حل عددی جریان باتقارن محوری و سطح آزاد

ترجمه و تلخیص از : مهندس جمشید صفائی

نقل ازمجله : Journal of the Engineering Mechanics Division Vol. 95 No. EMI. Feb. 1969 , PP. 1-20

مقدمه ـ تئوری جریان دوبعدی پتانسیل بطور مفصل بسط داده شده است وحل‌های آنالیتیکی برای بسیاری از مسائل علمی موردنظر بچند طریقه بدست میاید. مسائل مربوط به جریان با تقارن محوری وسطح آزاد ، مانند جریان باکاویتاسیون در حول اجسام مدور ، جریان از روزنه‌ها ودریچه‌ها ، بصورت عمومی حل نشده‌اند و کوشش‌هائی که درباره بدست آوردن حل دقیقی برای آنها شده است مقرون بموفقیت نبوده است . بدین ترتیب کوشش زیادی برای بدست آوردن حل های تقریبی برای جریان با تقارن محوری شده است . پیشرفت قابل ملاحظه‌ای برای بدست آوردن روش آنالیتیکی بتوسط Garabedian انجام شده است روش Garabedian بوسیله پرتورباسیون بعدی (dimensional parturbation) بوده است که در آن حل جریان با تقارن محوری ازیك دریچه حد وسط حل جریان برای یك صفحه مسطح وحل برای بعدهای بینهایت است.

حلی که در این قسمت دیده میشود بوسیله روش تفاوت معین Finite differences است . مسئله در محور مختصات دوبعدی، که یك بعدش تابع پتانسیل عددی φ (scalar potential function) و بعد دیگرش تابع جریان (ψ) (stream function) است ومختصات محوری وشعاعی $r(\Phi,\psi),Z(\Phi,\psi)$ متغیر های وابسته در نظر گفته میشوند.

روش حل

بدست آوردن راه‌حلی برای جریانهای ثابت غیرقابل تراکم باتقارن محوری هنگامیکه سیالات یکنواخت (homogeneous) در نظر گرفته میشوند باید براساس معادله اصل بقاء ماده باشد.

$$\frac{v}{r}+\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \qquad (1)$$

وبرای جریانهای پتانسیل شرط غیر چرخی بودن (irrotationality) ،

$$\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial r}=0 \qquad (2)$$

در معادله بالا مختصات شعاعی r ، مختصات محوری z ، و مولفه های سرعت در جهات مختصات فوق w و v هستند .

مولفه‌های سرعت بصورت توابعی ازتابع پتانسیل عددی Φ وتابع جریان ψ داده میشوند .

$$v = \frac{\partial \Phi}{\partial r} = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial z} \qquad (3)$$

$$w = \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial r} \qquad (4)$$

برای بیان مسئله در صفحه $\Phi\psi$ ، معادلاتی برای بدست آوردن r و z بصورت تابعی از Φ و ψ لازم هستند. ازاین معادلات بادر نظر گرفتن اینکه $\psi = \psi(r,z)$ و $\Phi = \Phi(r,z)$ باشند میتوان توابع معکوسی بصورت $r = r(\Phi,z)$ و $z = z(\Phi,\psi)$ بدست آورد بطوریکه ،

$$\frac{\partial r}{\partial \Phi} = \frac{1}{J} \frac{\partial \psi}{\partial z} \qquad (5a)$$

$$\frac{\partial z}{\partial \psi} = \frac{1}{J} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \qquad (5b)$$

$$\frac{\partial z}{\partial \Phi} = -\frac{1}{J} \frac{\partial \psi}{\partial r} \qquad (5c)$$

$$\frac{\partial r}{\partial \psi} = -\frac{1}{J} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \qquad (5d)$$

در معادلات بالا Jacobian,J بصورت زیر تعریف میشود .

