حل عددی معادلات انتگرال-دیفرانسیل فردهلم-ولترای غیرخطی با استفاده از چندجمله ایهای متعامد لژاندر

یداله اردوخانی[i]؛ سمیه نعمتی فومشی[ii]

چکیده

هدف اصلی در این مقاله، بدست آوردن یک جواب تقریبی با دقت مناسب برای معادلات انتگرال-دیفرانسیل غیرخطی می‌باشد. بدین منظور بسط لژاندر قطع شده جواب معادله را در نظر گرفته، معادله و شرایط آن با استفاده از نقاط هم مکانی مناسب به دستگاهی از معادلات جبری غیرخطی تبدیل می‌شود که با حل این دستگاه، ضرایب مجهول بسط لژاندر حاصل می‌شوند. در پایان، کارآیی روش با نمونه هایی مورد تجزیه و تحلیل قرار می‌گیرد.

کلمات کلیدی

چندجمله ایهای لژاندر، معادله انتگرال- دیفرانسیل غیرخطی، گره های گاوس لژاندر

Numerical Solution of Nonlinear Integro-Differential Equations by Using Legendre Orthogonal Polynomials

Y. Ordokhani; S. Nemati Fomeshi

ABSTRACT

The main purpose in this article is obtaining an approximate solution with appropriate accuracy for nonlinear integro–differential equations. First, truncated Legendre expansion of the solution of equation is considered, then by using the collocation points, equation and its conditions transform into the system of nonlinear algebraic equations. By solving this system, Legendre expansion unknown coefficients are obtained. Finally, some examples are presented to illustrate the method.

KEYWORDS

Legendre polynomials, Nonlinear integro–differential equations, Gauss Legendre nodes

[i] بخش ریاضی دانشگاه الزهرا- تهران- ایران Email: ordokhani@alzahra.ac.ir

[ii] بخش ریاضی دانشگاه الزهرا- تهران- ایران Email: s.nemati@alzahra.ac.ir

۱- مقدمه

معادلات انتگرال-دیفرانسیل، اولین بار توسط ولترا در اوایل سال ۱۹۰۰ میلادی معرفی شد. ولترا در حال بررسی پدیده رشد و تأثیر وراثت بود که با این معادلات روبرو شد و نام یاد شده را برای آنها انتخاب نمود. این معادلات در بسیاری از علوم مانند علوم پایه و مهندسی (انتقال گرما، پدیده انتشار و پخش نوترون و غیره) پدیدار می‌شوند [۱]-[۳]. محققین بسیاری به بررسی حل عددی معادلات انتگرال و انتگرال-دیفرانسیل پرداخته اند. لینز، روش چند مرحله ای را برای حل معادلات انتگرال-دیفرانسیل ولترا ارایه نمود [۴]. در [۵] روش هم مکانی برای حل معادلات انتگرال و انتگرال-دیفرانسیل ولترا از نوع همرشتاین، در [۶] روش هم مکانی برای حل معادلات انتگرال غیرخطی همرشتاین، در [۷] روش طیفی چبیشف برای حل معادلات انتگرال ولترا-همرشتاین، در [۸] روش موجک گالرکین برای حل معادلات انتگرال-دیفرانسیل ولترای غیرخطی، در [۹] توابع هار گویا شده برای حل معادلات انتگرال ولترای همرشتاین، در [۱۰] توابع والش برای حل معادلات انتگرال-دیفرانسیل ولترای غیرخطی، در [۱۱] توابع موجک لژاندر را برای حل معادلات انتگرال فردهلم- ولترای غیرخطی به کار برده اند. در [۱۲] چندجمله ایهای چبیشف برای حل معادلات انتگرال-دیفرانسیل فردهلم- ولترای غیرخطی،

$$\sum_{k=0}^{m} P_k(x)y^{(k)}(x) = g(x) + \lambda_1 \int_{-1}^{1} \sum_{i=1}^{2} F_i(x,t)y^i(t)dt + \lambda_2 \int_{-1}^{x} \sum_{j=1}^{2} K_j(x,t)y^j(t)dt, \quad (۱)$$

