



## تحلیل ناپایداری فروکشیدگی استاتیکی و ارتعاشات غیرخطی یک میکرو-تشدیدگر با مواد مدرج تابعی

سیدمحمدجواد موسوی، پیمان شریفی، حسین محمدی\*

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه شیراز، شیراز، ایران

### تاریخچه داوری:

دریافت: ۵ خرداد ۱۳۹۶  
بازنگری: ۲۷ تیر ۱۳۹۶  
پذیرش: ۱۵ شهریور ۱۳۹۶  
ارائه آنلاین: ۲۳ شهریور ۱۳۹۶

### کلمات کلیدی:

تشدیدگر میکرو  
تئوری تنش کوپل اصلاح شده  
مواد مدرج تابعی  
فروکشیدگی  
ارتعاشات غیرخطی

**چکیده:** بررسی رفتارهای استاتیکی و دینامیکی میکروتیرهای استفاده شده در تشدیدگرها و فیلترهای میکرو از اهمیت بالایی برخوردار است. در این مقاله به بررسی رفتار میکرو تشدیدگر مدرج تابعی تحت اثر نیروی الکترواستاتیک، نیروی بین مولکولی و تغییر یکنواخت دما، بر اساس تئوری تیر اولر-برنولی و کرنش غیر خطی گرین تحت فرضیات غیر خطی هندسی ون-کارمن پرداخته می‌شود. خواص مکانیکی مواد به کار رفته تابعی از دما هستند و خاصیت مدرج تابعی در راستای ضخامت با استفاده از توزیع نمایی در نظر گرفته می‌شود. معادلات حاکم بر رفتار ارتعاشی میکرو تیر با استفاده از اصل همپلتون و تئوری تنش کوپل اصلاح شده استخراج شده است. با اعمال روش گسسته‌سازی معادله غیر خطی دینامیک میکروتیر در حوزه زمان به دست می‌آید. برای مطالعه ناپایداری فروکشیدگی، معادله استاتیکی با استفاده از روش گلرکین مستقیم حل شده و اثر نیروی بین مولکولی، طول مشخصه و توان فازی ماده سرامیکی بررسی می‌شود. به منظور محاسبه تغییر شکل استاتیکی و مد ارتعاشی میکروتیر از روش تریب دیفرانسیلی استفاده می‌گردد. معادله دینامیکی با روش اختلال جزئی با مقیاس چندگانه حل شده و در حالت تشدید، تأثیر تغییر پارامترهای مختلف در پاسخ فرکانسی و ایجاد رفتارهای نرم‌شونده و سخت‌شونده مورد بررسی قرار می‌گیرد.

### ۱- مقدمه

در سالهای اخیر پیشرفت سریع تکنولوژی و نیاز به ابزارهایی در مقیاس میکرو، تمایل محققان به بررسی پتانسیل سیستم‌های میکرو الکترومکانیک<sup>۱</sup> برای کاربردهای مختلف را بیشتر کرده است. تشدیدگرها سیستم‌های میکروالکترومکانیکی هستند، که در شاخه‌های مختلف از جمله صنایع هوافضا، بیومکانیک، پتروشیمی و پزشکی مورد استفاده قرار می‌گیرند. فرکانس طبیعی میکروتیر در تشدیدگر به کرنش محوری بسیار حساس است. عوامل خارجی مانند فشار، دما، نیرو و شتاب باعث ایجاد کرنش محوری در میکروتیر شده و نهایتاً فرکانس میکروتیر تغییر می‌کند. این تغییر فرکانس به سرعت به یک سیگنال الکتریکی تبدیل شده و می‌تواند یک کمیت فیزیکی را اندازه‌گیری کند.

مهم‌ترین ویژگی‌هایی که باعث می‌شود این تشدیدگرها استفاده بسیاری داشته باشند، حساسیت بالا نسبت به تغییر فرکانس، توان مصرفی پایین و پایداری طولانی مدت آن‌ها در محیط است [۱]. از جمله رفتارهای این تشدیدگرها رفتار سخت‌شونده و نرم‌شونده در طول پدیده تشدید است [۲] و [۳]. رفتار سخت‌شونده قله نمودار دامنه بر حسب پارامتر تنظیم کننده فرکانس را در پاسخ فرکانسی به سمت فرکانس‌های بالاتر انتقال می‌دهد. منبع اصلی

این رفتار در میکروتیر دوسرگیردار کشش صفحه میانی<sup>۲</sup> است. رفتار نرم‌شونده نیز ناشی از نیروی غیرخطی تحریک الکترواستاتیک می‌باشد [۴ و ۵]. برای ایجاد نیروی الکترواستاتیک در میکروتیر، ولتاژ ثابت و متغیر بین میکروتیر و بستر ثابت اعمال می‌شود. نیروی الکتریکی ناشی از ولتاژ ثابت دارای یک مقدار بیشینه است، که در این حالت نیروی مقاوم مکانیکی نمی‌تواند در برابر مقدار آن مقاومت کند و میکروتیر آسیب می‌بیند. به این وضعیت ناپایداری میکرو تشدیدگر، فروکشیدگی<sup>۳</sup> و به ولتاژ متناظر با نیروی الکتریکی بیشینه، ولتاژ فروکشیدگی گفته می‌شود.

برای بهبود پایداری میکروتیر در محیط حرارتی می‌توان از مواد مدرج تابعی استفاده کرد. مواد مدرج تابعی مواد کامپوزیتی غیر همگنی هستند که خواص و چیدمان موادی آن‌ها به صورت پیوسته تغییر می‌کند. فاکتورهایی همچون بهبود توزیع تنش، مقاومت حرارتی بالا، استحکام شکست بیشتر و کاهش تمرکز تنش باعث شده است که مواد مدرج تابعی در بسیاری از کاربردهای مهندسی مانند هوافضا و اکتشافات نفتی مورد توجه قرار گیرند [۶]. ویترووم<sup>۴</sup> و همکاران [۷ و ۸] موفق به توسعه ساختارهای میکروالکترومکانیک چندلایه‌ای پلی‌سیلکون شدند، که از نظر قیمت و

2 Mid-plane stretching  
3 Pull-in  
4 witvroum

1 Micro electro mechanical systems

h\_mohammadi@shirazu.ac.ir نویسنده عهده‌دار مکاتبات:

فروکشیدگی پرداخته شده است. چون ضخامت میکروتیر مورد استفاده در ساختمان میکروتشدیدگر در حد میکرون و کمتر است باید رفتار وابسته به اندازه در تحلیل استاتیکی و ارتعاشی در نظر گرفته شود. این وابستگی در آزمایشات مختلف گزارش شده است و به عنوان تئوری تنش کوپل اصلاح شده شناخته می‌شود [۱۸ و ۱۹]. بر اساس این تئوری انرژی کرنشی  $U_s$  در یک جسم الاستیک ایزوتروپیک که ناحیه  $\Lambda$  را اشغال می‌کند به صورت معادله زیر است [۲۰].

$$U_s = \frac{1}{2} \int_{\Lambda} (\sigma : \varepsilon + m : \chi) d\Lambda \quad (۱)$$

در رابطه (۱)، تانسور کرنش غیر خطی گرین، تانسور تنش، تانسور متقارن انحنا و قسمت انحرافی تانسور تنش کوپل  $m$  به صورت معادلات زیر تعریف می‌شوند.

$$\varepsilon = \frac{1}{2} (\nabla u + (\nabla u)^T + (\nabla u)^T \nabla u) \quad (۲-الف)$$

$$\sigma = \lambda \text{tr}(\varepsilon) I + 2\mu \varepsilon \quad (۲-ب)$$

$$\chi = \frac{1}{2} (\nabla \theta + (\nabla \theta)^T) \quad (۲-ج)$$

$$m = 2l^2 \mu \chi \quad (۲-د)$$

که بردار جابه‌جایی،  $\lambda$  و  $\mu$  ثوابت لامه<sup>۹</sup> و  $l$  طول مشخصه به عنوان شاخص اندازه در تئوری تنش کوپل اصلاح شده می‌باشد. نیز کرل جابه‌جایی است که به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\theta = \frac{1}{2} \text{curl}(u) \quad (۳)$$

در شکل ۱ میکرو تیر دوسرگیردار مدرج تابعی با طول  $L$ ، ضخامت  $h$ ، عرض  $b$  و نیروی پیش کشش نشان داده شده است. میکروتیر و بستر ثابت توسط یک دی‌الکتریک از جنس هوا با ضخامت  $g_0$ ، از یکدیگر جدا شده‌اند. میکروتیر انعطاف پذیر است، درحالی‌که بستر ثابت صلب می‌باشد.