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial r} & \frac{\partial \Phi}{\partial z} \\ \frac{\partial \psi}{\partial r} & \frac{\partial \psi}{\partial z} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right) - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial \psi}{\partial r}\right) \qquad (6)$$

با جانشین کردن مقادیر $\frac{\partial \Phi}{\partial r}$ و $\frac{\partial \psi}{\partial z}$ که از معادلات (5b) و(5a) بترتیب در معادله (3) نتیجه زیر بدست میآید .

$$\frac{\partial z}{\partial \psi} = -\frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial \Phi} \qquad (7)$$

وهمچنین با جانشین کردن معادلات (5c) و(5d) در معادله (4)،

$$\frac{\partial r}{\partial \psi} = \frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial \Phi} \qquad (8)$$

معادلات(7) و (8) ، معادلات Cauchy-Riemann که برای جریان در یك صفحه بدست میایند نیستند ولی شباهت زیادی بین این معادلات وشرایط Cauchy-Riemann وجود دارد ، تنها تفاوت وجود جمله $\frac{1}{r}$ است . از معادلات (7) و (8) برای بدست آوردن z و r میتوان انتگرال گرفت . در صورتیکه انتگرال گیری در امتداد خطوط، مقدار ثابت ψ انجام شود ،

$$z = \int_{\psi} r \frac{\partial r}{\partial \psi} d\Phi \qquad (9)$$

$$r = -\int_{\psi} r \frac{\partial z}{\partial \psi} d\Phi \qquad (10)$$

وهنگامیکه خطوط مقدار ثابت Φ در نظر گرفته میشوند خواهیم داشت .

$$z=-\int_{\Phi}\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial\Phi}d\psi \qquad (11)$$

$$r=\int_{\Phi}\frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial\Phi}d\psi \qquad (12)$$

برای روابط بعدی آسانتر است که Jacobian بکمك توابع معکوس $r(\Phi,\psi)$و$z(\Phi,\psi)$ بیان شود. Jacobian بصورت توابعی از این متغییرها با جانشین کردن معادلات (5) در (6) بدست میآید.

$$J=J^2\left[\left(\frac{\partial z}{\partial\psi}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial\Phi}\right)-\left(\frac{\partial r}{\partial\psi}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial\Phi}\right)\right] \qquad (13)$$

بالاخره با بکاربردن معادلات (7) و (8) برای بدست آوردن جمله های مربع ، معادله (13) بصورت زیر درمیاید :

$$J=-\frac{1}{r\left[\left(\frac{\partial z}{\partial\psi}\right)^2+\left(\frac{\partial r}{\partial\psi}\right)^2\right]}=-\frac{r}{\left(\frac{\partial r}{\partial\Phi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\Phi}\right)^2} \qquad (14)$$

معادله‌ای برای r بصورت تابعی از Φ و ψ با مشتق گیری از معادله (7) نسبت به Φ و از معادله (8) نسبت به ψ وترکیب نتایج برای حذف $\frac{\partial^2 z}{\partial\Phi\partial\psi}$ و $\frac{\partial^2 z}{\partial\psi\partial\Phi}$ وبالاخره با جانشین ساختن $\frac{\partial z}{\partial\Phi}$ از معادله (8) نتیجه زیر بدست میاید .

$$\frac{\partial^2 r}{\partial\psi^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 r}{\partial\Phi^2}-\frac{1}{r^3}\left(\frac{\partial r}{\partial\Phi}\right)^2+\frac{1}{r}\left(\frac{\partial r}{\partial\psi}\right)^2=0 \qquad (15)$$

کوشش مشابهی برای بدست آوردن z با مشتق گرفتن از معادله (7) نسبت به ψ و معادله (8) نسبت به Φ وترکیب آندو نتیجه زیر را میدهد :

$$\frac{\partial^2 r}{\partial\psi^2}=\frac{1}{r^3}\frac{\partial r}{\partial\Phi}\frac{\partial z}{\partial\Phi}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial\Phi}\frac{\partial r}{\partial\psi}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial\Phi^2} \qquad (16)$$

