نمودار ورنوی دایره‌ها در فضای هذلولوی

زهرا نیلفروشان[i]؛ علی محدث[ii]؛ مرتضی میر محمد رضایی[iii]

چکیده

در این مقاله به محاسبه مکان رووس و معادله یالهای نمودار ورونوی هذلولوی مجموعه‌ای از دایره‌های هذلولوی پرداخته شده است. این دایره‌ها می‌توانند شعاعهای نابرابر داشته و نیز جدا از هم نباشند.

فضای هذلولوی حل مسأله، نیم صفحه بالایی پوآنکاره است که در این مقاله به عنوان نیم صفحه بالایی مختلط در نظر گرفته و با استفاده از تبدیلی موبیوس آن را به نیم صفحه بالایی مختلط دیگر تبدیل نموده تا مسأله یافتن رأس ورونوی بین سه دایره هذلولوی داده شده، به مسأله‌ای از نوع مکان یابی نقطه تبدیل شود. سرانجام یال ورونوی با استفاده از خم بزیر درجه دو محاسبه می‌شود. بدین ترتیب به طور موضعی برای هر سه دایره و در نتیجه برای کل دایره‌ها مسأله حل می‌شود.

کلمات کلیدی

مجموعه دایره‌های هذلولوی، نمودار ورونوی هذلولوی، یال ورونوی هذلولوی، رأس ورونوی هذلولوی، تبدیل موبیوس، خم بزیر درجه دو

Hyperbolic Voronoi Diagram of Circles

Z. Nilforoushan; A. Mohades; M. M. Rezaii

ABSTRACT

In this paper the positions of vertices and equations of edges of the hyperbolic Voronoi diagram of a hyperbolic circle set on the Poincaré upper half-plane is computed, where the radii of the hyperbolic circles are not necessary equal and disjoint.

The Poincaré upper half-plane is considered as a complex upper half-plane. By using a Möbius transformation this complex upper half-plane is transformed into another complex upper half-plane in order to formulate the problem of finding the position of the hyperbolic Voronoi vertex of three given hyperbolic circles as a point location problem. Finally the equations of edge are computed in a rational quadratic Bézier curve form.

KEYWORDS

Hyperbolic circle set, Hyperbolic Voronoi diagram, Hyperbolic Voronoi edge, Hyperbolic Voronoi vertex, Möbius transformation, Rational quadratic Bézier curve

۱- مقدمه

پس از تعریف اولیه نمودار ورونوی توسط ریاضیدان روسی G. Voronoï و اولین الگوریتم بیان شده توسط Shamos & Hoey [۱۳]، نمودار ورونوی به عنوان یکی از مفاهیم اساسی در بسیاری از شاخه‌های علوم و گرایشهای مهندسی از جمله هندسه محاسباتی شناخته شده است.

دو مرجع [۱۱] و [۳] به ترتیب توسط Okabe و Aurenhammer، مراجعی فراگیر شامل انواع نمودار ورونوی،

[i] دانشجوی دکتری دانشگاه صنعتی امیر کبیر، دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر. Email:nilforoushan@aut.ac.ir

[ii] استادیار دانشگاه صنعتی امیر کبیر، دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر. Email: mohades@aut.ac.ir

[iii] دانشیار دانشگاه صنعتی امیر کبیر، دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر. Email: mmreza@aut.ac.ir

مشخصات و الگوریتمهای پیاده سازی آنها هستند.

نمودارهای ورونوی اولیه برای مجموعه‌ای از نقاط به طور کامل مطالعه شده اند و هم اکنون تمام خواص آنها در حالت دو بعدی و بعدهای بالاتر شناخته شده است. اگرچه نمودارهای ورونوی دایره‌ها در فضای اقلیدسی دو بعدی مانند نمودارهای ورونوی نقاط گسترش پیدا نکرده اند اما تأثیر بسیار مهمی در کاربردهای گوناگون در علوم و مهندسی دارند ([۲]، [۵] و [۹]).

برای نمودارهای ورونوی اقلیدسی دایره‌ها در صفحه الگوریتمی سریع و کارا در [۶] و [۷] توسط Kim & Sugihara آورده شده که تا به حال سریعتر از الگوریتم آنها ارائه نشده است. این الگوریتم در بدترین حالت در زمان $O(n^2)$ اجرا می‌شود که در آن n تعداد دایره‌ها است. در این الگوریتم از نمودار ورونوی مراکز دایره‌ها به عنوان نمودار اولیه استفاده می‌شود. این نمودار، کاربردهای بسیاری از جمله در مسأله بسته بندی کابل دارد [۱۵].

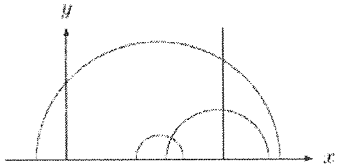
در کنار تمام خواص و کاربردهای نمودار ورونوی مجموعه‌ای از دایره‌ها در فضای اقلیدسی، در پاسخ به این سؤال طبیعی که آیا این نمودار در فضاهای دیگر قابل اجرا است، رویه‌های هذلولوی برای بررسی انتخاب گردید. رویه‌های هذلولوی دارای انحنای منفی هستند. با وجود این که در محیط اطراف، رویه‌های هذلولوی دیده نمی‌شوند، اما بیشتر در طبیعت وجود دارند (مانند برگهای کاهو و یا کرمهای پهن دریایی). یک ایده جالب در مورد صفحه هذلولوی توسط Thurston بیان شده است که با دور شدن از یک نقطه از صفحه هذلولوی، فضای اطراف به طور نمایی گسترش می‌یابد [۱۶]. هندسه هذلولوی کاربردهای فراوانی در ریاضیات، فیزیک و مهندسی دارد. برای نمونه در فیزیک، در پاسخ به پرسش "آیا سرعت توسعه جهان روند کاهشی دارد یا خیر؟" هندسه هذلولوی دقیقترین راهها را مشخص می‌نماید. مطالب جالب یاد شده و بسیاری از ویژگیهای دیگر، دلیل پژوهش حاضر می‌باشد. در [۱۰] نمودار ورونوی مجموعه ای از نقاط در مدل هذلولوی دیسک پوآنکاره و در زمان $O(n^2)$ پیاده سازی شده‌اند. در این مقاله به مطالعه نمودار ورونوی مجموعه‌ای از دایره‌های هذلولوی در مدل نیم صفحه بالایی پوآنکاره پرداخته شده است و همه جا از اندیس‌های H و E به ترتیب برای داده‌های هذلولوی و اقلیدسی استفاده گردید. همچنین نمادهای $d(\,,\,)$ و $d_H(\,,\,)$ به ترتیب بیانگر فاصله اقلیدسی و فاصله هذلولوی هستند.

