توسعه مدل کنترل موجودی دو سطحی با تقاضای احتمالی و زمان تدارک ثابت

سید محمد تقی فاطمی قمی
دانشیار

مرتضی روغنی
کارشناسی ارشد

دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه صنعتی امیرکبیر

چکیده

یکی از روشهای حل مسائل سیستم های موجودی استفاده از تجزیه و تحلیل ریاضی است که در این رویکرد می بایست یک مدل ریاضی برای سیستم مورد نظر بنا نموده و سپس خواص مدل را مورد مطالعه قرار داد. به علت اینکه هیچگاه ممکن نیست دنیای واقعی را با دقت کامل نمایش داد، در موقع ساخت مدل ریاضی باید از تقریبها و فرضهایی که کار بررسی را تسهیل می کند استفاده نمود. در این مقاله مدل کنترل موجودی دو سطحی با تقاضای احتمالی و زمان تدارک ثابت توسعه داده شده است. این مدل در واقع سیاست بهینه (Q,r) هر یک از انبار ها را تعیین می نماید. یک الگوریتم تکرار برای حل مدل طراحی شده است. همچنین از جابجایی های اضطراری مابین انبار های محلی برای کاهش هزینه های کمبود و نگهداری کل سیستم استفاده شده است تا از موجودی های مازاد انبارها جهت انبار هایی که دچار کمبود شده اند استفاده گردد. تجزیه وتحلیل عددی نیز برای این مدل صورت گرفته است.

واژه‌های کلیدی

کنترل موجودی، دو سطحی، سیستم، تقاضای احتمالی، زمان تدارک، مدل سازی، توزیع، حمل و نقل، جابجایی، توسعه.

Development of a Model for Two-Echelon Inventory Control Structure with Stochastic Demand and Constant Lead Time

S. M.T. Fatemi Ghomi
Associate Professor

M. Roghani
Master of Science Degree

Department of Industrial Engineering,
Amirkabir University of Technology

Abstract

Mathematical analysis is one of the methods to evaluate inventory system, in this approach, we should make a mathematical model for the system then study the properties of the model. Because it is impossible to represent the real world entirely, some approximations and assumptions are necessary when building the mathematical model.

This paper develops a model for two-echelon inventory control structure with stochastic demand and constant lead time. This model actually determines the optimal policy (Q,r) for each warehouse. An recursive algorithm has been designed to solve the model. Also it considers emergency transshipments between local warehouses to reduce the holding and shortage costs of total system in manner of using the extra inventory of warehouses for those warehouses encountering the shortage. A numerical analysis has been done for the model.

Keywords

Inventory control, Two-echelon, System, Stochastic demand, Model building, Distribution, Transshipment, Transportation., Development.

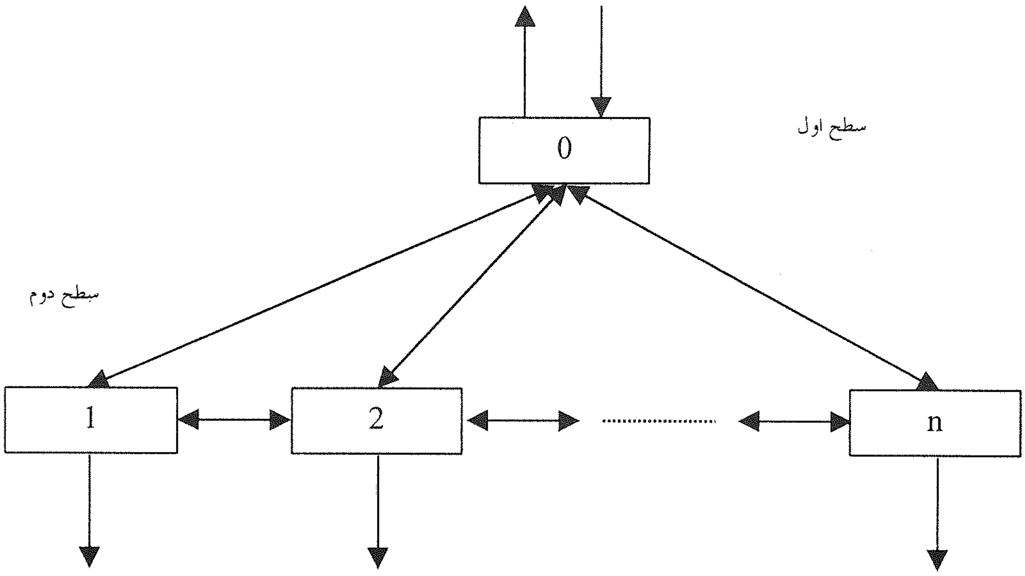
مقدمه

گرچه مشکلات موجودی به اندازه تاریخش قدیمی است ولی تنها از شروع این قرن بوده است که تلاشهایی در بکارگیری تکنیک های تحلیلی در مطالعه این مسائل به عمل آمده است. بیشتر سیستم‌های موجودی در دنیای واقعی دارای طبیعت چند سطحی هستند. سیستم‌های چند سطحی در چند دهه اخیر بطور محسوسی مورد توجه محققین قرار گرفته اند. نتایج حاصل از تحقیقات انجام شده اهمیت بکارگیری روشهای کنترل مرکزی سیستمهای موجودی چند سطحی را در مقایسه با نگرش غیرمتمرکز که عمدتاً به نام سیستم کنترل موجودی آماری معروفند، نشان می‌دهد.

موقعی که بیش از یک محل ذخیره برای نگهداری اقلام وجود داشته باشد، امکان تعارض و واکنش بصورت های گوناگون بین محلهای ذخیره وجود خواهد داشت. ساده‌ترین شکل واکنش موردی است که یک محل ذخیره به عنوان یک انبار مرکزی، برای یک یا تعداد بیشتری از انبارهای محلی دیگر عمل می‌نماید. این امر منجر به سیستمی می‌شود که به آن اصطلاحاً "سیستم کنترل موجودی چند سطحی" اطلاق می شود که نوع دوسطحی آن با انواع تبادلات موجودی در شکل ۱ نشان داده شده است.

در سیستم نشان داده شده، تقاضاهای مشتریان تنها در محل‌های ذخیره در سطح دوم اتفاق می‌افتد. این محل‌های ذخیره موجودی خود را از طریق حمل ونقل از انبار مرکزی سطح یک دریافت می دارند.

در موارد دیگر تقاضای مشتری ممکن است در همه سطوح رخ دهد، یا اینکه محلهای ذخیره در هر سطح ممکن است موجودی‌ها را از یک مرحله بالاتر دریافت نکنند، بلکه ممکن است موجودی ها را از سطح بالاتر یا از منبع دریافت دارند. همچنین ممکن است در برخی مواقع توزیع مجدد ذخیره ها (موجودی ها) در بین محلهای ذخیره متعددی که در یک سطح هستند مجاز باشد (این مورد در شکل نشان داده شده است).



شکل (۱) شکل کلی یک سیستم دو سطحی با انواع تبادلات.

در اغلب سیستم های توزیع اقلام مصرفی و یا شبکه‌های خدمات پس از فروش کامپیوترها ،صنایع خودرو، صنایع هواپیمایی، تجهیزات نظامی و...، قطعات یدکی و مواد مصرفی جزء اقلام با ارزش و بعضاً گران قیمت می‌باشند. فشار ناشی از رقابت بین توزیع کنندگان مختلف و یا شرکت‌های ارائه کننده خدمات پس از فروش به مصرف‌کنندگان این اقلام، عموماً سبب می شود تا شرکتها روش‌هایی از قبیل ارسال های اولویت دار، سرویس های فوری و ... را جهت حداقل نمودن زمان انتظار مشتریان بکار گیرند. ارائه خدمات مطلوب مستلزم داشتن موجودی برای پاسخگویی به نیاز مشتریان است. بطور ایده آل، داشتن موجودی زیاد می‌تواند پاسخگویی به تقاضای مشتریان را به هنگام نیاز تضمین نماید. ولی از طرف دیگر هزینه بالای قطعات و مواد مصرفی انجام این

کار را غیر اقتصادی خواهد کرد.

اکثر شرکتها برای حل مشکلات فوق اقدام به قراردادن موجودی‌های خود در مکان‌های استراتژیک در سیستم توزیع یا شبکه سرویس خود می‌نمایند و در واقع با این کار به نوعی یک توزیع اولیه را در سیستم انجام می‌دهند تا هنگام بروز تقاضا در زمان کمتری به تقاضای مشتریان خود پاسخ دهند. از دیگر راه کارهایی که برای ارائه مطلوب‌تر خدمات توسط شرکتها بکارگرفته می شود، استفاده از پیک برای ارسال قطعات مورد نیاز به مشتریان و نیز استفاده از حمل و نقل هوایی و شبانه جهت کمتر کردن و یا بعضاً حذف زمان تدارک است.

گاهی در برخی شرکتها استفاده از سیستم کنترل موجودی دو یا چند سطحی یک ضرورت است. مثلاً در شرکتهای مخابراتی که می بایست سرویس مطمئنی را تضمین نمایند نیاز مبرمی به چنین سیستمی دارند. سیستم کنترل موجودی دوسطحی راه حلی مناسب برای مدیریت انبارها و همچنین تعیین سیاستهای سفارش‌دهی و توزیع موجودی‌ها مابین انبارها است. لذا به واسطه کاربردهای فراوانی که این سیستم در عمل در شرکتهای مختلف دارد، در این مقاله به بررسی و توسعه مدل کنترل موجودی دو سطحی می پردازیم.

در این مقاله سیستم کنترل موجودی دوسطحی با تقاضای تصادفی مطالعه شده است. در بخش اول سیستم کنترل موجودی چند سطحی و دو سطحی معرفی شده و به زمینه های کاربردی آن اشاره شده است. بخش دوم به مرور ادبیات کنترل موجودی دو سطحی می‌پردازد. سپس در بخش سوم مدلی با در نظر گرفتن زمان تدارک توسعه داده شده است. در بخش چهارم نتایج حاصله و پیشنهادهایی برای توسعه های آتی ارائه شده است.