با استفاده از معادلات (7) و(8) مشتق‌ها تماماً بصورت تابعی از z بیان‌میشوند.

$$r^2\frac{\partial^2 z}{\partial\psi^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial\Phi^2}+2\frac{\partial z}{\partial\psi}\frac{\partial z}{\partial\Phi}=0 \qquad (17)$$

معادلات (15)و (17) غیرخطی هستند ، ولی غیرخطی بودن درمعادله (17) شامل دومین متغیر (dependent) « r» است معادله (15) فقط حاوی یك متغیر (dependent) است وبنابراین برای‌شروع محاسبات بکار برده میشود . از آنجا که معادلاتی که جریان با تقارن محوری را تشریح میکنند صورت بیضوی (elliptic type) را دارند، انتظار میرود که معادلات (15)و (17) نیز همان شکل را داشته‌باشند. بیضوی بودن معادلات مستقیما ازتعریف معادلات بیضوی نتیجه میشوند.

روابط بین متغیرهائی که جریان را تشریح میکنند ـ برای تعریف شرایط مرزی مختلف که

ممکن است درمسائل گوناگون پیش بیاید، لازم استکه روابط بین متغیرهای مختلف را درصفحه $\Phi\psi$ بدست آورد .

بدین ترتیب در امتداد یك سطح آزاد تغییرات سرعت V ممکن است معلوم باشد (مقدار ثابت = V درامتداد یك سطح آزاد درصورت عدم وجود میدان جاذبه زمین، یا $\text{Cot.} -2gy$ در میدان جاذبه زمین) یا در امتداد مرز یك دیوار ثابت زاویه θ که جهت جریان را معین میسازد معلوم است شرایط مرزی با جانشین ساختن مقادیر معلوم در معادلاتی که متغیرهای مختلف را بهم مربوط میسازند بدست میاید .

رابطه بین سرعت جریان در هر نقطه ومختصات r و z با ترکیب معادلات (5) تا (8) و معادلات (3) و(4) وبالاخره برای Jacobian بصورت زیر بدست میاید .

$$V^2=v^2+w^2=\left(\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2=J^2\left[\left(\frac{\partial z}{\partial\psi}\right)^2+\left(\frac{\partial r}{\partial\psi}\right)^2\right] \qquad (18a)$$

$$V^2=\frac{1}{r^2\left[\left(\frac{\partial z}{\partial\psi}\right)^2+\left(\frac{\partial r}{\partial\psi}\right)^2\right]} \qquad (18b)$$

$$V^2=\frac{1}{\left(\frac{\partial r}{\partial\Phi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\Phi}\right)^2} \qquad (18c)$$

$$V^2=\frac{1}{\left(\frac{\partial z}{\partial\Phi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\psi}\right)^2} \qquad (18d)$$

$$V^2=\frac{1}{\left(\frac{\partial r}{\partial\Phi}\right)^2+r^2\left(\frac{\partial r}{\partial\psi}\right)^2} \qquad (18e)$$

معادله (18e) عموما بهترین شکل است چون رابطه بین سرعت و تابع معکوس «r» را میدهد . بدست آوردن رابطه‌ای بین‌سرعت وتابع معکوس «z» غیرممکن است، معادله (18e) بصورت یك شرط‌مرزی درحل مسئله در $r(\Phi,\psi)$ برای آن مرزهائی که در امتدادآنها سرعت مقدار ثابت یا تابع معینی‌ازΦو ψ باشد بکار برده میشود .