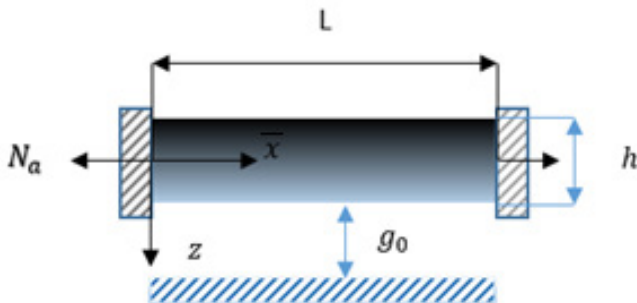


Fig. 1. The FG micro-beam model.  
شکل ۱: مدل میکرو تیر مدرج تابعی

در ماده مدرج تابعی صفحه فیزیکی خنثی (صفحه بدون تنش) منطبق بر

9 Lames constants

خاصیت مقرون به صرفه بود. حسینیان و همکاران [۹] ناپایداری فروکشیدگی در اثر حرارت تولید شده از گذر جریان الکتریکی در یک میکرو صفحه‌ی مدرج تابعی را بررسی کردند. اصغری و همکاران [۱۰] رفتار استاتیکی و ارتعاشی میکروتیر مدرج تابعی را با استفاده از تئوری تنش کوپل اصلاح شده به صورت تحلیلی مورد بررسی قرار دادند. جیا<sup>۱</sup> و همکاران [۱۱] به بررسی رفتار ارتعاش اجباری یک میکروسوئیچ مدرج تابعی تحت تأثیر نیروی بین مولکولی و تنش پسماند با استفاده از روش متوسط‌گیری پرداختند. الستی و همکاران [۱۲] رفتار دینامیکی میکروتیر یک‌سرگیردار را با در نظر گرفتن اثر تغییر دما بررسی کردند. جیا و همکاران [۶] به بررسی ناپایداری فروکشیدگی و ارتعاشات آزاد میکروتیر مدرج تابعی با بستر منحنی شکل تحت تأثیر نیروی الکترواستاتیک پرداختند. رضایی و همکاران [۱۳] به بررسی رفتار یک گیره‌ی میکرونی مدرج تابعی تحریک شده با ولتاژ ثابت و وجود ممان حرارتی پرداختند. جیا و همکاران [۱۴] ارتعاش آزاد میکروتیر مدرج تابعی در حضور تغییرات یکنواخت دما را با استفاده از روش عددی تربیع دیفرانسیلی بررسی کردند. غلامی و همکاران [۱۵] به بررسی اثر اندازه و نیروی بین مولکولی در ناپایداری فروکشیدگی و ارتعاش آزاد یک میکروسوئیچ مدرج تابعی با مدل تیر تیموشنکو با دو تئوری تغییرات کرنش<sup>۳</sup> و تنش-کوپل اصلاح شده پرداختند. لوئن<sup>۴</sup> و همکاران [۱۶] رفتار دینامیکی میکروتیر مدرج تابعی را بر اساس تئوری تنش کوپل با میدان‌های جابه‌جایی کلاسیک، مرتبه اول، مرتبه سوم، تئوری سینوسی و شبه سه بعدی بررسی کردند. ژی<sup>۵</sup> و همکاران [۱۷] روشی غیر مستقیم را برای تحلیل ارتعاش آزاد، کمانش و خمش میکروتیر مدرج تابعی بر اساس تئوری تغییرات کرنش بیان کردند. در تحقیق حاضر به بررسی رفتار استاتیکی و ارتعاش اجباری میکروتشدیدگر با میکروتیر دوسرگیردار مدرج تابعی با فاز سرامیکی سیلیکون نیتريت و فاز فلزی نیکل<sup>۶</sup> پرداخته می‌شود. میکروتیر با نیروهای الکترواستاتیک ثابت و هارمونیک، نیروی بین‌مولکولی و تغییر یکنواخت دما تحریک شده است. انرژی کرنشی بر اساس تئوری تیر اولر-برنولی و مدل هندسی غیرخطی کرنش-جابه‌جایی ون-کارمن به دست آورده می‌شود. رفتار وابسته به طول مشخصه<sup>۷</sup>، تغییر توان فازی سرامیکی و تغییر دما، به‌عنوان متغیرهای اصلی مسئله می‌باشند. معادله دینامیکی غیرخطی حاکم با استفاده از روش اختلال جزئی با مقیاس زمانی چندگانه<sup>۸</sup> حل شده و پاسخ فرکانسی متناظر با هر متغیر ارائه می‌شود.

## ۲- مبانی تئوری و مدل‌سازی

در بسیاری از تحقیقات گذشته به بررسی و مدل سازی ناپایداری

- 1 Jia
- Differential quadrature method 2
- 3 Strain Gradient Theory
- 4 Loan
- 5 Xie
- 6 Ni
- 7 Size-dependent mechanical behavior
- 8 Multiple time scal

$$V_1 + V_2 = 1 \quad (7)$$

$$V_2 = \left( \frac{2z+h}{2h} \right)^n \quad (8)$$

توان  $n$  توزیع فازی کسر حجمی در راستای ضخامت را نشان می‌دهد. زمانی که  $n=0$  است نشان‌دهنده یک میکروتیر از نیکل خالص است. با استفاده از کسر حجمی  $V_f$  می‌توان فهمید که در بالای تیر پوشش سیلیکون نیتريت خالص و در پایین تیر نیکل خالص قرار دارد. با استفاده از قانون مخلوطها می‌توان خاصیت مؤثر ماده مدرج تابعی  $P_f$  مانند مدول الاستیسته  $E_f(z, T)$ ، چگالی  $\rho_f(z, T)$  و ضریب انبساط حرارتی  $\alpha_f(z, T)$  را با استفاده از کسر حجمی به صورت رابطه زیر نوشت.

$$P_f = \sum_{i=1}^M P_i V_i \quad (9)$$

که  $P_i$  و  $V_i$  به ترتیب خاصیت و کسر حجمی ماده  $i$  ام هستند. چون ماده مدرج تابعی معمولاً در محیطهایی با دمای بالا استفاده می‌شود بنابراین انتظار می‌رود که خواص مکانیکی اجزای تشکیل‌دهنده آن با دما تغییرات قابل توجهی داشته باشد. برای پیش‌بینی دقیق رفتار مکانیکی، وابستگی خاصیت به دما باید لحاظ شود. تغییر خاصیت ماده با دما را می‌توان به صورت چند جمله‌ای زیر در نظر گرفت [۲۴].

$$P_i = P_0 (P_{-1} T^{-1} + 1 + P_1 T + P_2 T^2 + P_3 T^3) \quad (10)$$

در این رابطه  $T$  دما برحسب کلون است و  $P_i$  ضرایب تغییر برای هر کدام از خواص ماده هستند، که مقدار آن‌ها برای سیلیکون نیتريت و نیکل در جدول‌های ۱ و ۲ آورده شده است. واحد مانند واحد خاصیت مورد مطالعه است.

جدول ۱: ضرایب دمایی برای خواص مکانیکی سیلیکون نیتريت [۲۴].  
Table 1. Temperature coefficients for elasticity moduli of  $\text{Si}_3\text{N}_4$

خاصیت	$P_0$	$P_{-1}(\text{K})$	$10^4 P_1(\text{K}^{-1})$	$10^7 P_2(\text{K}^{-2})$	$10^{11} P_3(\text{K}^{-3})$
$E_f(\text{Pa})$	$348/4 \times 10^9$	.	-۳/۰۷	۲/۱۶	-۸/۹۴۶
$V_f$	۰/۲۴۰	.	.	.	.
$\alpha_f(\text{K}^{-1})$	$5/8 \times 10^{-6}$	.	۹/۰۹۵	.	.

جدول ۲: ضرایب دمایی برای خواص مکانیکی نیکل [۲۴].  
Table 2. Temperature coefficients for elasticity moduli of Ni

خاصیت	$P_0$	$P_{-1}(\text{K})$	$10^4 P_1(\text{K}^{-1})$	$10^7 P_2(\text{K}^{-2})$	$10^{11} P_3(\text{K}^{-3})$
$E_f(\text{Pa})$	$223/9 \times 10^9$	.	-۲/۷	-۳/۹۹	.
$V_f$	۰/۳۱	.	.	.	.
$\alpha_f(\text{K}^{-1})$	$9/92 \times 10^{-6}$	.	۸/۷۰۵	.	.

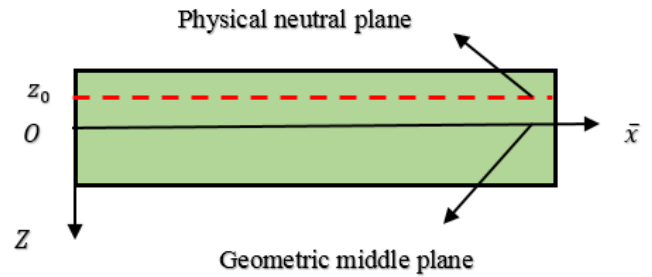


Fig. 2. The physical neutral plane and the geometric midplane  
شکل ۲: صفحه فیزیکی خنثی و صفحه میانی هندسی

صفحه هندسی نمی‌باشد و مطابق شکل ۲ به اندازه  $Z = Z_0$  نسبت به صفحه هندسی فاصله دارد. که مختصات  $Z_0$  از رابطه (۴) به دست می‌آید و در شکل ۲ نشان داده شده است.

$$Z_0 = \frac{\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E(z) z dz}{\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E(z) dz} \quad (4)$$

که  $E(z)$  مدول الاستیسته میکروتیر مدرج تابعی است. خیز میکرو تیر ناشی از نیروی الکترواستاتیک در اثر اعمال ولتاژ، تغییرات دما، نیروی بین‌مولکولی و نیروی محوری است. نیروی محوری ناشی از کرنش پسماند ایجاد شده در فرآیند تولید می‌باشد که در حالت کششی مثبت و فشاری منفی است. در اثر اعمال تغییر دما و ولتاژ ترکیبی شامل ولتاژ ثابت  $V_{DC}$  و ولتاژ کوچک متغیر با زمان  $V_{AC} \cos(\Omega t)$ ، میکرو تیر به سمت بستر ثابت خیز برداشته و تحت تأثیر نیروهای وارده شروع به ارتعاش می‌کند. اگر اثرات لبه‌ای میدان الکتریکی در نظر گرفته شود، نیروی الکترواستاتیک بر واحد طول را می‌توان به صورت رابطه زیر در نظر گرفت.

$$F_e = \frac{\epsilon_0 b V_0^2}{2(g_0 - \bar{w}_0(\bar{x}, \bar{t}))^2} + \frac{0.65 \epsilon_0 V_0^2}{2(g_0 - \bar{w}_0(\bar{x}, \bar{t}))} \quad (5)$$

که  $\epsilon = 8/85 \times 10^{-12} \text{ Fm}^{-1}$  ضریب گذردهی خلأ و  $V_0 = V_{DC} + V_{AC} \cos(\Omega t)$  است.  $\bar{w}_0(\bar{x}, \bar{t})$  نیز جابه‌جایی عرضی هر نقطه روی صفحه فیزیکی خنثی است. نیروی بین‌مولکولی بر واحد طول نیز به صورت رابطه زیر می‌باشد [۲۱ و ۲۲].

$$F_c = \frac{\pi^2 \bar{h} c b}{240(g_0 - \bar{w}_0(\bar{x}, \bar{t}))^4} \quad (6)$$

که  $\bar{h} = \frac{1/0.55 \times 10^{-22}}{2\pi}$  ثابت پلانک و  $c = 3 \times 10^8 \text{ ms}^{-1}$  سرعت نور هستند. در این تحقیق میکرو تیر مدرج تابعی مخلوطی از سیلیکون نیتريت با کسر حجمی  $V_1$  و نیکل با کسر حجمی  $V_f$  می‌باشد. ترکیب دو فاز به صورت پیوسته در راستای ضخامت تغییر می‌کند. رابطه بین کسر حجمی دو فاز ماده مدرج تابعی به صورت معادلات زیر است [۲۳].