مرور ادبیات

در بررسی مقالات ملاحظه شد که بطور عمده به دو نوع سیستم کنترل موجودی چند سطحی توجه شده است. نوع اول سیستم موجودی چند سطحی برای اقلام قابل تعمیر و نوع دوم سیستم چند سطحی اقلام مصرفی هستند. البته مقالات دیگری نیز به موارد مختلفی از قبیل بررسی ذخیره ایمنی و سطح سرویس در یک سیستم خاص یا تخصیص ذخیره ایمنی بوسیله شبیه سازی در یک سیستم توزیع و یا بالانس سیستم برای سیستم پشتیبانی پرداخته‌اند.

اولین کار جدی انجام شده در رابطه با کنترل موجودی چند سطحی در سال ۱۹۶۰ توسط کلارک واسکارف[1] [1] صورت گرفته است. آنها در مقاله ای با عنوان "سیاست بهینه برای مسئله کنترل موجودی چند سطحی" به بررسی مدلی در این رابطه می‌پردازند.

در سال ۱۹۷۴ تان[2] [2] در مقاله‌ای با عنوان "روشهای بهینه برای یک مسئله موجودی چند سطحی با سفارشات دوره‌ای" به یک سیستم دو سطحی با یک انبار مرکزی در سطح اول و دو انبار محلی در سطح دوم پرداخته است. در این مقاله تقاضاها احتمالی در نظر گرفته شده است. انبار موجود در سطح اول در هر پریود می تواند موجودی را به انبارهای محلی سطح دوم تخصیص دهد ولی خود از منابع خارجی تنها بعد از T پریود می تواند سفارش دهد. هزینه‌های نگهداری و کمبود غیر خطی و هزینه‌های سفارش‌دهی و تخصیص، خطی فرض شده اند. در حقیقت مدل توسعه داده شده به روشی مشابه (Q,r) سعی می کند برای انبارهای مختلف، نقاط سفارش و میزان سفارش را تعیین نماید. شاید مشکل عمده این مدل انجام محاسبات پیچیده جهت دستیابی به روش عمل برای ساختاری بسیار ساده باشد.

در سال ۱۹۸۴، فدرکورن و زیپکین[3] [3] در مقاله ای با عنوان "تقریب های مسائل تولید و موجودی چند مکانی پویا" یک دپوی مرکزی را مطرح می کند که تقاضاهای تصادفی چند انبار را تدارک می نماید، سفارشات دپو بطور دوره ای انجام می‌گیرد که بعد از زمان تاخیر ثابتی رسیده و سپس به چندین انبار تخصیص می یابد (خود دپو موجودی نگه نمی دارد). هدف مقاله کمینه سازی هزینه کل مورد انتظار سیستم روی تعداد محدودی از پریود های زمانی است و حل مدل منجر به یک برنامه پویا با فضای حالتی با ابعاد بسیار بزرگ می‌گردد. نشان داده می شود که مدل می تواند بطور سیستماتیک بوسیله مسئله موجودی تک مکانی تقریب زده شده سپس از نتایج آن استفاده گردد.

در سال ۱۹۸۵، شوارز، درمیر و بادینیلی[4] [4] سیستم توزیع موجودی شامل یک انبار مرکزی و n انبار محلی را جهت تعیین سیاست بهینه شارژ انبارهای محلی مورد مطالعه قرار داده اند. تقاضای انبار های محلی بصورت تصادفی و مستقل با توزیع پواسون با نرخ λ_R در نظر گرفته شده است. هرانبار محلی سیاست مرور پیوسته (Q_R,r_R) را برای شارژ انبار خود دنبال می نماید.انبار مرکزی نیزکه تامین کننده اقلام مورد نیاز انبار های محلی است، سیاست (Q_W,r_W) را دنبال می نماید.

جانسون و سیلور[5] [5] در سال ۱۹۸۷ به تجزیه و تحلیل سیستم کنترل موجودی دو سطحی با امکان توزیع مجدد اقلام بین انبارها پرداخته‌اند. تقاضا بصورت تصادفی و با توزیع نرمال در نظر گرفته شده است. انبار مرکزی پس از هر H دوره، می‌تواند یک سفارش تا سطح مشخص از تامین‌کنندگان کالا صادر نماید که این سطح سفارش با

توجه به سطح سرویس هدف محاسبه می‌شود. انبار مرکزی پس از دریافت سفارش اقدام به توزیع اقلام می نماید بطوری که مجموع واحد های کمبود مورد انتظار در انبارهای محلی کمینه گردد. به منظور رفع عدم تعادل [6] در انبارهای محلی امکانی برای توزیع مجدد درنظر گرفته شده است.

پارک کیونگ و کیم دا[7] [6] در سال ۱۹۸۹ یک روش ابتکاری برای مدل کنترل موجودی احتمالی در حالتی که سیستم توزیع دو سطحی دارای یک انبار مرکزی است و اقلام را برای توزیع به انبار های محلی ذخیره می نماید، ارائه نموده اند. الگوریتم ارائه شده یک الگوریتم قدم به قدم بوده و جهت بدست آوردن جواب بهینه یا نزدیک بهینه و به منظور کمینه سازی جمع متغیر های هزینه‌ای سیستم در سال طراحی شده است. آزمایشهای عددی با ۱۵ مساله تصادفی تولید شده، نشان می دهد که الگوریتم به سرعت همگرا می شود.

در سال ۱۹۹۱ داس و گویال[8] [7] یک سیاست سفارش اقتصادی برای توزیع دو سطحی قطعی را مورد بررسی قرارداده اند. در این مقاله الگوریتمی برای تعیین سیاست سفارش اقتصادی برای فراهم کردن اقلام بطور مرکزی بوسیله تولید کننده و توزیع آن از انبار مرکزی به تعدادی انبارهای محلی پیشنهاد می شود. محصول از طریق انبار های محلی به مشتریان توزیع می گردد. در اینجا هدف کمینه سازی کل هزینه های تولید کننده است که ناشی از هزینه های سفارش، هزینه های توزیع و هزینه‌های حمل موجودی مربوط به انبار مرکزی و انبارهای محلی است. در این مدل فرض براین است که:

۱ـ تقاضا برای محصول برای هر انبار محلی در طی زمان ثابت است.

۲ـ برای جنس تولید شده بوسیله انبار مرکزی سفارشهای یکسانی وجود دارد.

۳ـ جنس از انبار مرکزی به یک انبار محلی بخصوص در فواصل زمانی برابر توزیع می شود.

۴ـ افق زمانی محدود است.

۵ـ کمبود مجاز نیست.

۶ـ هدف کمینه سازی هزینه است.

در همین سال (۱۹۹۱)، سینها و ماتا[9] [8] مدل موجودی چند سطحی (R,S) را بررسی کرده اند. در این مدل یک سیستم دو سطحی با تقاضای تصادفی و یک سیستم تخصیص موجودی کششی بررسی شده است. هر سطح سیاست کنترلی نوع (R,S) را دارد. در این مدل موقعیت موجودی هر R واحد از زمان مرور و باز بینی می‌شود و تفاوت بین S و موقعیت موجودی، سفارش داده می‌شود. در این مقاله یک مدل ریاضی برای تعیین سطح بهینه سفارش در همه سطوح توسعه داده شده است و دقت مدل با شبیه سازی کامپیوتری اعتبارسنجی شده است. دو الگوریتم ساده نیز برای یافتن جواب بهینه ارائه شده است.

در سال ۱۹۹۲، دادا[10] [9] سیستم دو سطحی برای قطعات یدکی را مورد تجزیه و تحلیل قرار داده است. سیستم اجازه می دهد که هنگام کمبود موجودی امر ارسال بصورت تسریعی صورت پذیرد. مدل توسعه داده شده نسبتا" شبیه مدل متریک [11] ارائه شده توسط شربروک (۱۹۶۸)[12] [10] است. در مدل متریک فرض می شود که مراکز سرویس دارای سیستم کنترل موجودی پایه می‌باشد.

شتوب و سیمون[13] [11] در سال ۱۹۹۴ تعیین نقاط سفارش در سیستم موجودی دو سطحی قطعات یدکی را مورد بحث قرار داده اند. سیستم شامل یک انبار مرکزی است که مراکز ارائه کننده خدمات سرویس را پشتیبانی می‌نماید. هر مرکز ارائه خدمات با یک تقاضای تصادفی مواجه است . هزینه انتقالات موجودی در هر دو سطح یکسان است اما احتمال وقوع کمبود بین مراکز خدمات نگهداری مختلف متفاوت است.سیاست مدیریت موجودی، مشخص می نماید که برای هر مرکز خدماتی نقطه سفارش چه میزان خواهد بود.

تحقیق دیگری در سال ۱۹۹۴ توسط هاسمن و ارکیپ[14] [12] انجام شده است که به مقایسه سیاست کنترل موجودی چند سطحی در برابر یک سطحی می‌پردازد. مدل برای کالاهایی که گران قیمت و دارای تقاضای پایین می‌باشند طراحی شده است. فرض بر آنست که انبارها سیاست مرور دوره ای $(S-1,S)$ را دنبال می کنند. نتایج حاصل از بکارگیری این مدل در حالت چند سطحی با سیستم یک سطحی مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته است.

در سال ۱۹۹۷ وان در هیجدن[15] [13] بر روی سیستم کنترل موجودی در سیستمهای توزیع با ساختار چند سطحی در شرایط بازبینی دوره ای و بدون تعیین اندازه انباشته[16] بحث و بررسی نموده است. تاکید اولیه بر روی مدل دو سطحی با یک انبار مرکزی است.قاعده کنترل شامل دو مجموعه پارامتر است:

- مجموعه نرخهای تقسیم در انبار مرکزی با هدف کمینه سازی عدم تعادل موجودی

و

- مجموعه ای از سطح های سفارش برای انبار های ذخیره محلی با هدف دستیابی به یک سطح سرویس مشخص برای هر انبار محلی.

