بررسی رسم متعامد سه بعدی با نمای داده شده در چند کلاس مختلف از گراف ها

مهدیه هاشمی نژاد[i]، سید مهدی تشکری هاشمی[ii]، مریم طهماسبی[iii]

چکیده

رسم متعامد گراف ها رسمی است که در آن به هر راس یک نقطه با مختصات صحیح و به هر یال دنباله‌ای از پاره‌خط‌های موازی با محورهای مختصات نسبت می‌دهند. نمای متعامد یک گراف عبارتست از یک برچسب‌گذاری یال‌های گراف با دنباله‌ای از برچسب‌های شمال، جنوب، شرق، غرب ،بالا و پایین که جهت و راستای یال‌ها را در فضای سه بعدی تعیین می‌کند. مساله وجود یک رسم متعامد سه بعدی که نمای آن با یک نمای داده شده یکسان باشد، یک مساله NP-سخت است. تاکنون برای دسته های خاصی از گراف‌ها الگوریتم‌هایی با زمان خطی ارائه شده است. در این پژوهش ضمن مرور کارهای قبل، برای نمای داده شده از درخت‌ها و گراف‌های تک دوری الگوریتم های زمان خطی و برای نمای داده شده از گراف ها ی k- مسیر شرطی کافی ارائه می‌گردد.

کلمات کلیدی

رسم متعامد گراف‌ها، نما، فضای سه بعدی، گراف تک دوری، گراف k- مسیر، درخت

On the 3D-Orthogonal Drawing with Given Shapes in Some Classes of Graphs

Mahdieh Hasheminezhad, S. Mehdi Tashakori Hashemi, Maryam Tahmasbi

ABSTRACT

An orthogonal drawing of a graph is a drawing where every vertex has an integer coordinate and every edge is a chain of segments that are parallel to the axis. An orthogonal shape of a graph is a labeling of the edges of the graph with the labels north, south, east, west, up and down that represents the direction of edges. Given an orthogonal shape of a graph, the problem of determining whether there exists a drawing with this shape, is NP-hard. There are linear time algorithms for some classes of graphs. In this paper, the previous results are stated, and then linear time algorithms are presented for solving the problem for shapes of trees and unicyclic graphs. In addition, a sufficient condition for shape of k-path graphs is stated.

KEYWORDS

Orthogonal drawing, Shape, 3D-Space, Unicyclic graph, k- path graph, Tree

[i] دانشجوی دکترای ریاضی کاربردی، دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه صنعتی امیرکبیر: Email: m.hashemi@aut.ac.ir

[ii]. دانشیار دانشگاه صنعتی امیرکبیر، دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر: Email:hashemi@aut.ac.ir

[iii] دانشجوی دکترای ریاضی کاربردی، دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه صنعتی امیرکبیر: Email: mtahmasbia@aut.ac.ir

۱- مقدمه

رسم گراف ساختن یک نمایش هندسی برای گراف است. به بیان دقیق‌تر، در یک رسم از گراف به هر راس یک نقطه مجزا و به هر یال بین دو راس یک خم جردن ساده نسبت داده می‌شود که دو نقطه متناظر با راسهای انتهایی یال را به هم وصل می‌کند.

بسته به کاربرد رسم‌ها، استانداردهای متفاوتی برای رسم گراف وضع شده است. از آن جمله می‌توان به رسم‌های مسطح، رسم‌های متعامد و رسم‌های با خط مستقیم اشاره کرد. یک رسم مسطح رسمی است که در آن هیچ دو یالی یکدیگر را قطع نکنند مگر در راس انتهایی مشترک. یک رسم متعامد رسمی مسطح است که در آن هر راس مختصات صحیح داشته باشد و هر یال به صورت دنباله‌ای از پاره‌خط‌های موازی با محورهای مختصات نشان داده شود. رسم‌های متعامد به علت کاربرد در طراحی VLSI ها مورد توجه قرار گرفته‌اند.

به طور کلی رسمهای متعامد به دو دسته رسم‌های متعامد در فضای دو بعدی و رسمهای متعامد در فضای سه بعدی تقسیم می‌شوند. در یک رسم متعامد دو بعدی یالها به صورت دنباله‌ای از پاره‌خط‌های افقی و عمودی هستند، بنابراین هر راس درجه حداکثر ۴ دارد. در یک رسم متعامد سه بعدی یالها به صورت دنباله‌هایی از پاره‌خط‌ها در جهت‌های بالا (U)، پایین(D)، شرق (E)، غرب (W)، شمال (N) و جنوب (S) هستند، بنابراین رسم متعامد سه بعدی برای گرافهای با درجه کمتر یا مساوی با ۶ درنظر گرفته می‌شود.

برای یک گراف رسم‌های متعامد متفاوتی وجود دارد. شرایط بسیاری بر کیفیت و خوانایی این رسم‌ها تاثیر می‌گذارند، از جمله حجم رسم، تعداد شکستگی‌های رسم و یا تعداد شگستگی‌ها در هر یال از رسم است.

مساله کمینه نمودن تعداد شکستگی‌ها و مساله کمینه نمودن حجم در رسم، مسائل NP- سخت هستند [۱۱].

یکی دیگر از مسائل قابل توجه در این زمینه، رسم متعامد گراف‌هایی است که یال‌های آنها دارای برچسب هستند. گراف جهت‌دار G را در نظر بگیرید که یالهای آن با برچسب هایی در مجموعه $\{S, N, E, W, U, D\}$ برچسب گذاری شده‌اند. هدف ارائه رسمی متعامد از گراف G است که در آن رسم، هر یال در جهت برچسبش رسم شده باشد. اگر مجموعه برچسبها $\{E, W, U, D\}$ باشد، مساله به رسم متعامد در دو بعد تبدیل می‌شود. ویجایان و ویگدرسون [۱۸] مساله را در دو بعد به طور کامل حل کردند.