روابط بین توابع $r(\Phi,\psi)$و$z(\Phi,\psi)$ و زاویه جریان از چند طریق بدست میآید . ساده ترین طریق محاسبه Jacobian بصورت تابعی‌ازسرعت جریان وسپس جانشین کردن نتیجه درمعادله (5a) است هنگامیکه Jacobian بصورت تابعی از سرعت بیان شود.

$$J=\begin{vmatrix} v & w \\ rw & -rv \end{vmatrix}=-rV^2 \qquad (19)$$

معادله (5a) اکنون بصورت زیر نوشته میشود

$$\frac{\partial r}{\partial\Phi}=-\frac{1}{rV^2}\frac{\partial\psi}{\partial z}=\frac{1}{rV^2}(rv)=\frac{\sin\theta}{V} \qquad (20)$$

بنابراین

$$\theta = \sin^{-1}\left(V\frac{\partial r}{\partial \Phi}\right) = \sin^{-1}\left\{\frac{\frac{\partial r}{\partial \Phi}}{\sqrt{\left(\frac{\partial r}{\partial \Phi}\right)^2 + r^2\left(\frac{\partial r}{\partial \psi}\right)^2}}\right\} \qquad (21a)$$

با بکار بردن معادله (5d) بعوض معادله (5a) زاویه جریان صورت زیر را میگیرد :

$$\theta = \cos^{-1}\left[rV\cdot\frac{\partial r}{\partial \psi}\right] = \cos^{-1}\left\{\frac{r\frac{\partial r}{\partial \psi}}{\sqrt{\left(\frac{\partial r}{\partial \Phi}\right)^2 + r^2\left(\frac{\partial r}{\partial \psi}\right)^2}}\right\} \qquad (21b)$$

معادلات (21a)و(21b) باهم ترکیب میشوند .

$$\theta = \tan^{-1}\left\{\frac{\frac{\partial r}{\partial \Phi}}{r\frac{\partial r}{\partial \psi}}\right\} \qquad (21c)$$

سایر معادلات که جهت جریان را معین میسازند بآسانی بهمین طریق بدست میایند . این معادلات جدید بمفیدی معادلات (21) نخواهند بود چون حاوی توابع $r(\Phi,\psi)$ و $z(\Phi,\psi)$ ومشتق‌هائی از این توابع خواهند بود .

معادله (21c) بعنوان شرط مرزی درامتداد دیوارهای‌مستقیم که در آنها مقدار ثابت $=\theta$ ویا برای مرزهائی که در آنها جهت جریان بصورت تابعی از Φوψ تعیین‌شده‌اند بکار برده میشود. برای آن مرزهای جریان که درآنها دیوارها مستقیم یامنحنی هستند ، زاویه θ فقط تابعی از Φ خواهد بود، چون‌دیوار منطبق بریك خط جریان است

حل عددی

روشی که دراین مقاله موردبررسی‌قرار میگیرد طرق تکرار داخلی(inner iteration) تکرار خارجی (outer iteration) را بکار خواهد برد تکرار داخلی برای صادق بـودن اپراتور تفاضل معین (finite difference operator) در هر گره لازم است. تکرار خارجی روش Gauss–Siedel برای تغییرات متوالی باضریب over-relaxation بکارمیبرد. باین‌طریق‌میدان گره‌ها مکرراتصحیح میشوند تاتفاوت بین‌دومقدارمتوالی ازپارامترخطای معین کمترشود . درهر گره مقادیر بصورت زیرتصحیح میشوند .

$$r(I,J) = r(I,J) - \omega[r(I,J) - r(I,J)] \qquad (22)$$

در عبارت بالا I و J که در پرانتز هستند شماره گره را نشان میدهند (I همراه Φ و J همراه ψ زیاد میشود) ωضریب over relaxation و r(I,J) عبارت ازمقدار متغیراست که در اپراتور تفاضل معین‌صادق است. تازه‌ترین مقادیر محاسبه شده ازگره‌های مجاوردرمحاسبات مربوطه بکاربرده میشوند .