استفاده از رابطه (۱) محاسبه می‌گردد.

$$U_s = \int_{\Lambda} \int_0^{\varepsilon_m} \sigma_{xx} d\varepsilon_m d\Lambda + \int_{\Lambda} m_{xy} \chi_{xy} d\Lambda = \frac{1}{2} \int_{\Lambda} E_f \left( \frac{\partial u_0}{\partial \bar{x}} - (z - z_0) \right) \left( \frac{\partial^2 \bar{w}_0}{\partial \bar{x}^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{w}_0}{\partial \bar{x}} \right)^2 - \alpha_f \Delta T \right) d\Lambda + \frac{1}{2} \int_{\Lambda} \mu_f l^2 \left( \frac{\partial^2 \bar{w}_0}{\partial \bar{x}^2} \right) d\Lambda \quad (21)$$

نیروی توزیع شده بر واحد طول روی میکرو تیر در راستای  $z$  برابر است. که کار انجام شده توسط آن، به صورت زیر می‌باشد.

$$W_q = \int_0^L \left( \int_0^{\bar{w}_0} q d\bar{w}_0 \right) d\bar{x} = \int_0^L \int_0^{\bar{w}_0} \left( \frac{\varepsilon_0 b V_0^2}{2(g_0 - \bar{w}_0)^2} + \frac{0.65 \varepsilon_0 V_0^2}{2(g_0 - \bar{w}_0)} + \frac{\pi^2 \hbar c b}{240(g_0 - \bar{w}_0)^4} \right) d\bar{w}_0 d\bar{x} \quad (22)$$

تغییر طول خط میانی میکروتیر در صفحه خنثی به صورت رابطه زیر می‌باشد.

$$L' - L = \frac{1}{2} \int_0^L \left( \frac{\partial \bar{w}_0}{\partial \bar{x}} \right)^2 d\bar{x} \quad (23)$$

که در این صورت با ثابت بودن نیروی محوری  $N_0$ ، کار انجام شده توسط آن به صورت زیر است.

$$W_N = \frac{1}{2} \int_0^L N_0 \left( \frac{\partial \bar{w}_0}{\partial \bar{x}} \right)^2 d\bar{x} \quad (24)$$

انرژی جنبشی میکروتیر با چگالی خطی  $\rho_l$  برابر است با:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \rho_l \left( \frac{\partial \bar{w}_0}{\partial \bar{t}} \right)^2 d\bar{x} + \frac{1}{2} \int_0^L \rho_l \left( \frac{\partial u}{\partial \bar{t}} \right)^2 d\bar{x} \quad (25)$$

بر اساس اصل همپلتون  $\delta \int_0^L (T - U + W) dt = 0$ ، که در آن  $T$ ،  $U$  و  $W$  به ترتیب انرژی جنبشی، انرژی پتانسیل و کار<sup>۴</sup> خارجی نیروهای اعمالی به میکروتیر هستند. بنابراین معادلات حرکت به صورت زیر به دست می‌آیند.

$$\rho_l \frac{\partial^2 u_0}{\partial \bar{t}^2} - k_1 \frac{\partial^2 u_0}{\partial \bar{x}^2} - k_1 \left( \frac{\partial^2 \bar{w}_0}{\partial \bar{x}^2} \right) \left( \frac{\partial \bar{w}_0}{\partial \bar{x}} \right) - (k_1 z_0 - k_2) \left( \frac{\partial^3 \bar{w}_0}{\partial \bar{x}^3} \right) = 0 \quad (26)$$

$$\rho_l \frac{\partial^2 \bar{w}_0}{\partial \bar{t}^2} + (k_1 z_0 - k_2) \left( \frac{\partial^3 u_0}{\partial \bar{x}^3} \right) - k_1 \left( \frac{3}{2} \left( \frac{\partial \bar{w}_0}{\partial \bar{x}} \right)^2 \frac{\partial^2 \bar{w}_0}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial \bar{x}^2} \frac{\partial \bar{w}_0}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial u_0}{\partial \bar{x}} \frac{\partial^2 \bar{w}_0}{\partial \bar{x}^2} \right) \quad (27)$$

$$+ (k_1 z_0^2 - 2k_2 z_0 + k_3 + k_4 l^2) \left( \frac{\partial^4 \bar{w}_0}{\partial \bar{x}^4} \right) + (j_1 \Delta T - N_0) \left( \frac{\partial^2 \bar{w}_0}{\partial \bar{x}^2} \right) = q$$

شرایط مرزی برای یک میکرو تیر دوسرگیردار در  $\bar{x} = 0, L$  نیز به صورت رابطه زیر می‌باشد.

$$u_0 = \bar{w}_0 = \frac{\partial \bar{w}_0}{\partial \bar{x}} = 0 \quad (28)$$

با استفاده از روابط (۷) تا (۹) می‌توان برای مدول الاستیسته  $E_f$ ، چگالی  $\rho_f$  و ضریب انبساط حرارتی  $\alpha_f$  معادلات زیر را نوشت [۲۴].

$$E_f(z, T) = (E_2(T) - E_1(T))(0.5 + \bar{z})^n + E_1(T) \quad (11)$$

$$\alpha_f(z, T) = (\alpha_2(T) - \alpha_1(T))(0.5 + \bar{z})^n + \alpha_1(T) \quad (12)$$

$$\rho_f(z, T) = (\rho_2(T) - \rho_1(T))(0.5 + \bar{z})^n + \rho_1(T) \quad (13)$$

در این روابط  $\bar{z}$  به صورت  $\bar{z} = \frac{z}{h}$  تعریف شده است. با استفاده از تئوری اولر-برنولی برای مدل سازی رفتار مکانیکی میکرو تیر، میدان جابه‌جایی در هر نقطه دلخواه در راستای محورهای  $\bar{x}$  و  $z$  میکروتیر و زمان دلخواه  $\bar{t}$  به صورت روابط زیر بیان می‌شود.

$$u(\bar{x}, z, \bar{t}) = u_0(\bar{x}, \bar{t}) - (z - z_0) \frac{\partial \bar{w}_0(\bar{x}, \bar{t})}{\partial \bar{x}} \quad (14)$$

$$\bar{w}(\bar{x}, z, \bar{t}) = \bar{w}_0(\bar{x}, \bar{t}) \quad (15)$$

که  $u_0$  و  $w_0$  به ترتیب جابه‌جایی طولی و عرضی هر نقطه روی صفحه فیزیکی خنثی است. با استفاده از کرنش غیر خطی گرین تحت فرضیات غیر هندسی ون - کارمن می‌توان معادلات (۱۶) را نوشت.

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_0(\bar{x}, \bar{t})}{\partial \bar{x}} - (z - z_0) \frac{\partial^2 \bar{w}_0(\bar{x}, \bar{t})}{\partial \bar{x}^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{w}_0(\bar{x}, \bar{t})}{\partial \bar{x}} \right)^2 \quad (16)$$

$$\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zy} = 0$$

اگر میکرو تیر به صورت یکنواخت دچار تغییر دما  $\Delta T$  نسبت به دمای اولیه  $T$  شود، کرنش حرارتی در آن ایجاد می‌شود. کل کرنشی که در میکرو تیر وجود دارد  $\varepsilon = \varepsilon_f + \varepsilon_m$  است، که مجموع کرنش مکانیکی و حرارتی می‌باشد. با استفاده از رابطه (۲) می‌توان معادلات متشکله تنش را محاسبه کرد:

$$\sigma_{xx} = E_f \left( \frac{\partial u_0(\bar{x}, \bar{t})}{\partial \bar{x}} - (z - z_0) \frac{\partial^2 \bar{w}_0(\bar{x}, \bar{t})}{\partial \bar{x}^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{w}_0(\bar{x}, \bar{t})}{\partial \bar{x}} \right)^2 - \alpha_f \Delta T \right) \quad (17)$$

$$\sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{xy} = 0$$

مؤلفه‌های بردار چرخش با استفاده از معادله (۳) به صورت زیر خواهد بود.

$$\theta_x = \theta_z = 0, \theta_y = -\frac{\partial \bar{w}_0(\bar{x}, \bar{t})}{\partial \bar{x}} \quad (18)$$

با جایگذاری معادله (۱۸) در معادلات (۲-ج) و (۲-د) می‌توان تانسور متقارن انحنا و قسمت انحرافی تانسور تنش کوپل  $m$  را به صورت روابط زیر نوشت.

$$\chi_{xx} = \chi_{xz} = \chi_{yy} = \chi_{zz} = \chi_{zy} = 0, \chi_{xy} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \bar{w}_0(\bar{x}, \bar{t})}{\partial \bar{x}^2} \quad (19)$$

$$m_{xx} = m_{zz} = m_{zy} = m_{yx} = m_{xz} = 0, m_{xy} = -\mu_f l^2 \frac{\partial^2 \bar{w}_0(\bar{x}, \bar{t})}{\partial \bar{x}^2} \quad (20)$$

که  $\mu_f = \frac{E_f}{2(1+\nu_f)}$  مدول برشی است و انرژی کرنشی در میکرو تیر با

در روابط بالا ضرایب معادلات مطابق روابط زیر می‌باشند.  
 $w_s$  شامل  $V_{DC} + V_{AC} \cos(\Omega t)$  مجزا گردند. این دو قسمت شامل  $w_s$  و  $w_d$  هستند که به ترتیب با اعمال ولتاژ ثابت  $V_{DC}$  و ولتاژ هارمونیک  $V_{AC} \cos(\Omega t)$  ایجاد می‌شوند.

$$w = w_s(x) + w_d(x, t) \quad (۳۳)$$

اگر در معادله (۳۱) از جمله‌های مشتق زمانی و نیروی تحریک زمان‌مند صرف نظر شود معادله حالت استاتیکی به دست می‌آید.

$$w_s'' + \left( \int_0^1 m_2 (w_s')^2 dx + \int_0^1 m_3 w_s'' dx \right) + m_1 w_s'' = \frac{m_6}{(1-w_s)^4} + \frac{m_4 V_{DC}^2}{(1-w_s)^2} + \frac{m_5 V_{DC}^2}{1-w_s} \quad (۳۴)$$

اگر معادله (۳۴) در معادله (۳۱) قرار داده شود معادله دینامیکی میکروتیر حول تعادل استاتیکی نتیجه می‌شود.

$$\begin{aligned} & \ddot{w}_d + c\dot{w}_d + w_d'' + w_s'' \left( \int_0^1 2m_2 w_d' w_s' + m_2 w_d'^2 + m_3 w_d'' dx \right) \\ & + w_d'' \left( m_1 + \int_0^1 (m_2 w_s'^2 + 2m_2 w_d' w_s') dx \right) \\ & + \int_0^1 (m_3 w_s'' + m_2 w_d'^2 + m_3 w_d'') dx = \\ & m_4 V_{AC} V_{DC} \cos(\Omega t) \left[ \frac{8w_d^3}{(1-w_s)^5} + \frac{2}{(1-w_s)^2} + \frac{4w_d}{(1-w_s)^3} + \frac{6w_d^2}{(1-w_s)^4} \right] \\ & + m_4 V_{DC}^2 \left[ \frac{4w_d^3}{(1-w_s)^5} + \frac{2w_d}{(1-w_s)^3} + \frac{3w_d^2}{(1-w_s)^4} \right] + \\ & m_5 V_{AC} V_{DC} \cos(\Omega t) \left[ \frac{2}{(1-w_s)} + \frac{2w_d^2}{(1-w_s)^3} + \frac{2w_d^3}{(1-w_s)^4} + \frac{2w_d}{(1-w_s)^2} \right] \\ & + m_5 V_{DC}^2 \left[ \frac{w_d^3}{(1-w_s)^4} + \frac{w_d^2}{(1-w_s)^3} + \frac{w_d}{(1-w_s)^2} \right] + \\ & m_6 \left[ \frac{20w_d^3}{(1-w_s)^3} + \frac{10w_d^2}{(1-w_s)^6} + \frac{4w_d}{(1-w_s)^5} \right] \end{aligned} \quad (۳۵)$$