مولف جهت حل این مدل و محاسبه پارامترهای کنترل آنرا به دو زیر مساله تبدیل نموده و سپس آنرا حل نموده است.

در سال ۱۹۹۸ برت رند و بوک بیندر[17] [14] سیستم

دو سطحی با امکان توزیع مجدد را بررسی نموده و الگوریتمی برای انجام توزیع مجدد توسعه داده‌اند. در این مقاله مدل توسعه داده شده با مدل جانسون و سیلور (۱۹۸۷) مورد مقایسه و بررسی قرار گرفته است.

توسعه مدل موجودی دوسطحی با تقاضای تصادفی و زمان تدارک ثابت

مقدمه: سیستمی با یک انبار مرکزی و n انبار محلی در نظر بگیرید. فرض می‌شود که همه انبارهای محلی سیاست مرور دوره‌ای (Q_i, r_i) را دنبال می‌کنند. هنگامی که موقعیت موجودی انبارمحلی i به نقطه سفارش r_i می‌رسد، یک سفارش به تعداد Q_i واحد توسط انبار محلی i به انبار مرکزی صادر می شود. هر انبار محلی با تقاضای تصادفی پیوسته از سوی مشتریان مواجه است. عموماً سیاست (Q,r) بواسطه کارایی خوب و سادگی اجرا مورد استفاده قرار می گیرد [4]. تقاضای پاسخ داده نشده در هر انبار محلی سفارش تاخیر شده[18] محسوب می شود. انبار مرکزی نیز با تقاضای ناهموار انبارهای محلی مواجه بوده و سیاست (Q,r) را دنبال می کند. در چنین شرایطی، از آنجا که امکان فراتر رفتن تقاضای انبارهای محلی از نقطه سفارش انبار مرکزی وجود دارد، انبار مرکزی برای جلوگیری از بروز حالت کمبود اقدام به خرید اضطراری می‌نماید. بدیهی است اگر انبار مرکزی موجودی لازم برای پرکردن سفارش انبار محلی را داشته باشد، این امر بدون هیچگونه تاخیری انجام می‌شود.

فرض می‌شود هزینه کمبود در هر انبار محلی متناسب با طول زمانی است که برای تامین آن لازم است. در اینجا برای سیستم توزیع دو سطحی فوق، سیاست بهینه موجودی را تعیین می نماییم. این کار در شرایطی صورت می‌گیرد که انبار مرکزی، انبارهای محلی یعنی محل پاسخ‌گویی به تقاضای مشتریان را تغذیه می نماید. هدف، کمینه‌سازی مجموع هزینه های متغیر سیستم (سفارش‌دهی، نگهداری، کمبود و خرید اضطراری) است. هزینه‌ها به صورت سالانه برای انبارمرکزی و انبارهای محلی محاسبه می‌گردند. جهت حل مدل و تعیین سیاست بهینه مساله به دو زیر مدل تقسیم می شود: زیر مدل انبارهای محلی و زیر مدل انبار مرکزی.

فرضیات

۱- تقاضا در هر انبار محلی مستقل از تقاضاهای دیگر انبارهای محلی روی می‌دهد.

۲- زمان تدارک در انبار مرکزی و در هر انبار محلی ثابت، ولی لزوماً با هم برابر نمی‌باشد.

۳- تقاضا در طی زمان تدارک تصادفی بوده و در انبار مرکزی تابع توزیع $f_0(x_0)$ دارد که $x_0 \in (0,\infty)$ و در انبارهای محلی نیز دارای تابع توزیع $f_i(x_i)$ دارد که $x_i \in (0,\infty)$ است.

۴- هزینه سفارش‌های تاخیر شده در انبارهای محلی متناسب با طول زمانی است که کمبود رخ داده است.

۵- در انبار مرکزی برای اجتناب از محاسبه دوباره، هیچ جریمه‌ای برای سفارش های تاخیر شده منظور نمی‌شود.

۶- هزینه سفارش های تاخیر شده در هرانبار محلی به اندازه کافی بالا است که نقطه سفارش مجدد r_i بر اساس موجودی خالص، مثبت خواهد بود $(r_i > 0)$.

نماد گذاری

N: تعداد انبارهای محلی

D_i: میانگین تقاضای سالانه در انبار محلی iام

D_0: میانگین تقاضای سالانه مورد انتظار در انبار مرکزی $(D_0 = \sum_{i=1}^{N} D_i)$

Q_i و r_i: تعداد سفارش و نقطه سفارش در انبار محلی iام

Q_i^* و r_i^*: مقدار بهینه Q_i و r_i

L_0: زمان تدارک ثابت در انبار مرکزی

L_i: زمان تدارک ثابت در انبار محلی i ام

Q_0 و r_0: تعداد سفارش و نقطه سفارش در انبار مرکزی

Q_0^* و r_0^*: مقادیر بهینه Q_0 و r_0

EO_0: تعداد سفارش اضطراری در انبار مرکزی

Pc: هزینه خرید هر واحد در انبار مرکزی بصورت اضطراری

μ_0: میانگین تقاضا در طی زمان تدارک در انبار مرکزی

x_0: متغیر تصادفی میزان مصرف در طی زمان تدارک در انبار مرکزی

μ_i: میانگین تقاضا در طی زمان تدارک در انبار محلی iام

x_i: متغیر تصادفی میزان مصرف در طی زمان تدارک در انبار محلی iام

A_0 و A_i: هزینه سفارش‌دهی در انبار مرکزی و انبار محلی iام

h_0 و h_i: هزینه نگهداری موجودی به ازای هر واحد موجودی در انبار مرکزی و انبار محلی i

π_i: هزینه سفارشات تاخیر شده به ازای هر واحد موجودی در انبار محلی iام

t: هزینه جابجایی اضطراری در طی دوره

تجزیه و تحلیل انبار محلی

در این قسمت هزینه متغیر سالانه متوسط که در هر انبار محلی i روی می دهد و نیز متغیر های سیاست عملیاتی بهینه، یعنی Q_i و r_i تعیین می شود. شکل ۲، تغییرات سطح موجودی را که حاصل از سیاست مرور پیوسته (Q_i, r_i) است در انبار محلی iام توصیف می کند.

فرض کنید که توزیع تقاضا در زمان تدارک انبار محلی iام دارای تابع چگالی احتمال $f_i(x_i)$ با میانگین زیر است:

$$\mu_i = L_i D_i \tag{1}$$

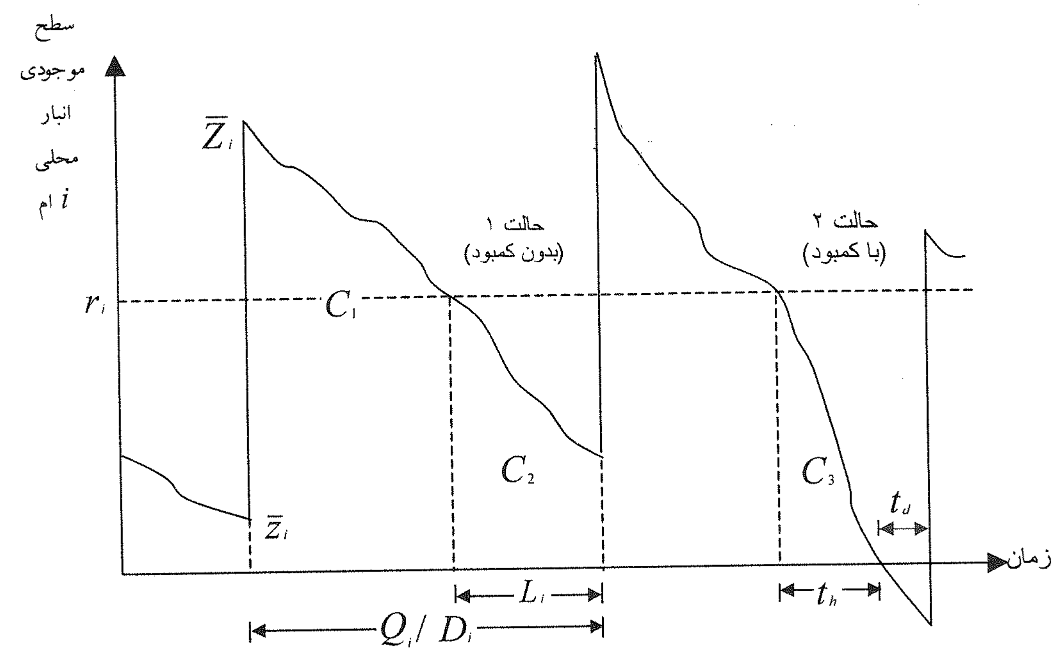
انبار محلی i به تعداد D_i / Q_i دفعه در سال، سفارش می دهد. میانگین هزینه سفارش سالانه در انبار محلی i عبارت است از:

$$A_i(D_i/Q_i) \tag{2}$$

موجودی در دست مورد انتظار در انبار محلی i در دو قسمت محاسبه می شود. اول، برای دوره زمانی تا موعدی که به نقطه سفارش می رسیم، و دوم برای زمان تدارک $L_i = \mu_i / D_i$

$\bar{z}_i$ را موجودی خالص مورد انتظار در زمان رسیدن سفارش به انبار محلی i در نظر بگیرید. از آنجاکه تقاضای مورد انتظار در طی زمان تدارک موثر μ_i است، $\bar{z}_i$ دارای مقدار $(r_i - \mu_i)$ خواهد بود. (توضیح: چون در نقطه r_i سفارش داده ایم و تقاضا در زمان تدارک ، یعنی تا رسیدن سفارش، μ_i است، یک لحظه قبل از رسیدن سفارش به انبار، میزان موجودی در دست مورد انتظار $(r_i - \mu_i)$ خواهد بود). موجودی خالص مورد انتظار بلافاصله بعد از رسیدن سفارش عبارت است از:

$$\bar{Z}_i = \bar{z}_i + Q_i = Q_i + r_i - \mu_i \tag{3}$$



شکل (۲) تغییرات سطح موجودی در انبار محلی i ام.