این مساله در حالت سه بعدی تنها برای دورها و مسیرها حل شده است.

۲- رسم متعامد در فضای سه بعدی

۲-۱- مفاهیم مقدماتی

با توجه به کاربرد، ویژ گی‌های فراوانی برای رسمهای متعامد در سه بعد در نظر گرفته شده است که اینک به بعضی از آنها اشاره می گردد.

یک رسم متعامد را *هم صفحه* گوییم هرگاه همه رئوس در یک صفحه رسم شوند. رسم های حاصل از الگوریتم های ارائه شده در [۷]، [۸] و [۹] هم صفحه هستند.

یک رسم *موقعیت عمومی* رسمی متعامد است که هیچ دو راسی در یک صفحه از مشبکه قرار نمی‌گیرند. مساله یافتن رسم‌های موقعیت عمومی با کمترین تعداد خمیدگی NP- سخت است. وود در [۱۵] الگوریتمی ارائه کرد که رسم‌هایی موقعیت عمومی با میانگین حداکثر $2\frac{2}{7}$ شکستگی در هر یال به دست می‌آورد.

یک رسم متعامد *غیر هم خط* است هرگاه هیچ دو راسی در یک خط از مشبکه قرار نگیرند. رسم های حاصل از الگوریتم ارائه شده در [۴] غیر هم خط هستند.

۲-۲- کران‌ها و الگوریتم های موجود برای رسم متعامد در فضای سه بعدی

بیدل و همکاران در [۱] رسمهای متعامد سه بعدی را برای گرافهایی که بیشترین درجه راسهای آنها از ۶ بیشتر است بررسی کرده‌اند. در این مقاله برای رسم چنین گراف‌هایی به ازای هر راس یک جعبه (مکعب مستطیل) در نظر می‌گیرند. در این رسم هر یال حداکثر ۳ شکستگی دارد.

دی باتیستا، پاتریگنانی و ویرگیو [۹] روشی برای رسم متعامد سه بعدی گراف‌هایی که بیشترین درجه آنها ۶ است به‌دست آوردند که با یک رسم اولیه شروع می‌کند و بعد از چند مرحله، رسم نهایی را پیدا می‌کند. آنها نتایج اجرای الگوریتم خود را با چند الگوریتم دیگر مقایسه کردند. کولموگورو و باردزین ثابت کردند که هر گراف با n راس را می‌توان در جعبه‌ای با حجم

حداکثر $\Omega(n^{3/2})$ به طور متعامد رسم کرد [۹]. ادس سیمونویس و وایتسایدز [۷] و[۸] الگوریتم‌هایی برای پیدا کردن رسم‌های متعامد با مساحت و حجم کم برای گراف‌های با بیشترین درجه حداکثر ۶ ارائه دادند. حجم این رسمها $\Omega(n^{3/2})$ است. در بین الگوریتمهای ارائه شده، الگوریتم compact در [۷] رسم‌هایی را به دست می‌آورد که در هر یال حداکثر ۷ شکستگی داشته باشند. همه این رسمها در مکعب مستطیل‌های با ابعاد $O(\sqrt{n})\times O(\sqrt{n})\times O(\sqrt{n})$ قرار می‌گیرند.

ادس، سیمونویس و وایتسایدز [۸] صورت‌های بهبود یافته‌ای از الگوریتم compact را ارائه کردند. یکی از این الگوریتم‌ها رسمهایی با ابعاد $O(\sqrt{n})\times O(n)\times O(n)$ و حداکثر ۶ شکستگی در هر یال به‌دست می‌آورد. الگوریتم دیگر رسم‌هایی با همین ابعاد و حداکثر ۵ شکستگی در هر یال به دست می‌آورد و الگوریتم سوم رسمهایی با ابعاد $O(n)\times O(n)\times O(n)$ و حداکثر ۴ شکستگی در هر یال به دست می‌آورد.

الگوریتم Staircase که توسط کلوسون و همکاران در [۴] ارائه شده، این نتیجه را به حداکثر ۵ شکستگی در هر یال بهبود داده است و رسمی هم صفحه و غیر همخط با ابعاد $O(n)\times O(n)\times O(1)$ تولید می‌کند. این رسم به دلیل داشتن ارتفاع ثابت در طراحی شبکه‌های VLSI کاربرد دارد.

الگوریتم dynamic staircase در [۴] همان شیوه الگوریتم staircase را با کمی تفاوت به کار می‌برد و رسمهایی با حداکثر ۶ شکستگی در هر یال به دست می‌آورد ولی این الگوریتم پویاست، به این معنی که می‌تواند در زمان $O(1)$ رسم را در حالتی که راسی به گراف اضافه یا از آن حذف شود، تصحیح کند. الگوریتم دیگری که در این مرجع ارائه شده است، با نام dynamic spiral الگوریتمی پویاست که رسم‌هایی با ابعاد $O(\sqrt{n})\times O(\sqrt{n})\times O(n)$ و با حداکثر ۷ شکستگی در هر یال به دست می‌آورد.

با الگوریتم ۳-BENDS از ادس و همکاران [۷] و [۸] و الگوریتم Incremental از پاپاکوستاس و تولیس [۱۰] ثابت شد که هر گراف با درجه حداکثر ۶ دارای یک رسم با حداقل ۳ شکستگی در هر یال است. این الگوریتم که اضافه و کم کردن راسها را در زمان ثابت تصحیح می‌کند، رسم متعامدی با حجم $4.63n^3$ به دست می‌آورد. الگوریتم ۳-BENDS رسمی با حجم $27n^3$ می‌سازد. این الگوریتم راسها را با ترتیب دلخواه روی قطر مکعب قرار می‌دهد.

