# مدل‌سازی حرکت هواپیما در گردباد و مسیرهای بهینه زمانی

بهروز بیدآباد[i]؛ فاطمه آهنگری[ii]


## چکیده

پدیده گردباد یک فاجعه طبیعی است که می‌توان برای مطالعه آن از هواپیمای مخصوصی به نام "هواپیمای گردباد" و دستگاهی به نام "دراپ سوند" استفاده کرد. یافتن مسیرهای بهینه برای خروج این هواپیما پس از ورود به این پدیده در کوتاه‌ترین زمان ممکن، امری ضروری است. در این مقاله، مسأله حرکت هواپیما در گردباد را از دیدگاه هندسه فینسلر مورد بررسی قرار داده، یک مدل ریاضی از حرکت هواپیما در گردباد ارائه و مسیرهای بهینه زمانی پیدا می‌شود. در حقیقت نشان داده شد که هندسه حرکت هواپیما در گردباد از نوع راندرزی است. بنابراین مسیرهای بهینه زمانی برای مسأله حرکت هواپیما در گردباد، ژئودزیک های این متریک راندرزی خواهند بود. در پایان نیز نمونه ای از یک هواپیما که وارد گردباد می‌شود آورده و به کمک برنامه میپل[1] مسیرهای بهینه رسم می‌گردند.



## کلمات کلیدی

هندسه فینسلر، اندیکاتریکس، نرم مینکوفسکی، پدیده گردباد، دراپ سوند، ژئودزیک، متریک راندرزی


# *Modeling of Airplane Movement in Tornado and Time Optimal Trajectories*

B. Bidabad ; F. Ahangari


***ABSTRACT***

Tornado phenomenon is a natural disaster that can be studied by using a special plane, called Tornado plane and a weather reconnaissance device called dropsonde. Finding the optimal time trajectories for the airplane, in order to exit the tornado region as soon as possible is indispensable. In this paper, it is considered the problem of airplane movement in tornado at point of view the Finsler geometric and a mathematical model for the time optimal trajectories of airplane in tornado is presented. It has shown that the geometry of airplane movement in tornado is of Randers type. Therefore, the time optimal trajectories of this problem will be the geodesics of this Randers metric. Finally, an example of a plane entering into a tornado is shown and the graph of time optimal trajectories has been sketched.



***KEYWORDS***

Finsler Geometry, Indicatrix, Minkowski Norm, Tornado Phenomenon, Dropsonde, Geodesic, Randers Metric



[i] دانشیار دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه صنعتی امیرکبیر Email : bidabad@aut.ac.ir

[ii] دانشجوی کارشناسی ارشد دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه صنعتی امیرکبیر Email: fa.ahangari@aut.ac.ir

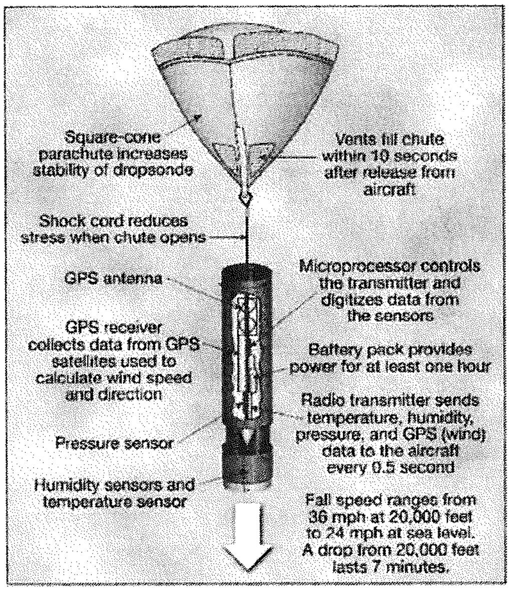
## ۱- مقدمه

گردباد، طوفان یا باد شدیدی است که به عنوان یک حلقه در حال چرخش معرفی شده است. این پدیده شگفت انگیز به صورت ناگهانی در هوا ظاهر می‌شود و بیشتر در مناطقی از آمریکای شمالی و خاور دور اتفاق می‌افتد. گردباد، زمانی ایجاد می‌شود که دو توده هوا، با دما و رطوبت گوناگون با یکدیگر برخورد کنند. هنگام شروع گردباد، هوا گرم و شرجی می‌شود و سپس به صورت ناگهانی، از یک ابر ستونی لوله ای در حال چرخش به سوی زمین حرکت می‌کند. به دلیل ناگهانی بودن این پدیده ، پیش بینی دقیق پیدایش آن امری پیچیده می‌باشد.

یکی از مدرن ترین روش ها که امروزه سازمان های مطرح هواشناسی در دنیا، برای پیش بینی این پدیده از آن کمک می‌گیرند، عکس برداری از ابرها و تعیین درجه حرارت ابرها در حین پیدایش گردباد است. اطلاعات حاصل شده از این طریق، تا کنون کمک شایانی به پیش بینی دقیق تر گردباد کرده است. بدین منظور از هواپیماهایی مخصوص و خلبانانی ورزیده به نام خلبانان گردباد[۲] استفاده می‌کنند که وظیفه آن ها، حرکت سریع در گردباد و پرتاب دستگاهی معروف به دراپ سوند[۳] به درون گردباد می‌باشد [۴] ، [۵] .