پس از دریافت سفارش دوره، زمان مورد انتظار برای رسیدن به نقطه سفارش r_i، بوسیله عبارت $Q_i / D_i - L_i$ مشخص می شود (یعنی زمان یک سیکل منهای زمان تدارک). مقدار مورد انتظار ناحیه C_1 در شکل ۲ بوسیله عبارت زیر مشخص می‌شود:

$$C_1 = \frac{1}{2}\cdot(\bar{Z}_i + r_i)\cdot\left(\frac{Q_i}{D_i} - L_i\right)$$

$$= \frac{1}{2}(Q_i + 2r_i - \mu_i)\cdot(Q_i - \mu_i)/D_i \tag{4}$$

دو حالت برای قسمت باقی مانده وجود دارد: یا اینکه موجودی در دست همه تقاضاها را در طی زمان تدارک جوابگو می‌باشد، و یا اینکه قبل از رسیدن سفارش جدید مصرف خواهد شد. اگر هیچ کمبودی روی ندهد $(x_i \le r_i)$ مقدار مورد انتظار ناحیه C_2 در شکل ۲ عبارت خواهد بود از:

$$C_2=\frac{L_i}{2}E\left[r_i+(r_i-x_i)\right]=\frac{L_i}{2}\int_0^{r_i}(2r_i-x_i)f_i(x_i)\,d\,x_i$$

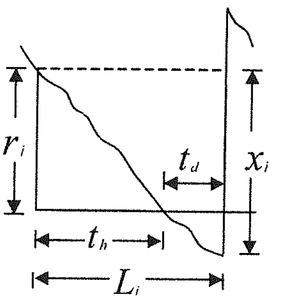
$$=\frac{L_i}{2}\left\{2r_i\int_0^{r_i}f_i(x_i)\,d\,x_i-\int_0^{r_i}x_if_i(x_i)\,d\,x_i\right\}$$

$$=\frac{L_i}{2}\left\{2r_i\cdot F_i(r_i)-\int_0^{r_i}x_if_i(x_i)\,d\,x_i\right\} \qquad (۵)$$

اگر موجودی مصرف شود $(x_i > r_i)$، ما ناحیه مثلث C_3 را در شکل ۲ در نظر می گیریم. بوسیله تشابه مثلثها در شکل ۳، زمان مصرف موجودی در دست، در طـی زمـان تـدارک کالا، عبارتست از:

$$\frac{t_d}{L_i}=\frac{x_i-r_i}{x_i}\Rightarrow\frac{L_i-t_d}{L_i}=\frac{x_i-x_i+r_i}{x_i}$$

$$\frac{t_h}{L_i}=\frac{r_i}{x_i}\Rightarrow \qquad t_h=r_iL_i/x_i \qquad (۶)$$



شکل (۳) وضعیت پارامترهای مدل در حالت کمبود.

بنابراین مقدار مورد انتظار ناحیه C_3 بوسیله عبارت زیر تعیین می شود:

$$C_3=\frac{r_i}{2}E(t_h)=\frac{r_i}{2}\int_{r_i}^{\infty}\frac{L_ir_i}{x_i}f_i(x_i)\,d\,x_i$$

$$=r_i^2\frac{L_i}{2}\int_{r_i}^{\infty}\left(\frac{1}{x_i}\right)f_i(x_i)\,d\,x_i \qquad (۷)$$

در نتیجه موجودی در دست مورد انتظار در سیکل با جمع کردن نواحی مربوط ازمعادلات (۴)، (۵) و (۷)بدست می‌آید. هزینه سالانه متوسط نگهداری موجودی که در انبار محلی i روی می دهد با ضرب کردن موجودی در دست مورد انتظار هر سیکل در مقدار h_iD_i/Q_i بدست می آید.

$$AHC_i=(h_iD_i/Q_i)\cdot(C_1+C_2+C_3)$$

که بعد از خلاصه سازی داریم:

$$AHC_i=h_i\left(\frac{Q_i}{2}+r_i-\mu_i-\frac{r_i\mu_i}{Q_i}+\frac{\mu_i^2}{2Q_i}\right)$$

$$+h_i\frac{\mu_i}{2Q_i}\left\{2r_iF_i(r_i)-\int_0^{r_i}x_i\cdot f_i(x_i)\,d\,x_i+r_i^2\int_{r_i}^{\infty}\frac{1}{x_i}f_i(x_i)\,d\,x_i\right\} \qquad (۸)$$

از آنجا که مدت زمانی که کمبود در سیکل روی می‌دهد $t_d=L_i-t_h=L_i-r_iL_i/x_i$ است و تقاضای تاخیر شده (x_i-r_i) می باشد، هزینه تاخیر سالانه متوسط با وزن زمانی که در انبار محلی i ام روی می دهد عبارت است از:

$$ASC_i=\frac{\pi_iD_i}{2Q_i}\int_{r_i}^{\infty}(x_i-r_i)\cdot\left(L_i-\frac{r_iL_i}{x_i}\right)f_i(x_i)\,d\,x_i$$

$$=\frac{\pi_i\mu_i}{2Q_i}\int_{r_i}^{\infty}(x_i-r_i)\cdot\left(\frac{x_i-r_i}{x_i}\right)f_i(x_i)\,d\,x_i$$

$$=\frac{\pi_i\mu_i}{2Q_i}\int_{r_i}^{\infty}\frac{(x_i-r_i)^2}{x_i}f_i(x_i)\,d\,x_i \qquad (۹)$$

حال کل اجزای متغیر هزینه سالانه متوسط که در انبار محلی i روی می دهد $K_i(Q_i,r_i)$ یافته شده است. از معادلات (۲)، (۸) و (۹) داریم:

$$K_i(Q_i,r_i)=\frac{A_iD_i}{Q_i}+h_i\left(\frac{Q_i}{2}+r_i-\mu_i-\frac{r_i\mu_i}{Q_i}+\frac{\mu_i^2}{2Q_i}\right)$$

$$+h_i\frac{\mu_i}{2Q_i}\left\{2r_iF_i(r_i)-\int_0^{r_i}x_i\cdot f_i(x_i)\,d\,x_i+r_i^2\int_{r_i}^{\infty}\frac{1}{x_i}f_i(x_i)\,d\,x_i\right\}$$

$$+\frac{\pi_i\mu_i}{2Q_i}\int_{r_i}^{\infty}\frac{(x_i-r_i)^2}{x_i}f_i(x_i)\,d\,x_i \qquad (۱۰)$$

حال با توجه به (۱۰) می توانیم N زیرمساله مستقل را برای انبار های محلی حل نماییم. هر زیر مساله برای انبار محلی i، در واقع یک مساله کمینه سازی متغیر هزینه سالانه متوسط $K_i(Q_i,r_i)$ است.

نکته قابل توجه اینکه Q_i^* در معادله (۱۰) نمی تواند صفر باشد، چرا که در این صورت $K_i(0,r_i)=\infty$ و نیز با توجه به فرض ۶، $r_i^*>0$ است. بعبارت دیگر مقادیر حداقل، نمی توانند روی مرز روی دهند. بنابراین شرط لازم و کافی برای بهینه بودن Q_i و r_i در iامین زیر مساله آنست که دو معادله زیر بطور همزمان برقرار باشند:

$$\frac{\partial K_i}{\partial Q_i}=0 \qquad (۱۱)$$

و

(۱۲)
$$\frac{\partial K_i}{\partial r_i}=0$$

در اینجا ما دو معادله داریم که می باید برای Q_i و r_i حل شوند. برای i امین زیر مساله، مقادیر (Q_i^*, r_i^*) از معادلات (۱۱) و (۱۲) حاصل می شود.

برای یافتن زوج بهینه (Q_i^*, r_i^*) برای i امین زیر مساله که $K_i(Q_i, r_i)$ را کمینه سازد، ما زیر رویه تکراری ذیل را مورد استفاده قرار می دهیم.

قدم ۱- تخمین اولیه برای Q_i عبارتست از $Q_i=\sqrt{(2\ A_i D_i\ /h_i)}$. این مقدار را $Q_i^{(1)}$ بنامید.

قدم ۲- معادله (۱۲) را با $Q_i = Q_i^{(1)}$ برای یافتن نقطه سفارش مجدد r_i بکار بگیرید.این مقدار را $r_i^{(1)}$ بنامید.

قدم ۳- معادله (۱۱) را با $r_i = r_i^{(1)}$ برای یافتن $Q_i^{(2)}$ بکار بگیرید.

قدم۴- قدم ۲ را با $Q_i = Q_i^{(2)}$ و غیره تکرار کنید. همگرایی وقتی در قدم j روی می دهد که داشته باشیم: $Q_i^{(j)} = Q_i^{(j-1)}$ یا $r_i^{(j)} = r_i^{(j-1)}$.

اثبات همگرایی الگوریتم فوق در پارک و کیم [19] [15] آورده شده است. البته در تمامی مساله های حل شده مشخص گردید که این الگوریتم با سرعت خوبی همگرا می شود. نهایتاً، متغیر هزینه سالانه متوسط حداقل، در همه انبار های محلی می تواند بصورت زیر ارائه شود، یعنی:

(۱۳)
$$K^*=\sum_{i=1}^{N} K_i\left(Q_i^*, r_i^*\right)$$

تجزیه وتحلیل انبار مرکزی

در این قسمت، متغیر هزینه سالانه متوسط و همچنین متغیر سیاست عملیاتی بهینه Q_0^* و r_0^* در انبار مرکزی تعیین می گردد.