وود [۱۳] با قرار دادن راسها با ترتیب مناسب روی قطر مکعب مستطیل حجم رسم را به $n^3+o(n^3)$ کاهش داد. وی همچنین در [۱۴] نشان داد هر رسم متعامد از K_5 دارای یک یال با حداقل ۲ شکستگی است.

۳- رسم متعامد گراف ها با نمای داده شده

۳-۱- تعاریف مقدماتی

فضای R^3 با استفاده از دستگاه مختصات دکارتی به مجموعه های ردیف ۱ تا ۴ افراز می‌شود:

۱- مبدا مختصات.

۲- شش نیم محور $\{X^+,X^-,Y^+,Y^-,Z^+,Z^-\}$.

۳- دوازده ربع صفحه.

۴- هشت زیر فضای باز از R^3. هر یک هشتم باز با یک سه تایی $X^aY^bZ^c$ که $a,b,c\in\{+,-\}$، مشخص می‌شود.

در اینجا برچسب های $X^+,\ X^-,\ Y^+,\ Y^-,\ Z^+,Z^-$ به ترتیب با $S,\ N,\ E,\ W,\ U,\ D$ نشان داده می‌شوند.

یال $e=uv$ از یک گراف را در نظر بگیرید. به هر یک از دو جهت ممکن (u,v) و (v,u) برای یال e یک *پیکان* گفته می‌شود.

یک *نما (shape)* از گراف غیر جهت دار G یک برچسب گذاری از پیکان های G است به طوری که:

۱- هر پیکان از گراف با یک برچسب در مجموعه $\{S,N,E,W,U,D\}$ برچسب گذاری شده است.

۲- پیکان های یک یال برچسب های متضاد دارند. (برچسب های S,W,D به ترتیب متضاد برچسب های N,E,U می‌باشند.

۳- دو پیکان خارج شونده از یک راس برچسب یکسان ندارند.

به یک نما سه بعدی گفته می‌شود هرگاه هر برچسب از مجموعه $\{S,N,E,W,U,D\}$ حداقل به یکی از پیکان‌های گراف نسبت داده شده باشد. یک رسم از گراف G با نمای γ، رسمی متعامد از G است که در آن هر پیکان به جهتی مطابق با برچسبش اشاره می‌کند. اگر G رسمی با نمای γ داشته باشد، *γ قابل رسم* گفته می‌شود.

مساله مورد بحث در این مقاله، مساله قابل رسم بودن نماهای

سه بعدی است. به عبارت دیگر هدف بررسی آن است که آیا یک نمای سه بعدی داده شده از یک گراف قابل رسم است یا خیر؟ پاتریگنانی در [۱۱] نشان داد که مساله قابل رسم بودن نماهای سه بعدی NP-سخت است.

اگر G' زیر گرافی از G با نمای γ باشد، تحدید γ به مجموعه پیکان‌های G' *نمای القا شده* روی G' توسط γ نامیده می‌شود.

فرض کنید γ یک نما از مسیر p با رئوس متوالی $v_1,...,v_n$ باشد. اگر دنباله $\sigma:\sigma_1,...,\sigma_n$ دنباله برچسب‌های پیکان‌های $(v_1,v_2),(v_2,v_3),...,(v_{n-1},v_n)$ باشد، مسیر p با نمای γ به وسیله σ به طور کامل مشخص می‌شود. بنابراین برای معرفی مسیر p با نمای γ از σ که یک *نامسیر* نامیده می‌شود، استفاده می‌گردد. نما دورها به صورت مشابه تعریف می‌شوند.

برای نامسیر(دور) یک زیردنباله متوالی از σ *هموار*[i] گفته می‌شود اگر حداقل دو برچسب داشته باشد و نسبت به این ویژگی که برچسب هایش متشکل از زوج هایی از دو جهت متمایز باشند، ماکسیمال باشد. گفتنی است که دو جهت متمایز گفته می‌شود اگر یکسان یا متضاد نباشند. بطور شهودی هر زیر دنباله هموار، دنباله‌ای ماکسیمال از برچسب‌های متوالی است که در هنگام رسم همگی در یک صفحه قرار می‌گیرند. نمای القا شده روی یک زیرگراف از گراف G با نمای سه بعدی γ *هموار* گفته می‌شود اگر حداقل دو برچسب داشته باشد و نسبت به این ویژگی که برچسب‌هایش متشکل از زوج هایی از دو جهت متمایز باشند، ماکسیمال باشد.

اگر $\sigma:\sigma_1,...,\sigma_n$ یک نامسیر (نمادور) باشد آنگاه نامسیر (نمادور) $\overline{\sigma}_n,...,\overline{\sigma}_1$ (برچسب $\overline{\sigma}_i$ متضاد برچسب σ_i) با $\overline{\sigma}$ نشان داده می‌شود.

زیردنباله کانونی τ، *از* یک نامسیر (دور) σ، زیر دنباله‌ای با طول k است که در خواص ردیف ۱ تا ۴ صدق می‌کند.

۱- $1\le k \le 6$.

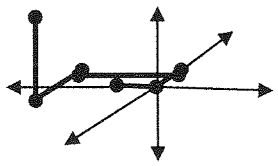
۲- برچسب های σ متمایز هستند.

۳- هیچ زیر دنباله هموار از σ شامل بیش از سه برچسب از τ *نباشد*.