۲- مدل نیم صفحه بالایی پوآنکاره

مدل نیم صفحه بالایی پوآنکاره، مدل دو بعدی از فضای هذلولوی است. این مدل با نماد $\mathbb{H}^2$ نمایش داده و بصورت $\mathbb{H}^2=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y>0\}$ تعریف می‌شود که یک خمینه ریمانی با متریک ریمانی زیر و انحنای ۱- است (برای توضیحات بیشتر [۱] و [۱۲] را ببینید).

$$ds^2=\frac{dx^2+dy^2}{y^2} \qquad (۱)$$

در این فضا، ژئودزیک‌ها دو نمونه اند که هر دو را می‌توان بصورت اشیایی اقلیدسی در $\mathbb{C}$ بیان نمود. یکی بصورت اشتراک $\mathbb{H}^2$ با یک خط اقلیدسی عمود بر محور x در $\mathbb{C}$ و دیگری بصورت اشتراک $\mathbb{H}^2$ با یک دایره اقلیدسی است که مرکزش روی محور x است (شکل ۱ و [۱] را ببینید).



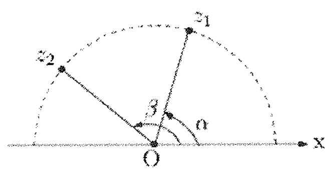
شکل ۱: ژئودزیکهای $\mathbb{H}^2$.

فرض کنید $z_1=(x_1,y_1)$ و $z_2=(x_2,y_2)$ دو نقطه در $\mathbb{H}^2$ باشند و $x_1\neq x_2$. فاصله هذلولوی بین z_1 و z_2 از رابطه (۲) بدست می‌آیند که در آن α و β به ترتیب زاویه‌های بین پاره‌خطهای Oz_1 و Oz_2 با محور x هستند و O مرکز ژئودزیک گذرنده از z_1 و z_2 است (شکل ۲ و [۱۴] را ببینید).

$$d_H(z_1,z_2)=\ln\left|\frac{\csc\beta-\cot\beta}{\csc\beta-\cot\alpha}\right| \qquad (۲)$$

اگر $x_1=x_2$ و $y_1\le y_2$، آنگاه فاصله هذلولوی بین z_1 و z_2 بصورت رابطه (۳) تعریف می‌شود:

$$d_H(z_1,z_2)=\ln\frac{y_2}{y_1} \qquad (۳)$$



شکل ۲: فاصله هذلولوی z_1 و z_2 در فرمول (۲).

لم۱- ***برای هر دو نقطه مجزای $p,q\in\mathbb{H}^2$ یک ژئودزیک منحصر بفرد گذرنده از آنها وجود دارد.***

اثبات : برای اثبات به [۸] مراجعه نمایید. □

تعریف۱- مکان هندسی تمام نقاط دارای فاصله هذلولوی

یکسان از یک نقطه ثابت در فضای هذلولوی، یک کره هذلولوی تشکیل می‌دهند که در فضای دو بعدی مانند $\mathbb{H}^2$، آن دایره هذلولوی نامیده می‌شود.

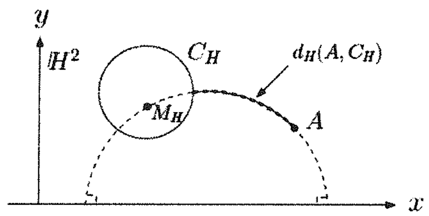
قضیه ۱ ارتباط بین دایره اقلیدسی و دایره هذلولوی را بیان می‌کند.

قضیه۱- هر دایره هذلولوی یک دایره اقلیدسی است و برعکس.

اثبات : برای اثبات به [۱۲] مراجعه نمایید. □

تنها اختلاف دو دایره اقلیدسی و هذلولوی در مکان مرکز آنهاست. فرض کنید C یک دایره به مرکز اقلیدسی $A=(x_E,y_E)$ وشعاع اقلیدسی r_E باشد. بنا به قضیه ۲ ۵ از [۱۴]، C یک دایره به مرکز هذلولوی $A_H=(x_H,y_H)$ و شعاع هذلولوی r_H است که در آن:

$$\begin{cases} x_E = x_H, \\ y_E = y_H \cosh r_H, \\ r_E = y_H \sinh r_H, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_H = x_E, \\ y_H = \sqrt{y_E^2 - r_E^2}, \\ r_H = 1/2 \ln \dfrac{y_E + r_E}{y_E - r_E}, \end{cases} \tag{۴}$$



شکل ۳: فاصله هذلولوی نقطه $A\in\mathbb{H}^2$ تا دایره هذلولوی C_H.

تعریف ۲: فرض کنید A و C_H به ترتیب یک نقطه و یک دایره هذلولوی دلخواه در $\mathbb{H}^2$ باشند و C_H به مرکز هذلولوی M_H و شعاع هذلولوی r_H باشد. C_H با $C_H(M_H,r_H)$ نمایش داده می‌شود. فاصله هذلولوی A تا دایره C_H در $\mathbb{H}^2$ بصورت رابطه (۵) تعریف می شود (شکل ۳ را ببینید):

$$d_H(A,C_H) = d_H(A,M_H) - r_H \tag{۵}$$

در قضیه زیر به اثبات این مطلب می‌پردازیم که فاصله تعریف شده در تعریف ۲ در واقع کوتاهترین فاصله نقطه A از دایره C_H است.

قضیه۲ - فرض کنید C_H یک دایره هذلولوی و A یک نقطه در $\mathbb{H}^2$ باشد. بنابراین:

$$d_H(A,C_H) = \min_{X\in\overline{C}} d_H(A,X) \tag{۶}$$

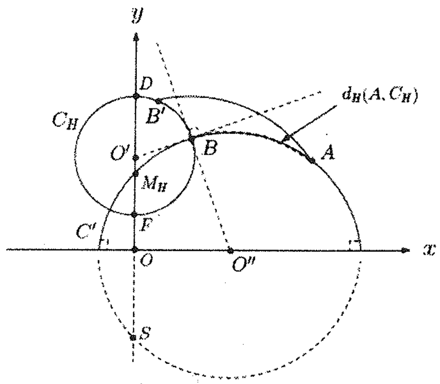
که در آن $\overline{C}=\{X\in\mathbb{H}^2 \mid d_H(X,M_H)\le r_H\}$.