برای به دست آوردن مودهای ارتعاشی و فرکانس‌های متناظر آنها باید جمله‌های غیر خطی، نیروی تحریک و ضریب میرایی از معادله (۳۵) حذف شوند و حرکت هارمونیک  $w_d(x, t) = \varphi_n(x) e^{i\omega_n t}$  برای مود ارتعاشی  $n$ ام در نظر گرفته شود. که در آن  $\varphi_n$  مود ارتعاشی نامیرا و  $\omega_n$  فرکانس بدون بعد متناظر این مود است، در این صورت مسئله نامیرای خطی مقدار ویژه زیر به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} & \varphi_n'' + w_s'' \left( \int_0^1 2m_2 \varphi_n' w_s' + m_3 \varphi_n'' dx \right) - \omega_n^2 \varphi_n + \\ & \varphi_n'' \left( m_1 + \int_0^1 (m_2 w_s'^2 + m_3 w_s'') dx \right) = \\ & m_4 V_{DC}^2 \left[ \frac{2\varphi_n}{(1-w_s)^3} \right] + m_5 V_{DC}^2 \left[ \frac{\varphi_n}{(1-w_s)^2} \right] + m_6 \left[ \frac{4\varphi_n}{(1-w_s)^5} \right] \end{aligned} \quad (۳۶)$$

شرایط مرزی برای معادله (۳۶) در ابتدا و انتها که  $x = 0, 1$  است نیز به صورت  $\varphi_n' = 0$  و  $\varphi_n = 0$  می‌باشد. این معادله با استفاده از روش تربیع

$$k_3 = \int_{\frac{h}{2}}^h E_f b z^2 dz, \quad k_2 = \int_{\frac{h}{2}}^h E_f b z dz, \quad k_1 = \int_{\frac{h}{2}}^h E_f b dz$$

$$j_1 = \int_{\frac{h}{2}}^h E_f \alpha_f b dz, \quad k_4 = \int_{\frac{h}{2}}^h \mu_f b dz \quad (۲۹)$$

$$k = \left( k_1 z_0^2 - 2k_2 z_0 + k_3 + k_4 l^2 - \frac{(k_1 z_0 - k_2)^2}{k_1} \right)$$

برای تیرهای نازک که  $b < \delta h$  است،  $E_f$  ذکر شده در روابط پیشین بدون تغییر جایگذاری می‌شود ولی اگر  $b \geq \delta h$  باشد باید برای در نظر گرفتن اثر هندسی انقباض تیر پهن نسبت به تیر نازک  $E_f$  را بر  $(1-\nu^2)$  تقسیم کرد [۲۵]. با استفاده از معادلات (۲۶) و (۲۷) و شرایط مرزی (۲۸) می‌توان معادله حرکت در راستای قائم را با انتگرال‌گیری از معادله (۲۶) و در نظر گرفتن ترم میرایی  $c$  به صورت معادله (۳۰) نوشت.

$$\begin{aligned} & \rho_l \frac{\partial^2 \bar{w}_0}{\partial t^2} + (j_1 \Delta T - N_a) \left( \frac{\partial^2 \bar{w}_0}{\partial x^2} \right) + k \left( \frac{\partial^4 \bar{w}_0}{\partial x^4} \right) + c \left( \frac{\partial \bar{w}_0}{\partial t} \right) - \\ & - \left( \frac{\partial^2 \bar{w}_0}{\partial x^2} \right) \int_0^L \left( \frac{k_1}{2L} \left( \frac{\partial \bar{w}_0}{\partial x} \right)^2 - \frac{(k_2 - k_1 z_0)}{L} \left( \frac{\partial^2 \bar{w}_0}{\partial x^2} \right) \right) d\bar{x} = q \end{aligned} \quad (۳۰)$$

با استفاده از متغیرهای متعامد شده و ایجاد پارامترهای بدون بعد از متغیرهای مؤثر می‌توان رفتار میکروتیر مدرج تابعی را در یک فرم کامل و فشرده به صورت معادله زیر نمایش داد.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right) + m_1 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + c \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right) + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \int_0^L \left( m_2 \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right. \\ & \left. + m_3 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right) dx = \frac{m_4 V_0^2}{(1-w)^2} + \frac{m_5 V_0^2}{(1-w)} + \frac{m_6}{(1-w)^4} \end{aligned} \quad (۳۱)$$

در فرم بدون بعد معادله (۳۱)، متغیرها مطابق روابط (۳۲) هستند. شرایط مرزی برای معادله بدون بعد (۳۱) در ابتدا و انتها ( $x = 0, 1$ ) به صورت  $w = \frac{\partial w}{\partial x} = 0$  هستند. معادله (۳۱) بر اساس تئوری تنش کوپل اصلاح شده نوشته شده است که اگر  $l = 0$  در آن قرار داده شود، معادله تئوری کلاسیک به دست می‌آید. برای میکروتیرهای مدرج تابعی که  $h > 10l$  است هر دو تئوری نتایج نزدیکی را پیش بینی می‌کنند.

$$t = \frac{\bar{t}}{T}, \quad x = \frac{\bar{x}}{L}, \quad w = \frac{\bar{w}_0}{g_0}, \quad T = \sqrt{\frac{\rho_l L^4}{k}}, \quad c = \frac{\bar{c} L^2}{\sqrt{\rho_l k}}$$

$$m_1 = \frac{(j_1 \Delta T - N_a) L^2}{k}, \quad m_2 = -\frac{k_1 g_0^2}{2k}, \quad m_3 = \frac{g_0 (k_2 - k_1 z_0)}{k}, \quad (۳۲)$$

$$m_4 = \frac{\varepsilon_0 b L^4}{2g_0^3 k}, \quad m_5 = \frac{0.65 \varepsilon_0 L^4}{2g_0^2 k}$$

برای آنکه شرایط حل به روش اختلال جزئی با مقیاس‌های زمانی ایجاد شوند، باید دو قسمت تشکیل دهنده خیز میکروتیر با ولتاژ ترکیبی

$$\ddot{q}(t) + c\dot{q}(t) + \xi_1 q(t) + \xi_2 q(t)^2 + \xi_3 q(t)^3 = F_1 V_{AC} \cos(\Omega t) + F_4 V_{AC} q(t)^3 \cos(t\Omega) + F_3 V_{AC} q(t)^2 \cos(t\Omega) + F_2 V_{AC} q(t) \cos(t\Omega) \quad (45)$$

که ضرایب مورد استفاده به صورت روابط زیر هستند.

$$\begin{aligned} \xi_1 &= V_{DC}^2 \left[ \int_0^1 \left( -\frac{m_5 \phi^2}{(1-w_s)^2} - \frac{2\phi^2}{(1-w_s)^3} \right) dx \right] + \int_0^1 (w_s')^2 dx \int_0^1 m_2 \phi \phi'' dx + \left( \int_0^1 \phi \phi^{(4)} dx \right) + m_1 \left( \int_0^1 \phi \phi'' dx \right) \\ &\quad - \int_0^1 \frac{4m_6 \phi^2}{(1-w_s)^5} dx + 2 \int_0^1 w_s' \phi' dx \left( \int_0^1 m_2 \phi w'' dx \right) + \int_0^1 \phi'' dx \left( \int_0^1 m_3 \phi w'' dx \right) + \left( \int_0^1 w'' dx \right) \left( \int_0^1 m_3 \phi \phi'' dx \right) \\ \xi_2 &= \int_0^1 (\phi')^2 dx \int_0^1 m_2 \phi w'' dx + \left( \int_0^1 \phi'' dx \right) \left( \int_0^1 m_3 \phi \phi'' dx \right) \\ &\quad - \int_0^1 \frac{10m_6 \phi^3}{(1-w_s)^6} dx + 2 \left( \int_0^1 m_2 \phi \phi'' dx \right) \left( \int_0^1 w_s' \phi' dx \right) + V_{DC}^2 \left[ \int_0^1 \left( \frac{3m_4 \phi^3}{(1-w_s)^4} + \frac{m_5 \phi^3}{(1-w_s)^3} \right) dx \right] \\ \xi_3 &= \int_0^1 \frac{20m_6 \phi^4}{(w_s - 1)^7} dx + \left( \int_0^1 \phi'^2 dx \right) \left( \int_0^1 m_2 \phi \phi'' dx \right) \\ &\quad - V_{DC}^2 \left[ \int_0^1 \left( \frac{m_5 \phi^4}{(1-w_s)^4} - \frac{4m_4 \phi^4}{(w_s - 1)^5} \right) dx \right] \\ F_1 &= - \int_0^1 \left( \frac{2m_5 V_{DC} \phi}{1-w_s} + \frac{2m_4 V_{DC} \phi}{(1-w_s)^2} \right) dx, \\ F_2 &= \int_0^1 \left( \frac{2m_5 V_{DC} \phi^2}{(1-w_s)^2} - \frac{4m_4 V_{DC} \phi^2}{(w_s - 1)^3} \right) dx \\ F_3 &= \int_0^1 \left( \frac{2m_5 V_{DC} \phi^3}{(1-w_s)^3} + \frac{6m_4 V_{DC} \phi^3}{(w_s - 1)^4} \right) dx, \\ F_4 &= \int_0^1 \left( \frac{2m_5 V_{DC} \phi^4}{(1-w_s)^4} - \frac{8m_4 V_{DC} \phi^4}{(w_s - 1)^5} \right) dx \end{aligned} \quad (46)$$

از آنجا که معمولاً میکروتشدیدگرها در حالت تشدید حول فرکانس اول خطی کار می‌کنند، در این تحقیق رفتار غیر خطی با مود ارتعاشی اول و فرکانس متناظر آن بررسی می‌شود. با استفاده از روش مقیاس چندگانه حل معادله (۴۵) به صورت سری زیر در نظر گرفته می‌شود. این سری رفتار سیستم را به جای یک متغیر مستقل، تابعی از چند پارامتر مستقل بیان

دیفرانسیلی حل می‌شود. بر اساس روش تربیع دیفرانسیلی  $\varphi_n(x)$  و مشتقاتش در هر نقطه دلخواه  $x_j$  را می‌توان به صورت معادلات زیر تقریب زد [۶ و ۱۴].

$$\varphi_n = \sum_{j=1}^N I_j(x) \varphi_n(x_j) \quad (37)$$

$$\left. \frac{d^k \varphi_n}{dx^k} \right|_{x=x_j} = \sum_{j=1}^N C_{ij}^k(x) \varphi_n(x_j) \quad (38)$$

$N$  تعداد کل  $x_j$  های توزیع شده در طول میکروتیر است.  $x_j$  هر نقطه از رابطه زیر به دست می‌آیند.

$$\begin{aligned} x_1 &= 0, x_2 = 0.001, \dots, x_j = \frac{1}{2} \left[ 1 - \cos \frac{\pi(j-2)}{N-3} \right] \\ \dots, x_{N-1} &= 0.999, x_N = 1, j = 3, \dots, N-2 \end{aligned} \quad (39)$$

ضرایب وزنی  $C_{ij}^k$  به توزیع نقاط درون دامنه وابسته بوده و از روابط زیر استخراج می‌شوند.