دراپ سوند یک ابزار هواشناسی است که توسط مرکز بین المللی تحقیقات جوی[۴]، طراحی شده است و عملکرد آن به این ترتیب است که در هواپیمای گردباد قرار گرفته و در ارتفاعی معین از سطح زمین، از هواپیما به درون گردباد پرتاب می شود. وظیفه دراپ سوند اندازه گیری فشار، دما، رطوبت، جهت و سرعت گردباد می‌باشد. اندازه گیری پارامترهای یاد شده از طریق حسگرهای درون این دستگاه انجام می‌شود. تعیین جهت و سرعت گردباد از طریق آنتن های جی.پی.اس[۵] (سیستم موقعیت یاب سراسری) صورت می‌گیرد و در هر لحظه، طول، عرض و ارتفاع جغرافیایی دراپ سوند از طریق گیرنده جی.پی.اس دستگاه محاسبه می‌گردد. اطلاعات دریافتی از حسگرها و آنتن جی.پی.اس به پردازشگر مرکزی رفته و تبدیل به کد می‌شوند، این کدها از طریق آنتن فرستنده به گیرنده مستقر در هواپیما ارسال شده و در آنجا توسط یک سیستم کامپیوتری پردازش می‌شوند. برای دقت در اندازه گیری، سرعت دراپ سوند توسط یک چتر متصل به آن کنترل می‌گردد تا به آرامی سقوط کند. شکل (۱) را ملاحظه کنید.

به دلیل اثر تخریبی که این پدیده بر هواپیما دارد، خلبان ناگزیر است مسیری را انتخاب کند که در کوتاه ترین زمان ممکن، از گردباد خارج شود. هدف مقاله این است که با بکارگیری هندسه فینسلر یک مدل ریاضی از حرکت هواپیما در گردباد ارائه داده و مسیرهای بهینه زمانی برای خروج هواپیما از گردباد پیدا شود.




**شکل (۱) : دراپ سوند و اجزای تشکیل دهنده آن [۴]**

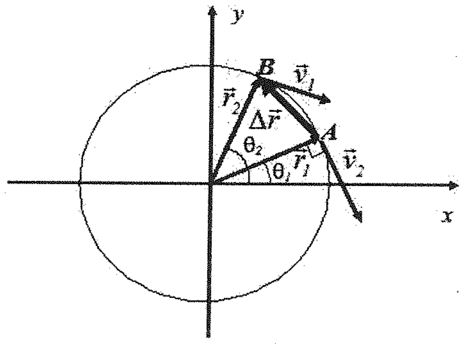
## ۲- توجیه فیزیکی پدیده گردباد

حرکت یک جسم در مسیر دایره ای، شکلی از حرکت در صفحه است. در واقع گردباد نیز که از چرخش باد به دور محوری مشخص ایجاد می‌شود، دارای حرکت دورانی است.

**سرعت زاویه ای**: ذره ای(در اینجا ذرات هوا) را در نظر بگیرید که روی مسیر دایره ای در جهت خلاف عقربه های ساعت در حال حرکت است. در اینجا منظور از ذره، جسم کوچکی است که ابعاد آن در مقایسه با شعاع دایره ناچیز باشد. مکان ذره را روی دایره در هر لحظه، می توان با زاویه $\theta$، نسبت به محور $\overrightarrow{OX}$ نمایش داد. شکل (۲) را ببینید. به $\theta$، مکان زاویه ای گفته می‌شود. بنابراین هنگامی که ذره در نقطه A قرار دارد مکان آن با $\theta_1$ و هنگامی که ذره در نقطه B قرار دارد مکان آن با $\theta_2$ نشان داده می شود. $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$ جابجای زاویه ای ذره نام دارد. سرعت زاویه ای متوسط ذره در حرکت دایره ای، به صورت نسبت جابجایی زاویه ای به زمان آن تعریف می‌شود. یعنی: $\overline{\omega} = \dfrac{\Delta\theta}{\Delta t}$. سرعت زاویه ای لحظه ای نیز به این صورت تعریف می‌شود: $\omega = \lim \dfrac{\Delta\theta}{\Delta t}$، وقتی که $\Delta t$ به صفر میل می‌کند. به عبارت دیگر $\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$. هرگاه سرعت زاویه ای ذره‌ای که بر روی مسیر دایره‌ای

حرکت می‌کند ثابت بماند، گفته می شود که ذره حرکت دایره ای یکنواخت دارد. زمانی که طول می‌کشد تا ذره روی مسیر دایره‌ای یک دور کامل را طی کند، دوره تناوب نامیده می‌شود. دوره تناوب را با $T$ نمایش می‌دهند و واحد آن ثانیه است.

**سرعت خطی در حرکت دایره ای:** موقعیت ذره را در صفحه می‌توان با بردار مکان آن مشخص کرد. اگر بردار مکان ذره در لحظه $t_1$، $\vec{r}_1$ و در لحظه ی $t_2$، $\vec{r}_2$ باشد، جابجایی ذره در بازه زمانی $\Delta t = t_2 - t_1$ برابر $\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ خواهد بود (شکل ۲). ذره در این بازه زمانی کمان $\Delta s$ را می‌پیماید. اگر بازه زمانی $\Delta t$، بسیار کوچک باشد کمان $\Delta s$، کوچک می‌شود و می توان طول کمان $\Delta s$ را با طول وتر آن یعنی $|\Delta \vec{r}|$ برابر گرفت.