اثبات : فرض کنید مرکز C_H روی محور y (شکل ۴ را ببینید) و ژئودزیک گذرنده از A و M_H نیم دایره C' به مرکز O'' باشد. B را نقطه اشتراک C' با C_H و D و F را نقاط اشتراک C_H با محور y بنامید. توجه کنید که D، F و M_H روی محور y واقع اند، بنابراین در مختصات دکارتی: $D=(0,a)$، $F=(0,b)$ و $M_H=(0,c)$ برای برخی a، b و c. بنابراین تنها کافیست ثابت گردد C' و C_H بر هم عمودند. چون M_H مرکز هذلولوی دایره C_H است، $d_H(M_H,F)=d_H(M_H,D)$ و بنا به رابطه (۳): $d_H(M_H,F)=\ln\frac{c}{b}$ و $d_H(M_H,D)=\ln\frac{a}{c}$.

بنابراین $c^2=ab$. به عبارت دیگر، قوت نقطه O' (مرکز اقلیدسی دایره C_H) نسبت به دایره C' برابر است با:

$$\overline{O'M_H}.\overline{O'S} = (\frac{a+b}{2}-c)(\frac{a+b}{2}+c) = \frac{(a-b)^2}{4} = \overline{O'B}^2$$

که S، دیگر نقطه تقاطع دایره C' با محور y است. بنابراین $\overline{O'O''}^2 - \overline{O''B}^2 = \overline{O'B}^2$. در نتیجه $BO'' \perp O'B$.



شکل ۴: کوتاهترین فاصله هذلولوی نقطه $A\in\mathbb{H}^2$ تا C_H.

چون BO'' و $O'B$ به ترتیب شعاع‌های دایره‌های C' و C_H هستند، C' و C_H بر هم عمودند. حال برای هر ژئودزیکی که A را به محیط دایره C_H در نقطه B' ($B'\neq B$) وصل می‌کند $\triangle ABB'$ یک مثلث قائم الزاویه است و در نتیجه $d_H(A,B')\ge d_H(A,B)$. به علاوه چون ژئودزیک کوتاهترین طول را دارد، اثبات کامل است. □

۳- نمودار ورونوی دایره‌های هذلولوی

فرض کنید $P=\{C_1,C_2,...,C_n\}$ مجموعه‌ای از دایره‌ها باشد و هر C_i دارای نمایش اقلیدسی و هذلولوی به صورت رابطه (۷) باشد:

$$C_i = (M_{H_i}, r_{H_i}) = (M_{E_i}, r_{E_i}), \quad i = 1,\dots n \qquad (۷)$$

به هر دایره C_i، یک ناحیه ورونوی هذلولوی $V(C_i)$ با رابطه (۸) متناظر می‌گردد:

$$V(C_i) = \{X \in \mathbb{H}^2 \mid d_H(X,C_i) \le d_H(X,C_j), \forall j \ne i\} \qquad (۸)$$

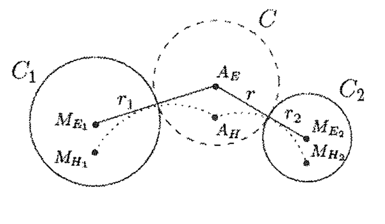
در اینصورت نمودار ورونوی در مدل نیم صفحه بالایی عبارت است از: $VD(P) = \{V(C_1), V(C_2), \dots, V(C_n)\}$. $V(P)$ در واقع نوعی افراز بندی از $\mathbb{H}^2$ است. رووس نواحی ورونوی هذلولوی، رووس ورونوی هذلولوی، و مرزهای نواحی ورونوی مرزهای ورونوی هذلولوی نام دارند.

۳-۱- نمودار ورونوی دو دایره هذلولوی

در این قسمت به بیان دو روش برای یافتن یال ورونوی هذلولوی بین دو دایره هذلولوی متفاوت پرداخته می‌شود.

۳-۱-۱- استفاده از قضیه ۱

فرض کنید $C_1 = (M_{H_1}, r_{H_1})$ و $C_2 = (M_{H_2}, r_{H_2})$ دو دایره هذلولوی باشند. بنا به قضیه ۱، C_1 و C_2 دو دایره اقلیدسی به ترتیب با مراکز M_{E_1} و M_{E_2} هستند (شکل ۵ را ببینید).



شکل ۵: وضعیت مکانی مرکز هذلولوی و اقلیدسی C در $\mathbb{H}^2$.

نقطه‌ای مانند A_E وجود دارد بطوریکه $d(A_E, C_1) = d(A_E, C_2)$. در واقع A_E مرکز اقلیدسی دایره‌ای مانند C است که مماس بر دو دایره C_1 و C_2 است. حال با استفاده از (۴)، C یک دایره هذلولوی به مرکز هذلولوی $A_H = (x_H, y_H)$ و شعاع هذلولوی r_H است. بنابراین A_H نقطه‌ای به فاصله هذلولوی یکسان از دو دایره هذلولوی C_1 و C_2 است. در نتیجه لم ۲ بیان می‌شود:

لم ۲- نقطه‌ای مانند A_H وجود دارد که دارای فاصله هذلولوی یکسانی از دو دایره هذلولوی داده شده C_1 و C_2 است.

بدلیل این که عمود منصف هذلولوی دو دایره هذلولوی C_1 و C_2، مکان هندسی تمام نقاطی است که به فاصله هذلولوی یکسانی از C_1 و C_2 هستند، نتیجه ۱ حاصل می‌گردد:

نتیجه ۱- مکان هندسی تمام A_Hها که یال ورونوی هذلولوی بین C_1 و C_2 را تشکیل می‌دهند، عمود منصف هذلولوی بین دو دایره C_1 و C_2 است.