$$C_{ij}^1 = \frac{L(x_i)}{(x_i - x_j)L(x_j)} \quad i, j = 1, 2, \dots, N \quad i \neq j \quad (40)$$

$$C_{ii}^1 = - \sum_{j=1, j \neq i}^N C_{ij}^1 \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (41)$$

$$L(x_i) = \prod_{j=1}^N (x_i - x_j) \quad i, j = 1, 2, \dots, N \quad i \neq j \quad (42)$$

ضرایب وزنی مرتبه بالاتر نیز از روابط زیر به دست می‌آیند.

$$C_{ij}^{(m)} = m \left[ C_{ij}^1 C_{ii}^{(m-1)} - \frac{C_{ij}^{(m-1)}}{(x_i - x_j)} \right] \quad (43)$$

$$C_{ii}^{(m)} = - \sum_{j=1, j \neq i}^N C_{ij}^{(m)} \quad (44)$$

$$i, j = 1, 2, \dots, N \quad m = 2, 3, \dots, N-1$$

معادله استاتیکی (۳۴) با روش عددی ترکیبی تکرار و تربیع دیفرانسیلی حل شده و  $w_s$  به دست آمده است. با جایگذاری  $w_s$  و ضرایب وزنی در معادله (۳۶) می‌توان ماتریس سختی ضرایب را تشکیل داد. نهایتاً می‌توان مقادیر و توابع ویژه میکروتشدیدگر مدرج تابعی را در هر ولتاژ کوچکتر از ولتاژ فروکشیدگی به دست آورد. اگر رابطه  $w_d(x, t) = \sum_{i=1}^M q_i(t) \varphi_i(x)$  با استفاده از مود ارتعاشی اول به دست آمده در معادله (۳۵) قرار داده شود، با استفاده از روش گسسته‌سازی گلرکین معادله‌ی دیفرانسیل معمولی غیر خطی زیر حاصل می‌شود.

می‌کند.

$$A(T_2) = \frac{1}{2} a e^{i\beta}, \quad a = a(T_2), \quad \beta = \beta(T_2) \quad (53)$$

که  $a$  و  $\beta$  توابع حقیقی از  $T_2$  هستند. با جایگذاری معادله (۵۳) در معادله (۵۲) و ضرب طرفین معادله در  $e^{-i\omega T}$  و جداسازی قسمت حقیقی و موهومی معادله، رابطه زیر به دست می‌آید.

$$a' = \frac{ac}{2} + \frac{1}{2} (F_1 V_{AC}) \omega \sin \gamma \quad (54)$$

$$\gamma' = \sigma + \frac{5a^2 \xi_2^2}{12\omega^3} - \frac{1}{8} (3a^2 \xi_3) \omega + \frac{1}{2} (F_1 V_{AC}) \omega \cos \gamma$$

که  $\gamma = \sigma T_2 - \beta$  است. برای یافتن پاسخ ماندگار کافی است  $\gamma' = a' = 0$  قرار داده شوند:

$$(F_1 V_{AC})^2 = 4 \left( \sigma a \omega + a^3 \left[ \frac{5\xi_2^2}{12\omega^2} - \frac{3\xi_3}{8} \right] \right)^2 + ca\omega^2 \quad (55)$$

معادله (۵۵) دامنه حرکت پاسخ متناوب  $a$  را به صورت تابع صریحی از پارامتر تنظیم کننده‌ی فرکانس تحریک  $\sigma$ ، ضرایب سختی درجه دوم  $\xi_2$  و درجه سوم  $\xi_3$ ، ضریب میرایی بدون بعد  $C$  و دامنه تحریک هارمونیک  $V_{AC}$  بیان می‌کند.

### ۳- شبیه‌سازی و نتایج

مشخصات هندسی، نیروی محوری و توان فازی میکروتیر مدرج تابعی مورد مطالعه در جدول ۳ ذکر شده‌اند. در رسم نمودارها، از این مشخصات به همراه  $\Delta T = 1$  استفاده شده مگر این که داده‌های جدیدی در نمودارها ارائه شده باشند. اگر از معادله (۱۱) مقدار مدول الاستیسته در رابطه (۴) جای‌گذاری شود آنگاه رابطه زیر برای محور خنثی با مدول الاستیسته سرامیک و فلز به دست می‌آید [۲۶].

$$z_0 = \frac{hn(E_2 - E_1)}{2(2+n)(E_2 + nE_1)} \quad (56)$$

شکل ۳ تأثیر توان فازی  $n$  بر موقعیت محور خنثی را برای سه نسبت  $k = \frac{E_1}{E_2}$  که مستقل از دما می‌باشد، مطابق معادله (۵۶) نشان می‌دهد. در  $n = \frac{E_2}{E_1}$  و  $n$  های نسبتاً بزرگ چون جنس تیر به ترتیب شامل فازهایی با مدول الاستیسته و است محور فیزیکی و هندسی بر هم منطبق شده و  $Z_0$  به صفر نزدیک می‌شود.

جدول ۳: مشخصات میکروتیر مدرج تابعی  
Table 3. The specifications of the FG micro-beam.

$n$	$b(\mu\text{m})$	$L(\mu\text{m})$	$g_0(\mu\text{m})$	$T_0(\text{K})$	$h/l$	$N_a(\text{N})$	$h(\mu\text{m})$
۱	۱۰۰	۴۱۰	۰/۳	۳۰۰	۳	۰	۰/۹

$$q = \varepsilon q_1(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 q_2(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^3 q_3(T_0, T_1, T_2) \quad (47)$$

که  $\varepsilon$  پارامتر کوچکی است که پیمانه یا مقیاس سنجش دامنه است. بزرگ‌ترین مقیاس زمانی است که عمده رفتار ارتعاشی در آن رخ می‌دهد.  $T_0 = t$ ،  $T_1 = \varepsilon t$ ،  $T_2 = \varepsilon^2 t$  مقیاس‌های زمانی کوچکتر هستند که تعداد این مقیاس‌های زمانی به تعداد جمله انتخابی سری (۴۷) وابسته است. برای حل معادله غیر خطی (۴۵)، تأثیر پارامترهای میرایی و تحریک  $c = \varepsilon^2 c$  و  $V_{AC} = \varepsilon^2 V_{AC}$  در نظر گرفته می‌شوند. پاسخ معادله، تابعی از مشخصه‌های زمانی  $T_0$ ،  $T_1$  و  $T_2$  است با استفاده از عملگر  $D_n = \frac{\partial}{\partial t_n}$  و استفاده از قاعده مشتق زنجیره‌ای، جمله‌های هم توان  $\varepsilon$  به صورت زیر مجزا می‌شوند.

$$\varepsilon: D_0^2 q_1 + \omega^2 q_1 = 0 \quad (48\text{ الف})$$

$$\varepsilon^2: D_0^2 q_2 + \omega^2 q_2 = -2D_1 D_0 q_1 - \xi_2 q_1^2 \quad (48\text{ ب})$$

$$\varepsilon^3: D_0^2 q_3 + \omega^2 q_3 = -2D_0 D_1 q_2 - 2D_0 D_2 q_1 - \xi_3 q_1^3 - D_1^2 q_1 \quad (48\text{ ج})$$

که  $\omega^2 = \xi_1$  است. پاسخ معادله دیفرانسیل (۴۸-الف) در فرم مختلط به صورت زیر می‌باشد.

$$q_1 = A(T_1, T_2) e^{i\omega T_0} + \bar{A}(T_1, T_2) e^{-i\omega T_0} \quad (49)$$

که  $A$  یک عدد مختلط و  $\bar{A}$  مزدوج آن است. اگر معادله (۴۹) در معادله (۴۸-ب) قرار داده شود و جمله‌های سکولار<sup>۱</sup> ایجاد شده حذف شوند، حاصل  $D_1 A = 0$  می‌شود و بنابراین  $A = A(T_2)$  است. با در نظر گرفتن حل خصوصی معادله (۴۸-ب) می‌توان نوشت:

$$q_2 = \frac{\xi_2}{3\omega^2} (A^2 e^{2i\omega T_0} + \bar{A}^2 e^{-2i\omega T_0}) - \frac{2\xi_2}{\omega^2} A \bar{A} \quad (50)$$

برای بررسی رفتار میکروتیر در تشدید اولیه، فرکانس تحریک هارمونیک  $\Omega$  به شکل زیر در نظر گرفته می‌شود.

$$\Omega = \omega + \varepsilon^2 \sigma \quad (51)$$

با جایگذاری معادله (۴۹) و (۵۰) در معادله (۴۸-ج) و صفر کردن ضریب جمله‌های سکولار آن داریم:

$$-2i\omega D_2 A - 2\xi_2 \left( \frac{\xi_2 A^2 \bar{A}^2}{3\omega^2} - \frac{2\xi_2 A^2 \bar{A}^2}{\omega^2} \right) - 3\xi_3 A^2 \bar{A} + F_1 V_{ac} \frac{e^{i\sigma T_2}}{2} - ic\omega A e^{i\omega T_0} = 0 \quad (52)$$

برای حل معادله ۵۲،  $A(T_2)$  به فرم قطبی زیر نوشته می‌شود.

بین مولکولی باشد. برای محاسبه ولتاژ فروکشیدگی باید از معادله (۳۴) و محاسبه خیز استاتیکی در ولتاژهای مختلف استفاده کرد. شکل ۴ اثر افزایش فاصله  $g_0$  در دو حالت وجود و عدم وجود نیروی بین مولکولی بر ولتاژ فروکشیدگی را به ترتیب با خط چین و خط پر نشان می‌دهد. در این شکل مشخص است که افزایش فاصله  $g_0$  باعث می‌شود که اثر نیروی بین مولکولی کاهش یابد، اما در  $g_0$  های کوچک‌تر، مقدار نیروی بین مولکولی قابل توجه می‌شود و ولتاژ فروکشیدگی را تغییر می‌دهد. شکل ۵ تأثیر افزایش توان فازی ماده مدرج تابعی بر ناپایداری فروکشیدگی را در دو حالت وجود و عدم وجود نیروی بین مولکولی به ترتیب با خط چین و خط پر نشان می‌دهد. شکل ۶ اثر طول مشخصه بر ناپایداری فروکشیدگی را نشان می‌دهد، که رفتار وابسته به اندازه باعث افزایش ولتاژ فروکشیدگی می‌شود. در واقع سختی در نظر گرفته شده در تئوری الاستیسته غیر کلاسیک تنش-کوپل اصلاح شده بیشتر از حالت کلاسیک است که با تحقیقات گذشته دیگر منطبق است.

شکل ۷ اثر تغییر دمای یکنواخت در دو حالت وجود و عدم وجود نیروی بین مولکولی بر ولتاژ فروکشیدگی را نشان می‌دهد. در این شکل مشخص است که به هر اندازه که اختلاف دما افزایش یابد باعث افزایش اختلاف بین نتایج وجود و عدم وجود نیروی بین مولکولی است. این پدیده به این علت است که افزایش دما باعث کاهش فاصله میکروتیر تا بستر ثابت شده و همین امر اثر نیروی بین مولکولی را به مقدار زیادی افزایش داده و باعث می‌شود ولتاژ فروکشیدگی کاهش یابد.