با شرایط آمیخته،

$$\sum_{j=0}^{m-1} [a_{ij}y^{(j)}(-1) + b_{ij}y^{(j)}(1) + c_{ij}y^{(j)}(c)] = \mu_i, \quad (۲)$$

$$i = 0,1,\cdots,m-1, \ -1 \le c \le 1$$

که در آن $y(x)$ تـابع مجهـول، $g(x)$، $F_i(x,t)$، $K_j(x,t)$ و $P_k(x)$ توابـع معلـوم و λ_1، λ_2، μ_i، a_{ij}، b_{ij} و c_{ij} هـا ثابـت های حقیقی معلوم می باشند، استفاده شد و در [۱۳] توابـع هـار گویا شده برای حـل معـادلات فـردهلم-ولتـرا-همرشـتاین مـورد استفاده قرار گرفته است.

همچنین در دهه های اخیر، محققین مختلفی توابع متعامد را در حل مسایل سیستم های دینامیکی مورد توجه قرار داده اند. برای نمونه توابع والش [۱۴]، توابع بلاک-پالس [۱۵]، توابع هار [۱۶]، توابع هار گویا شده [۹، ۱۳]، چندجمله ایهای چبیشف [۱۷]، چندجمله ایهای لژاندر [۱۸]، چندجمله ایهای لاگور [۱۹]، توابع سینوس و کسینوس [۲۰] و توابع هارتلی [۲۱] را می‌توان نام برد.

در این مقاله چندجمله ایهای متعامد لژاندر،

$$L_0(x) = 1,$$
$$L_1(x) = x,$$
$$L_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1} x L_n(x) - \frac{n}{n+1} L_{n-1}(x), \ n = 1,2,\ldots.$$

که یک پایه برای فضای هیلبرت $L^2[-1,1]$ تشکیل می‌دهد را برای حل معادله انتگرال-دیفرانسیل فردهلم-ولترای غیرخطی

$$\sum_{n=0}^{m} P_n(x)y^{(n)}(x) = g(x) + \lambda_1 \int_{-1}^{1} F(x,t,y(t),y'(t),\ldots,y^{(p)}(t))dt + \lambda_2 \int_{-1}^{x} K(x,t,y(t),y'(t),\ldots,y^{(q)}(t))dt \quad (۳)$$

با شرایط آمیخته رابطه (۴) به کار برده شده است،

$$\sum_{n=0}^{s-1} \sum_{j=0}^{r} c_{ij}^{n} y^{(n)}(c_j) = \mu_i; \ i = 0, 1, \ldots, s-1, \ -1 \le c_j \le 1, \quad (۴)$$

کـه در آن $s = Max\{m,p,q\}$ و $y(x)$ تـابع مجهـول، $g(x)$، F، K و $P_n(x)$ برای $n = 0,1,\ldots,m$ توابـع معلـوم و λ_1، λ_2 و c_{ij}^n ها ثابت های حقیقی معلوم می‌باشند.

ویژگی اصلی روش، مبتنی بر بسط $y(x)$ و $y^{(n)}(x)$ بر حسب پایه معرفی شده با ضرایب مجهول و استفاده از صفرهای چندجمله ایهای لژاندر به عنوان نقاط هم مکانی مناسب می‌باشد که معادله (۱) به همراه شرایط آمیخته (۲) را تبدیل به یک سیستم از معادلات جبری غیر خطی می‌کند. دیده می‌شود که این روش کارا و از دقت مطلوبی برخوردار است.

در بخش دوم این مقاله به بررسی خواص چندجمله ایهای لژاندر و ایجاد روابط اساسی پرداخته شده است. در بخش سوم، روش حل معادله انتگرال-دیفرانسیل فردهلم-ولترای غیر خطی ارائه می شود و در بخش چهارم کارایی روش با مثال هایی مورد ارزیابی قرار می‌گیرد.