**شکل (۲): حرکت ذره در مسیر دایره ای [۱]**

بزرگی سرعت لحظه ای نیز با رابطه (۱) تعریف می شود:

$$|\vec{v}| = \lim \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta t} \quad , \Delta t \to 0 \qquad (۱)$$

در حالت حدی $|\Delta\vec{r}| \approx \Delta s$ در نتیجـه : $|\vec{v}| = \lim \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$.

از طرفی : $\theta = \frac{s}{r}$ یا $s = r\theta$، کـه در آن منظـور از $r$، شـعاع دوران ذره می‌باشد. در نتیجه خواهد شـد : $v = \frac{ds}{dt} = r\frac{d\theta}{dt}$ و یا $v = r\omega$.

برای آسانی در سراسر این مقاله فرض گردید که سرعت زاویه‌ای لحظه‌ای یعنی $\omega$، برابر با یک باشد. بردار سرعت جسم، همواره مماس بر مسیر حرکت است. از این مطالب در مدل سازی حرکت هواپیما در گردباد استفاده خواهد شد.

## ۳- مفاهیم مقدماتی هندسه فینسلر

به منظور اندازه گیری طول خم هموار $C$ که توسط نگاشت $C = C(t)$ $(a \le t \le b)$ در روی منیفلد دیفرانسیل پذیر M پارامتری شده است، کافی است یک تابع اسکالر نامنفی هم چون $F(x, \frac{dx}{dt})$ روی هر فضای مماس $T_xM$، تعریف گردد. آنگاه طول $C$، به صورت رابطه (۲) تعریف می‌شود:

$$L_F(C) = \int_a^b F(C(t), \dot{C}(t))dt \qquad (۲)$$

$L_F(C)$، باید مستقل از پارامتری سازی باشد. لذا $F$، باید همگن مثبت از درجه ۱ باشد، یعنی به ازای هر $\lambda > 0$ رابطه $F(x, \lambda y) = \lambda F(x,y)$ برقرار باشد.

**تعریف:** فرض کنید $M$ یک منیفلد دیفرانسیل پذیر باشد و به ازای هر $x \in M$، $T_xM$، معرف فضای مماس $M$ در نقطه $x$ باشد. کلاف مماس M به صورت $TM := \bigcup_{x\in M} T_xM$، تعریف شده و هر عضو $TM$ توسط زوج $(x,y)$ که $x \in M$ و $y \in T_xM$، نمایش داده می‌شود.

یک ساختار فینسلر روی $M$، تابعی است حقیقی و نامنفی روی $TM$ که شرایط ۳-۱ برای آن درست است.

۱- منظم بودن: یعنی $F$ روی $TM \setminus 0$، از کلاس $C^\infty$ باشد.

۲- همگن مثبت از درجه یک باشد.

۳- تحدب قوی: یعنی ماتریس رابطه (۳) به نام ماتریس هسین، در تمام نقاط $TM \setminus 0$ مثبت معین باشد:

$$(g_{ij}) = (\frac{1}{2}\frac{\partial^2 F^2}{\partial y^i \partial y^j}) \qquad (۳)$$

طبق قضیه نامساوی اساسی [۶]، تابع ساختار فینسلر، یک نرم روی فضای $T_xM$ تعریف می‌کند که نرم مینکوفسکی نامیده می‌شود. دوتایی $(M,F)$ یک منیفلد فینسلر نام نهاده شده است. برای نمونه، ساده ترین نرم مینکوفسکی، همان نرم اقلیدسی است که به صورت $F(y) := \sqrt{y.y}$ تعریف می‌شود.

### ۳-۱- ایندیکاتریکس[۶] و یافتن متریک جدید با تغییر مکان آن

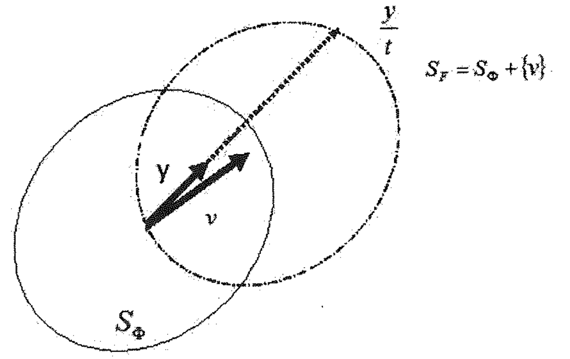
فرض کنید V، یک فضای برداری با ابعاد متناهی دلخواه بوده و F یک نرم مینکوفسکی روی V باشد. به ازای هر فضای مینکوفسکی $(V,F)$، رابطه (۴) تعریف می شود :

$$S_F := \{y \in V | F(y) = 1\} \qquad (۴)$$

$S_F$، یک ابر رویه بسته حول مبدأ است که با کره استاندارد

$S^{n-1} \subset R^n$، دیفئومورف می‌باشد. به $S_F$، اینـدیکاتریکس F گفته می‌شود.