برای محاسبه ضریب میرایی  $c = \frac{\omega}{Q}$  نسبت به فرکانس طبیعی، ضریب کیفیت  $Q = 1000$  در نظر گرفته شده است. ضریب  $Q$  بر روی کیفیت پاسخ فرکانسی مؤثر نیست ولی در مقدار دامنه و نقطه بیشینه آن مؤثر است. شکل ۸ نشان دهنده مقایسه پاسخ فرکانسی به دست آمده با استفاده از روش تحقیق حاضر و نتایج تحقیق نایفه و همکاران در مرجع [۲۷] است که تطابق بسیار خوبی را نشان می‌دهد. اگر خاصیت ماده‌ی مدرج تابعی را

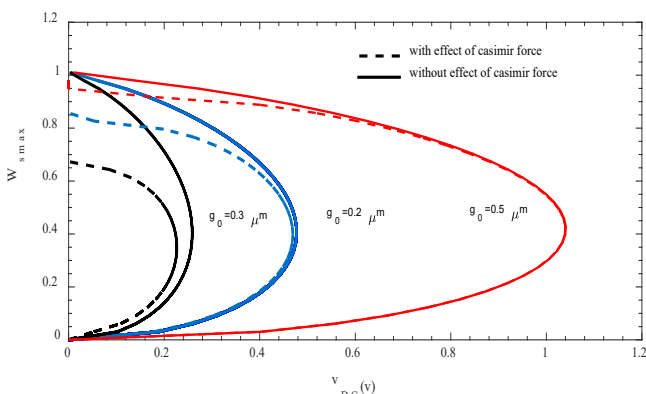


Fig. 4. The effect of increasing  $g_0$  on the pull-in voltage in two cases; with and without Casimir forces.

شکل ۴: اثر افزایش فاصله  $g_0$  در دو حالت وجود و عدم وجود نیروی بین مولکولی بر ولتاژ فروکشیدگی

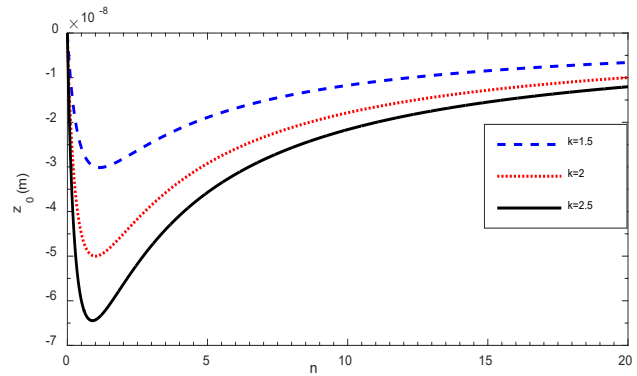


Fig. 3. The effects of pattern the functionally graded material different on distance  $z_0$

شکل ۳: تأثیر توان فازی بر موقعیت محور خشی

با افزایش  $n$  کسر حجمی فاز با مدول الاستیسته افزایش می‌یابد، این افزایش به دلیل زیاد شدن اثر اندازه فاز سرامیکی منجر به افزایش تفاوت بین نتایج تئوری‌های کلاسیک و تنش کوپل اصلاح شده می‌شود. در ولتاژ فروکشیدگی یک وضعیت ناپایدار برای میکروتیر مدرج تابعی ایجاد می‌شود، این ولتاژ محدوده مناسب برای ولتاژ اعمالی به میکروتیردیگر را مشخص می‌کند. چون نتایج آزمایشگاهی ثبت شده‌ای برای اعتبار سنجی مدل سازی میکروتیر مدرج تابعی وجود ندارد از مدل میکروتیر مرجع [۲۷] که یک میکروتیر همگن است، استفاده می‌شود. مشخصات میکروتیر این مرجع در جدول ۴ ذکر شده است.

نتایج مدل سازی تطابق بسیار خوبی با نتایج مرجع [۲۷] دارند این نتایج شامل ولتاژ فروکشیدگی، تغییر شکل نقطه میانی میکروتیر و فرکانس مد ارتعاشی اول می‌باشد که تمام نتایج در جدول ۵ ذکر شده است.

ناپایداری فروکشیدگی در محل تقاطع دو شاخه پایدار پایین و ناپایدار بالا رخ می‌دهد. در این نقطه شیب نمودار دامنه استاتیکی بر حسب ولتاژ بی نهایت است. در میکروتیر مدرج تابعی این ولتاژ می‌تواند تحت تأثیر اندازه توان فازی  $n$ ، طول مشخصه  $l$ ، مشخصه‌های هندسی میکروتیر و نیروی

جدول ۴: مشخصات میکروتیر مرجع [۲۷].

Table 4. The specifications of the micro-beam used in [27].

$b(\mu\text{m})$	$L(\mu\text{m})$	$g_0(\mu\text{m})$	$N_a(\text{N})$	$E_f(\text{GPa})$	$h(\mu\text{m})$
۱۰۰	۵۱۰	۱/۱۸	$1/56164 \times 10^{-4}$	۱۶۶	۱/۵

جدول ۵: مقایسه نتایج تحقیق حاضر با مرجع [۲۷].

Table 5. Comparing the results with those presented in [27]

نتایج مدلسازی در	ولتاژ ثابت اعمالی	ولتاژ فروکشیدگی	تغییر شکل نقطه میانی	فرکانس مد ارتعاشی اول
مرجع [۲۷]	۲ V	۴,۷۸ V	۰/۰۳۵۳۳۰۴	۲۳/۹۵
تحقیق حاضر	۲ V	۴,۷۸ V	۰/۰۳۵۳۳۰۴	۲۳/۹۵



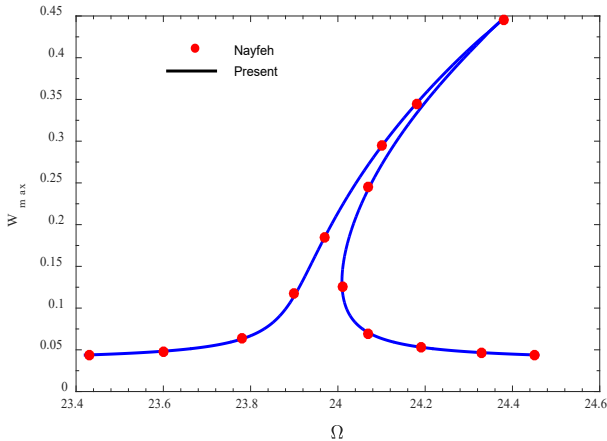


Fig. 8. The frequency response based on the specifications used by Nayfeh in [27].

شکل ۸: پاسخ فرکانسی متناظر با مشخصات مرجع [۲۷].

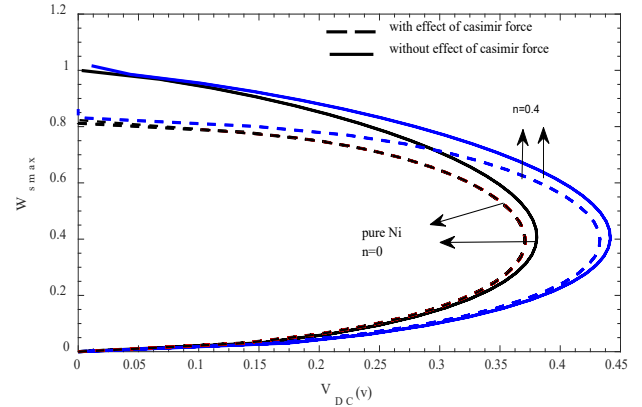


Fig. 5. The effect of pattern the functionally graded material different on the pull-in voltage.

شکل ۵: اثر تغییر توان فازی n در حالت وجود و عدم وجود نیروی بین مولکولی بر ولتاژ فروکشیدگی

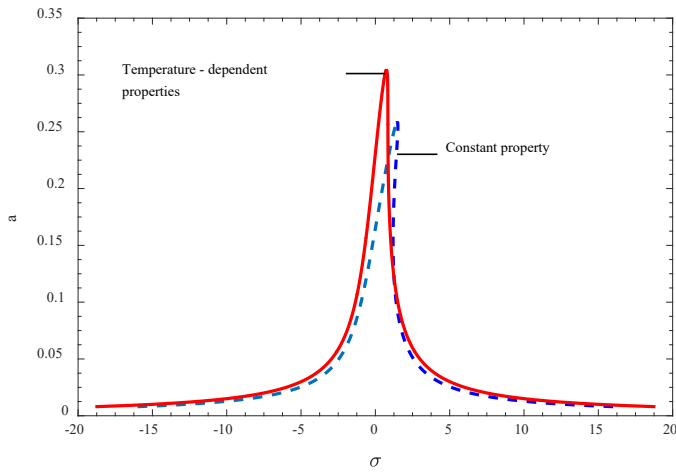


Fig. 9. The effect of temperature dependency on the fundamental resonance.

شکل ۹: پاسخ فرکانسی متناظر با دو حالت خواص جدول های ۱ و ۲

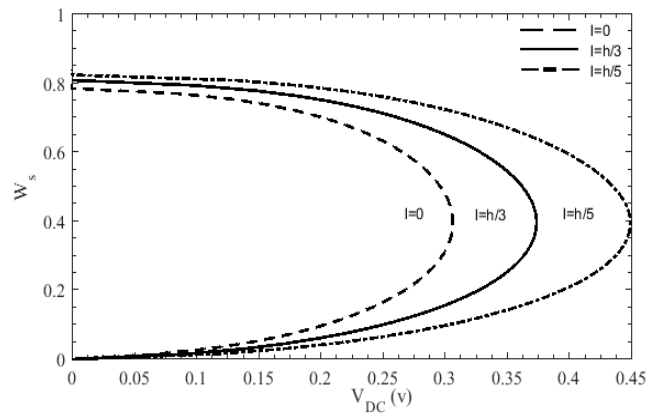


Fig. 6. The effect of characteristic length on the pull-in voltage.

شکل ۶: تأثیر طول مشخصه بر ناپایداری فروکشیدگی

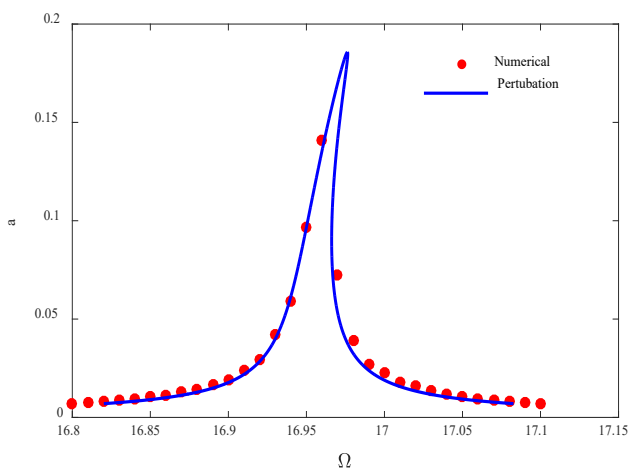


Fig. 10. The fundamental resonance with numerical and perturbation.