۴- اگر زیر دنباله‌ای هموار چون σ' از σ با τ برچسب مشترکی داشته باشد، آنگاه $\tau\cap\sigma'$ زیر دنباله ای متوالی از σ باشد.

اگر مجموعه برچسب‌های یک دنباله مجموعه $\{A_1, ..., A_l\}$ باشد آن دنباله را از نوع $\{A_1, ..., A_l\}$ نامند.

رسم $\Gamma(\gamma)$ از گراف G با نمای γ *افزایشی*[ii] است هرگاه انتهای پاره خط متناظر با هر یال از مرز جعبه در برگیرنده پاره خطهای رسم شده پیشین حداقل یک واحد فراتر رود. (شکل ۱)



شکل ۱: یک رسم از دوسو قابل گسترش از یک مسیر با نمای داده شده.

رسم $\Gamma(\sigma)$ از نامسیر σ از دوسو قابل گسترش[iii] است اگر دو پاره خط متناظر با اولین و آخرین یال σ را بتوان به اندازه دلخواه بدون ایجاد تقاطع با پاره خطهای دیگر امتداد داد.

گراف G یک *گراف* k- *مسیر* گفته می‌شود هرگاه G از k مسیر جهت‌دار (درون مجزا)، $p_1, p_2,..., p_k$ تشکیل شده باشد که راس p را به راس q متصل می‌کند. یک θ-*گراف* یک گراف ۳-مسیر است.

۳-۲- نتایج به دست آمده در زمینه رسم گراف‌ها با نمای داده شده

یک هشتم $X^aY^bZ^c$ توسط نامسیر σ *قابل دسترس* است هرگاه σ دارای رسمی باشد که راس اول آن در مبدا و راس انتهایی آن در یک هشتم $X^aY^bZ^c$ قرارگیرد.

دی باتیستا و همکاران در [۵] نشان دادند هر نامسیر سه بعدی قابل رسم است و شرط لازم و کافی برای قابل دسترس بودن یک هشتم ها توسط نامسیرها بیان کرده‌اند.

گزاره ۳-۲-۱ [۵] : هر نامسیر دارای یک رسم افزایشی است.

گزاره ۳-۲-۲ [۵] : اگر یک نامسیر σ با n برچسب دارای دقیقا دو برچسب یا حداقل دو زیر دنباله هموار باشد آنگاه σ دارای رسمی از دو سو قابل گسترش است که در زمان $O(n)$ قابل رسم است.

قضیه ۳-۲-۱ [۵] : یک هشتم UNE توسط نامسیر σ قابل دسترس است اگر و فقط اگر σ دارای زیر دنباله‌ای کانونی از نوع $\{U, N, E\}$ باشد.

باتیستا و همکاران در [۶] مشخص کردند چه نمادورهایی قابل رسم هستند.

قضیه ۳-۲-۲ [۶] : نمادور سه بعدی σ قابل رسم است اگر و فقط اگر σ دارای زیر دنباله ای کانونی با طول ٦ باشد.

گیاکمو و همکاران در [۹] نشان دادند شرایط قضیه ۳-۲-۲ برای گراف‌های کمی پیچیده تر برقرار نیست. آنها نمایی از یک θ-گراف یافتند که نمادورهای القاشده روی دورهای آن قابل رسم هستند ولی نمای θ-گراف قابل رسم نیست. گیاکمو و همکاران در [۹] شرطی کافی برای قابل رسم بودن θ- گراف ها بیان کردند.

θ-گراف G را با سه مسیر p_1, p_2, p_3 درنظر بگیرید که راس p را به راس q متصل می‌کنند. فرض کنید γ یک نما از G، π_i نمامسیر القا شده روی p_i و e_{ij} یالی از مسیر p_i باشد. برچسب پیکانی از e_{ij} که هم جهت با مسیر جهت‌داری است که p را به q متصل می‌کند با l_{ij} و متضاد آن با $\bar{l}_{ij}$ نشان داده می‌شود.

قضیه ۳-۲-۳ [۹] : θ-گراف G را با نمای γ در نظربگیرید. اگر برای هر مسیر p_i یالهای e_{i1}, e_{i2}, e_{i3} وجود داشته باشند به طوری که برای هر i و j $(i \neq j)$، دنباله $l_{i1}, l_{i2}, l_{i3}, \bar{l}_{i1}, \bar{l}_{i2}, \bar{l}_{i3}$ یک زیر دنباله کانونی برای نمادور $C_{ij} = \pi_i \bar{\pi}_j$ باشد، آنگاه γ قابل رسم است.

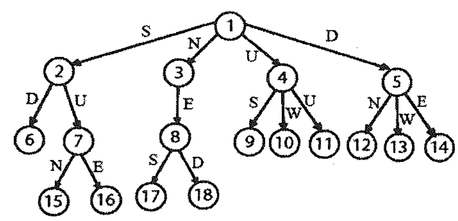
برای اثبات قضیه ۳-۲-۳ از گزاره ۳-۲-۳ استفاده شده است.

گزاره ۳-۲-۳ [۹] : اگر گراف G با نمای γ دارای رسمی بدون شکستگی باشد که در آن هر پیکان در جهت برچسب آن رسم شده باشد و بین هیچ دو یالی که در یک زیر گراف هموار قرار می‌گیرند، تقاطع رخ ندهد آنگاه γ قابل رسم است.

٤- قابل رسم بودن نماهای چند گراف ساده

٤-١- قابل رسم بودن نمای یک درخت

در این قسمت نشان داده می‌شود که هر نمای سه بعدی از یک درخت قابل رسم است.