تعداد سفارش، براساس توزیع احتمال تقاضا از انبار مرکزی در طی زمان تدارک محاسبه می گردد. اگرچه مدل بندی فرآیند تقاضا از انبار مرکزی بطور دقیق خیلی مشکل است ولی برای سادگی عمل فرض می شود تقاضا از انبار مرکزی در طی زمان تدارک دارای تابع توزیع $f_0(x_0)$ با میانگین داده شده بصورت است:

(۱۴)
$$\mu_0 = L_0 \cdot \sum_{i=1}^{N} D_i$$

عبارت فوق کل تقاضای مشتریان از انبار های محلی را به حساب می آورد و واقعیت آنست که انبار مرکزی با تقاضای ناهموار از سوی انبار های محلی مواجه خواهد بود.

از آنجا که در هر دوره یک سفارش صادر می گردد، هزینه سفارش‌دهی سالانه متوسط که در انبار مرکزی روی می دهد عبارت است از:

(۱۵)
$$A_0\left(D_0/Q_0\right)$$

تقاضای مورد انتظار در طی زمان تدارک μ_i است و بنابراین موجودی خالص مورد انتظار درست قبل از رسیدن سفارش $\bar{z}_0 = r_0 - \mu_0$ خواهد بود. موجودی خالص مورد انتظار درست بعد از دریافت سفارش عبارت است از:

(۱۶)
$$\bar{Z}_0 = r_0 - \mu_0 + Q_0$$

هزینه سالانه متوسط نگهداری موجودی با توجه به شکل ۴ عبارتست از:

$$AHC_0 = \left(h_0 D_0/Q_0\right) \cdot \left(C_1 + C_2 + C_3\right)$$

که بعد از خلاصه سازی داریم:

$$AHC_0 = h_0\left(\frac{Q_0}{2} + r_0 - \mu_0 - \frac{r_0\mu_0}{Q_0} + \frac{\mu_0^2}{2Q_0}\right)$$

(۱۷)
$$+\ h_0\frac{\mu_0}{2Q_0}\left\{2r_0F_0(r_0) - \int_0^{r_0} x_0 \cdot f_0(x_0)d\ x_0 + r_0^2\int_{r_0}^{\infty}\frac{1}{x_0}f_0(x_0)d\ x_0\right\}$$

اما با توجه به این که انبار مرکزی در مواقع بروزکمبود اقدام به خرید اضطراری می نماید، در انبار مرکزی بجای هزینه کمبود، هزینه خرید اضطراری وجود دارد که عبارت است از:

(۱۸)
$$P_0 = Pc \cdot E\left(EO_0\right) = Pc \cdot \int_{r_0}^{\infty}(x_0 - r_0) \cdot f_0(x_0)d\ x_0$$

هزینه سالیانه خرید اضطراری عبارت است از:

(۱۹)
$$APC = \frac{D_0}{Q_0}Pc \cdot \int_{r_0}^{\infty}(x_0 - r_0) \cdot f_0(x_0)d\ x_0$$

بنابراین متغیر هزینه سالانه متوسط $K_0(Q_0, r_0)$ که در انبار مرکزی روی می دهد با توجه به معادلات (۱۵)، (۱۷) و (۱۹) عبارت است از:

$$K_0(Q_0, r_0) = A_0\left(D_0/Q_0\right) + h_0\left(\frac{Q_0}{2} + r_0 - \mu_0 - \frac{r_0\mu_0}{Q_0} + \frac{\mu_0^2}{2Q_0}\right)$$

$$+ h_0 \frac{\mu_0}{2Q_0} \left\{ 2r_0 F_0(r_0) - \int_0^{r_0} x_0 \cdot f_0(x_0) d x_0 + r_0^2 \int_{r_0}^{\infty} \frac{1}{x_0} f_0(x_0) d x_0 \right\}$$

$$+ \frac{D_0}{Q_0} Pc \cdot \int_{r_0}^{\infty} (x_0 - r_0) \cdot f_0(x_0) d x_0 \qquad (۲۰)$$

توجه کنید که با توجه به فرض ۵ هزینه تاخیر انبار مرکزی در معادله (۲۰) ظاهر نمی‌شود. در نهایت شرط لازم و کافی برای بهینه بودن Q_0^* و r_0^* در مساله آنست که دو معادله زیر بطور همزمان برقرارگردد:

$$\frac{\partial K_0}{\partial Q_0} = 0 \qquad (۲۱)$$

و

$$\frac{\partial K_0}{\partial r_0} = 0 \qquad (۲۲)$$

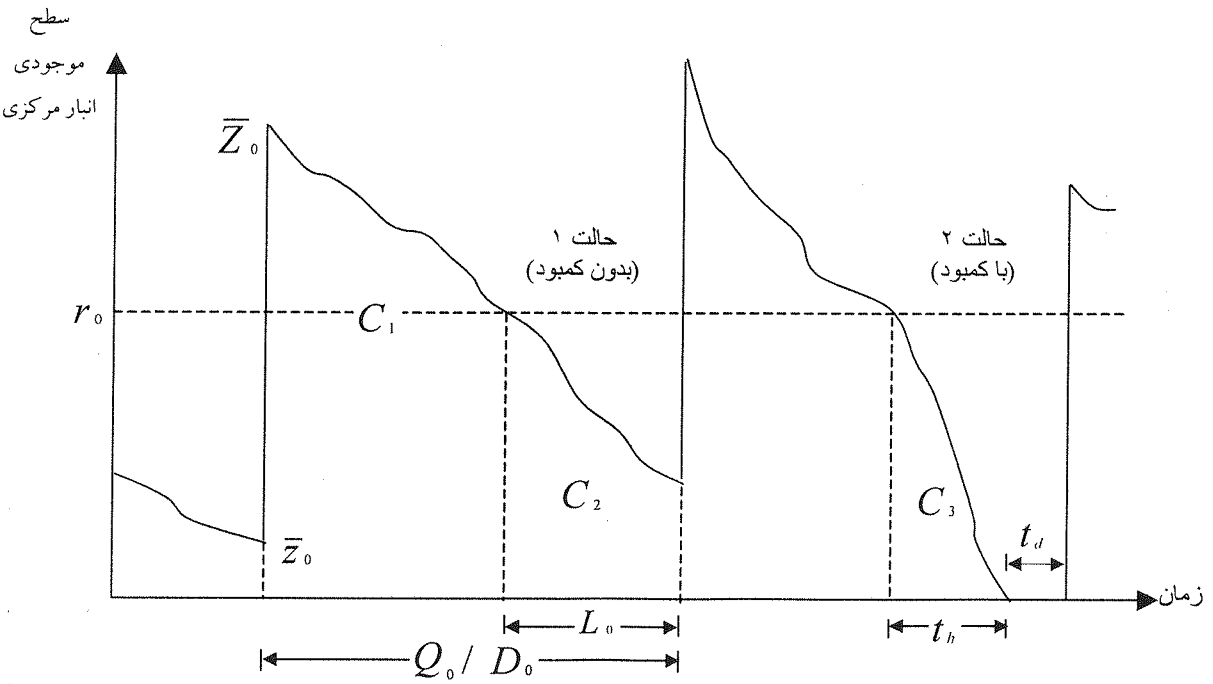
(۲۳)

در اینجا ما دو معادله داریم که می باید برای Q_0^* و r_0^* حل شوند. برای یافتن زوج بهینه (Q_0^*, r_0^*) که $K_0(Q_0, r_0)$ را کمینه سازد، می‌بایست از الگوریتم تکرار قسمت قبل استفاده نماییم.

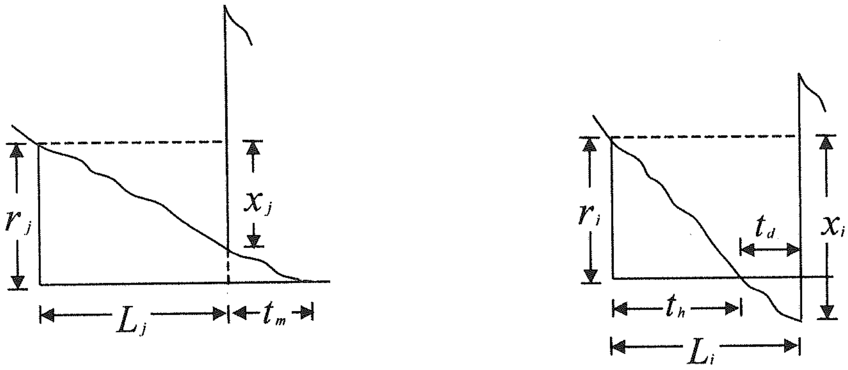
جابجایی های اضطراری در طی دوره جهت کاهش هزینه های نگهداری و کمبود

با توجه به تصادفی بودن تقاضا در انبار های محلی احتمال بروز حالتی مانند شکل ۵ در انبار های محلی بسیار زیاد است. لذا به نظر می آید که در هنگام بروز کمبود در برخی از انبار های محلی، استفاده از موجودی مازاد سایر انبار های محلی، علاوه بر کاهش هزینه کمبود، سبب کاهش هزینه نگهداری در انبار هایی با موجودی مازاد نیز می گردد. از طرف دیگر برای جابجایی این اقلام می بایست متحمل هزینه جابجایی شویم ولی از آنجا که در عمل این هزینه به نسبت هزینه های کمبود و نگهداری موجودی کمتر است، بکارگیری این روش سبب استفاده بهینه از موجودی ها می گردد. بنابراین لازم است تا تعداد این جابجایی ها را محاسبه نماییم. برای این کار می بایست تعداد مورد انتظار کمبود و مازاد را در انبارهای محلی محاسبه کنیم. برای این کار با استفاده از شکل ۵ و محاسبات قبلی قادر هستیم تا مقادیر کل مورد انتظار کمبود و مازاد را بدست آوریم.کل تعداد کمبود در واحد زمان عبارت است از:

$$TS = \sum_{i=1}^{V} \frac{\mu_i}{2 Q_i^*} \int_{r_i}^{\infty} \frac{(x_i - r_i)^2}{x_i} f_i(x_i) d x_i \qquad (۲۳)$$



شکل (٤) تغییرات سطح موجودی در انبار مرکزی.