یادآوری ۱- عمود منصف یاد شده در نتیجه ۱ می‌تواند بخشی از یک خط یا یک هذلولی در $\mathbb{H}^2$ باشد. این عمود منصف هنگامی بخشی از خط است که دو دایره دارای شعاع مساوی باشند، در غیر اینصورت حالت هذلولی رخ می‌دهد.

۳-۱-۲- استفاده از عمود منصف هذلولوی

استفاده از عمود منصف هذلولوی راهی دیگر برای یافتن تمام نقاطی است که به فاصله هذلولوی یکسان از دو دایره هذلولوی C_1 و C_2 هستند. به بیان دیگر:

$$\begin{aligned} & d_H(A_H, C_1) = d_H(A_H, C_2) \Leftrightarrow \\ & d_H(A_H, M_{H_1}) - r_{H_1} = d_H(A_H, M_{H_2}) - r_{H_2} \end{aligned} \qquad (۹)$$

فرض کنید $A_H = (x,y)$، $M_{H_1} = (x_1, y_1)$ و $M_{H_2} = (x_2, y_2)$ و فرض کنید α_1، β_1، α_2 و β_2 به ترتیب زوایای بین محور x با O_1A_H، $O_1M_{H_1}$، $O_2M_{H_2}$ و O_2A_H باشد، دراینصورت:

$$\tan\beta_1 = \frac{2y_1(x-x_1)}{2x_1(x-x_1)-(y^2-y_1^2)-(x^2-x_1^2)} \qquad (۱۰)$$

$$\tan\beta_2 = \frac{2y(x-x_2)}{2x(x-x_2)-(y^2-y_2^2)-(x^2-x_2^2)} \qquad (۱۱)$$

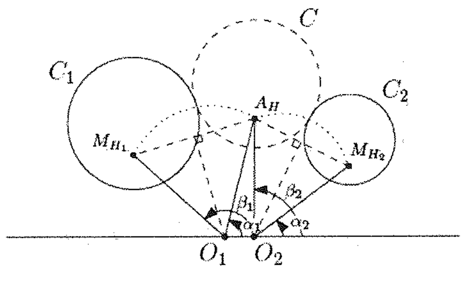
$$\tan\alpha_1 = \frac{2y(x-x_1)}{2x(x-x_1)-(y^2-y_1^2)-(x^2-x_1^2)} \qquad (۱۲)$$

$$\tan\alpha_2 = \frac{2y_2(x-x_2)}{2x_2(x-x_2)-(y^2-y_2^2)-(x^2-x_2^2)} \qquad (۱۳)$$

از آنجا که: $d_H(A_H, M_{H_2}) = \ln\dfrac{\csc\beta_2 - \cot\beta_2}{\csc\alpha_2 - \cot\alpha_2}$ و $d_H(A_H, M_{H_1}) = \ln\dfrac{\csc\beta_1 - \cot\beta_1}{\csc\alpha_1 - \cot\alpha_1}$، با جایگذاری روابط ۱۳-۱۰ در (۹) و با فرض $r_{H_1} = \ln\rho_1$ و $r_{H_2} = \ln\rho_2$ برای برخی ρ_1 و ρ_2، و با قرار دادن $s = \dfrac{\rho_2}{\rho_1}$ خواهد شد:

$$s\tan\frac{\beta_1}{2}\tan\frac{\alpha_2}{2} = \tan\frac{\alpha_1}{2}\tan\frac{\beta_2}{2} \qquad (۱۴)$$

و این مکان هندسی نقاط مشخص شده در شکل ۶ است.



شکل ۶: مکان هندسی نقاطی که به فاصله هذلولوی یکسان از دو دایره در $\mathbb{H}^2$ هستند.

قضیه۳- *فرض کنید $\gamma(t)$ یال ورونوی بین دو دایره*

هذلولوی $C_1(M_{H_1}, r_{H_1})$ و $C_2(M_{H_2}, r_{H_2})$ باشد و همانطور که در شکل (a) ۷ نمایش داده شده، $r_{H_2} < r_{H_1}$. در اینصورت برای هر نقطه $A_H(x(t), y(t))$ روی $\gamma(t)$، مماس رسم شده از آن نقطه نیمساز زاویه $\angle M_{H_1}A_H M_{H_2}$ است.

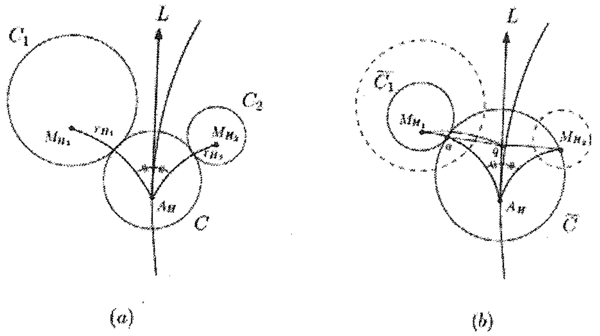
اثبات : فرض کنید $C_1 = (M_{H_1}, r_{H_1})$ و $C_2 = (M_{H_2}, r_{H_2})$ دو دایره هذلولوی باشند بطوریکه $r_{H_2} < r_{H_1}$ (شکل (a) ۷). فرض کنید A_H نقطه‌ای دلخواه از عمود منصف هذلولوی دو دایره و L نیمساز زاویه $\angle M_{H_1}A_H M_{H_2}$ باشد. همچنین فرض کنید $\widetilde{C_1}$ و $\widetilde{C_2}$ به ترتیب همان دایره‌های C_1 و C_2 باشند که از شعاع‌هایشان مقدار $r = r_{H_1} - r_{H_2} > ۰$ کم شده است (شکل (b) ۷). در اینصورت $\widetilde{C_2}$ به نقطه M_{H_2} تبدیل می‌شود و رابطه (۱۵) بدست می‌آید:

$$d_H(A_H, M_{H_1}) - d_H(A_H, M_{H_2}) = r \qquad (۱۵)$$

فرض کنید q نقطه ای دلخواه روی خط L باشد و $q \neq A_H$. چون $d_H(q,a) + d_H(M_{H_1}, a) > d_H(q, M_{H_1})$ و $d_H(q, M_{H_2}) = d_H(q,a)$، رابطه (۱۶) بدست می‌آید:

$$d_H(q, M_{H_1}) - d_H(q, M_{H_2}) < r \qquad (۱۶)$$

زیرا q نمی‌تواند روی عمود منصف هذلولوی واقع باشد و خط L نبایستی مماس بر عمود منصف در نقطه A_H باشد. □



شکل ۷: شکل قضیه ۳.