اینک با تغییر مکان[7] اندیکاتریکس یک نرم مینکوفسکی، نرم‌های مینکوفسکی دیگری ساخته می‌شود. فرض شود $(V,\Phi)$، یک فضای مینکوفسکی بوده و $v \in V$ چنان باشد که $\Phi(-v) < 1$، آنگاه مجموعه تغییر مکان یافته[8] $S_\Phi + \{v\}$، شامل مبدأ فضای V می‌باشد.




شکل (۳): تغییر مکان اندیکاتریکس [۷]

اکنون می‌توان تابع $F : V \to [o,+\infty)$ را تعریف نمود. روش تعریف عبارت است از :

به ازای هر $y \in V \setminus \{0\}$، $F(y)$، عدد منحصر به فردی چون $t > 0$ می‌باشد، به گونه ای که :

$\frac{y}{t} \in S_\Phi + \{v\}$. به سادگی می‌توان دید که $F$، دارای خواص ویژه ای است. این خواص عبارتند از :

$$(a) : F(y) > 0, \quad \forall y \in V \setminus \{0\}$$
$$(b) : F(\lambda y) = \lambda F(y), \quad \forall \lambda > 0$$
$$(c) : S_F = S_\Phi + \{v\}$$

به ازای هر $y \in V \setminus \{0\}$، $F(y)$ را می‌توان از معادله (۵) بدست آورد [۷] :

$$F(y) = \Phi(y - F(y)v) \qquad (5)$$

در این صورت به $F$، نرم مینکوفسکی تولید شده توسط $(V,\Phi)$، گفته می‌شود.

### ۳-۲- مسأله ناوبری زرملو[9]

فرض کنید که جسمی در یک فضای متریک، مانند فضای اقلیدسی و تحت تأثیر یک نیروی داخلی و یک میدان نیروی خارجی در حال حرکت است. مسأله کوتاهترین زمان، مسأله تعیین یک خم از یک نقطه به نقطه دیگر در این فضاست، به گونه‌ای که جسم با حرکت در طول این خم، در کوتاهترین زمان ممکن به نقطه مورد نظر برسد. این مسأله در بعضی حالات خاص، توسط زرملو[10] مطالعه شده است، از این رو به مسأله زرملو معروف است [۸] ، [۹]. در اینجا مسأله زرملو در کلی‌ترین حالت مورد بحث قرار می گیرد. فرض شود که جسمی روی منیفلد فینسلری $(M,\Phi)$، توسط نیروی داخلی U با اندازه ثابت $\Phi(x,U_x) = k$، در حال حرکت باشد. اگر در ضمن حرکت، این جسم تحت تأثیر میدان نیروی خارجی V قرار گیرد طوری که : $\Phi(x,-V_x) < k$، آنگاه برآیند نیروها در نقطه $x$، به صورت $T_x := U_x + V_x$ می‌باشد. شرط $\Phi(x,-V_x) < k$، بدین معنی است که این عامل خارجی می‌تواند در جهت حرکت جسم یا در خلاف جهت حرکت جسم مورد نظر اثر کند. در نتیجه جسم این امکان را دارد که در هر جهت دلخواه حرکت کند. میدان نیروی خارجی $V$ از نوع نیروهای وابسته به سرعت می‌باشد. نمونه آشنای این دسته از نیروها، نیروی مقاومتی است که بر اجسام متحرک در محیط سیال، مثل هوا یا آب وارد می‌شود. این نیروی اصطکاکی، با افزایش سرعت زیاد می‌شود. برای نمونه هنگام حرکت کردن در استخر، می‌توان به این پدیده برخورد کرد. اگر شخص در استخر آرام حرکت کند، نیروی مقاومت کمتر احساس می‌شود و هر چه با سرعت بیشتری حرکت کند، نیروی مقاوم بیشتر خواهد شد [۱]. در نتیجه با توجه به اصطکاک(میدان نیروی خارجی $V$)، جسم روی M با سرعتی متناسب با برآیند نیروها یعنی $T$ حرکت می‌کند. برای سادگی فرض شود که $k = 1$ بوده و بردار سرعت در هر نقطه $x \in M$، برابر با $T_x$ باشد. فرض شود $\Phi$، یک نرم مینکوفسکی روی منیفلد $M$ باشد، به ازای $y \in T_xM$، منظور از $\Phi(x,y)$، مدت زمانی است که یک جسم با مقدار نیروی حرکت ثابت لازم دارد تا از ابتدا به انتهای بردار $y$ برود. فرض گردد $U_x \in T_xM$ یک بردار یکه باشد یعنی $\Phi(x,U_x) = 1$، اگر هر عامل خارجی در مسیر حرکت جسم به عنوان یک بردار $V_x \in T_xM$ در نظر گرفته شود با این فرض که $\Phi(x,V_x) < 1$، آنگاه در مدت یک واحد زمان به جای بردار $U_x$ بردار $T_x = U_x + V_x$ توسط جسم پیموده می‌شود. حال اگر دوباره اندازه بردار حاصل یعنی $T_x$ با نرم $\Phi$ اندازه گرفته شود، ممکن است به عدد ۱ نرسیده یعنی $(\Phi(x,T_x) \neq 1)$. این تغییر در اندازه بردار به عبارتی تغییر در هندسه حرکت است که به دلیل وجود عامل خارجی ایجاد شده است. در حالت اول، متریک استفاده شده یعنی $\Phi$ از نوع ریمانی است، اما در حالت دوم، همان طور که در ادامه اثبات می‌شود، متریک حاصل از نوع فینسلری است. حال با در نظر گرفتن عامل خارجی(بردار $V_x$) متری را معرفی کرده که