اپراتور تفاضل معین که برای حل مسائل بکار برده شده است ازپنچ نقطه استفاده میکند یعنی از مقادیر موجود درچهار نقط مجاور استفاده‌میشود وبدین ترتیب تقریبی‌برای تابع بصورت‌چند جمله‌ای درجه دوبین سه گره متوالی خواهد داد. ممکن است اپراتورهائی باخطای تقریبی کمتری بوجود آیندولی‌وجود

اشکال بیشتری در حل این معادلات مصرف آنها را محدود میسازد .

اپراتورها باتفاضل‌معین- اپراتور باتفاضل معین برای معادله (15) باجانشین کردن مشتق‌ها با تفاضل‌های مرکزی بدست میایند . بعدازمحاسبه تفاضل‌ها بکمك متغیرهای اولیه وجمع کردن ضرائب هریك از قوه‌های متغیر $r(I,J)$ اپراتور بدست میاید:

$$[r(I,J)]^4-\frac{r(I,J+1)+r(I,J-1)}{2}[r(I,J)]^3-$$
$$-\left\{\frac{[r(I,J+1)-r(I,J-1)]^2}{8}-1\right\}\left[r(I,J)\right]^2-\frac{r(I+1,J)+r(I-1,J)}{2}r(I,J)+$$
$$+\frac{[r(I+1,J)-r(I-1,J)]^2}{8}=0 \qquad (23)$$

بهمین ترتیب معادله (17) :

$$z(I,J)=\frac{0.5}{1-[r(I,J)]^2}\Big\{z(I+1,J)+z(I-1,J)+[r(I,J)]^2[z(I,J+1)+z(I,J-1)]$$
$$+\frac{1}{2}[z(I,J+1)-z(I,J-1)][z(I+1,J)-z(I-1,J)]\Big\} \qquad (24)$$

عموما معادله (24) برای بدست‌آوردن حلی برای $z(\Phi,\psi)$ بکار برده نمیشود بلکه درعوض‌حل $z(\Phi,\psi)$ معمولا از حل $r(\Phi,\psi)$ باانتگرال گیری عددی‌معادله (9) یا(11) ویا هردوبدست میاید.ازاپراتور معادله (23) معلوم میشود که معادلات غیرخطی‌برای r وz که جریان را درصفحه Φ,ψ تعریف میکنندبآسانی معادلات خطی مانند معادله لاپلاس باروش تفاضل معین حل‌نخواهد شد. بعوض وجود یك ریشه برای $r(I,J)$ از اپراتور با تفاضل معین در هر گره لازم است که چهار ریشه در نظر گرفت . با بکار بردن قاعده علامتی دکارت ممکن است که وجود دو ریشه حقیقی مثبت را در معادله (23) تعیین کرد . این نتیجه باتوجه کردن باینکه $r>0$ وبنا براین ضرائب $r(I,J)$ دوبار تغییر علامت میدهند بدست میاید. بنابراین تعداد ریشه‌های حقیقی مثبت از دوعدد تجاوز نخواهد کرد بعلاوه چون فقط یك‌ریشه مثبت باید بعنوان حل موجود باشد و ریشه‌های مختلط (complexroots) بصورت مزدوج (conjugate) موجود هستند بنابراین فقط دو ریشه مثبت در هر گره موجود میباشد .

قاعده علامتی دکارت روشن میسازد که دوریشه حقیقی منفی‌ممکن‌است موجود باشد. دوریشه دیگر بنابر مقدار ضرائب ممکن است حقیقی ویا مختلط باشند. چون شعاع همواره مثبت است ریشه‌های منفی و یا مختلط مزدوج موردنظر واقع نمیشوند. عموما ریشه مثبت دوم تفاوت فاحشی باریشه اول خواهد داشت و یا اینکه مقادیر حدس زده شده ابتدائی آنقدر بمقدار آخری نزدیك هستند که یك روش تکراری مانند روش Newton-Raphson با اطمینان بدست آوردن ریشه صحیح بکار برده میشود . برای اطمینان باینکه ریشه صحیح بدست بیاید لازم است که مقادیر ابتدائی میدان جریان را طوری انتخاب کرد که دارای‌اشتباه زیادی نباشد .