۲- خواص چندجمله ایهای لژاندر و ایجاد روابط اساسی

بسط لژاندر مشتق چندجمله ای لژاندر به صورت رابطه (۵) نوشته می‌شود:

$$L_r'(x)=\begin{cases}\sum_{i=0}^{r/2-1}(2r-4i-1)L_{r-2i-1}(x), & r=2k,\\ \sum_{i=0}^{[r/2]}(2r-4i-1)L_{r-2i-1}(x), & r=2k+1,\end{cases} \quad (۵)$$

اکنون فرض می‌گردد که $y(x)$ و $y^{(n)}(x)$ بر حسب چندجمله ایهای لژاندر قابل بسط باشند و

$$y(x)=\sum_{r=0}^{\infty}a_rL_r(x),\ y^{(n)}(x)=\sum_{r=0}^{\infty}a_r^{(n)}L_r(x) \quad (۶)$$

که در آن $a_r=\dfrac{2r+1}{2}\int_{-1}^{1}y(x)L_r(x)dx$ و $a_r^{(n)}$ ها مشابه a_r نوشته می‌شوند.

بسط های یاد شده در (۶) شامل تعداد نامتناهی جمله هستند، $y(x)$ و $y^{(n)}(x)$ را با $N+1$ جمله اول تقریب زده و بنابراین بدست می‌آید:

$$y(x)\simeq\sum_{r=0}^{N}a_rL_r(x)=A^TL(x), \quad (۷)$$

$$y^{(n)}(x)\simeq\sum_{r=0}^{N}a_r^{(n)}L_r(x)=A^{(n)^T}L(x) \quad (۸)$$

که در آن،

$$A=[a_0,a_1,\ldots,a_N]^T, \quad (۹)$$

$$A^{(n)}=[a_0^{(n)},a_1^{(n)},\ldots,a_N^{(n)}]^T, \quad (۱۰)$$

$$L(x)=[L_0(x),L_1(x),\ldots,L_N(x)]^T. \quad (۱۱)$$

با استفاده از (۵) حاصل خواهد شد:

$$L'(x)=M^*L(x), \quad (۱۲)$$

که در آن M^* ماتریس از مرتبه $(N+1)\times(N+1)$ می‌باشد. برای N فرد M^* به صورت

$$M^*=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&\cdots&0&0\\1&0&0&0&0&\cdots&0&0\\0&3&0&0&0&\cdots&0&0\\1&0&5&0&0&\cdots&0&0\\0&3&0&7&0&\cdots&0&0\\1&0&5&0&9&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\1&0&5&0&9&\cdots&2N-1&0\end{bmatrix}$$

و برای N زوج به شکل

$$M^*=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&\cdots&0&0\\1&0&0&0&0&\cdots&0&0\\0&3&0&0&0&\cdots&0&0\\1&0&5&0&0&\cdots&0&0\\0&3&0&7&0&\cdots&0&0\\1&0&5&0&9&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&3&0&7&0&\cdots&2N-1&0\end{bmatrix}$$

است.

با مشتق گیری از (۷) و بکار گیری (۱۲)، $y'(x)$ بر حسب بردار A به صورت رابطه (۱۳) نوشته می‌شود:

$$y'(x)=A^TM^*L(x). \quad (۱۳)$$

با ادامه روند و با استقراء $y^{(n)}(x)$ به صورت رابطه (۱۴) حاصل می‌شود:

$$y^{(n)}(x)=A^TM^{*n}L(x). \quad (۱۴)$$

بنابراین با استفاده از (۸) و (۱۴) بدست می‌آید:

$$A^{(n)}=M^nA,\ n=0,1,2,\cdots,s, \quad (۱۵)$$

که: $M=M^{*T}$.