تحت آن اندازه بردار حاصل ( یعنی $T_x$) برابر با ۱ باشد و از روی آن متریک فینسلری مربوطه محاسبه می‌گردد. به ازای دو نقطه $p,q \in M$، فرض کنید C یک خم قطعه ای هموار $C^\infty$ دلخواه در $M$ باشد، چون $\Phi(x,U_x)=1$:

$$\Phi(x,T_x-V_x)=\Phi(x,U_x)=1 \qquad (۶)$$

از طرف دیگر، به ازای هر بردار $y\in T_xM\setminus\{0\}$، یک جواب یکتای $F=F(x,y)>0$، برای معادله (۷) به دست می‌آید:

$$\Phi(x,\frac{y}{F}-V_x)=1 \qquad (۷)$$

دیده می‌شود که به ازای هر $\lambda>0$ رابطه (۸) برقرار است :

$$1=\Phi(x,\frac{\lambda y}{\lambda F(x,y)}-V_x)=\Phi(x,\frac{\lambda y}{F(x,\lambda y)}-V_x) \qquad (۸)$$

با توجه به یکتایی $F$ : $F(x,\lambda y)=\lambda F(x,y)$. می‌توان نشان داد که تحدید $F$ به فضای مماس $M$ در نقطه $x$، یعنی $F_x:=F_{|T_xM}$، یک نرم مینکوفسکی روی $T_xM$ می‌باشد. (مراجعه شود به [۷] صفحه ۸) . می‌توان دید که نیروی برآیند $T_x$، دارای $F$ طول واحد می‌باشد. یعنی:

$$F(x,T_x)=1 \qquad (۹)$$

این برداشت، به لم زیر منجر می‌شود:

**لم** [۷] : اگر $(M,\Phi)$، یک منیفلد فینسلری و V یک میدان برداری روی M باشد، بطوریکه $\forall x\in M,\Phi(x,-V_x)<1$ و تابع $F:TM\to[0,\infty)$ توسط (۷) تعریف شود، آنگاه به ازای هر خم قطعه ای هموار $C$ در $M$، طول $C$ نسبت به $F$، مساوی زمان طی کردن طول خم توسط جسم مورد نظر خواهد بود. ■

یک اسپری[11] روی منیفلد $M$ عبارت است از یک میدان برداری سراسری $G$ روی $TM_0$ بطوریکه در دستگاه مختصات استاندارد $(x^i,y^i)$ روی $TM_0$ به صورت رابطه (۱۰) نوشته شود:

$$G:=y^i\frac{\partial}{\partial x^i}-2G^i(x,y)\frac{\partial}{\partial y^i} \qquad (۱۰)$$

که در آن $G^i$ها توابع همگن مثبت از درجه دو نسبت به $y$ می‌باشند. هرگاه $\hat{C}$ خم انتگرال اسپری $G$ باشد در این صورت $C:=\pi o\hat{C}$ و معادلات $\ddot{C}+2G^i(C,\dot{C})=0$ را برآورده می‌سازد. هرگاه $C$ یک منحنی روی $M$ و $\hat{C}$ خم انتگرال اسپری $G$ باشد، آنگاه $C$ **ژئودزیک**[12] $G$ نامیده می‌شود. اگر $(M,F)$ یک منیفلد فینسلری باشد، قرار داده می‌شود:

$$G^i(x,y):=\frac{1}{4}g^{il}(x,y)[2\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^k}-\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l}]y^jy^k \qquad (۱۱)$$

در اینصورت، اسپری ساخته شده از روی این توابع $G^i$ را اسپری وابسته به $F$ می‌نامند و به ژئودزیک های آن ژئودزیکهای $F$ گفته می‌شود. در این حالت هر ژئودزیک $C(t)$ دارای سرعت ثابت است، یعنی $F(C(t),\dot{C}(t))$ ثابت است.

## ۳-۳- بررسی هندسی مسأله زرملو

فرض کنید $(M,\Phi)$، یک منیفلد فینسلری باشد. اکنون رابطه (۱۲)، قرار داده می شود :