روش بکار بردن یك تکرار داخلی وخارجی مواجه با اشکالاتی است. این مشکلات بهرحال در مقایسه باحل یك‌دستگاه حاوی n معادله همزمان غیرخطی ناچیز است. دراینجا n مساوی شماره گره‌هاست

وممکن‌است مساوی 1000 باشد .

اپراتور شرط مرزیـ سه‌نوع شرط مرزی که در مسائل جریان سیال غالبا بکار برده میشوند بقرار ذیل هستند (1) مقدار تابع معلوم است، مقدار آن ثابت ویا تابعی ازمتغیرهای مستقل (این شرط بنام شرط مرزی Direchlct خوانده میشود). (2) سرعت V مقدار ثابت ویا تابعی از متغیرهای مستقل هستند. (3) زاویه جهت هدایت جریان θ داده شده استو (4) محورهای تقارن که در آن مشتق‌تابع ازبین میرود .

اولین نوع این شرایط مرزی محتاج به‌اپراتور نیست‌چون مقادیر داده شده‌اند اپراتور باتفاضل معین برای شرط دوم که عبارت از توزیع معین سرعت است با تقریب مشتق‌ها درمعادله (18e) باتفاضل‌های مرکزی درجه دو وحذف مقدار در گره‌هائی که درخارج مرز هستند وترکیب نتایج با معادله (23) بدست میاید. برای مرزی که شامل بالاترین خط جریان است اپراتور بصورت زیر درمیاید.

$$\left[r(I,B)\right]^4-r(I,B-1)\left[r(I,B)\right]^3+\left\{1-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4a2}{V^2(I,B)}-\left[r(I+1,B)-r(I-1,B)\right]^2}\right\}$$
$$\times\left[r(I,B)\right]^2-\frac{r(I+1,B)+r(I-1,B)}{2}r(I,B)-\frac{1}{8}\left\{2\left[r(I+1,B)-\right.\right.$$
$$\left.\left.-r(I-1,B)\right]^2-\frac{4a^2}{V^2(I,B)}\right\}=0 \qquad (25)$$

درمعادله بالا $a=\Delta\theta=\Delta\psi$ اندیس J مرز B برای‌یك خط جریان‌مرزی‌پائین‌تر، B باید بامقدار O و B−1 با 1 و $-\frac{1}{2}$ و $-\frac{1}{2}$ جانشین شود . یك اپراتور دیگر برای مرزی که منطبق برخط هم پتانسیل با سرعت معین است بصورت مشابهی درمیاید . شرط این اپراتور اینست که سرعت تابعی از ψ بعوض Φ باشد . اپراتور تفاضل معین برای شرط سوم، یعنی تابع معینی از $\theta(\Phi)$ باترکیب تفاضل معین معادل معادله (21c) بامعادله (23) بدست میاید .

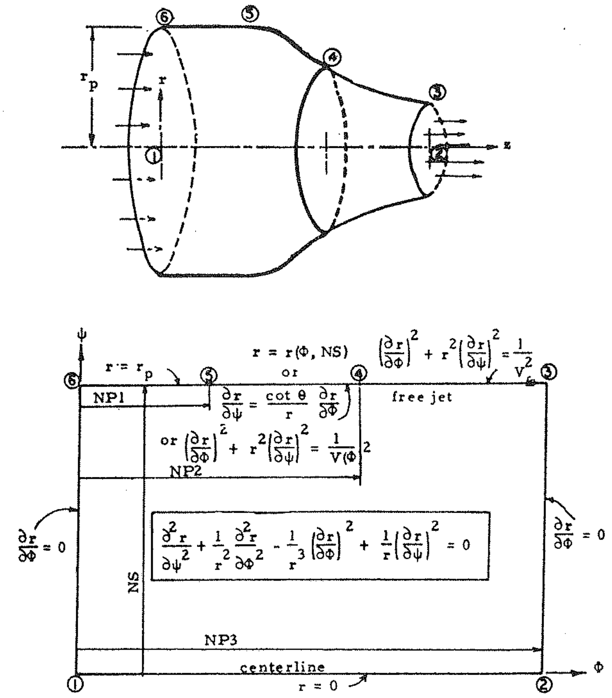
$$\left[r(I,B)\right]^4-r(I,B-1)\left[r(I,B)\right]^3+\left\{1-\frac{\cot\theta(I,B)}{2}\left[r(I+1,B)-\right.\right.$$
$$\left.\left.-r(I-1,B)\right]\right\}\times\left[r(I,B)\right]^2-\frac{r(I+1,B)+r(I-1,B)}{2}r(I,B)$$
$$+\frac{1}{8}\left\{\left[r(I+1,B)-r(I-1,B)\right]^2\right\}\times\left[1-\cot^2\theta(I,B)\right]=0 \qquad (26)$$