شکل ۲ . یک درخت ریشه‌دار با راسهای برچسب‌گذاری شده

τ را یک نما از درخت T در نظربگیرید که T از مرکزش (یکی از مراکزش) ریشه دار شده‌است و این درخت ریشه دار دارای عمق d است. تنها راس عمق صفر v_1 و راسهای عمق i، $1 \le i \le d$، با برچسب‌های $m_{i-1}+1, m_{i-1}+2, \ldots, m_i$ برچسب گذاری شده اند که در آن m_{i-1} مجموع راسهای عمقهای صفر تا $i-1$ است (شکل). T_i را زیردرخت ریشه دار در v_i از T و τ_i را نمای القا شده توسط τ روی T_i در نظربگیرید. اگر Γ_i رسمی از T_i با نمای τ_i باشد، $B(v_i)$ جعبه در برگیرنده Γ_i را نشان می‌دهد.

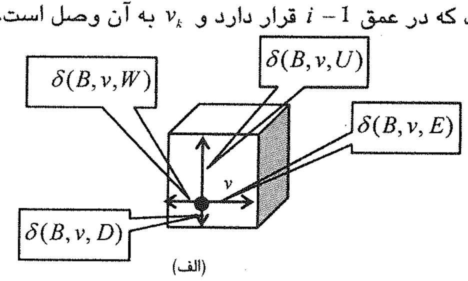
با استفاده از الگوریتم رسم درخت، طول یالهای T برای بدست آوردن رسمی با نمای τ محاسبه می‌شود.

λ_{ij}: طول یال (v_i, v_j) .

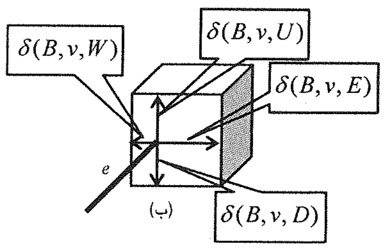
l_{ij}: برچسب پیکان (v_i, v_j) و $\bar{l}_{ij}$ متضاد l_{ij} است.

$\delta(B,x,X)$: فاصله راس (یال) x از وجهی از جعبه B که در جهت X قرار دارد. (شکل ۳)

برای هر راس v_k درعمق i از درخت، پدر v_k، $p(k)$، راسی است که در عمق $i-1$ قرار دارد و v_k به آن وصل است.



(الف)



(ب)

شکل۳. (الف)تعریف $\delta(B,v,x)$ (ب) تعریف $\delta(B,e,x)$

الگوریتم رسم درخت

۱- قرار دهید $i = d$.

۱-۱ قرار دهید $j = m_{i-1}+1$.

۱-۱-۱ اگر v_j برگ باشد، قرار دهید $\lambda_{p(j)j} = 1$ در غیر این صورت،

$$\lambda_{p(j)j} = \max_{\{t \mid t<j, p(t)=p(j)\}} \{\delta(B(v_t), v_t, l_{p(j)j})\} + \delta(B(v_j), v_j, \bar{l}_{p(j)j}) + 1$$

۱-۱-۲ قرار دهید $j = j + 1$.

۱-۱-۳ اگر $j \le m_i$ باشد به مرحله ۱-۱-۱ بروید.

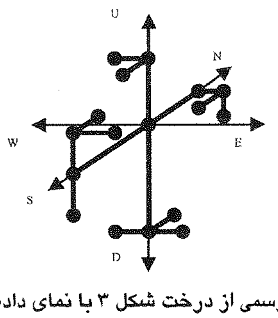
۱-۲ قرار دهید $i = i - 1$.

۱-۳ اگر $i > ۰$ باشد به مرحله ۱-۱ بروید.

۲-پایان.

قضیه ۴-۱-۱ : الگوریتم رسم درخت در زمان $O(n)$ برای هر درخت T با n راس و نمای τ، رسمی با نمای τ را بدست می‌آورد که برای هر راس v با فرزندان $v_1, v_2, ..., v_s$، فاصله v و $B(v_i)$، $i = 1, ..., s$، حداقل یک واحد است.

برهان : قضیه با استقرا روی عمق درخت اثبات می‌گردد. الگوریتم به وضوح برای درخت‌های با عمق ۱ رسمی با نمای τ بدست می‌آورد. فرض کنید الگوریتم برای درخت‌های ریشه‌دار با عمق کمتر از n رسمی با نمای τ بدست می‌آورد. در ادامه حکم برای درختان با عمق n ثابت می‌شود. T را درختی ریشه دار با عمق n در نظر بگیرید که v_1، ریشه T، n_1 فرزند در عمق ۱ دارد. برای هر i، $i = 2, ..., n_1 + 1$، زیر درخت T_i دارای عمق کمتر از n است بنابراین الگوریتم رسمی با نمای τ_i برای آن بدست می‌آورد. آن رسم را Γ_i بنامید. از آنجا که الگوریتم رسم T، Γ، را به صورت بازگشتی محاسبه می‌کند، بین یالهای T_i در Γ_i هیچ تقاطعی وجود ندارد. طبق فرض استقرا هر راس v_i از هر جعبه در برگیرنده یک فرزند از v_i حداقل یک واحد فاصله دارد بنابراین یال (v_1, v_i) هیچ یالی از T_i را قطع نمی‌کند. از طرفی طول یال (v_1, v_i)، L_{1i}، به اندازه ای است که بین هیچ دو جعبه $B(v_i)$ و $B(v_j)$، $j = 1, ..., i-1$، اشتراکی وجود ندارد. در نتیجه Γ یک رسم از T با نمای τ است (شکل ۴). □



شکل۴:. رسمی از درخت شکل ۳ با نمای داده شده

۴-۲- قابل رسم بودن نمای یک گراف تک دوری

گرافی را که دقیقا یک دور دارد، *گراف تک دوری* گویند. اگر G یک گراف تک دوری با دور C باشد. درخت های $T_1, ..., T_k$ وجود دارند که:

۱- $G = C \bigcup (\bigcup_{i=1}^{k} T_i)$.