$$\Phi(x,v):=\|v\|=\sqrt{\langle v,v\rangle}=\sqrt{v.v} \qquad (۱۲)$$

فرض کنید جسمی برای نمونه (یک هواپیما) با سرعت واحد، از ابتدا تا انتهای بردار $v$ را طی کند. روشن است که زمان پیمودن طول بردار $v$، برابر با $\|v\|$ خواهد بود. فرض شود که میدان برداری $w$ روی $M$ چنان اثر کند که $\|w\|<1$ (مانند جریان باد) و $u$ ، بردار سرعت واحد جسم مورد نظر (هواپیما) باشد. آنگاه : $v=u+w$. در این صورت ایندیکاتریکس ریمانی $S_x$، با نگاشت $u\to u+w$، به یک دامنه محدب تغییر شکل می‌دهد. پیش از اینکه میدان برداری $w$ که $(\|w\|<1)$ در نظر گرفته شود (مانند بردار سرعت باد روی منیفلد $(M,\Phi)$)، کره مماس واحد در هر $T_xM$، شامل همه بردارهای مماس $u$ است به گونه ای که $\|u\|=1$. وقتی که میدان برداری $w$، ضمن حرکت جسم بر آن اثر می‌کند، در زمان واحد جسم مورد نظر به جای $u$، بردار برآیند یعنی $v=u+w$ را طی خواهد کرد. در نتیجه ایندیکاتریکس ریمانی، به یک دامنه محدب تغییر شکل می‌دهد. این مسأله است که وادار می‌سازد که تابع جدید $F$ روی کلاف مماس $TM$ طوری تعریف گردد که زمان طی کردن طول بردارهای مماس تحت شرایط وجود میدان برداری $w$ ارائه گردد. فرض کنید که $F$، تابع مورد نظر باشد، یعنی تابعی باشد که زمان حرکت را اندازه گیری می‌کند، آنگاه:

$$\begin{aligned}&\forall v\in T_xM,F(v)=1\\&\|u\|=1\Rightarrow\Phi(x,u)=\|u\|=\sqrt{u.u}=1\end{aligned} \qquad (۱۳)$$

لذا، (۵) و (۶) و (۷) نتیجه می‌دهند:

$$\Phi(x,\frac{v}{F}-w)=1 \Rightarrow \left\|\frac{v}{F}-w\right\|^2 = 1 \qquad (۱۴)$$

این عبارت را می‌توان به صورت رابطه (۱۵) نوشت :

$$\left\|\frac{v}{F}\right\|^2 - 2\frac{v}{F}.w - \|w\|^2 = 1 \qquad (۱۵)$$

پس از ضرب جملات به دست می‌آید :

$$F^2(1-\|w\|^2) + 2v.wF - \|v\|^2 = 0 \qquad (۱۶)$$

پس از حل معادله بالا، به دست می‌آید :

$$F = \frac{-\langle v,w\rangle}{1-\|w\|^2} + \frac{\sqrt{\langle v,w\rangle^2 + (1-\|w\|^2)\|v\|^2}}{1-\|w\|^2} \qquad (۱۷)$$

متریک به دست آمده از نوع راندرزی می‌باشد و مسیرهای مناسب در واقع ژئودزیک های متریک راندرزی اخیر خواهند بود.

## ٤- مدل سازی حرکت هواپیما در گردباد به کمک هندسه فینسلر

اکنون با شرایط حاضر می‌توان حرکت هواپیما را در گردباد بررسی نمود. فرض کنید هواپیمایی با سرعت ثابت واحد (در اینجا برای آسانی، سرعت هواپیما برابر با واحد در نظر گرفته شد) در حال حرکت باشد و در مسیر حرکت خود با گردبادی روبرو شود. اگر هواپیما بخواهد ضمن گذر از این گردباد، از نقطه ای به نقطه ی دیگر برود، انتخاب مسیری که ضمن عبور از آن هواپیما در کوتاه ترین زمان ممکن به نقطه مورد نظر برسد، بسیار مهم می باشد زیرا حتی لحظه ای تأخیر و درنگ، ممکن است خسارات جبران ناپذیری در پی داشته باشد. به همین علت انتخاب مسیر با کوتاه ترین زمان، یک امر ضروری است. همان طور که توضیح داده شد، پدیده گردباد یک حادثه طبیعی است. در واقع طوفان، یا باد شدیدی است که به عنوان یک حلقه در حال چرخش معرفی شده است و به صورت ناگهانی از یک ابر ستونی لوله ای شکل در حال چرخش به سوی زمین حرکت می‌کند. در مدل سازی ریاضی، منطقه وقوع گردباد را می‌توان همچون استوانه ای در نظر گرفت که ذرات هوا با یک سرعت مشخص حول محور قائم (محور Z )، در حال چرخش می‌باشند با توجه به توضیحات یاد شده، مسأله به صورت قضیه (۱) بیان می‌شود :

**قضیه (۱)** : فرض کنید که هواپیمایی با سرعت ثابت واحد در حال حرکت باشد و در مسیر حرکت خود، با گردبادی که سرعت آن با میدان برداری $w$ نشان داده می‌شود روبرو شود. اگر اندازه $w$ کوچکتر از واحد باشد، آنگاه مسیری که کوتاه ترین زمان لازم برای خارج شدن از گردباد را نتیجه می‌دهد، ژئودزیک های یک متریک راندرزی است.

