



دانشگاه صنعتی امیرکبیر  
(پلی تکنیک تهران)

سال چهل و پنج، شماره ۱، تابستان ۱۳۹۲، صفحه ۱ تا ۱۳  
Vol. 45, No.1, Summer 2013, pp. 1-13



نشریه علمی - پژوهشی امیرکبیر (مهندسی مکانیک)  
Amirkabir Journal of Science & Research (Mechanical Engineering)  
(AJSR - ME)

## شبیه‌سازی عددی دوبعدی اندرکنش شاک و حباب در جریان‌های دو فازی تراکم پذیر

عبدالحسین دارمی زاده<sup>۱\*</sup>، محمد رضا انصاری<sup>۲</sup>

۱ دانش‌آموخته دکتری دانشکده فنی مهندسی دانشگاه تربیت مدرس

۲ دانشیار دانشکده فنی مهندسی دانشگاه تربیت مدرس

(دریافت ۱۳/۴/۱۳۹۰، پذیرش ۲۳/۸/۹۱)

### چکیده

در این مقاله تاکید اصلی بر تسخیر دقیق فصل مشترک و مطالعه اندرکنش شاک و حباب در جریان‌های دو فازی گاز-گاز و گاز-مایع است. بدین منظور برای اولین بار از حلگر ریمان HLLC و روش حل عددی گودونوف برای معادلات دو سیالی ۵ معادله‌ای کاپیلا استفاده شد و کد نویسی به صورت دوبعدی و با دقت مرتبه دو انجام شد. مسائل اندرکنش شاک و حباب هلیم در هوا و حباب هوا در آب شبیه‌سازی شد. نتایج عددی بدست آمده برابری عالی با نتایج تجربی و نتایج قبلی بدست آمده توسط محققین با روش‌های عددی و معادلات دیگر دارد. این روش در عین سادگی، قادر است موج شاک گذرا و ناپیوستگی‌های مواد و ناپایداری‌های فصول مشترک را به دقت و بدون نوسان و پخش عددی اضافی تسخیر نماید.

### کلمات کلیدی

جریان‌های دو فازی، تراکم پذیر، موج شاک، روش عددی گودونوف، فصل مشترک

\* نویسنده مسئول وعهده دار مکاتبات Email: a.darami@modares.ac.ir

## ۱- مقدمه

موضوع شبیه‌سازی عددی جریان‌های چند فاز یا چند جزئی یکی از موضوعات چالش برانگیز، با کاربردهای کلیدی در صنعت و پدیده‌های طبیعی است. از جمله این کاربردها می‌توان به فیزیک انفجار، صنایع نظامی، فیزیک نجوم، سامانه‌های احتراق و دینامیک حباب، دتونیشن مواد با انرژی بالا، ضربات با سرعت‌های ابر صوت و در صنایع پزشکی در متلاشی نمودن سلول‌های سرطانی نام برد. معادلات بقای ارائه شده در تحقیقات قبلی از نظر پیچیدگی و میزان دقت، درجات مختلفی دارند. به طور عمومی این روش‌ها را از دیدگاه نحوه تعامل و تلقی فصل مشترک می‌توان به دو دسته عمده تقسیم نمود:

الف- روش‌های فصل مشترک تیز<sup>۱</sup>

ب- روش فصل مشترک انتشاری<sup>۲</sup>

در روش‌های فصل مشترک تیز، تلاش ویژه‌ای برای مکان یابی و اصلاح فصل مشترک به صورت صریح باید انجام شود. این روش‌ها را می‌توان به دسته‌های عمومی لاگرانژی [۱]، اویلری مانند  $LS^3$  و  $VOF^4$  [۲، ۳ و ۴]، ترکیبی اویلری-لاگرانژی<sup>۵</sup> [۵ و ۶] و لاگرانژی-اویلری اختیاری<sup>۶</sup> [۸ و ۹] اشاره نمود. نقطه ضعف کلی این روش‌ها پیچیدگی بالا، هزینه و زمان محاسباتی بالا و عدم توانایی دینامیکی در ایجاد فصول مشترکی که از قبل نبوده‌اند است [۱۰]. نکته آخر یعنی ایجاد فصول مشترک جدید در جریان‌های کاویتاسیون اهمیت بالایی دارد.