نتیجه۲- فرض کنید شرایط و نمادهای قضیه ۳ برقرار باشد. در اینصورت خط مماس L نیمساز زاویه $\angle O_1 A_H O_2$ است.

اثبات : بدیهی است که t_1 و t_2 خطوط مماس بر کمان‌های $A_H M_{H_1}$ و $A_H M_{H_2}$ در نقطه A_H شرایط گفته شده را برآورده می‌کنند و $O_1 A_H \perp t_1$ و $O_2 A_H \perp t_2$. به این ترتیب حکم بدست می‌آید (شکل ۸ را ببینید). □

نتیجه۳- با استفاده از نمادهای قضیه ۱ و نتیجه ۱، فرض کنید $A_H = (x(t), y(t))$ نقطه‌ای دلخواه از یال ورونوی $\gamma(t)$ باشد. آنگاه:

$$\frac{y'}{x'} = \tan(\frac{\alpha_1 + \beta_2}{2}) \qquad (۱۷)$$

اثبات : براحتی می‌توان بررسی کرد که

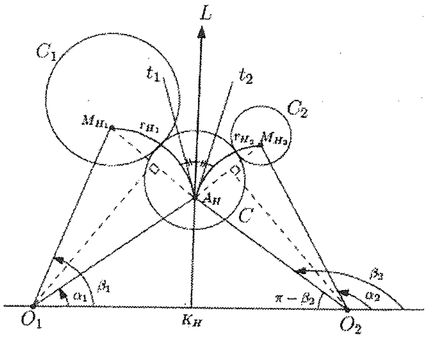
$$\angle O_1 A_H O_2 = \pi - (\pi - \beta_2 + \alpha_1) = \beta_2 - \alpha_1$$

(شکل ۸) و بنابراین $\angle K_H A_H O_2 = \frac{\beta_2 - \alpha_1}{2}$. در نتیجه

$$\angle O_2 K_H A_H = \pi - (\pi - \beta_2 + \frac{\beta_2 - \alpha_1}{2}) = \frac{\beta_2 + \alpha_1}{2}$$

که در آن K_H نقطه تقاطع خط L با محور x است. لذا

$$\frac{y'}{x'} = \tan(\angle O_2 K_H A_H) = \tan(\frac{\alpha_1 + \beta_2}{2}). \ □$$



شکل ۸: شکل مربوط به نتیجه ۲.

یادآوری ۲- از بین چهار زاویه α_1، β_1، α_2 و β_2 دو تای آنها مستقل و دو تای دیگر وابسته به آن دو هستند. برای نمونه با استفاده از α_2 و β_2 داده شده می‌توان α_1 و β_1 را بدست آورد. زیرا با معلوم بودن α_2 و β_2 نقطه A_H بدست می‌آید و با فرض اینکه عمود منصف $A_H M_{H_1}$ محور x را در نقطه O_1 قطع کند α_1 و β_1 بدست می‌آیند. بنابراین $\alpha_1 = \alpha_1(\alpha_2, \beta_2)$ و $\beta_1 = \beta_1(\alpha_2, \beta_2)$.

یادآوری ۳- بنا به روابط ۱۳-۱۰، x' و y' بر حسب α_1، β_1، α_1' و β_1' بدست می‌آیند:

$$\begin{cases} x' = x'(\alpha_1, \beta_1, \alpha_1', \beta_1') \\ y' = y'(\alpha_1, \beta_1, \alpha_1', \beta_1') \end{cases}$$

توجه شود اگر نقطه $A_H = (x(t), y(t))$ روی یال‌های ورونوی تغییر نماید، آنگاه α_1، β_1، α_2 و β_2 توابعی از t خواهند بود.

یادآوری ۴- با مشتق گیری از (۱۴) بر حسب t، معادله ۱۸ بدست می‌آید:

$$\alpha_1' \tan\beta_2 + \beta_2' \tan\alpha_1 = s\alpha_2' \tan\beta_1 + s\beta_1' \tan\alpha_2 \qquad (۱۸)$$

بنا به نتیجه ۳،

$$\frac{y'}{x'}=\tan\left(\frac{\alpha_1+\beta_2}{2}\right)=\frac{\tan\frac{\beta_2}{2}+\tan\frac{\alpha_1}{2}}{1-\tan\frac{\beta_2}{2}\tan\frac{\alpha_1}{2}}$$

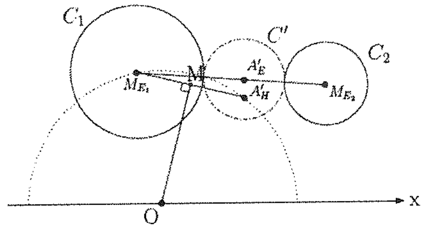
و در نتیجه رابطه (۱۹) بدست خواهد آمد:

$$y'-y'\tan\frac{\beta_2}{2}\tan\frac{\alpha_1}{2}=x'\tan\frac{\beta_2}{2}+x'\tan\frac{\alpha_1}{2} \qquad (۱۹)$$

حال با جایگزینی α_1، α_1'، β_1، β_1'، β_2 و β_2' برحسب x، y، x' و y' در (۱۸) و(۱۹) دستگاه معادلاتی بصورت رابطه (۲۰) بدست می‌آید:

$$\begin{cases}\varphi(x,y,x',y')=0\\ \psi(x,y,x',y')=0\end{cases} \qquad (۲۰)$$

برای بدست آوردن شرایط اولیه دستگاه معادلات (۲۰)، نقطه A_E' واقع بر خط $M_{E_1}M_{E_2}$ (به فاصله اقلیدسی یکسان از C_1 و C_2) را در نظر گرفته و A_H' نقطه هذلولوی متناظر با A_E' بدست آورده می‌شود (A_H' مرکز هذلولوی دایره C' است). نقطه A_H' روی نیم دایره‌ای به مرکز O و شعاع OM_{E_1} است. برای بدست آوردن این نیم دایره تنها لازم است میانه اقلیدسی پاره خط $M_{E_1}A_H'$ را پیدا نموده (نقطه M)، سپس با رسم عمود منصف $M_{E_1}A_H'$ از نقطه M و پیدا کردن نقطه تقاطع آن با محور x، نقطه O مورد نظر بدست می‌آید (شکل ۹ را ببینید).