**برهان** : ابتدا منطقه وقوع گردباد به شکل استوانه ای در نظر گرفته می‌شود که ذرات هوا به دور محور قائم در داخل این استوانه در حال چرخش می‌باشند و اگر نقاط داخل این استوانه با $WR$، معرفی شوند، آنگاه:

$$WR = \left\{(x_1,x_2,x_3) \in \Re^3 \middle| x_1^2 + x_2^2 < 1\right\} \qquad (۱۸)$$

از طرفی، گردباد را می توان به عنوان یک میدان برداری با شرط $\|w\| < 1$ در نظر گرفت که روی استوانه $WR$ عمل می‌کند. بنا بر تعریف، یک میدان برداری از کلاس $C^r$، عبارت است از نگاشت X از کلاس $C^r$ که به هر نقطه $P$ از $M$، بردار مماس $X_p$ را وابسته می‌کند [۳] . لذا بنا بر تعریف به ازای هر نقطه $p$ از استوانه $WR$ :

$w: WR \to T_pWR$ که $p \mapsto w_p$ . از طرفی به ازای هر $p \in WR$ با مختصات $P=(x_1,x_2,x_3)$، قرار داده می‌شود: $w_p = (-x_2,x_1,0)$ (فرض شود که گردباد پاد ساعتگرد باشد). حال فرض کنید که هواپیما بخواهد از نقطه $P=(x_1,x_2,x_3)$ به نقطه $Q=(y_1,y_2,y_3)$ برود، که در آن $P$ معرف مکان و $Q$، معرف جهت حرکت می‌باشد. در این صورت وجود بردار $w$ موجب می شود که هندسه حرکت هواپیما از اقلیدسی به فینسلری (روابط (۱۹) و (۲۰) ) تغییر کند. با جایگزینی $w=(-x_2,x_1,0)$ و $v=(y_1,y_2,y_3)$، در (۱۷) بدست می‌آید :

$$\langle v.w\rangle = (y_1,y_2,y_3).(-x_2,x_1,0) = -y_1x_2 + y_2x_1 \qquad (۱۹)$$

همچنین اندازه دو بردار $v$ و $w$ برابر است با :

$$\|v\|^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 \quad و \quad \|w\|^2 = x_1^2 + x_2^2$$

در نتیجه:

$$\widetilde{F} = \frac{-(-y_1x_2 + y_2x_1)}{1-x_1^2-x_2^2} + \frac{\sqrt{(-y_1x_2+y_2x_1)^2 + (1-x_1^2-x_2^2)(y_1^2+y_2^2+y_3^2)}}{1-x_1^2-x_2^2} \qquad (۲۰)$$

همان طور که ملاحظه می‌شود، متریک به دست آمده یک متریک از نوع راندرزی می‌باشد. با مشخص شدن متریک فضای مسأله می‌توان کوتاه ترین (تند ترین) مسیر را که همان ژئودزیک های متریک فضا هستند، به دست آورد. در نتیجه

مسیرهای مناسب حرکت هواپیما در گردباد از نقطه‌ای به نقطه دیگر، یعنی مسیرهای با کوتاه ترین زمان، ژئودزیکهای متریک راندرزی اخیر یعنی $\widetilde{F}$ خواهند بود.■

**قضیه (۲)** : معادله مسیر با کوتاه ترین زمان گذر هواپیما در گردباد با رابطه (۲۱ ) داده می‌شود:

$$E_i(r)=L_{ij}(x,y)\frac{dy^j}{d\tau}+\frac{\partial L_i}{\partial x^j}y^j-\frac{\partial L}{\partial x^i}=0 \qquad (۲۱)$$

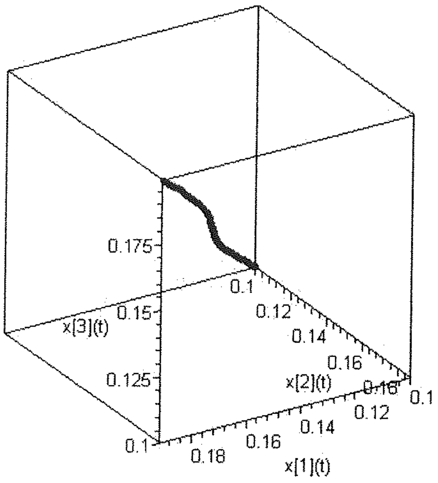
که در آن $L=\dfrac{\widetilde{F}^2}{2}$ و $L_i=\dfrac{\partial L}{\partial y^i}$ و $L_{ij}=\dfrac{\partial^2 L}{\partial y^i\partial y^j}$ و $\tau:=\int_0^t \widetilde{F}(x,y)dt$ است.

**اثبات:** به [۲] صفحه ۴۰ مراجعه شود . ■

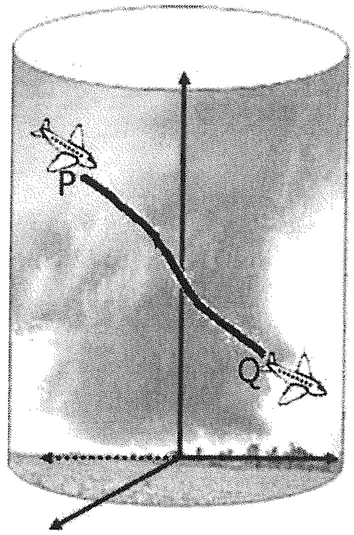
اکنون این بخش با ارائه یک مثال و رسم مسیر با کوتاه ترین زمان گذر به کمک نرم افزار میپل به پایان می‌رسد .