در حالت شرایط فصول مشترک پیچیده این روش‌ها بعضاً دچار خطای پخش<sup>۷</sup> عددی بالایی می‌شوند و توسعه آن‌ها به حالات چند بعدی با مشکل همراه است. همین نقطه ضعف، انگیزه بعضی از محققین در رویکرد به سمت روش‌های مرتبه بالاتر متمایل به آپ-ویند<sup>۸</sup> شده است. یکی از کارهای انجام شده با روش‌های مرتبه بالا برای مدل‌سازی جریان‌های چند جزئی توسط جانسون [۱۱] است که روش ونو<sup>۹</sup> را برای معادلات شبه بقایی<sup>۱۰</sup> استفاده نموده است. اگر چه این روش‌ها از تولید نوسان اضافی جلوگیری می‌نمایند لیکن از نظر بقای جرم هر جز دچار مشکل می‌شوند [۱۲] و [۱۳]. به عنوان یک روش دیگر در زمینه شبیه‌سازی جریان‌های چند سیالی، چانگ و لیو [۱۴] جدیداً یک مدل جریان لایه‌ای را توسعه داده‌اند که توانایی خوبی در مدل‌سازی جریان‌های تراکم پذیر گاز-مایع دارد ولی روش آن‌ها از نظر کاربردی پیچیدگی بالایی دارد. در گروه دوم از روش‌های عددی یعنی روش فصل مشترک انتشاری، فصل مشترک به صورت یک ناحیه پخش عددی مدل می‌شود که شبیه تسخیر یک ناپیوستگی در دینامیک گاز است [۱۰]. در واقع می‌توان گفت که این فصول مشترک انتشاری نوعی مخلوط‌های مصنوعی

هستند که به واسطه محاسبات عددی ایجاد می‌شوند. این دسته از روش‌ها به دو دسته عمومی روش‌های بر پایه معادلات اویلر و روش‌های بر اساس معادلات چند فاز تقسیم‌بندی می‌شوند. از جمله کارهای انجام شده با روش‌های بر اساس معادلات اویلر می‌توان به کارهای انجام شده در مراجع [۱۱-۱۳] و [۱۵]، [۱۶] و [۱۷] اشاره نمود. این روش‌ها محدود به مدل‌های فیزیکی آسان و معادلات حالات ساده هستند و از نظر انرژی داخلی و دما در فصل مشترک دچار عدم دقت می‌شوند. روش‌های دیگر بر اساس معادلات جریان چند فاز هستند. یکی از این دسته معادلات، هفت معادله‌ای است که توسط ساورل و آبگرال [۱۸] معرفی شده است. این معادلات دارای دو سرعت و دو فشار جدا از هم بوده و برای جاهایی که اختلاف سرعت دو فاز مد نظر است، کارایی بیشتری دارد. کاربرد این مدل به دلیل وجود جمله‌های ناپایستار در معادلات ممنتوم و انرژی و معادله انتقال کسر حجمی مشکل بوده و با چالش روبرو است. در زمینه حل عددی این معادلات تلاش‌های وسیعی انجام شده است [۱۹-۲۳]. معادلات مناسب دیگر برای شبیه‌سازی، مدل شش معادله‌ای تک سرعت است. این معادلات با فرض زمان صفر برای آسایش سرعت بدست می‌آید و توسط مرجع [۲۴] برای اولین بار معرفی شد و سپس توسط ساورل و همکاران [۲۵] اعتبار سنجی شد که بیانگر کارایی خوب این مدل در شبیه‌سازی جریان‌های دو فاز با فصل مشترک است. یکی دیگر از مدل‌های مناسب برای شبیه‌سازی جریان‌های چند فاز که مدنظر این مقاله است مدل پنج معادله‌ای کاهش یافته یا مدل کاپیلا است [۲۴] و [۲۶]. تاکنون دو مشکل عمده برای استفاده از این مدل گفته شده است که شامل رفتار غیر یکنواخت معادله سرعت صوت مخلوط در فصل مشترک [۲۵ و ۲۶] و دیگری جمله ناپایستار در معادله انتقال کسر حجمی است [۲۵]. این معادلات شامل دو معادله بقای جرم، یک معادله بقای ممنتوم و یک معادله بقای انرژی به صورت پایستار و یک معادله انتقال کسر حجمی به صورت ناپایستار است. به تازگی گرایش به ارائه روش عددی مناسب برای معادلات دو سیالی پنج معادله‌ای افزایش یافته است [۲۶-۳۰]. مارون و گیلارد [۲۶] مدل پنج معادله‌ای کاهش یافته را جهت شبیه‌سازی جریان‌های دو فاز استفاده نمودند. مسائل آزمایش دو بعدی شبیه‌سازی شده در کار آن‌ها شامل مسائل با سرعت پایین بود و اثرات موج شاک بر فصول مشترک جریان‌های دو فاز بررسی نشد. کریفت و کورن [۲۸] فرمولاسیون جدید معادلات دو سیالی پنج معادله‌ای کاپیلا را ارائه نمودند. مدل آن‌ها از عملکرد خوبی در مدل‌سازی دو بعدی جریان‌های تراکم گاز-گاز مانند حباب هلیوم در هوا برخوردار است ولی عملکرد این مدل برای فصول مشترک گاز-مایع به