۳- روش حل معادله انتگرال-دیفرانسیل فردهلم-ولترای غیر خطی

معادله (۳) به صورت رابطه (۱۶) در نظر گرفته می شود:

$$D(x)=g(x)+\lambda_1I(x)+\lambda_2J(x), \quad (۱۶)$$

که در آن $D(x)$ قسمت دیفرانسیلی، $I(x)$ قسمت انتگرال فردهلم و $J(x)$ قسمت انتگرال ولترا می‌باشد و

$$D(x)=\sum_{n=0}^{m}P_n(x)y^n(x), \quad (۱۷)$$

$$I(x)=\int_{-1}^{1}F(x,t,y(t),y'(t),\ldots,y^{(p)}(t))dt, \tag{۱۸}$$

$$J(x)=\int_{-1}^{x}K(x,t,y(t),y'(t),\ldots,y^{(q)}(t))dt. \tag{۱۹}$$

با استفاده از (۱۴) قسمت های دیفرانسیلی، انتگرالی فردهلم و انتگرالی ولترا به ترتیب به صورت رابطه (۲۰)، (۲۱) و (۲۲) تبدیل می‌شوند:

$$D(x)=\sum_{n=0}^{m}P_n(x)L^T(x)M^nA, \tag{۲۰}$$

$$I(x)=\int_{-1}^{1}H_1(x,t)dt, \tag{۲۱}$$

$$J(x)=\frac{x+1}{2}\int_{-1}^{1}H_2\left(x,\frac{x+1}{2}t+\frac{x-1}{2}\right)dt \tag{۲۲}$$

که در آن،

$$H_1(x,t)=F(x,t,L^T(t)A,L^T(t)MA,\ldots,L^T(t)M^pA),$$
$$H_2(x,t)=K(x,t,L^T(t)A,L^T(t)MA,\ldots,L^T(t)M^qA).$$

برای محاسبه انتگرال های (۲۱) و (۲۲) از روش انتگرال گیری گاوس-لژاندر استفاده می‌شود. بنابراین خواهد شد:

$$I(x)\simeq\sum_{k=0}^{N}\omega_kH_1(x,t_k), \tag{۲۳}$$

$$J(x)\simeq\frac{x+1}{2}\sum_{k=0}^{N}\omega_kH_2\left(x,\frac{x+1}{2}t_k+\frac{x-1}{2}\right), \tag{۲۴}$$

که در آن، t_k برای $k=0,1,\ldots,N$ صفرهای $L_{N+1}(x)$ می‌باشند و

$$\omega_k=\frac{-2}{(N+2)L'_{N+1}(t_k)L_{N+2}(t_k)},\quad k=0,1,\ldots,N$$

حال با استفاده از (۱۴)، شرایط آمیخته (۴) را می‌توان به صورت رابطه (۲۵) نوشت:

$$\sum_{n=0}^{s-1}\sum_{j=0}^{r}c_{ij}^nL^T(c_j)M^nA=\mu_i,\qquad i=0,1,\ldots,s-1,\ -1\le c_j\le 1. \tag{۲۵}$$

بنابراین بدست خواهد آمد:

$$U=\sum_{n=0}^{s-1}C_n\bar{L}M^nA=\mu, \tag{۲۶}$$

که در آن $\bar{L}$ ماتریسی از مرتبه $(r+1)\times(N+1)$، C_n ماتریسی از مرتبه $s\times(r+1)$ بوده و

$$\bar{L}=[L^T(c_0),L^T(c_1),\ldots,L^T(c_r)]^T,\ \mu=[\mu_0,\mu_1,\ldots,\mu_{s-1}]^T,$$

$$C_n=\begin{bmatrix} c_{00}^n & c_{01}^n & \cdots & c_{0r}^n\\ c_{10}^n & c_{11}^n & \cdots & c_{1r}^n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ c_{s-1,0}^n & c_{s-1,1}^n & \cdots & c_{s-1,r}^n\end{bmatrix}.$$

اکنون معادله ماتریسی متناظر با (۳) یعنی (۱۶) ساخته می‌شود. با جایگزینی (۲۰) در (۱۶) بدست می‌آید:

$$\sum_{n=0}^{m}P_n(x)L(x)^TM^nA=g(x)+\lambda_1I(x)+\lambda_2J(x), \tag{۲۷}$$

با جانشینی صفرهای $L_{N+1}(x)$ در (۲۷) خواهیم داشت

$$\sum_{n=0}^{m}P_n(x_k)L^T(x_k)M^nA=g(x_k)+\lambda_1I(x_k)+\lambda_2J(x_k),\qquad k=0,1,\ldots,N. \tag{۲۸}$$