تغییرات مشابهی در معادله (26) مانند معادله (25) باید داده شود تاآنرا قابل مصرف در امتداد مرز پائین یك‌منطقه ویا در امتداد خطی باپتانسیل ثابت ساخت.

اپراتور تفاضل معین برای شرط مرزی مشتق‌معمولی درامتداد یك خط هم پتانسیل باجانشین ساختن $r(I-1,J)=r(I+1,J)$ در اپراتور معادله (23) بدست میاید . برای خط جریان مرزی در معادله (23)، $r(I,J-1)=r(I,J+1)$ خواهد بود .

جریان درشیپوره همگرا

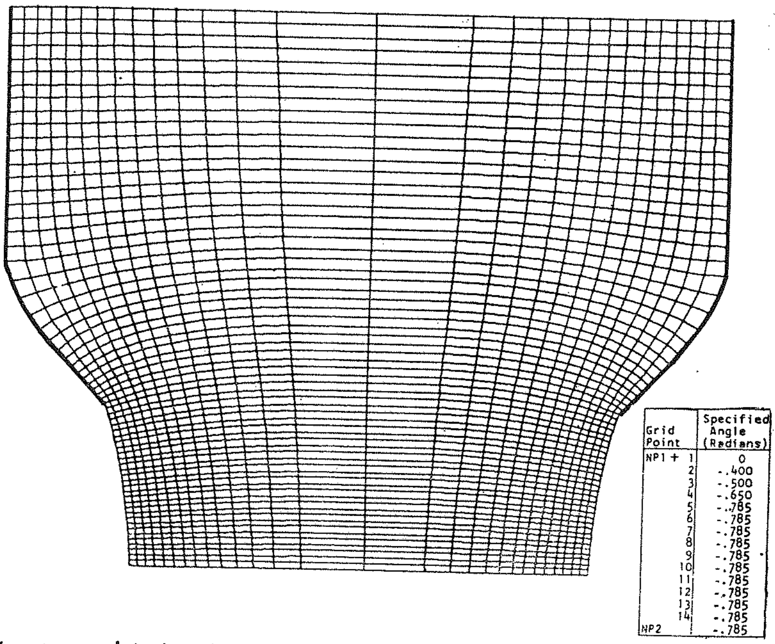
با بکار بردن توابع معکوس که قبلا موردبحث واقع شده‌اند مسئله جریان دریك شیپوره همگرا در شکل (1) دیده میشود: بواسطه وجود تقارن، راه حل بادرنظر گرفتن جریان دریك نیم صفحه که شامل خط المرکزاست بدست میاید. درصفحه $\Phi\psi$ درامتداد مرز پائین $r=0$ است. برای لوله‌ای که قبل‌ازقسمت