شکل ۹: یافتن شرایط اولیه دستگاه معادلات (۲۰).

به دلیل معلوم بودن $x(0)=x_0$ و $y'(0)=y_0$، دستگاه معادلات (۱۳) با شرایط اولیه $\begin{cases}x'(0)=x_0'\\ y'(0)=y_0'\end{cases}$ و $\begin{cases}x(0)=x_0\\ y(0)=y_0\end{cases}$ به طور یکتا دارای جواب است که همان یال ورونوی بین C_1 و C_2 است.

۳-۲- نمودار ورونوی سه و یا بیشتر دایره هذلولوی

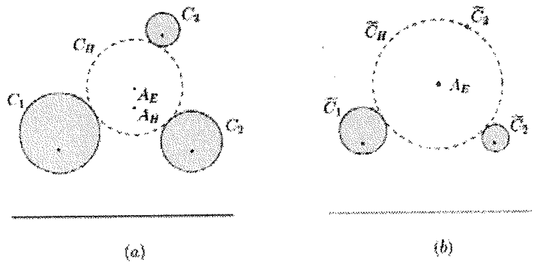
در حالت سه و یا بیشتر دایره هذلولوی، به غیر از یال ورونوی، رأس ورونوی نیز پدیدار می‌شود. در این قسمت به طور موضعی برای هر سه دایره هذلولوی رأس ورونوی را محاسبه نموده و پس از آن یال‌های ورونوی محاسبه می‌گردند. مطالب عنوان شده تعمیمی از روش استفاده شده در مرجع [۷] هستند. قبل از پرداختن به مسأله، لازم است با تعریف تبدیل موبیوس که در ادامه از آن استفاده می‌شود آشنا شد.

تعریف ۳: تبدیل موبیوس تابعی مانند $M:\hat{\mathbb{C}}\to\hat{\mathbb{C}}$ با ضابطه $M(z)=\frac{az+b}{cz+d}$ است که در آن $a,b,c,d\in\mathbb{C}$ و $ad-bc\neq 0$ و $\hat{\mathbb{C}}=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$.

ثابت می‌شود که تبدیل موبیوس M، تبدیلی همدیس است (اندازه زوایا را حفظ می‌کند) و نقطه $z=-\frac{d}{c}$ را به بینهایت می‌فرستد که این مطلب در ادامه این مقاله به آسان شدن مسأله کمک می‌کند.

۳-۲-۱- رووس ورونوی

برای هر سه دایره هذلولوی دلخواه C_1، C_2 و C_3، رأس ورونوی ما بین آنها مرکز هذلولوی دایره هذلولویی است که بر سه دایره C_1، C_2 و C_3 مماس خارجی است (شکل ۱۰(a) را ببینید). این دایره را با C_H و مرکزش با A_H نمایش داده می‌شود.

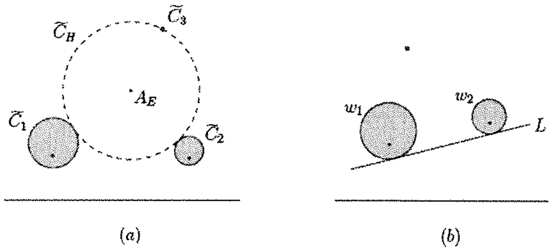


شکل ۱۰: تغییر اندازه دایره مماسی.

بنا به قضیه ۱، C_H یک دایره اقلیدسی است و اگر C_1، C_2 و C_3 نیز اقلیدسی در نظر گرفته شوند، C_H یک دایره اقلیدسی به مرکز A_E است که بر سه دایره اقلیدسی C_1، C_2 و C_3 مماس خارجی است. پس با استفاده از روش زیر A_E بدست آورده می‌شود:

فرض کنید C_3 دایره‌ایست که کوچکترین شعاع را در بین شعاع‌های C_1، C_2 و C_3 دارد و هر دایره C_i به مرکز $z_i=(x_i,y_i)$ و شعاع $r_i\geq 0$ بصورت $C_i=(z_i,r_i)$ نمایش داده شود. r_3 را از r_i کم نموده و دایره‌های حاصل را با $\widetilde{C_i}$ نمایش دهید ($\widetilde{C_i}=(z_i,r_i-r_3)$). در نتیجه $\widetilde{C_3}$ به نقطه z_3 تبدیل می‌شود (شکل ۱۰(b) را ببینید). بنابراین، با یافتن دایره $\widetilde{C_H}$ (دایره گذرنده از $z_3=\widetilde{C_3}$ و مماس بر دو دایره $\widetilde{C_1}$ و $\widetilde{C_2}$) و سپس با کسر r_3 از شعاع $\widetilde{C_H}$ براحتی دایره C_H که مماس بر سه دایره C_1، C_2 و C_3 است بدست می‌آید. البته با توجه به اینکه چهار حالت برای مماس نمودن دایره‌ای به سه دایره C_1، C_2 و C_3 وجود دارد، تنها حالت مطرح شده در شکل

۱۰ در نظر گرفته می‌شود. حال از تبدیل موبیوس $W(z)=\frac{1}{z-z_3}$ استفاده می‌شود. با این تبدیل، $\widetilde{C_1}$ و $\widetilde{C_2}$ واقع در صفحه Z_H، به دایره های W_1 و W_2 در صفحه W_H تبدیل می‌گردند (شکل ۱۱ را ببینید). همچنین به دلیل همدیس بودن تبدیل $W(z)$ و گذشتن $\widetilde{C_H}$ از نقطه z_3، دایره $\widetilde{C_H}$ تبدیل به خط L، خط مماس بر دو دایره W_1 و W_2 می‌گردد. زیرا تبدیل $W(z)$ نقطه z_3 را به بینهایت می‌فرستد.



شکل ۱۱: اثر تبدیل موبیوس $W(z)=\frac{1}{z-z_3}$ بر شکل (a)

توجه شود نقاط واقع در بینهایت و نقاط خارج از دایره $\widetilde{C_H}$ واقع در صفحه Z_H، هر دو خارج دایره مماسی $\widetilde{C_H}$ قرار دارند. بنابراین نقاطی از صفحه W_H که تصویر نقاط خارج از $\widetilde{C_H}$ تحت تبدیل $W(z)$ هستند و نیز مبدأ O (از صفحه W_H) بایستی در یک طرف خط L قرار داشته باشند. در واقع، تمام نقاط تصویری از جمله نقطه O در یک طرف خط L قرار دارند.