شکل ۱۰: تشدید اولیه متناظر با  $V_{AC} = 1 \text{ mV}$

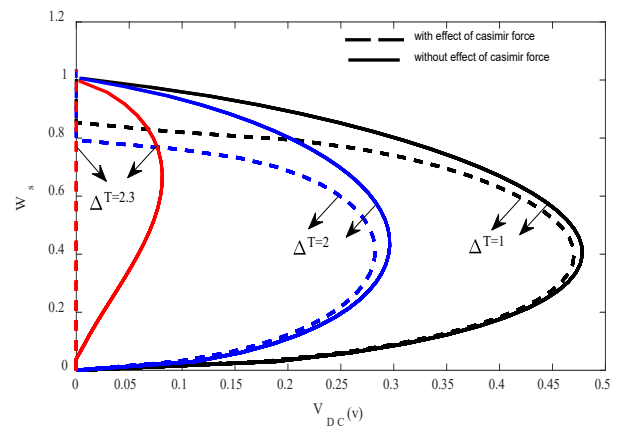


Fig. 7. The effect of temperature changes on the pull-in voltage in two cases; with and without Casimir forces.

شکل ۷: اثر تغییر دمای یکنواخت در دو حالت وجود و عدم وجود نیروی بین مولکولی بر ولتاژ فروکشیدگی

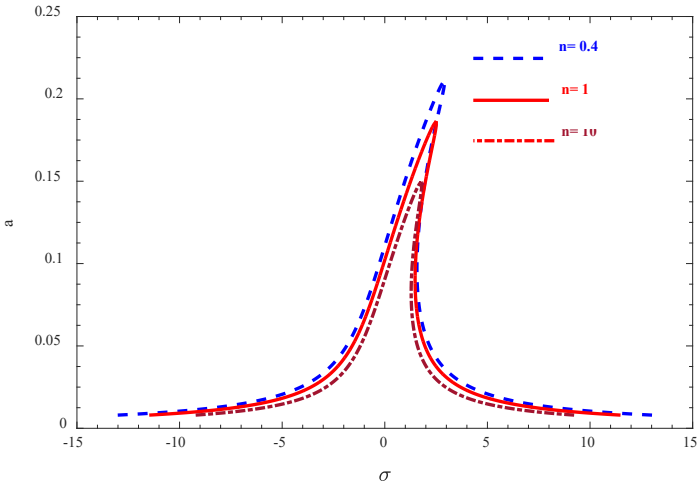


Fig. 13. The effect of pattern the functionally graded material different on the fundamental resonance.

شکل ۱۳: تأثیر توان دانه بندی‌ها مختلف بر تشدید اولیه

مستقل از دما فرض کنیم و از ضرایب جدول‌های ۱ و ۲ برای به دست آوردن خواص ماده فازهای ماده مدرج تابعی استفاده نشود آن گاه رفتار فرکانسی متفاوتی از میکروتشدیدگر مطابق شکل ۹ مشاهده می‌شود.

برای صحت سنجی پاسخ فرکانسی به دست آمده از روش اختلال جزئی با روش انتگرال‌گیری عددی برای  $V_{DC} = 0/1V$  در شکل ۱۰ مقایسه شده است. نتایج پاسخ فرکانسی آن‌ها تطابق خوبی با یکدیگر دارند و روش اختلال جزئی دامنه بیشتری را برای حالت تشدید پیش بینی می‌کند. شکل ۱۱ نشان دهنده انطباق بسیار خوب فرکانس بدون بعد تحقیق حاضر با نتایج آزمایشگاهی میکروتیر همگن مرجع [۲۸] می‌باشد که مشخصات هندسی آن مشابه با جدول ۴ و مدول الاستیسته جنس میکروتیر همگزن  $E = 151 \text{ GPa}$  می‌باشد.

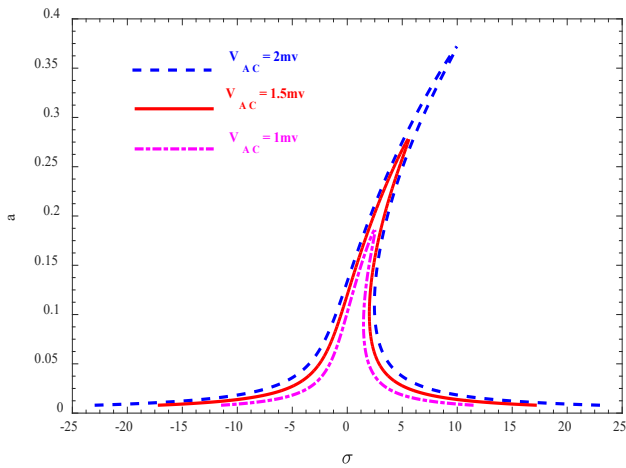


Fig. 14. The effects of different values of  $V_{AC}$  on the fundamental resonance.

شکل ۱۴: اثر مقادیر مختلف ولتاژ متغیر در  $V_{DC} = 0.1V$  بر تشدید اولیه

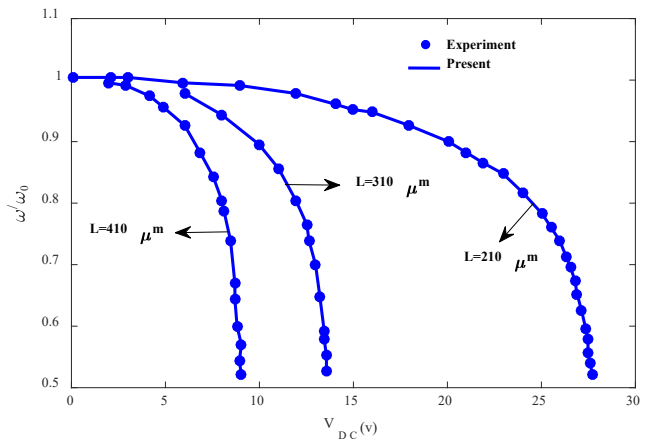


Fig. 11. The dimensionless frequency based on the present theory compared to experimental results in [28]

شکل ۱۱: مقایسه فرکانس بدون بعد تحقیق حاضر با نتایج مرجع [۲۸].

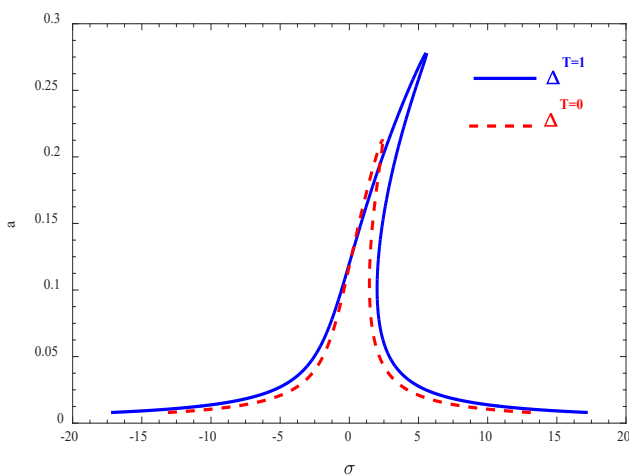


Fig. 15. The effect of temperature changes on the fundamental resonance

شکل ۱۵: اثر تغییر دما در  $V_{DC} = 0.1V$  بر تشدید اولیه

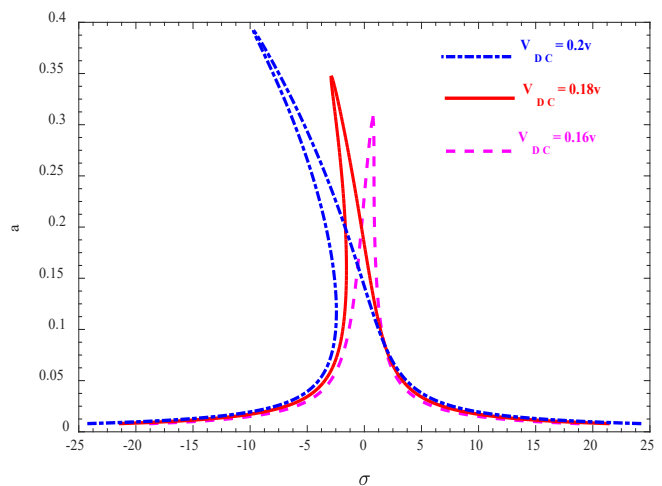


Fig. 12. The effects of different values of constant applied voltages on the fundamental resonance

شکل ۱۲: اثر مقادیر مختلف ولتاژ ثابت در تشدید اولیه

مثبت یا منفی بودن ضریب  $\beta_2$  بر کیفیت پاسخ فرکانسی بی تأثیر است اما افزایش این ضریب تمایل سیستم به رفتار نرم‌شونده را بیشتر می‌کند. شکل ۱۶ تأثیر طول مشخصه بر رفتار فرکانسی را نشان می‌دهد. خم شدن منحنی به دلیل وجود عوامل غیرخطی است که باعث ایجاد منطقه چند مقداری<sup>۱</sup> و پدیده‌ی پرش<sup>۲</sup> در رفتار ارتعاشی تشدیدگر است. در واقع در نظر گرفتن طول مشخصه، سختی خطی سیستم را افزایش داده و اثرات غیر خطی بر دامنه دینامیکی تشدیدگر را کاهش داده است. صرف نظر کردن از نیروی بین مولکولی فرکانس بالاتری را برای میکروتیر مدرج تابعی تخمین می‌زند، در حالی که حضور این نیرو باعث افزایش ناپایداری می‌شود. شکل ۱۷ این اثر را در پاسخ فرکانسی نمایش می‌دهد.

#### ۴- نتیجه‌گیری

در این مقاله به بررسی رفتار میکرو تشدیدگر مدرج تابعی تحت اثر نیروهای الکترواستاتیک، نیروی بین‌مولکولی و تغییر یکنواخت دما پرداخته شد. انرژی کرنشی با استفاده از تئوری تیر اولر - برنولی، کرنش غیر خطی گرین تحت فرضیات غیر خطی هندسی ون-کارمن و تئوری تنش - کوپل اصلاح شده به دست آورده شد. اثر توان فازی، طول مشخصه و نیروی بین مولکولی بر ناپایداری فروکشیدگی استاتیکی مطالعه گردید. در بررسی‌ها نشان داده شد که در نظر گرفتن طول مشخصه و افزایش توان فازی باعث افزایش ولتاژ فروکشیدگی می‌شوند. چون تشدیدگر در فرکانس اول خود ارتعاش می‌کند، معادله دینامیکی به دست آمده با استفاده از مد اول ارتعاشی گسسته سازی شد و پاسخ آن با استفاده از روش اختلال جزئی با مقیاس زمانی چندگانه محاسبه گردید. اثرات افزایش دامنه تحریک هارمونیک، افزایش توان فازی و افزایش دما در طول پدیده تشدید در پاسخ فرکانسی مشاهده شدند، که می‌توانند در ایجاد رفتارهای سخت‌شونده و نرم‌شونده مؤثر باشند. همچنین اثر طول مشخصه مور مطالعه قرار گرفت و مشاهده شد که افزایش طول مشخصه تمایل میکروتشدیدگر را برای ایجاد رفتار خطی افزایش می‌دهد. از نتایج این تحقیق می‌توان در طراحی میکروتشدیدگرهای مدرج تابعی در حضور منابع حرارتی استفاده کرد.