۲- برای هر iو j که $1 \le i < j \le k$، شرط $T_i \bigcap T_j = \phi$ برقرار است.

۳- هر درخت T_i فقط در یک راس با دور C اشتراک دارند.

قضیه۴-۲-۱ : نمای γ از گراف تک دوری G قابل رسم است اگر و فقط اگر نمادور القا شده توسط γ روی C قابل رسم باشد.

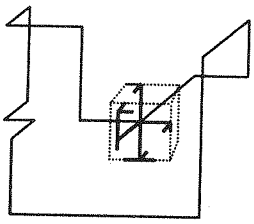
برهان : اگر γ قابل رسم باشد آنگاه نمادور القا شده توسط γ روی C قابل رسم است. حال فرض کنید $G = C \bigcup (\bigcup_{i=1}^{k} T_i)$ و γ یک نما از G است و σ، نمادور القا شده توسط γ روی C، قابل رسم است. نشان داده می‌شود که γ نیز قابل رسم است. T_i' را درخت $T_i \bigcup \{e_i, e_i'\}$ در نظر بگیرید که $e_i = (v_i, u)$ و $e_i = (v_i, w)$ دو یال از C هستند که با درخت T_i در راس v_i اشتراک دارند. T_i' را در v_i ریشه دار کنید و با توجه به الگوریتم قسمت ۴-۱-۱ رسمی مانند $\Gamma_{T_i'}$ برای T_i' در نظر بگیرید. طبق قضیه ۳-۳-۱، v_i با جعبه دربرگیرنده هر کدام از فرزندانش حداقل یک واحد فاصله دارد بنابراین e_i و e'_i را می‌توان با طول دلخواه بدون هیچ تقاطعی با یالهای دیگر امتداد داد. $\Gamma(C)$ را یک رسم از C با نمای σ در نظربگیرید. بین یالهای C هیچ تقاطعی وجود ندارد، از این رو برای هر i، $i = 1, ..., k$، جعبه ای شامل v_i مانند $B(v_i)$ وجود دارد که هیچ یالی از $\Gamma(C)$ بجز e_i و e'_i، $B(v_i)$ را قطع نمی‌کند (شکل ۵). $B(v_i)$ جعبه ماکسیمال با ویژگی گفته شده است. اگر قرار داده شود:

$$S(v_i) = \min_{l \in \{U, D, N, S, E, W\}} \delta(B(v_i), v_i, l)$$

$$l_i = \max_{l \in \{U, D, N, S, E, W\}} \delta(B_i, v_i, l)$$

که B_i جعبه در برگیرنده $\Gamma_{T_i'}$ است، طول هر پاره خط در $\Gamma(C)$ در عدد $\rho = \max\{\left\lceil \frac{2l_i + 1}{S(v_i)} \right\rceil \mid i = 1, 2, ..., k\}$ ضرب می‌گردد. $\Gamma(C)$ را با طول های جدید در نظربگیرید. اضافه

کردن Γ_{T_i} در راس v_i به $\Gamma(C)$ برای $i=1,\ldots,k$ رسمی از G با نمای γ تولید می‌کند.



شکل۵: رسمی از یک گراف تک دوری با نمای داده شده.

از آنجا که الگوریتم های بررسی قابل رسم بودن نمای یک دور و یافتن رسم یک درخت با نمای داده شده زمان خطی هستند، قضیه ٤-٣-١ الگوریتمی ارائه می‌کند که در زمان $O(n)$ قابل رسم بودن یک نما از یک گراف تک دوری با n راس را تعیین و در صورت وجود رسمی از گراف با نمای داده شده به دست می‌آورد. □

٤-٣- قابل رسم بودن نمای یک گراف k- مسیر

با استفاده از گزاره ٤-٣-١، قضیه ٣-٢-٣ برای گراف های k- مسیر تعمیم داده می‌شود.

گزاره ۴-۳-۱ : فرض کنید G گرافی است که از k مسیر، $p_1, p_2, \ldots, p_k$، $1 \le k \le 6$، تشکیل شده است به طوری که همه مسیرها با راس مشترک p آغاز می‌شوند و راس مشترک دیگری ندارند. γ یک نما از G و π_i نمای القا شده توسط γ روی p_i است. اگر برای هر i و j، $i \neq j$، نمامسیر $\pi_i\overline{\pi}_j$ فقط دو برچسب داشته باشد یا حداقل شامل دو زیردنباله هموار باشد آنگاه G دارای رسمی با نمای γ است که در آن یالهای انتهایی مسیرها می‌توانند به اندازه دلخواه بدون ایجاد تقاطع امتداد یابند.

برهان: برای بدست آوردن رسمی از G با ویژگی خواسته شده کافی است مسیرها با ترتیب ۱ تا ۶ و به صورت افزایشی رسم گردند.

۱- نامسیرهایی را دارای بیش از یک زیردنباله هموار هستند.

۲- هر نامسیر با یک زیردنباله هموار از یکی از سه نوع $A_1=\{S,N,E,W\}$، $A_2=\{E,W,U,D\}$ و $A_3=\{U,D,S,N\}$ است. در این مرحله اولین یال نامسیرهای از نوع A_2 و A_3 که با یکی از برچسبهای S,N,E,W آغاز می‌شوند رسم می‌گردند.

۳- نما مسیرهای از نوع A_1.

۴- اولین یال نامسیرهای از نوع A_3 که با یکی از برچسبهای U,D آغاز می‌شوند.