شکل(۱) ـ بیان مسئله یك جت آزاد ازشیپوره همگرا درصفحه ψـΦ

همگرای شیپوره است. مقدارثابت شعاع لوله مساوی r_p خواهد بود، چندین روش متعدد برای تعیین همگرائی شیپوره وجود دارد . شعاع ، r ممکن است بصورت تابعی از Φ تعیین شود یا زاویه محلی شیپوره ممکن است بصورت تابعی از Φ تعیین شود. این دو اولین شرایط مرزی هستند که در امتداد شیپوره در شکل (۱) تعیین میشوند . سومین شرط ممکنه برای شیپوره همگرا تعیین کردن سرعت یا فشار در امتداد مرز فوقانی آن است. شرط مرزی برای مقطع نهائی مرز فوقانی وجود سرعت ثابت در امتداد سطح آزاد است که بواسطه عدم وجود نیرو های وزنی در مدل بوجود میاید . مسائل حل شده بفرض اینکه سرعت در مقطع نهائی یکنواخت است ساده میشود و بدین ترتیب شرط مرزی $\frac{\partial r}{\partial \Phi} = 0$ را بوجود میاورد. باوجود اینکه ایـن فرض برای هیچ شیپوره‌ای صادق نیست برای یك شیپوره باشکل معین صادق خواهد بود بدین ترتیب شکل شیپوره‌ها که از این راه بدست میاید باید سرعت یکنواخت رادریك مقطع انتهائی بوجود آورد مقطع ابتدائی درلوله بشرط سرعت یکنواخت ویا سرعتی که تابعی از $r = r(o, \psi)$ است تعیین میشود و بصورت مفروضات دربرنامه خوانده میشود. درامتداد مرز تحتانی (خط المرکز جریان) مشتق $\frac{\partial r}{\partial \psi}$ باکم شدن شعاع بینهایت میشود. از آنجاکه اولین مشتق درامتداد مرز ناپیوسته است انتظار نمیرود که تقریب چند جملـه‌ای برای تابع پیوسته r برای گره‌های نزدیك بهمرز تقریب خوبی باشد. خوشبختانه ازآنجائیکه مقادیراین تابع« r » درامتداد تمام این مرز مقدار ثابت صفر است ناپیوستگی مشتق باعث عدم صحت روش تفاضل معین نمیشود . صحت اینکه حل باتفاضل معین در نزدیکی محور جواب قابل اطمینانی نمیدهد در بعضی از حل‌های اولیه

هنگامیکه مقایسه‌ای ازمقدار جریان بین‌خطوط جریان متوالی شدآشکار گشت بدین واسطه روش‌حل‌طوری تغییر کرد که گره‌های‌مجاورمرزتحتانی بطرزمعینی‌موردبررسی‌قرار گرفتند. جریان‌تا گره دوم‌ازخط‌المرکز یکنواخت در نظر گرفته شد . این فرض کاملا صحیح نیست ولی برای یك شبکه بزرگ نیز زیاد از مقدار صحیح دور نیست چون در نزدیکی خط‌المرکز سرعت تقریبا یکنواخت میشود. بااین فرض مقادیر $r(\Phi,1)$



شکل(۲) ـ بیان‌گرافیکی حل‌جریان ازشیپوره‌ایکه شکلش‌بوسیله توزیع زوایا معین شده است

از مقادیر $r(\Phi,2)$ بصورت زیر بدست آمدند.

$$r(\Phi,1)=\sqrt{\frac{1}{2}r(\Phi,2)^2} \qquad (27)$$

بهمین ترتیب مقادیر $r(\theta,2)$ از مقادیر $r(\theta,1)$ در اپراتور باتفاضل معین بکار برده میشود .

مثال : بعنوان مثال جریان دریك شیپوره مورد نظر قرارمیگیرد. درشکل (2) مختصات r و z با در نظر گرفتن شرط دوم مرزی برای شیپوره شکل (1) یعنی توزیع زوایا که در کنار شکل (2) داده شده است دیده میشود. بعلاوه مختصات شبکه جریان جهت ومقدار سرعت جریان درهر گره باداشتن مختصات نقطه و معادلات (18)و (21) بدست میاید.