#### مراجع

- [1] M. I. Younis, E. M. Abdel-Rahman, and A. H. Nayfeh, Static and dynamic behavior of an electrically excited resonant microbeam, in 43 rd AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, *Structural Dynamics*, and Materials Conference, Denver, CO, 2002.
- [2] H. M. Ouakad, A. M. Alofi, and A. H. Nayfeh, Dynamic Analysis of Multilayers Based MEMS Resonators, *Mathematical Problems in Engineering*, 2017.

1 Multivaluedness  
2 Jump

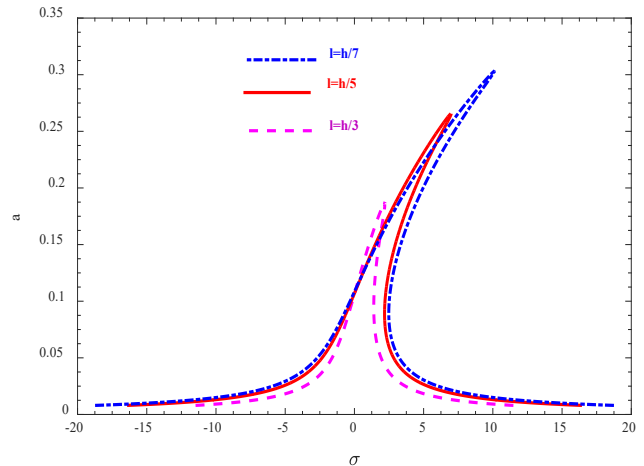


Fig. 16. The effect of characteristic length on the fundamental resonance for

شکل ۱۶: اثر طول مشخصه بر تشدید اولیه

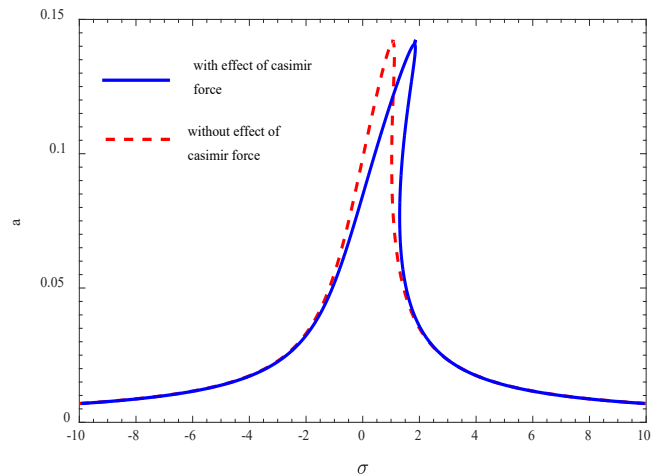


Fig. 17. The effect of Casimir force on the fundamental frequency

شکل ۱۷: اثر نیروی بین مولکولی بر تشدید اولیه در  $\Delta T=0$  و  $V_{DC}=0.1V$

شکل ۱۲ پاسخ فرکانسی به دست آمده برای سه ولتاژ ثابت متفاوت در محدوده‌ی فرکانس طبیعی خطی را نشان می‌دهد، افزایش ولتاژ ثابت باعث ایجاد رفتار نرم‌شوندگی، کاهش فرکانس تشدید و افزایش دامنه ارتعاش میکروتیر می‌شود. شکل ۱۳ تأثیر توان فازی  $n$  بر پاسخ فرکانسی میکروتشدیدگر را نشان می‌دهد. با توجه به شکل ۱۳ مشاهده می‌شود که در یک فرکانس تحریک ممکن است دامنه پایایی یکتایی وجود نداشته باشد. این یکتا نبودن پاسخ یکی از ویژگی‌های سیستم‌های غیرخطی است. بر اساس آنالیز پایداری پاسخی که بین دو مماس موازی محور قائم قرار دارد ناپایدار است. افزایش سخت شونده‌ی در پاسخ فرکانسی با افزایش دامنه تحریک  $V_{AC}$  در شکل ۱۴ نشان داده شده است. پژوهش‌های قبلی (مانند [۲۹]) نیز این رفتار را گزارش کرده بودند.

شکل ۱۵ اثر سخت شونده‌ی در طول پدیده تشدید با افزایش دما نسبت به دمای اولیه  $T = 300 K$  را نشان می‌دهد که این افزایش سختی به دلیل افزایش ضریب  $\beta_2$  و کاهش اندازه‌ی ضریب  $\beta_1$  با افزایش دما می‌باشد.

- [15] R. Gholami, R. Ansari, and H. Rouhi, Studying the effects of small scale and Casimir force on the non-linear pull-in instability and vibrations of FGM microswitches under electrostatic actuation, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 77 (2015) 193-207.
- [16] L. C. Trinh, H. X. Nguyen, T. P. Vo, and T.-K. Nguyen, Size-dependent behaviour of functionally graded microbeams using various shear deformation theories based on the modified couple stress theory, *Composite Structures*, 154 (2016) 556-572.
- [17] X. Xie, H. Zheng, and H. Yang, Indirect radial basis function approach for bending, free vibration and buckling analyses of functionally graded microbeams, *Composite Structures*, 131 (2015) 606-615.
- [18] N. Fleck, G. Muller, M. Ashby, and J. Hutchinson, Strain gradient plasticity: theory and experiment, *Acta Metallurgica et Materialia*, 42 (1994) 475-487.
- [19] J. Stölken and A. Evans, A microbend test method for measuring the plasticity length scale, *Acta Materialia*, 46 (1998) 5109-5115.
- [20] M. Attia and S. Mohamed, Nonlinear modeling and analysis of electrically actuated viscoelastic microbeams based on the modified couple stress theory, *Applied Mathematical Modelling*, 41 (2017) 195-222.
- [21] S. K. Lamoreaux, The Casimir force: background, experiments, and applications, *Reports on progress in Physics*, 68 (2004). 201.
- [22] P. Ganguly and G. R. Desiraju, Van der Waals and polar intermolecular contact distances: Quantifying supramolecular synthons, *Chemistry—An Asian Journal*, 3 (2008) 868-880.
- [23] B. D. Agarwal, L. J. Broutman, and K. Chandrashekhara, *Analysis and performance of fiber composites*: John Wiley & Sons, 2006.
- [24] H.-S. Shen, *Functionally graded materials: nonlinear analysis of plates and shells*: CRC press, 2016.
- [25] K. B. Lee, *Principles of microelectromechanical systems*: John Wiley & Sons, 2011.
- [26] M. Eltaher, A. Alshorbagy, and F. Mahmoud, Determination of neutral axis position and its effect on natural frequencies of functionally graded macro/nanobeams, *Composite Structures*, 99, (2013) 193-201.
- [27] F. Najar, S. Choura, E. M. Abdel-Rahman, S. El-Borgi, and A. Nayfeh, Dynamic analysis of variable-geometry electrostatic microactuators, *Journal of micromechanics and microengineering*, 16(2006) 2449.
- [28] R. Legtenberg and H. A. Tilmans, Electrostatically
- [3] A. H. Nayfeh and D. T. Mook, *Nonlinear oscillations*: John Wiley & Sons, 2008.
- [4] S. Azizi, M. R. Ghazavi, G. Rezaadeh, I. Ahmadian, and C. Cetinkaya, Tuning the primary resonances of a micro resonator, using piezoelectric actuation, *Nonlinear dynamics*, 76, (2014) 839-852.
- [5] F. Najar, S. Choura, E. Abdel-Rahman, S. El-Borgi, and A. Nayfeh, Dynamics of Variable-Geometry Electrostatic Microactuators, in ASME 2006 *International Mechanical Engineering Congress and Exposition*, (2006) 273-281.
- [6] X. Jia, J. Yang, S. Kitipornchai, and C. W. Lim, Pull-in instability and free vibration of electrically actuated poly-SiGe graded micro-beams with a curved ground electrode, *Applied Mathematical Modelling*, 36 (2012) 1875-1884.
- [7] A. Witvrouw and A. Mehta, The use of functionally graded poly-SiGe layers for MEMS applications, in *Materials science forum*, (2005) 255-260.
- [8] M. Gromova, A. Mehta, K. Baert, and A. Witvrouw, Characterization and strain gradient optimization of PECVD poly-SiGe layers for MEMS applications, *Sensors and Actuators A: Physical*, 130 (2006) 403-410.
- [9] D. Hasanyan, R. Batra, and S. Harutyunyan, Pull-in instabilities in functionally graded microthermoelectromechanical systems, *Journal of Thermal Stresses*, 31(2008) 1006-1021.
- [10] M. Asghari, M. Ahmadian, M. Kahrobaian, and M. Rahaeifard, On the size-dependent behavior of functionally graded micro-beams, *Materials & Design* (1980-2015), 31 (2010) 2324-2329.
- [11] X. Jia, J. Yang, S. Kitipornchai, and C. Lim, Forced vibration of electrically actuated FGM micro-switches, *Procedia Engineering*, 14 (2011) 280-287.
- [12] B. Mohammadi-Alasti, G. Rezaadeh, A.-M. Borghעי, S. Minaei, and R. Habibifar, On the mechanical behavior of a functionally graded micro-beam subjected to a thermal moment and nonlinear electrostatic pressure, *Composite Structures*, 93 (2011) 1516-1525.
- [13] M. Rezaee, N. Sharafkhani, and A. Chitsaz, Electrostatically actuated FGM micro-tweezer under the thermal moment, *Microsystem technologies*, 19 (2013) 1829-1837.
- [14] X. Jia, L. Ke, C. Feng, J. Yang, and S. Kitipornchai, Size effect on the free vibration of geometrically nonlinear functionally graded micro-beams under electrical actuation and temperature change, *Composite Structures*, 133 (2015) 1137-1148.

F. Vakakis, Nonlinear normal modes, Part I: A useful framework for the structural dynamicist, *Mechanical Systems and Signal Processing*, 23 (2009) 170-194,

driven vacuum-encapsulated polysilicon resonators Part I. Design and fabrication, *Sensors and Actuators A: Physical*, 45 (1994) 57-66.

[29] G. Kerschen, M. Peeters, J.-C. Golinval, and A.

برای ارجاع به این مقاله از عبارت زیر استفاده کنید:

Please cite this article using:

S. M. J. Mousavi, P. Sharifi, H. Mohammadi, Analysis of Static Pull-in Instability and Nonlinear Vibrations of an Functionally Graded Micro-Resonator Beam, *Amirkabir J. Mech. Eng.*, 51(1) (2018) 119-132.

DOI: 10.22060/mej.2017.12772.5474