دیده شد که تحت تبدیل $W(z)$ دایره‌های $\widetilde{C_i}=(z_i,r_i-r_3)$ به دایره‌های رابطه (۲۱):

$$W_i=\{(\frac{x_i-x_3}{p_i},-\frac{y_i-y_3}{p_i}),\frac{r_i-r_3}{p_i}\} \qquad (۲۱)$$

تبدیل می‌شوند که در آن

$$.\, p_i=(x_i-x_3)^2+(y_i-y_3)^2-(r_i-r_3)^2$$

برای دایره‌های W_1 و W_2 در صفحه W_H، حداکثر چهار خط مجزا به طور همزمان به هر دو دایره مماس‌اند که دو تا از آنها مماس خارجی به W_1 و W_2 هستند. آنها L_1 و L_2 نامیده می‌شوند. از بین خطوط L_1 و L_2، خطی که هر دو دایره W_1 و W_2 و به همراه O (مبدأ مختصات صفحه W_H) در یک طرف آن قرار دارند جواب مسأله است زیرا با اثر معکوس تبدیل $W(z)$ بر آن دایره مماسی مورد نظر بدست می‌آید. توجه شود که یکی یا هر دو و یا هیچکدام از دو مماس خارجی ممکن است جواب صحیح باشند و این بستگی به شکل مجموعه دایره‌های اولیه (ورودی) دارد.

برا ی تشخیص خط L (از بین L_1 و L_2) که با اثر وارون تبدیل $W(z)$ بر آن به دایره مماسی مورد نظر در صفحه Z_H می‌رسد، از روش بیان شده در [۷] استفاده می‌گردد اکنون که مماس خارجی صحیح دایره W_1 و W_2 مشخص شد خواننده براحتی می‌تواند به محاسبه آن بپردازد (در اینجا به دلیل محدودیت فضا از محاسبه آن خودداری شده است).

با محاسبه، وارون تبدیل موبیوس $W(z)$ عبارتست از: $Z(w)=\frac{1}{w}+z_3$. این تبدیلی همدیس است که خطوط ناگذرنده از مبدأ صفحه W_H را به دایره‌هایی در صفحه Z_H می‌نگارد. فرض کنید $au+bv+۱=۰$ معادله خط مماس خارجی دو دایره W_1 و W_2 باشد. در اینصورت، وارون آن در صفحه Z_H دایره $\widetilde{C_H}$ گفته شده به مرکز $(-\frac{a}{2}+x_3,\frac{b}{2}+y_3)$ و شعاع $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$ است. بنابراین با نمادهای شکل ۱۰:

$A_E=(-\frac{a}{2}+x_3,\frac{b}{2}+y_3)$ (مرکز اقلیدسی $\widetilde{C_H}$)

$r_E=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$ (شعاع اقلیدسی $\widetilde{C_H}$)

و در پایان با استفاده از (۴) مرکز هذلولوی دایره C_H بدست می‌آید: $A_H=(-\frac{a}{2}+x_3,\sqrt{(\frac{b}{2}+y_3)^2-\frac{a^2+b^2}{4}})$

و A_H رأس ورونوی بین سه دایره هذلولوی C_1، C_2 و C_3 است.

توجه کنید که درستی روش یاد شده به دلیل اینست که با کم نمودن مقدار r_3 از شعاع سه دایره C_1، C_2 و C_3، به شعاع دایره C_H مقدار r_3 اضافه می‌شود و به این ترتیب مکان نقطه A_E و A_H بدون تغییر باقی می‌ماند. همچنین چون تبدیل $W(z)$ موبیوس است و چون $\widetilde{C_H}$ از نقطه z_3 می‌گذرد، تحت $W(z)$، $\widetilde{C_H}$ به خط L تبدیل می‌شود. به دلیل همدیس بودن $W(z)$، دایره‌های W_1 و W_2 به خط L مماس‌اند. $Z(w)$ نیز تبدیلی موبیوس است، پس تحت آن L به دایره $\widetilde{C_H}$ که مماس بر $\widetilde{C_1}$ و $\widetilde{C_2}$ است، نگاشته می‌شود و با اضافه کردن مقدار r_3 به شعاع‌های $\widetilde{C_1}$ و $\widetilde{C_2}$ و به نقطه z_3، سه دایره C_1، C_2 و C_3 اولیه بدست می‌آیند.

۳-۲-۲- یالهای ورونوی

محاسبه یالهای ورونوی مجموعه دایره‌های هذلولوی مشابه حالت اقلیدسی است. روش استفاده شده بر پایه استفاده از خمهای بزیر درجه دو است. در اینجا برای راحتی خواننده خلاصه‌ای از این روش آورده شده است و در [۷] به طور کامل روش محاسبه یال‌های ورونوی در حالت اقلیدسی بیان

شده است. یال‌های نمودار ورونوی در واقع بخشی ازعمود منصف‌های هذلولوی بین دایره‌های هذلولوی هستند وبه دلیل اینکه مقطع مخروطی‌اند، می‌توان آنها را با خم بِزیر درجه دو تقریب زد، که بصورت رابطه (۲۲) تعریف می‌شود:

$$\beta(t)=\frac{w_0(1-t)^2b_0+2w_1t(1-t)b_1+w_2t^2b_2}{w_0(1-t)^2+2w_1t(1-t)+w_2t^2}, \quad t\in[0,1] \qquad (۲۲)$$

b_0، b_1 و b_2 نقاط کنترل و w_0، w_1 و w_2 وزن‌های متناظرشان هستند. از طرفی هر مقطع مخروطی را در صورتی که دو نقطه b_0 و b_2 روی خم، و دو بردار مماس برخم در نقاط b_0 و b_2، و نقطه‌ای دیگر از خم مثل p معلوم باشد، می‌توان بصورت خم بِزیر درجه دو $\beta(t)$ نمایش داد. به دلیل اینکه $\beta(t)$ خم بِزیر درجه دو است، b_0 و b_2 باید اولین و سومین نقاط کنترل خم بِزیر باشند. دومین نقطه کنترل یعنی b_1 همان نقطه تقاطع خطوط مماس بر خم در b_0 و b_2 است ([۵] را ببینید). می‌توان فرض کرد که مقطع مخروطی به شکل استاندارد است، یعنی: $w_0 = w_2 = ۱$. در اینصورت w_1 توسط رابطه (۲۳) بدست می‌آید:

$$w_1=\frac{\tau_1}{2\sqrt{\tau_0\tau_2}} \qquad (۲۳)$$

که در آن τ_0، τ_1 و τ_2 مختصات مر کز ثقل نقطه p هستند.