معادله (۲۸) به صورت ماتریسی رابطه (۲۹) نوشته می‌شود:

$$W=\sum_{n=0}^{m}Q_nLM^nA-\lambda_1I-\lambda_2J=G, \tag{۲۹}$$

که در آن

$$Q_n=\mathrm{diag}(P_n(x_0),P_n(x_1),\ldots,P_n(x_N)),$$
$$I=[I(x_0),I(x_1),\ldots,I(x_N)]^T,$$
$$J=[J(x_0),J(x_1),\ldots,J(x_N)]^T,$$
$$L=[L^T(x_0),L^T(x_1),\ldots,L^T(x_N)]^T,$$

برای تعیین بردار ضرایب A، s معادله شرایط (۲۶) یعنی $U=\mu$ به جای s معادله (۲۹) یعنی $W=G$ جایگزین می‌شوند که از حل دستگاه معادلات جبری جدید، بردار A تعیین می‌شود.

۴- مثال های عددی

در این بخش روش ارائه شده در بخش (۳) با مثال های عددی و به کارگیری روش تکراری نیوتن و با استفاده از نرم افزار Mathematica مورد ارزیابی قرار می‌گیرد.

مثال ۴-۱: معادله انتگرال-دیفرانسیل فردهلم-ولترای غیرخطی (۳۰) با شرایط (۳۱) در نظر گرفته می‌شود:

$$y''(x)-xy'(x)+xy(x)=g(x)+\frac{1}{4}\int_{-1}^{1}xty'^2(t)dt+\frac{1}{2}\int_{-1}^{x}(x-2t)y^2(t)y''(t)dt \tag{۳۰}$$

$$y(0)=-1,\qquad y'(0)=0, \tag{۳۱}$$

که در آن،

$$g(x)=\frac{2}{15}x^6-\frac{1}{3}x^4+x^3-2x^2-\frac{23}{15}x+\frac{5}{3}.$$

جواب دقیق مساله $y(x)=x^2-1$ می‌باشد. با اعمال روش در بخش (۳) به ازای ۲ =N، ضرایب حاصل به صورت ضرایب a_0، a_1 و a_2 خواهند بود:

a_0= −۰/۶۶۶۶۶۶۶۶۶۶۶۶۶۶۶۵

a_1= −۲/۴۴۷۲۵۱۹۶۱۴۸۰۹۲۹۵×۱۰

a_2= ۰/۶۶۶۶۶۶۶۶۶۶۶۶۶۶۶۹

دیده می‌شود که حداکثر خطا ۳×۱۰ به توان ۱۶− است.

مثال ۴-۲: معادله انتگرال-دیفرانسیل ولترای غیر خطی (۳۲) با شرط اولیه (۳۳) در نظر گرفته می‌شود [۸]:

$$y'(x)=1+\int_0^x y(t)y'(t)dt \qquad (۳۲)$$

$$y(0)=0, \qquad (۳۳)$$

با اعمال روش در بخش (۳)، نتایج کامپیوتری برای N=۶ و نتایج حاصل از [۸] و [۱۰] همراه با جواب دقیق $y(x)=\sqrt{2}\tan(\frac{t}{\sqrt{2}})$ در جدول (۱) دیده می‌شود.