**مثال:** فرض کنید هواپیمایی با سرعت ثابت واحد در حال حرکت بوده و در نقطه $P$ وارد گردبادی می‌گردد که $w$ سرعت حرکت آن از اندازه سرعت هواپیما کمتر است. در این صورت، مسیر با کوتاه ترین زمان برای خروج از گردباد، ژئودزیک متریک راندرزی $\widetilde{F}$ است که اینک با استفاده از برنامه میپل به رسم آن پرداخته می‌شود. اگر $Q$ نقطه خروج از گردباد باشد، آنگاه منحنی $PQ$ مسیر بهینه زمانی است.

```
  > restart:
  > with(plots): with(plottools):
with(DEtools):
  > n := 3;
  > F := (y[1]*x[2]-y[2]*x[1])/(1-
x[1]^2-x[2]^2)+(sqrt((-
y[1]*x[2]+y[2]*x[1])^2+(1-x[1]^2-
x[2]^2)*(y[1]^2+y[2]^2+y[3]^2))/(1-
x[1]^2-x[2]^2));
  > for i from 1 to n do
  E[i] := diff(subs(['x[j] = x[j](t)'
$ j = 1..n, 'y[j] = y[j](t)' $ j =
1..n], diff(F, y[i])), t) -
subs(['x[j] = x[j](t)' $ j = 1..n,
'y[j] = y[j](t)' $ j = 1..n], diff(F,
x[i])):
  end do:
  > sys := {'E[j] = 0' $ j = 1..n,
'diff(x[j](t), t) = y[j](t)' $ j =
1..n}:
  > initc := [x[1](0) = 0.1, x[2](0) =
0.1, x[3](0) = 0.1, y[1](0) = 0.1,
y[2](0) = 0.1, y[3](0) = 0.1];
  > DEplot3d(sys, [x[j](t) $ j = 1..n,
y[j](t) $ j = 1..n], t = 0..1,
[initc], scene = [x[1](t), x[2](t),
x[3](t)]);
```




**شکل (۴) : ژئودزیک متریک راندرزی وابسته به مسأله که با استفاده از برنامه میپل رسم شده است.**




**شکل (۵) : مدل سازی ریاضی حرکت هواپیما در گردباد و رسم مسیر بهینه زمانی برای رفتن از نقطه P به نقطهQ**

## ۵- نتیجه

۱. در این مقاله با استفاده از هندسه فینسلر، یک مدل ریاضی برای به دست آوردن مسیرهای بهینه هنگام حرکت هواپیما در گردباد ارائه شد. بدین منظور هواپیمایی در نظر گرفته شد که با سرعت ثابت واحد در حال حرکت بوده و در مسیر حرکت خود وارد گردبادی می‌گردد که با میدان برداری $w$ نشان داده می‌شود. اگر اندازه $w$ کوچکتر از واحد باشد،

آنگاه مسیری که کوتاه ترین زمان لازم برای خارج شدن از گردباد را نتیجه می‌دهد ژئودزیک های یک متریک راندرزی است.

**یادآوری:** سرعت هواپیما هنگام ورود به گردباد، باید به طور یقین بیش از سرعت گردباد باشد تا شرایط قضیه (۱) برقرار بوده و مسیرهای بهینه به شکل گفته شده به دست آیند.

۲. پس از یافتن متریک وابسته به مسأله ($\widetilde{F}$)، معادله مسیر با کوتاه ترین زمان گذر هواپیما در گردباد ، به دست آمد (قضیه (۲)).

## ۶- مراجع


[۱] هالیدی، دیوید؛ فیزیک (۱)، ترجمه: جلال الدین پاشایی راد، مرکز نشر دانشگاهی، تهران، جلد اول، ویراست چهارم، چاپ دوم، ۱۳۸۲.

[۲] بیدآباد، بهروز؛ آسنجرانی، اعظم؛ " کاربرد هندسه فینسلر در مسأله تکمیلی غیرخطی تعادل ترافیک"، مجله علمی و پژوهشی امیرکبیر، ش ۶۷، ص ۳۷ تا ۴۴، ۱۳۸۶.

[۳] بیدآباد، بهروز ؛ هندسه منیفلد (۱)، انتشارات دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران، چاپ دوم، ۱۳۸۱.

[۴] J.Schmidt, L.; "Dropping in on a Hurricane", Distributed Active Archive Centers (DAAC) Alliance: Supporting Earth Observing Science, p.p. 28-31,2002.

[۵] Burpee, R.W.; Marks, D.G.; Merrill, R.T.; "An Assessment of Omega Dropwindsonde Data in Track Forecasts of Hurricane Debby", Journal of American Meteorological Society, vol.65, No.10, (1050-1058), October1984.

[۶] Bao, D.; Chern, S.S.; Shen, Z.; An Introduction to Riemann-Finsler Geometry, Springer-Verlag, 2000.

[۷] Chern, S.S.; Shen, Z.; Riemann-Finsler Geometry, World Scientific Publishers, 2005.

[۸] Bao, D.; Robles, C.; Shen, Z.; "Zermelo Navigation on Riemannian Manifolds", Journal of Differential Geometry, vol. 66, p.p. 391-449, (2004).

[۹] Bidabad, B.; Rafie-Rad, M.; "Pure Persuit Navigation on Riemannian Manifolds", Journal of Nonlinear Analysis, 2008.


## ۷- زیرنویس ها

1 Maple
2 Tornado Pilots
3 Dropsonde
4 National Center for Atmospheric Research (NCAR)
5 General Positioning System (GPS)
6 Indicatrix
7 Shifting
8 Shifted Set
9 Zermelo Navigation Problem
10 E. Zermelo
11 Spray
12 Geodesic