شکل (۵) حالات کمبود در انبار i ام و مازاد در انبار j ام.

با توجه به شکل ۵ داریم:

$$\frac{t_m}{L_j + t_m} = \frac{r_j - x_j}{r_j} \Rightarrow t_m = L_j \frac{r_j - x_j}{x_j} \tag{۲۴}$$

بنابراین تعداد کل مورد انتظار مازاد در واحد زمان در انبارهای محلی عبارت است از:

$$T_M = \sum_{j=1}^{N} \cdot \frac{\mu_j}{2\ Q_j^*} \int_0^{r_j} \frac{\left(r_j - x_j\right)^2}{x_j} f_j(x_j) d\ x_j \tag{۲۵}$$

تعداد موجودی مورد انتظار برای جابجایی مابین انبارهای محلی عبارت است از:

$$TQ = Min\left\{\sum_{j=1}^{N} E\left(r_j - x_j\right), \sum_{i=1}^{N} E\left(x_i - r_i\right)\right\}$$

$$= Min\left\{\sum_{j=1}^{N}\int_0^{r_j}\left(r_j - x_j\right) f_j(x_j) d\ x_j,\ \sum_{i=1}^{N}\int_{r_i}^{\infty}\left(x_i - r_i\right) f_i(x_i) d\ x_i\right\} \tag{۲۶}$$

همان گونه که ذکر شد جابجایی های اضطراری که در طی دوره انجام می شود سبب صرفه جویی در هزینه‌های کمبود و نگهداری می شود و تنها هزینه جابجایی را به سیستم اضافه می کند. بنابراین با در نظر گرفتن فرض ساده کننده یکسان بودن هزینه های نگهداری و کمبود و جابجایی در انبارهای محلی و اینکه مجموع هزینه های نگهداری و کمبود از هزینه جابجایی بیشتر است ،کل صرفه‌جویی هزینه ای حاصل از جابجایی اضطراری مورد انتظار مابین انبارهای محلی عبارت است از:

$$TSA = (h + \pi) \cdot Min\left(TS\ ,\ TM\right) - t \cdot TQ \tag{۲۷}$$

مدل کنترل موجودی دوسطحی با تقاضاهایی با توزیع یکنواخت و زمان تدارک ثابت

فرض می کنیم که تقاضا در کلیه انبارها دارای توزیع یکنواخت بصورت ذیل است:

$$x_i \sim U\left(a_i,\ b_i\right) \Rightarrow f_i(x_i) = \begin{cases} \dfrac{i}{b_i - a_i} & a_i \le x_i \le b_i \\ & i = 0,1,\dots,N \\ 0 & \text{سایر مقادیر} \end{cases}$$

نیز با در نظر گرفتن مقادیر مفروض برای N، D_i، L_i، A_i، h_i به ازای $i = 0,1,\dots,N$ و نیز π_i برای انبار های محلی و Pc و t، به تجزیه و تحلیل انبارهای محلی و انبار مرکزی می پردازیم.

۱-تجزیه و تحلیل انبارهای محلی

با در نظر گرفتن تابع توزیع تقاضای یکنواخت و با توجه به معادله (۱۰) داریم:

$$K_i\left(Q_i, r_i\right) = \frac{A_i D_i}{Q_i} + h_i\left(\frac{Q_i}{2} + r_i - \mu_i - \frac{r_i \mu_i}{Q_i} + \frac{\mu_i^2}{2Q_i}\right)$$

$$+ h_i \frac{\mu_i}{2Q_i}\left\{2 r_i F_i(r_i) - \int_{a_i}^{r_i} x_i \cdot f_i(x_i) d\ x_i + r_i^2 \int_{a_i}^{b_i} \frac{1}{x_i} f_i(x_i) d\ x_i\right\}$$

$$+ \frac{\pi_i \mu_i}{2Q_i} \int_{r_i}^{b_i} \frac{\left(x_i - r_i\right)^2}{x_i} f_i(x_i) d\ x_i \tag{۲۸}$$

با جایگذاری تابع توزیع تقاضا و انجام انتگرال گیری‌های لازم خواهیم داشت:

$$K_i(Q_i,r_i)=\frac{A_iD_i}{Q_i}+h_i\left(\frac{Q_i}{2}+r_i-\mu_i-\frac{r_i\mu_i}{Q_i}+\frac{\mu_i^2}{2Q_i}\right)$$
$$+h_i\frac{\mu_i}{2Q_i}\left\{2r_i\frac{(r_i-a_i)}{(b_i-a_i)}-\frac{r_i^2-a_i^2}{2(b_i-a_i)}+\frac{r_i^2}{(b_i-a_i)}Ln\left(\frac{b_i}{r_i}\right)\right\}$$
$$+\frac{\pi_i\mu_i}{2Q_i(b_i-a_i)}\left\{\frac{(b_i^2-r_i^2)}{2}-2r_i(b_i-r_i)+r_i^2\cdot Ln\left(\frac{b_i}{r_i}\right)\right\} \qquad (۲۹)$$

با توجه به (۱۱) و (۱۲) داریم:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial K_i}{\partial Q_i}=\dfrac{-A_iD_i}{Q_i^2}+h_i\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{r_i\mu_i}{Q_i^2}-\dfrac{\mu_i^2}{2Q_i^2}\right) \\ -h_i\dfrac{\mu_i}{2Q_i^2}\left\{2r_i\dfrac{(r_i-a_i)}{(b_i-a_i)}-\dfrac{r_i^2-a_i^2}{2(b_i-a_i)}+\dfrac{r_i^2}{(b_i-a_i)}Ln\left(\dfrac{b_i}{r_i}\right)\right\} \\ -\dfrac{\pi_i\mu_i}{2Q_i^2(b_i-a_i)}\left\{\dfrac{(b_i^2-r_i^2)}{2}-2r_i(b_i-r_i)+r_i^2\cdot Ln\left(\dfrac{b_i}{r_i}\right)\right\}=0 \qquad (۳۰) \\ \text{و} \\ \dfrac{\partial K_i}{\partial r_i}=h_i\left(1-\dfrac{\mu_i}{Q_i}\right) \\ +h_i\dfrac{\mu_i}{2Q_i}\left\{\dfrac{(4r_i-2a_i)}{(b_i-a_i)}-\dfrac{r_i}{(b_i-a_i)}+\dfrac{2r_i}{(b_i-a_i)}Ln\left(\dfrac{b_i}{r_i}\right)-\dfrac{r_i^2}{(b_i-a_i)}\cdot\dfrac{-1}{r_i}\right\} \\ +\dfrac{\pi_i\mu_i}{2Q_i(b_i-a_i)}\left\{-r_i-2b_i+4r_i+2r_iLn\left(\dfrac{b_i}{r_i}\right)+r_i^2\cdot\dfrac{-1}{r_i}\right\}=0 \qquad (۳۱)\end{cases}$$

با حل همزمان دو معادله فوق با استفاده از الگوریتم تکرار بحث شده، می توانیم مقادیر بهینه Q_i^* و r_i^* را در تمامی انبارهای محلی تعیین نماییم.

۲-تجزیه و تحلیل انبار مرکزی

در این قسمت با توجه به نوع توزیع تقاضا و همچنین رابطه (۲۰) داریم:

$$K_0(Q_0,r_0)=A_0(D_0/Q_0)+h_0\left(\frac{Q_0}{2}+r_0-\mu_0-\frac{r_0\mu_0}{Q_0}+\frac{\mu_0^2}{2Q_0}\right)$$
$$+h_0\frac{\mu_0}{2Q_0}\left\{2r_0F_0(r_0)-\int_{a_0}^{r_0}x_0\cdot f_0(x_0)d\,x_0+r_0^2\int_{r_0}^{b_0}\frac{1}{x_0}f_0(x_0)d\,x_0\right\}$$
$$+\frac{D_0}{Q_0}Pc\cdot\int_{r_0}^{b_0}(x_0-r_0)\cdot f_0(x_0)d\,x_0 \qquad (۳۲)$$

با جایگذاری تابع توزیع تقاضا و انجام انتگرال گیری های لازم خواهیم داشت:

$$K_0(Q_0,r_0)=A_0(D_0/Q_0)+h_0\left(\frac{Q_0}{2}+r_0-\mu_0-\frac{r_0\mu_0}{Q_0}+\frac{\mu_0^2}{2Q_0}\right)$$
$$+h_0\frac{\mu_0}{2Q_0}\left\{2r_0\frac{(r_0-a_0)}{(b_0-a_0)}-\frac{r_0^2-a_0^2}{2(b_0-a_0)}+\frac{r_0^2}{(b_0-a_0)}Ln\left(\frac{b_0}{r_0}\right)\right\}$$
$$+\frac{D_0Pc}{Q_0(b_0-a_0)}\left\{\frac{b_0^2}{2}+\frac{r_0^2}{2}-r_0b_0\right\} \qquad (۳۳)$$

با توجه به (۲۱) و (۲۲) داریم:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial K_0}{\partial Q_0}=\dfrac{-A_0D_0}{Q_0^2}+h_0\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{r_0\mu_0}{Q_0^2}-\dfrac{\mu_0^2}{2Q_0^2}\right) \\ -h_0\dfrac{\mu_0}{2Q_0^2}\left\{2r_0\dfrac{(r_0-a_0)}{(b_0-a_0)}-\dfrac{r_0^2-a_0^2}{2(b_0-a_0)}+\dfrac{r_0^2}{(b_0-a_0)}Ln\left(\dfrac{b_0}{r_0}\right)\right\} \\ -\dfrac{D_0Pc}{Q_0^2(b_0-a_0)}\left\{\dfrac{b_0^2}{2}+\dfrac{r_0^2}{2}-r_0b_0\right\}=0 \qquad (۳۴) \\ \text{و} \\ \dfrac{\partial K_0}{\partial r_0}=h_0\left(1-\dfrac{\mu_0}{Q_0}\right) \\ +h_0\dfrac{\mu_0}{2Q_0}\left\{\dfrac{(4r_0-2a_0)}{(b_0-a_0)}-\dfrac{r_0}{(b_0-a_0)}+\dfrac{2r_0}{(b_0-a_0)}Ln\left(\dfrac{b_0}{r_0}\right)-\dfrac{r_0^2}{(b_0-a_0)}\cdot\dfrac{-1}{r_0}\right\} \\ +\dfrac{D_0Pc}{Q_0(b_0-a_0)}(r_0-b_0)=0 \qquad (۳۵)\end{cases}$$

با حل همزمان دو معادله فوق با استفاده از الگوریتم بحث شده، می توانیم مقادیر بهینه Q_0^* و r_0^* را در انبار مرکزی تعیین نماییم.