جدول (۱): نتایج کامپیوتری برای مثال ۴-۲

جواب دقیق	روش ارایه شده با N=۶	روش [۱۰] با m=۶۰	روش [۸] با J=۵	x
۰/۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰
۰/۰۶۲۵۴	۰/۰۶۲۵۴	۰/۰۶۲۵۴	۰/۰۶۲۶	۰/۰۶۲۵
۰/۱۲۵۳۳	۰/۱۲۵۳۳	۰/۱۲۵۳۳	۰/۱۲۵۳	۰/۱۲۵۰
۰/۱۸۸۶۱	۰/۱۸۸۶۱	۰/۱۸۸۶۱	۰/۱۸۸۶	۰/۱۸۷۵
۰/۲۵۲۶۴	۰/۲۵۲۶۴	۰/۲۵۲۶۵	۰/۲۵۲۷	۰/۲۵۰۰
۰/۳۱۷۷۰	۰/۳۱۷۷۰	۰/۳۱۷۷۰	۰/۳۱۷۷	۰/۳۱۲۵
۰/۳۸۴۰۴	۰/۳۸۴۰۴	۰/۳۸۴۰۶	۰/۳۸۴۱	۰/۳۷۵۰
۰/۴۵۲۰۱	۰/۴۵۲۰۱	۰/۴۵۲۰۳	۰/۴۵۲۰	۰/۴۳۷۵
۰/۵۲۱۹۳	۰/۵۲۱۹۳	۰/۵۲۱۹۴	۰/۵۲۲۰	۰/۵۰۰۰
۰/۵۹۴۱۷	۰/۵۹۴۱۷	۰/۵۹۴۲۰	۰/۵۹۴۲	۰/۵۶۲۵
۰/۶۶۹۱۴	۰/۶۶۹۱۴	۰/۶۶۹۱۷	۰/۶۶۹۲	۰/۶۲۵۰
۰/۷۴۷۳۲	۰/۷۴۷۳۲	۰/۷۴۷۳۵	۰/۷۴۷۳	۰/۶۸۷۵
۰/۸۲۹۲۴	۰/۸۲۹۲۴	۰/۸۲۹۲۷	۰/۸۲۹۳	۰/۷۵۰۰
۰/۹۱۵۵۲	۰/۹۱۵۵۲	۰/۹۱۵۵۶	۰/۹۱۵۶	۰/۸۱۲۵
۱/۰۰۶۸۹	۱/۰۰۶۸۹	۱/۰۰۶۹۳	۱/۰۰۶۹	۰/۸۷۵۰
۱/۱۰۴۱۹	۱/۱۰۴۱۹	۱/۱۰۴۲۳	۱/۱۰۴۲	۰/۹۳۷۵
۱/۲۰۸۴۶	۱/۲۰۸۴۷	۱/۲۰۸۵۰	۱/۲۰۸۵	۱/۰۰۰۰

مثال ۴-۳: معادله انتگرال-دیفرانسیل ولترای غیرخطی (۳۴) با شرط اولیه (۳۵) در نظر گرفته می‌شود [۸]:

$$y'(x)=-1+\int_0^x y^2(t)dt \qquad (۳۴)$$

$$y(0)=0, \qquad (۳۵)$$

با اعمال روش ارائه شده در بخش (۳)، نتایج کامپیوتری برای N=۶ و نتایج حاصل از [۸] و [۱۰] همراه با جواب دقیق در جدول (۲) دیده می‌شود.