۵- نامسیرهای از نوع A_2 که رسم نشده اند و ادامه نامسیرهای از نوع A_2 که اولین یال آنها در مرحله ۲ رسم شده است.

۶- نامسیرهای از نوع A_3 که رسم نشده‌اند و ادامه نامسیرهای از نوع A_3 که اولین یال آنها در مرحله ۲ یا ۴ رسم شده است.

یالهای انتهایی مسیرهای شامل بیش از یک زیر دنباله هموار، به دلیل خروج از صفحات $x=0$، $y=0$ و $z=0$ قابل امتداد دادن هستند. مسیرهای نوع A_1 به دلیل این که یالهای دیگر مسیرها که در صفحه $z=0$ قرار می‌گیرند پیش از این رسم شده‌اند، بدون ایجاد تقاطع و به صورت افزایشی قابل رسم هستند. مسیرهای نوع A_1 و A_2 به دلیل مشابه بدون ایجاد تقاطع و به صورت افزایشی قابل رسم هستند. □

قضیه ۴-۳-۱ : فرض کنید G یک گراف k-مسیر است با k مسیر، $p_1,p_2,\ldots,p_k$، $1\le k \le 6$، که همه راس p را به راس q متصل می‌کند، γ یک نما از G و π_i نمای القا شده توسط γ روی p_i است. اگر برای هر مسیر p_i یالهای e_{i1}, e_{i2}, e_{i3} وجود داشته باشد به طوری که برای هر i و j $(i \neq j)$، دنباله $\tau_{ij}=l_{i1}, l_{i2}, l_{i3}, \overline{l}_{j3}, \overline{l}_{j2}, \overline{l}_{j1}$ یک زیر دنباله کانونی برای نمادور $C_{ij}=\pi_i\overline{\pi}_j$ باشد، آنگاه γ قابل رسم است.

برهان : در اثبات قضیه ۳-۲-۳ گیاکمو و همکاران [۹] روشی ساختاری ارائه کردند. با استفاده از گزاره ۴-۳-۱ و آن روش ساختاری، رسمی متعامد از G به دست می‌آید که در آن هر پیکان در جهت برچسبش رسم شده است و هیچ دو یالی از G که در یک زیرگراف هموار قرار می‌گیرند، تقاطع ندارند. بنابراین از گزاره ۳-۲-۳ نتیجه می‌شود γ قابل رسم است.

از آنجا که هر τ_{ij} یک دنباله کانونی است، سه برچسب متمایز A_1,A_2,A_3 وجود دارند که هیچ دوتایی از آنها متضاد نیستند وبرای هر i، $i=1,\ldots,k$ l_{i1},l_{i2},l_{i3} یک جایگشتی از A_1,A_2,A_3 است. بدون کم شدن از کلیت، فرض می‌شود

$\{A_1,A_2,A_3\}=\{U,N,E\}$. یالهای e_{ij} گراف را به $2k+2$ زیرگراف ($2k$ مسیر و ۲ زیر گراف هرکدام شامل k مسیر که همه با یک راس مشترک آغاز می‌شوند) تقسیم می‌کند به طوری که هر یال e_{ij} فقط در دوتا از زیرگراف‌ها قرار دارد. زیر گرافی را که سر e_{ij} را به انتهای e_{ij+1} متصل می‌کند را با G_{ij}، زیرگراف شامل p با G_p و زیرگراف شامل q با G_q نشان داده می‌شوند. از آنجا که برای هر $i \neq j$ ،$i,j=1,...,k$ ، l_{j1} و l_{i1} دو برچسب متوالی از یک دونباله کانونی هستند، G_p و G_q در شرایط گزاره ۴-۳-۱ صدق می‌کنند و دارای رسمهای Γ_p و Γ_q هستند که در آنها یالهای انتهایی مسیرها می‌توانند به اندازه دلخواه بدون ایجاد تقاطع امتداد یابند.

به منظور رسم G، برای رسم هر یک از G_{ij} بر اساس برچسبهای l_{i1},l_{i2},l_{i3} یکی از یک هشتم های باز را در نظر گرفته می‌شود. برای G_{i1} یک هشتم $l_{i1},\bar{l}_{i2},\bar{l}_{i3}$ و برای G_{i2} یک هشتم $l_{i1},l_{i2},\bar{l}_{i3}$ را در نظر بگیرید. فرض کنید Γ_{ij} یک رسم افزایشی از G_{ij} باشد و B_{ij},B_p,B_q به ترتیب جعبه های در برگیرنده G_{ij},G_p,G_q باشند. L را برابر با طول بلندترین ضلع جعبه ها قرار دهید و طول هر پاره خط در G_p و G_q را در $2L+1$ ضرب کنید. در ادامه λ_{ij}، طول پاره خط متصل کننده دو قسمت از e_{ij} در دو زیر گراف متفاوت شامل e_{ij}، محاسبه می‌گردند.

$$\lambda_{i1}=4L+2+\delta(B_q,e_{i3},\bar{l}_{i1})-\delta(B_{i2},e_{i3},\bar{l}_{i1})+\delta(B_{i2},e_{i2},\bar{l}_{i1})-\delta(B_{i1},e_{i2},\bar{l}_{i1})$$

$$\lambda_{i2}=4L+2+\delta(B_p,e_{i1},l_{i2})+\delta(B_q,e_{i3},\bar{l}_{i2})-\delta(B_{i1},e_{i1},l_{i2})-\delta(B_{i2},e_{i3},\bar{l}_{i2})$$

$$\lambda_{i3}=4L+2+\delta(B_p,e_{i1},l_{i3})-\delta(B_{i1},e_{i1},l_{i3})+\delta(B_{i1},e_{i2},l_{i3})-\delta(B_{i2},e_{i2},l_{i3})$$

Γ_p در یک هشتم DSW و Γ_q در یک هشتم UNE رسم می‌گردد به گونه‌ای که گوشه پایینی شمالی شرقی B_p در مختصات $(-2L-1,-2L-1,-2L-1)$ و گوشه بالایی جنوبی غربی B_q در مختصات $(2L+1,\ 2L+1,\ 2L+1)$ قرار گیرد و دیگر پاره خطها نیز با طول های محاسبه شده رسم می‌شوند.