۳- تحلیل جابجایی های اضطراری در طی دوره جهت کاهش هزینه‌های نگهداری و کمبود

در اینجا با توجه به عبارت های (۲۳)، (۲۵) و (۲۶) و انجام محاسبات انتگرال های مربوطه داریم:

$$TS=\sum_{i=1}^{N}\frac{\mu_i}{2Q_i^*}\cdot\frac{1}{(b_i-a_i)}\cdot\left\{\frac{b_i^2-r_i^2}{2}-2r_i(b_i-r_i)+r_i^2\cdot Ln\left(\frac{b_i}{r_i}\right)\right\} \qquad (۳۶)$$

$$TM=\sum_{j=1}^{N}\frac{\mu_j}{2Q_j^*}\cdot\frac{1}{(b_j-a_j)}\cdot\left\{\frac{r_j^2-a_j^2}{2}-2r_j(r_j-a_j)+r_j^2\cdot Ln\left(\frac{r_j}{a_j}\right)\right\} \qquad (۳۷)$$

$$TQ = Min\left\{\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{b_j - a_j}\left(\frac{r_j^2}{2}+\frac{a_j^2}{2}-r_j a_j\right),\ \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{b_i - a_i}\left(\frac{r_i^2}{2}+\frac{b_i^2}{2}-r_i b_i\right)\right\} \quad (۳۸)$$

و در نتیجه:

$$TSA = (h+\pi)\cdot Min(TS,\ TM)$$

$$-\ t\cdot Min\left\{\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{b_j - a_j}\left(\frac{r_j^2}{2}+\frac{a_j^2}{2}-r_j a_j\right),\ \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{b_i - a_i}\left(\frac{r_i^2}{2}+\frac{b_i^2}{2}-r_i b_i\right)\right\} \quad (۳۹)$$

٤- مثال عددی

در این قسمت برای روشن شدن بیشتر مطلب به ارائه یک مثال عددی می‌پردازیم:

سیستمی دو سطحی با یک انبار مرکزی و سه انبار محلی $(N=3)$ در نظر بگیرید.تقاضا در انبارها دارای توزیع یکنواخت بوده و مقادیر متغیر های سیستم به شرح زیر است:

فرض بر آنست که سال ۳۰۰ روز است.

انبار محلی ۱:

$\pi_1 = 45 \quad h_1 = 5 \quad A_1 = 10 \quad L_1 = 0.1 \quad D_1 = 100$

$\mu_1 = 10 \quad a_1 = 1 \quad b_1 = 19$

انبار محلی ۲:

$h_2 = 5 \quad A_2 = 15 \quad L_2 = 0.08 \quad D_2 = 200$

$\pi_2 = 45$

$\mu_2 = 16 \quad a_2 = 1 \quad b_2 = 31$

انبار محلی ۳:

$h_3 = 5 \quad A_3 = 20 \quad L_3 = 0.05 \quad D_3 = 300$

$\pi_3 = 45$

$\mu_3 = 15 \quad a_3 = 1 \quad b_3 = 29$

انبار مرکزی:

$D_0 = 600 \quad L_0 = 0.1 \quad A_0 = 100 \quad h_0 = 10 \quad Pc = 5$

$\mu_0 = 60 \quad a_0 = 1 \quad b_0 = 119$

هزینه جابجایی:

$t = 5$

٤-١- محاسبات انبارهای محلی

در ابتدا با توجه به عبارت های (۳۰) و (۳۱) مدلی سازگار با نرم افزار *LINGO* طراحی نموده و سپس با استفاده از الگوریتم تکرار مقادیر بهینه Q_i^* و r_i^* را برای هر یک از انبارهای محلی بدست می آوریم. مدل طراحی شده در ضمیمه الف آورده شده است.نتایج عددی حاصل در جداول ۱، ۲ و ۳ ذکر شده است. همان گونه که مشهود است الگوریتم با سرعت خوبی همگرا می شود و حداکثر تعداد تکرار برای مسائل حل شده در این قسمت ۶ تکرار است. مقادیر بهینه در ستون آخر هر جدول ذکر شده است.

جدول (۱) مقادیر بهینه برای انبار محلی ۱.

STEP	۱	۲	۳	۴	۵	*۶
Q1	۲۰,۰۰	۲۳,۸۷	۲۴,۵۹	۲۴,۷۱	۲۴,۷۴	۲۴,۷۵
r1	۷,۶۸	۷,۰۱	۶,۹۰	۶,۸۸	۶,۸۷	۶,۸۷

جدول (۲) مقادیر بهینه برای انبار محلی ۲.

STEP	۱	۲	۳	۴	۵	*۶
Q2	۳۴,۶۴	۴۱,۰۱	۴۲,۱۵	۴۲,۳۶	۴۲,۴۰	۴۲,۴۱
r2	۱۱,۹۲	۱۰,۸۴	۱۰,۶۵	۱۰,۶۲	۱۰,۶۱	۱۰,۶۱

جدول (۳) مقادیر بهینه برای انبار محلی ۳.

STEP	۱	۲	۳	۴	*۵	۶
Q3	۴۸,۹۹	۵۵,۳۲	۵۶,۲۰	۵۶,۳۲	۵۶,۳۴	
r3	۸,۵۶	۷,۶۹	۷,۵۸	۷,۵۶	۷,۵۶	

۲-٤- محاسبات انبارمرکزی

برای انبار مرکزی نیز با توجه به عبارت های (۳۴) و (۳۵) مدلی سازگار با نرم‌افزار $LINGO$ طراحی شد و سپس با استفاده از الگوریتم تکرار مقادیر بهینه Q_0^* و r_0^* برای انبارمرکزی تعیین گردید. مدل طراحی شده در ضمیمه ب آورده شده است. نتایج عددی حاصل در جدول ۴ ذکر شده است.

جدول (٤) مقادیر بهینه برای انبار مرکزی.

STEP	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰*
Q0	۱۰۹,۵۶	۱۳۹,۵۸	۱۴۹,۱۴	۱۵۲,۳۲	۱۵۳,۳۹	۱۵۳,۵۸	۱۵۳,۸۲	۱۵۳,۹	۱۵۳,۹۲	۱۵۳,۹۳
r0	۶۵,۶۵	۵۶,۷۸	۵۴,۰۰	۵۳,۰۸	۵۲,۷۷	۵۲,۷۲	۵۲,۶۵	۵۲,۶۳	۵۲,۶۲	۵۲,۶۲

۳-٤- محاسبات جابجایی های اضطراری

محاسبات این قسمت نیز با توجه به عبارات (۳۶) الی (۳۹) و استفاده از مقادیر عددی اولیه مفروض و مقادیر بدست آمده از قسمت های قبل صورت می گیرد. نتیجه حاصله عبارتست از:

$$TS = 0.43 + 0.71 + 0.69 = 1.83$$
$$TM = 0.37 + 0.74 + 0.21 = 1.32$$
$$TQ = Min(0.96 + 1.454 + 0.77, 4.09 + 6.93 + 8.21) = Min(3.27, 19.23) = 3.27$$
$$TSA = (45 + 5) \times Min(1.32, 1.83) - 5 \times Min(3.27, 19.23) = 49.65$$

همانطور که ملاحظه می شود جابجایی های اضطراری سبب صرفه جویی هزینه ای معادل ۴۹,۶۵ واحد پولی می‌شود.

۵- تجزیه و تحلیل حساسیت

پس از حل مدل در قسمت قبل، در این قسمت به بررسی اثرات تغییر پارامترهای مساله در نتایج بدست آمده می پردازیم.

جداول ۵ و ۶ خلاصه نتایج محاسبات انجام شده را به ترتیب برای مدل انبار های محلی و انبار مرکزی نشان می‌دهد.

نتیجه جالب اینکه در مدل انبار مرکزی تغییرات قیمت خرید کالا همانند تغییرات هزینه کمبود در مدل انبارهای محلی است و تقریبا" نقشی مشابه در مدل ایفا می نماید.

نتیجه گیری

رقابت بین شرکتها، توجه بیشتر به کیفیت ارائه خدمات به مشتریان، لزوم استفاده بهینه از سرمایه ها و ... سبب می شوند تا شرکتها توجه بیشتری را به کنترل موجودی‌ها و طراحی سیستم های دقیق تر معطوف نمایند و این خود باعث می‌شود امر کنترل موجودی و سیستم‌های آن روز به روز از اهمیت بیشتری برخوردار گردند.

سیستم های موجودی در عمل عمدتا" به صورت چند سطحی هستند. البته این سیستم ها به واسطه چند سطحی بودنشان، پیچیدگی های خاص خود را دارند. تعامل‌های بین انبار ها اگرچه پیچیدگی سیستم های چند سطحی را افزایش می دهد ولی از طرف دیگر سبب می‌شود که از سرمایه ها بهتر استفاده شود. مشکل دیگر در مسیر انجام مطالعه و تحقیق در این زمینه، پیچیدگی محاسبات مربوط به طراحی یا توسعه مدلها است ولی از جمله دلایل مهم و اصلی انجام تحقیقات روزافزون در این زمینه را می‌توان کاربردهای زیاد این مدلها در دنیای واقعی دانست.