جدول (۲): نتایج کامپیوتری برای مثال ۴-۳

جواب دقیق	روش ارایه شده با N=۶	روش [۱۰] با m=۶۰	روش [۸] با J=۵	x
۰/۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰
−۰/۰۶۲۵۰	−۰/۰۶۲۵۰	−۰/۰۶۲۵۰	−۰/۰۶۲۵	۰/۰۶۲۵
−۰/۱۲۴۹۸	−۰/۱۲۴۹۸	−۰/۱۲۴۹۸	−۰/۱۲۵۰	۰/۱۲۵۰
−۰/۱۸۷۴۰	−۰/۱۸۷۴۰	−۰/۱۸۷۴۰	−۰/۱۸۷۴	۰/۱۸۷۵
−۰/۲۴۹۶۷	−۰/۲۴۹۶۷	−۰/۲۴۹۶۷	−۰/۲۴۹۷	۰/۲۵۰۰
−۰/۳۱۱۷۱	−۰/۳۱۱۷۱	−۰/۳۱۱۷۱	−۰/۳۱۱۷	۰/۳۱۲۵
−۰/۳۷۳۳۶	−۰/۳۷۳۳۶	−۰/۳۷۳۳۶	−۰/۳۷۳۴	۰/۳۷۵۰
−۰/۴۳۴۴۶	−۰/۴۳۴۴۶	−۰/۴۳۴۴۶	−۰/۴۳۴۵	۰/۴۳۷۵
−۰/۴۹۴۸۲	−۰/۴۹۴۸۲	−۰/۴۹۴۸۲	−۰/۴۹۴۸	۰/۵۰۰۰
−۰/۵۵۴۲۳	−۰/۵۵۴۲۳	−۰/۵۵۴۲۳	−۰/۵۵۴۲	۰/۵۶۲۵
−۰/۶۱۲۴۳	−۰/۶۱۲۴۳	−۰/۶۱۲۴۳	−۰/۶۱۲۴	۰/۶۲۵۰
−۰/۶۶۹۱۷	−۰/۶۶۹۱۷	−۰/۶۶۹۱۶	−۰/۶۶۹۲	۰/۶۸۷۵
−۰/۷۲۴۱۵	−۰/۷۲۴۱۵	−۰/۷۲۴۱۵	−۰/۷۲۴۲	۰/۷۵۰۰
−۰/۷۷۷۰۹	−۰/۷۷۷۰۹	−۰/۷۷۷۰۹	−۰/۷۷۷۱	۰/۸۱۲۵
−۰/۸۲۷۶۷	−۰/۸۲۷۶۷	−۰/۸۲۷۶۶	−۰/۸۲۷۷	۰/۸۷۵۰
−۰/۸۷۵۵۷	−۰/۸۷۵۵۷	−۰/۸۷۵۵۷	−۰/۸۷۵۶	۰/۹۳۷۵
−۰/۹۲۰۴۸	−۰/۹۲۰۴۷	−۰/۹۲۰۴۷	−۰/۹۲۰۵	۱/۰۰۰۰

مثال ۴-۴: معادله انتگرال-دیفرانسیل ولترای غیرخطی (۳۶) با شرایط آمیخته (۳۷) در نظر گرفته می‌شود [۲۲]،

$$y^{(4)}(x)=1+\int_0^x e^{-t}y^2(t)dt, \quad x\in[0,1] \qquad (۳۶)$$

$$\begin{aligned} &y(0)=1,\ y'(0)=1,\\ &y(1)=e,\ y'(1)=e \end{aligned} \qquad (۳۷)$$

که دارای جواب دقیق $y(x)=e^x$ است.

با اعمال روش در بخش (۳)، نتایج کامپیوتری برای N=۱۰ به همراه نتایج روش [۲۲] در جدول (۳) دیده می‌شود.

جدول (۳): مقادیر خطای تقریب برای $N=۱۰$

روش [۸] با $n=۱۰$	روش ارایه شده با $N=۱۰$	x
۰/۰۰	۰/۰۰	۰/۰
$۶/۹۴\times۱۰^{-۹}$	$۱/۶۸\times۱۰^{-۱۰}$	۰/۲
$۱/۹۴\times۱۰^{-۸}$	$۴/۹۲\times۱۰^{-۱۰}$	۰/۴
$۲/۶۰\times۱۰^{-۸}$	$۶/۹۹\times۱۰^{-۱۰}$	۰/۶
$۱/۶۶\times۱۰^{-۸}$	$۵/۱۷\times۱۰^{-۱۰}$	۰/۸
۰/۰۰	۰/۰۰	۱/۰

۵- نتیجه گیری

خواص چندجمله ایهای لژاندر بهمراه روش انتگرال گیری گاوس لژاندر جواب (۳) با شرایط آمیخته (۴) را به جواب معادلات جبری تبدیل نمود. ماتریس M^* و لذا ماتریس M دارای صفرهای بسیار است، بنابراین روش پایدار و از دقت نسبی خوبی برخوردار می‌باشد و مثال های عددی، کارآیی روش را بیان نمود.

۶- مراجع

[۱] Volterra , V.; "Theory of Functionals and of Integro-Differential Equations", Dover, New York, 1959.

[۲] Bocher, M.; "Integral Equation", Cambridge University Press, London, 1974.

[۳] Baker, C.; "The Numerical Treatment of Integral Equations", Oxford University Press, London, 1997.

[۴] Linz, P.; "Linear Multi Step Methods for Volterra Integro-Differential Equations", J. A. C. H.,Vol. 16, p.p. 295-301, 1969.