تعریف کنید $S=\{e_{i2}(i=1,\ ...,\ k\}$. به راحتی می‌توان نشان داد که اگر در رسم حاصل دو یال تقاطع داشته باشند آنگاه هر دوی آن یالها در S قراردارند. از آنجا که برای $i \neq j$ ،$i,j=1,...,k$ ، e_{i2} و e_{j2} در یک زیردنباله کانونی قراردارند، آنها در زیرگراف هموار قرارندارند و طبق گزاره ۳-۲-۳، γ قابل رسم است. □

۵- نتیجه گیری

در این مقاله بعد از مرور نتایج به دست آمده برای رسم متعامد گرافها در فضای سه بعدی نشان داده شده است که هر نما از یک درخت قابل رسم است و یک نما از یک گراف تک دوری قابل رسم است اگر وفقط اگر نمای القا شده روی دور آن قابل رسم باشد. با توجه به NP-سخت بودن مساله، یافتن الگوریتم های ابتکاری در جهت بدست آوردن رسمهایی که درصد زیادی از یالها مطابق با نمای داده شده باشند قابل توجه است.

۶- مراجع

[۱] Beidl, T. C.; Thiele, T.; Wood, D. R.; "3D-orthogonal graph drawing with optimal volume", Algorithmica 44(3): p.p. 233-255, 2006.

[۲] Closson, M.; Grtshore, S.; Johnsen, J.; Wismath, K.; "Fully dynamic three dimensional orthogonal graph drawing", In J. Kra tochvil, ed., 7th International Symp. on graph drawing (GD 99) LNCS 1731, p.p. 49-58, 1999

[۳] Di Battista, G.; Lottia, G.; Lubiw, A.; Whitesides, S.;" Embedding problems for paths with direction constrained edges", Theoretical Computer Science 289(2), p.p. 879-917, 2002.

[۴] Di Battista, G.; Lottia, G.; Lubiw, A.; Whitesides, S.;" Orthogonal drawing of cycles in 3D-space", In J Marks, ed., 8th International Symp. on graph drawing (GD 00) LNCS 1984, p.p. 272-283, 2000.

[۵] Di Giacomo, E.; Liotta, G.; Patrignani, M.; "Orthogonal 3D shapes of theta graphs", 10th International Symp. on graph drawing (GD 02) LNCS 2528, p.p. 142-149, 2002.

[۶] Di Battista, G.; Patrignani, M.; Virgio, F.; " Split & push algorithm to 3D orthogonal drawing", J. graph algorithms and appl. 4(3), p.p. 105-133, 2000.

[۷] Eades, P.; Symonovis, C.; Whitesides, S.; "Two algorithms for three dimensional orthogonal graph drawing",in S. North, ed., 4th International Symp. on graph drawing (GD 96) LNCS 1190, p.p. 139-145, 1997.

[۸] Eades, P.; Symonovis, C.; Whitesides, S.; " Three dimensional orthogonal graph drawing algorithms", discrete applied mathematics 103, p.p. 55-87, 2000.

[۹] Kolmogorov, A. N.; Bardzin, Y. M.; "On the realization of nets in 3-diamentional space", problems in cybrentics, 8, p.p.261-268, 1967.

[۱۰] Papakostas, A.; Tollis, I. G.; "Algorithms for incremental graph drawing in three dimensions" J. graph algorithm and appl. 3(4), p.p. 81-115, 1999.

[۱۱] Patrignani, M.; "Complexity Results for Three-Dimensional Orthogonal Graph Drawing" , In P. Healy and N.S. Nikolov ed., 13th International Symp. on graph drawing (GD 05) LNCS 3843, p.p. 368–379, 2005.

[۱۲] Rosenberg, A. L.; "Three dimensional VLSI", A case study , J. ACM 30(2), p.p. 397-416, 1983.

[۱۳] Wood, D. R.; "Minimizing the number of bends and volume in three dimensional orthogonal graph drawing with a diagonal vertex layout", Tech. Rep. CS-AAG-2000, Basser department of computer science, university of Sydney, Australia, 2000 .

[۱۴] Wood, D. R.; "On higher-dimensional graph drawing", In J. Harland, ed., Porc. Computing: the Australian theory symp. (CATS'97), Austral. Comput. Sci. Comm. 19 (2), p.p.3-8. 1997

[۱۵] Wood, D. R.; "Optimal three dimensional orthogonal graph drawing in the general position model", Theoretical Comput. Sci. 299, p.p. 151-178, 2003.

[۱۶] Wood, D. R.; " Lower bounds for the number of bends in three dimensional orthogonal graph drawings", In Marks, Joe, eds. , 8th International Symp. on graph drawing (GD 00) LNCS 1984, p.p. 259-271, 2001.

[۱۷] Wood, D. R.; " Lower bounds for the number of bends in three dimensional orthogonal graph drawings",JGAA, 7 (1) p.p.33-77, 2003.

[۱۸] Vijayan, G.; Wigderson, A.; " Rectilinear Graphs and Their Embeddings". SIAM J. Coput. 1(2), p.p. 355-372, 1985.

۷- زیر نویس

i flat
ii expanding
iii double expanding