در این مقاله وضعیت مکانی دو رأس از یک یال ورونوی هذلولوی نقش نقاط کنترل b_0 و b_2 را بازی می‌کنند. برای محاسبه نقطه کنترل دیگر یعنی b_1، نیازمند یافتن بردارهای مماس بر عمود منصف در b_0 و b_2 است. فرض کنید دو دایره C_1 و C_2 مانند شکل ۷(a) داده شده باشند. فرض کنید A_H نقطه‌ای دلخواه از عمود منصف هذلولوی آنها که کمانی از هذلولی با کانونهای M_{H_1} و M_{H_2} در نیم صفحه بالایی $\mathbb{H}^2$ است، باشد. فرض کنید خط L نیمساز زاویه $\angle M_{H_1}A_H M_{H_2}$ باشد. بنا به قضیه ۳، L خط مماس بر عمود منصف در نقطه A_H است. بنابراین، خط مماس بر عمود منصف در رأس ورونوی هذلولوی A_H با محاسبه نیمساز زاویه $\angle M_{H_1}A_H M_{H_2}$ بدست می‌آید.

تنها مطلب باقیمانده محاسبه نقطه p گفته شده است که عمود منصف از آن می گذرد. تنها لازم است آن را نقطه‌ای روی ژئودزیک گذرنده از مرکز دو دایره در نظر گرفت، که به فاصله هذلولوی یکسان از دو دایره است.

به این ترتیب با استفاده از روش یاد شده در ۳-۲-۱ و ۳-۲-۲ به طور موضعی برای هر سه دایره رأس ورونوی و برای هر دو رأس ورونوی، یال ورونوی متصل کننده آنها بدست می‌آید. با اجرای این روش برای هر سه دایره نزدیک به یکدیگر، نمودار ورونوی دایره‌های هذلولوی بدست می‌آید. همانطور که گفته شد، روش استفاده شده بر پایه روش [۷] است و چون زمان اجرای آن $O(n^2)$ برای n دایره است، در اینجا نیز به دلیل اینکه استفاده از کاستن مقدار r_3 از شعاع‌های C_1 و C_2، و استفاده از تبدیل موبیوس $W(z)$ و وارون عملیات یاد شده در زمان ثابت انجام می‌شوند، زمان اجرای روش $O(n^2)$ است.

٤- نتیجه

در این مقاله برای یک مجموعه از دایره‌های هذلولوی در $\mathbb{H}^2$، به طور موضعی به محاسبه رووس و یال‌های ورونوی اشاره شد. بطور مشابه می‌توان روش یاد شده را گسترش داد و به طور موضعی رووس، یال‌ها و وجه‌های ورونوی کره‌های هذلولوی در $\mathbb{H}^3$ (نیم فضای بالایی هذلولوی) را بدست آورد.

۵- مراجع

[۱] J. W. Anderson, "Hyperbolic Geometry", Springer Verlag, 1999.

[۲] B. Angelov, J-F. Sadoc, R. Jullien, A. Soter, J-P. Mornon and J. Chomilier, "Nonatomic solvent-driven Voronoi tesselation of proteins: an open tool to analyze protein folds", Proteins: Struc Funct Genet 49(4), pp. 446-456, 2002.

[۳] F. Aurenhammer, "Voronoi Diagrams: a Survey of a Fundamental Geometric Data Structure", ACM Computing Surveys 23(3), pp. 345-405, 1991.

[٤] G. Farin, "Curves and Surfaces for Computer-Aided Geometric Design: A Practical Guide", 4th edition, Academic Press, San Diego, 1996.

[٥] A. Goede, R. Preissner and C. Frömmel, "Voronoi cell: new method for allocation of space among atoms: elimination of avoidable errors in calculation of atomic volume and density", J Comput Chem, 18(9),pp. 1113-1123, 1997.

[٦] D-S. Kim, D. Kim and K. Sugihara, "Voronoi diagram of a circle set from Voronoi diagram of a point set: I. Topology", Computer Aided Geometric Design 18(6), pp. 541-562, 2001.

[۷] D-S. Kim, D. Kim and K. Sugihara, "Voronoi diagram of a circle set from Voronoi diagram of a point set: II. Geometry", Computer Aided Geometric Design 18(6), pp. 563-585, 2001.

[۸] G. Kumaresan and S. Santhanam, "An Expedition to Geometry", Hindustan Book Agency (India), 2005.

[۹] J. C. G. Montoro and J. L. F. Abascal, "The Voronoi polyhedra as tools for structure determination in simple disordered systems", J Phys Chem, 97(16),pp. 4211-4215, 1993.

[۱۰] Z. Nilforoushan and A. Mohades, "Hyperbolic Voronoi Diagram", ICCSA 2006, LNCS 3984, pp. 735-742, 2006.

[۱۱] A. Okabe, B. Boots, K. Sugihara, and S. N. Chiu, "Spatial Tessellations: Concepts and Applications of Voronoi Diagrams", Wiley Series in Probability and Statistics, 2000.

[۱۲] A. Ramsay and R. D. Richtmyer, "Introduction to Hyperbolic Geometry", Springer Verlag, 1995.

[۱۳] M. I. Shamos and D. Hoey,"Closest-Point problems", In Proceedings 16th IEEE Symposium on foundations of Computer Science, pp. 151-162, 1975.

[۱۴] S. Stahl, "The Poicaré Half-plane: A gate way to Modern Geometry", Jones and Bartlett Publisher, 1993.

[۱۵] K. Sugihara, M. Sawai, H. Sano, D-S. Kim and D. Kim, "Disk packing for the estimation of the size of a wire bundle", Jpn J Ind Appl Math 21(3), pp. 259-278, 2004.

[۱٦] W. P. Thurston, "Three dimensional Geometry and Topology", Princeton University Press, 1997.