صورت زیر است:

$$P(\rho, e, \alpha_k) = \frac{\rho e - \sum_k \frac{\alpha_k \gamma_k P_{\infty, k}}{\gamma_k - 1}}{\sum_k \frac{\alpha_k}{\gamma_k - 1}} \quad (3)$$

برای این مدل، سرعت صوت مخلوط بر اساس رابطه تعریف می‌شود:

$$c = \sqrt{\frac{\gamma \cdot (P + P_{\infty})}{\rho}}$$

$$\frac{1}{\gamma - 1} = \sum_i \frac{\alpha_i}{\gamma_i - 1}$$

$$\frac{\gamma \cdot P_{\infty}}{\gamma - 1} = \sum_i \frac{\alpha_i \gamma_i P_{i \infty}}{\gamma_i - 1}$$

(4)

برای آب  $P_{\infty} = 6e8 \text{ Pa}$  و برای هوا  $P_{\infty} = 0 \text{ Pa}$  است. مقدار  $\gamma$  برای آب 4/4 و برای هوا 1/4 لحاظ شده است.

توضیح آنکه در کارهای قبلی مانند مرجع [27] از سرعت صوت  $(\rho c_{eq}^2) = \alpha_1 / (\rho_1 c_1^2) + \alpha_2 / (\rho_2 c_2^2)$  برای تخمین سرعت صوت مخلوط دو فازی استفاده می‌شد. این رابطه صوت برای مخلوط دو فازی از ترکیب دو سرعت صوت در گاز و مایع یعنی  $c_1$  و  $c_2$  تشکیل شده است. این رابطه رفتار غیر یکنوا دارد و در حالتی که کسر حجمی به سمت یک یا صفر میل می‌نماید سرعت صوت دچار پرش غیر فیزیکی و رفتار غیر یکنوا می‌شود. این موضوع در حالتی که در مسئله شاک وجود داشته باشد دو چندان می‌شود و سبب واگرایی کد و یا پیش بینی غلط جریان در فصل مشترک می‌شود. توضیحات بیشتر در مرجع [25] اشاره شده است. در کد حاضر از یک سرعت صوت دیگر استفاده شده است [10] که بر پایه ترکیب ضمنی و یا صریح روابط صوت گاز و مایع تشکیل نشده است و مستقیماً بر اساس عوامل ترمودینامیکی دو فاز قابل محاسبه است. نتایج عددی این پژوهش بیانگر آنست که با کاربرد این رابطه صوت برای مخلوط دو فازی گذر شاک از فصل مشترک دو فاز مایع و گاز میسر می‌شود و همگرایی حاصل می‌شود.