مدل توسعه داده شده در این مقاله، علاوه بر بهبود طراحی مدل نسبت به مدل اصلی و تعیین مقادیر بهینه سفارش اقتصادی و نقطه سفارش در انبار های محلی و مرکزی ، با در نظر گرفتن جابجایی های بین انبار های محلی ، در هزینه های کمبود و نگهداری سیستم صرفه‌جویی ایجاد نموده است. محاسبات انجام شده به خوبی این صرفه جویی را نشان داده است.

پیشنهادها

گرچه کارها وتحقیقات مختلفی در زمینه سیستم های چند سطحی و خصوصا" دو سطحی صورت گرفته است ولی به واسطه وجود حالات بسیار گوناگون به همان نسبت نیز زمینه تحقیقات برای آینده وجود دارد که به بعضی از آنها اشاره می‌کنیم:

۱- استفاده از تابع هدفی که در آن حداکثر نمودن سطح سرویس در سیستم مطرح باشد و در واقع بجای کمینه سازی هزینه های سیستم به بیشینه سازی سطح سرویس پرداخته شود.

۲- انتخاب سیاست مرور دوره ای (R,T) برای انبار های سیستم ؛ بدین معنی که انبارها در هر دوره با طول

زمانی T اقدام به صدور سفارش تا سطح R نمایند.
۳- توسعه مدل به تعداد سطوح بیشتر.
۴- اعمـال محدودیـت هـای مختلـف از قبیـل: محدودیـت سرمایه، فضا، تعداد دفعات سفارش و ... .
۵- در نظر گرفتن حالت فروش از دست رفته.
۶- توسعه مدل به حالت چند محصولی.
۷- در نظر گرفتن زمان تدارک بصورت احتمالی.

جدول (۵) نتایج تجزیه و تحلیل حساسیت مدل انبارهای محلی.

عامل / متغیر	افزایش متوسط تقاضای سالیانه	افزایش زمان تدارک	افزایش هزینه سفارش دهی	افزایش هزینه نگهداری	افزایش هزینه کمبود
Q_i^*	افزایش	افزایش	افزایش	کاهش	کاهش
r_i^*	افزایش	افزایش	کاهش	کاهش	افزایش

جدول (۶) نتایج تجزیه و تحلیل حساسیت مدل انبار مرکزی.

عامل / متغیر	افزایش متوسط تقاضای سالیانه	افزایش زمان تدارک	افزایش هزینه سفارش دهی	افزایش هزینه نگهداری	افرایش هزینه خرید
Q_0^*	افزایش	افزایش	افزایش	کاهش	کاهش
r_0^*	افزایش	افزایش	کاهش	کاهش	افزایش

ضمیمه ها

ضمیمه الف ـ مدل انبارهای محلی

مدل انبار محلی ۱

```
Q=20;
D=100;
L=0.1;
A=10;
H=5;
P=45;
MU=10;
A1=1;
B=19;
(H*(1-MU/Q))+((H*MU)/((2*Q)*(B-A1)))*((4*R-
    2*A1)+2*R*@LOG(B/R))
+P*MU/(2*Q*(B-A1))*(-R-
    2*B+4*R+2*R*@LOG(B/R)-R)=0;
R=7.68;
D=100;
L=0.1;
A=10;
H=5;
P=45;
MU=10;
A1=1;
B=19;
(-A*D/(Q^2))+H*(0.5+((R*MU)/(Q^2))-
    ((MU^2)/(2*Q^2)))
-((H*MU)/((2*Q^2)*(B-A1)))*(2*R*(R-A1)-(R^2-
    A1^2)/2+R^2*@LOG(B/R))
-((P*MU)/(2*(B-A1)*Q^2))*((0.5*(B^2-R^2))-
    (2*R*(B-R))+(R^2*@LOG(B/R)))=0;
```

مدل انبار محلی ۲

```
Q=34.64;
D=200;
L=0.08;
A=15;
H=5;
P=45;
MU=16;
A1=1;
B=31;
(H*(1-MU/Q))+((H*MU)/((2*Q)*(B-A1)))*((4*R-
    2*A1)+2*R*@LOG(B/R))
+P*MU/(2*Q*(B-A1))*(-R-
    2*B+4*R+2*R*@LOG(B/R)-R)=0;
R=11.92;
D=200;
L=0.08;
A=15;
H=5;
P=45;
MU=16;
A1=1;
B=31;
(-A*D/(Q^2))+H*(0.5+((R*MU)/(Q^2))-
    ((MU^2)/(2*Q^2)))
-((H*MU)/((2*Q^2)*(B-A1)))*(2*R*(R-A1)-(R^2-
    A1^2)/2+R^2*@LOG(B/R))
-((P*MU)/(2*(B-A1)*Q^2))*((0.5*(B^2-R^2))-
    (2*R*(B-R))+(R^2*@LOG(B/R)))=0;
```

مدل انبار محلی ۳

```
Q=48.99;
D=300;
L=0.05;
A=20;
H=5;
P=45;
MU=15;
A1=1;
B=29;
(H*(1-MU/Q))+((H*MU)/((2*Q)*(B-A1)))*((4*R-
    2*A1)+2*R*@LOG(B/R))
+P*MU/(2*Q*(B-A1))*(-R-
    2*B+4*R+2*R*@LOG(B/R)-R)=0;
R=8.56;
D=300;
L=0.05;
A=20;
H=5;
P=45;
MU=15;
A1=1;
B=29;
(-A*D/(Q^2))+H*(0.5+((R*MU)/(Q^2))-
    ((MU^2)/(2*Q^2)))
-((H*MU)/((2*Q^2)*(B-A1)))*(2*R*(R-A1)-(R^2-
    A1^2)/2+R^2*@LOG(B/R))
-((P*MU)/(2*(B-A1)*Q^2))*((0.5*(B^2-R^2))-
    (2*R*(B-R))+(R^2*@LOG(B/R)))=0;
```

ضمیمه ب ـ مدل انبار مرکزی

```
Q=153.93;
D=600;
L=0.1;
A=100;
H=10;
PC=5;
MU=60;
A1=1;
B=119;
H*(1-MU/Q)+((H*MU)/((2*Q)*(B-A1)))*((4*R-
    2*A1)+2*R*@LOG(B/R))
+(D*PC/(Q*(B-A1)))*(R-B)=0;
R=52.62;
D=600;
L=0.1;
A=100;
H=10;
PC=5;
MU=60;
A1=1;
B=119;
((-A*D)/(Q^2))+H*(0.5+((R*MU)/(Q^2))-
    ((MU^2)/(2*Q^2)))
-((H*MU)/((2*Q^2)*(B-A1)))*(2*R*(R-A1)-(R^2-
    A1^2)/2+R^2*@LOG(B/R))
-((D*PC)/((Q^2)*(B-A1)))*(B^2/2+R^2/2-R*B)=0;
```

مراجع

[1] A.J.Clark and H.Scarf, " Optimal Policies for a Multi-Echelon Inventory Problem ", Management Science, 1960, Vol.6, PP.475-490.

[2] F.K.Tan, " Optimal Policies for a Multi-Echelon Inventory Problem with Periodic Ordering ", Management Science, 1974, Vol.20, No.7, PP.1104-1111.

[3] A.Federquren and P.Zipkin, " Approximations of Dynamic, Multi-location Production and Inventory Problems ", Management Science, 1984a, Vol.30, No.1, PP.69-84.

[4] L.B.Schwarz, B.L.Deueremeyer and R. D.Badinelli, " Fill-Rate Optimization in a One-Warehouse N-Identical Retailer Distribution System ", Management Science, 1985, Vol.31, No.4, PP.488-498.

[5] H.Jonsson and E.A.Silver, " Analysis of a Two-Echelon Inventory Control System with Complete Redistribution ", Management Science, 1987, Vol.33, No.2, PP.227-251.

[6] S.Park Kyung and H.Kim Dae, " Stochastic Inventory Model for Two-Echelon Distribution Systems ", Computers and Industrial Engineering, 1989, Vol.16, No.2, PP.245-255.

[7] C.Das and S.K.Goyal, " Economic Ordering Policy for Deterministic Two-Echelon Distribution Systems ", Engineering Costs and Production Economics, 1991, Vol. 21, No.3, PP.227-231.

[8] D.Sinha and F.Matta, " Multi-Echelon (R , S) Inventory Model ", Decision Science, 1991, Vol.22, No.3, PP.484-499.

[9] M.Dada, " A Two-Echelon Inventory System with Priority Shipments ", Management Science, 1992, Vol.38, No.8, PP.1140-1153.

[10] C.C.Sherbrooke , " METRIC : a Multi-Echelon Technique for Recoverable Item Control ", Operations Research , 1968 , Vol.16 , No.1 , PP.122-141.

[11] A.Shtub and M.Simon , " Determination of Reorder Points for Spare Parts in a Two-Echelon Inventory System : The Case of Non Identical Maintenance Facilities ", European Journal of Operational Research ,1994 , Vol.73 , No.3 , PP.458-464.

[12] W.H.Hausman and N.K.Erkip , " Multi-Echelon vs. Single-Echelon Inventory Control Policies for Low-Demand Items " , Management Science , 1994, Vol.40 , No.5 , PP.597-602.

[13] M.C. Van der Heijden , " Supply Rationing in Multi-Echelon Divergent System " , European Journal of Operational Research , 1997 , Vol.101 , No.3 , PP.532-549.

[14] L.P.Bertrand and J.H.Bookbinder , " Stock Redistribution in Two-Echelon Logistic Systems " , Journal of the Operational Research Society , 1998 , Vol.49 , No.9 , PP.966-975.

[15] D.H.Kim and K.S.Park , " (Q,r) Inventory Model with a Mixture of Lost sales and Time-weighted Backorders " , Journal of the Operational Research Society , 1985 , Vol.36 , PP.3231-3238.