[۵] Brunner , H.; "Implicity Linear Collocation Method for Nonlinear Volterra Equations", J. Appl. Num. Math., vol. 9, p.p. 235-247, 1982.

[۶] Kumar, S.; Solan, I. H.; "A new Collocation-Type Method for Hammerstein Integral Equations", J. Math. Comput., vol. 48, p.p. 123-129, 1987.

[۷] Elnagar, G. N.; Kazemi , M.; "Chebyshev Spectral Solution of Nonlinear Volterra- Hammerstein Integral Equations", J. Comput. Appl. Math., vol. 76, p.p. 147-158, 1996.

[۸] Avudainayagam, A.; Vani, C.; "Wavelet-Galerkin Method for Integro-Differential Equations", Comp. Elect. Eng., Vol. 32, p.p. 247-254, 2000.

[۹] Razzaghi, M.; Ordokhani, Y.; "Solution of Nonlinear Volterra-Hammerstein Integral Equations via Rationalized Haar Functions", Mathematical Problems in Engineering, Vol. 7, p.p. 205-218, 2001.

[۱۰] Sepehrian, B.; Razzaghi, M.; "Single-Term Walsh Series Method for the Volterra Integro-Differential Equations", Engineering Analysis with Boundary Elements, Vol. 28, p.p. 1315-1319, 2004.

[۱۱] Yousefi, S.; Razzaghi, M.; "Legendre Wavelets Method for the Nonlinear Volterra-Fredholm Integral equations", Math. Comput. Simul., vol. 70, p.p. 1-8, 2005.

[۱۲] Credic, H.; Akyuz, A.; "Chebyshev Polynomial Solution of Nonlinear Fredhom-Volterra Integro-Differential Equatios", J. Art. Sci., Vol. 5, p.p. 89-101, 2006.

[۱۳] Ordokhani, Y.; Razzaghi, M.; "Solution of Nonlinear Volterra-Fredholm-Hammerstein Integral Equations via a Collocation Method and Rationalized Haar Functions", Applied Mathematics Letters, vol. 21, p.p. 4-9, 2008.

[۱۴] Chen, C. F.; Hasio, C. H.; "A Walsh Series Direct Method for Solving Variational Problems", Journal of the Franklin Institute, vol. 300, p.p. 265-280, 1975.

[۱۵] Hwang, C.; Shih, Y. P.; "Optimal Control of Delay Systems via Block Pulse Functions", Journal of Optimization Theory and Applications, vol. 45, p.p. 101-112, 1985.

[۱۶] Ohkita, M.; Kobayashi, Y.; "An Application of Rationalized Haar Functions to Solution of Linear Partial Differential Equations", Math. Comput. Simul., vol. 30, p.p. 419-428, 1988.

[۱۷] Horng, I. R.; Chou, J. H.; "Shifted Chebyshev Direct Method for Solving Variational Problems", International Journal of Systems Science, vol. 16, p.p. 855-861, 1985.

[۱۸] Chang, R. Y.; Wang, M. L.; "Shifted Legendre Direct Method for Variational Problems Series", J. Optimization Theory Appl., vol. 39, p.p. 299-307, 1983.

[۱۹] Hwang, C.; Shih, Y. P.; "Laguerre Series Direct Method for Variational Problems", Journal of Optimization Theory and Applications, vol. 39, p.p. 143-149, 1983.

[۲۰] Razzaghi, M.; Razzaghi, M.; "Fourier Series Direct Method for Variational Problems", International Journal of Control, vol. 48, p.p. 887-895, 1988.

[۲۱] Ricot, J. J.; Acha, E.; "Analysis of Linear Time-Varying Systems via Hartley Series", International Journal of Systems Science, vol. 29, p.p. 541-549, 1998.

[۲۲] Ebadi, G.; Rahimi-Ardabili, M. Y.; Shahmorad, S.; "Numerical Solution of the Non-linear Volterra Iintegro- Differential Equations by the Tau Method", Appl. Math. Comput., Vol. 188, p.p. 1580-1586, 2007.