$

$\therefore$ Setect A_i as the best alternative.

سرانجام حالت (۳) بصورت کلی و عمومی اثبات گردید. در نتیجه قاعده اصلی شماره (۲) براساس اصل استقراء ریاضی اثبات گردید.

مراجع

[۱] اصغر پور، محمد جواد، «تصمیم گیری های چند معیاره»، انتشارات دانشگاه تهران، ۱۳۷۸

[2] Hwang, Ching-Lai & Yoon, K., "Multipule Attribute Decision Making", Springer Ver lag, 1981.

[3] Paelinck, J. H. P."Qualitative Multiple Criteria Analysis, Environmental Protection and Multiregional Development", Papers of Reginal Science Association, Vol. 36, 1976, P59-74.

[4] Yagiura, Mutsunori & Ibaraki, Toshihide, "Use of Dynamic Programming in Genetic Algorithms for Permutation Problems", European Journal of Operational Research, Vol. 92, No. 2, Jul 19, 1996, P387-401.

[5] Carlier, Jacques & Rebaie, Ismaiel, "Two Branch and Bound Algorithms for the Permutation Flow Shop Problem", European Journal of Operationa Research, Vol. 90, No.2, Apr 19, 1996, P238-251.

[6] Tian, P., Ma, J., and Zhang, D. M., "Application of the Simulated Annealing Algorithm to Combinatorial Optimization Problem with Permutation Property: An Investigation of Generation Mechanism", European Journal of Operational Research, Vol. 118, No. 1, 1999, P81-94.

[7] Chanas, Stefan & Kobylanksi, Przemyslaw, "New Heuristic Algorithm Solving the Linear Ordering Problem", Computatinal Optimiaztion and Applications, Vol. 6, No. 2, Sep 1996, P191-205.

[8] Bernardo, J.J. & Blin, J.M. "A Programmming Model of Consumer Choice among Multi-Attributed Brands", Journal of Consumer Research, Vol.4, No. 2, 1977.P111-118.

[9] Saaty, Thomas L., "Decision Making for Leaders", RWS Publications, 1990.

[10] Roy, B., "How Outranking Relation Helps Multiple Criteria Decision Making", University of South Carolina Press, Colubia, South Carolina, 1973, P 179-201.

[11] Nijkamp, P., "A Multicriteria Analysis for Project Evalution: Economic-Ecological Evaluation of a Land Reclamation Project", Papers of Reginal Science Association, Vol. 35, 1974, P87-111.

[12] Van Delft, A. & Kahneman, D., "A Multiobjective Decision Model for Regional Development, Environmental Quality Control and Industrial Land Use", Papers of the Regional Science Association, Vol. 36, 1976, P35-57.

[13] Rosenstein, Joseph G., "Linear Orderings", Academic Press, New York. 1982.