### 3- روش حل عددی

در این مقاله روش عددی گودونوف و حلگر ریمان HLLC [32] برای معادلات دو سیالی پنج معادله‌ای کاپیلا توسعه داده شد. در حالت یک بعدی قسمت پایستار مدل پنج معادله‌ای را می‌توان به صورت ماتریسی به شکل روابط زیر نوشت:

صورت دوبعدی آزمایش نشده است. انگیزه اصلی از کار حاضر شبیه‌سازی دقیق و در عین حال با هزینه کم محاسباتی مسائل با فصل مشترک جریان‌های دو فازی گاز-گاز و گاز-مایع و شبیه‌سازی جریان کابیتاسیون با مدل پنج معادله‌ای کاهش یافته است. برای غلبه بر مشکلات عملیاتی مدل پنج معادله‌ای از سه گام زیر بهره برده شد:

- انتخاب سرعت صوت مناسب و یکنوا برای مخلوط دو فازی

- گسسته‌سازی مناسب معادله انتقال کسر حجمی

- حل عددی معادلات حاکم بر مدل با استفاده از روش

عددی گودونوف و حلگر HLLC

در ادامه این مقاله ابتدا در بخش 2 ویژگی‌های ریاضی معادلات دو سیالی 5 معادله‌ای بیان می‌شود. در بخش 3 روش عددی به تفصیل توضیح داده خواهد شد. در بخش 4 نتایج شبیه‌سازی دو بعدی به همراه اعتبارسنجی ارائه خواهد شد و در نهایت در قسمت 5 جمع‌بندی و نتیجه‌گیری ارائه می‌شود.

### 2- ویژگی‌های ریاضی مدل پنج معادله‌ای

معادلات دوسیالی تک سرعتی پنج معادله‌ای با فشارهای متعادل تحت عنوان معادلات کاپیلا یا پنج معادله‌ای کاهش یافته معروف است. این مدل به عنوان مدل کاهش یافته مدل بائر و نونزیاتو [31] است. معادلات این مدل در حالت چند بعدی بدون در نظر گرفتن انتقال حرارت و انتقال جرم به صورت ذیل است:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \alpha = 0 \quad (1-f)$$

$$\frac{\partial (\alpha_1 \rho_1)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_1 \alpha_1 \vec{u}) = 0 \quad (1-b)$$

$$\frac{\partial (\alpha_2 \rho_2)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_2 \alpha_2 \vec{u}) = 0 \quad (1-c)$$

$$\frac{\partial (\rho \vec{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v} \otimes \vec{u}) + \vec{\nabla} P = 0 \quad (1-d)$$

$$\frac{\partial (\rho E)}{\partial t} + \nabla \cdot ((\rho E + P) \vec{u}) = 0 \quad (1-e)$$

که  $\alpha, \rho, \vec{u}, P, E, e$  به ترتیب عبارتند از کسر حجمی، چگالی، سرعت و فشار، انرژی کل و انرژی داخلی است. چگالی از طریق رابطه  $\rho = (\alpha_1 \rho_1 + \alpha_2 \rho_2)$  بدست می‌آید. در کار حاضر از معادله حالت استیفند گاز استفاده شد. در این حالت انرژی داخلی فازها  $e_k = e_k(\rho_k, P)$  بر اساس روابط زیر محاسبه می‌شود [5-6] و [14]:

$$\forall k, \quad \rho_k e_k = \frac{P_k + \gamma_k P_{\infty, k}}{\gamma_k - 1} \quad (2)$$

در شرایط تعادل فشاری رابطه مورد نیاز برای بستن مدل به

می‌شود. ابتدا جمله ناپایستار به صورت رابطه (۱۴) بازنویسی می‌شود:

$$\vec{u} \cdot \vec{\nabla} \alpha = \text{div}(\alpha \vec{u}) - \alpha \text{div}(\vec{u}) \quad (14)$$

با جایگذاری این ترم در معادله (1a)، ترم  $\vec{u} \cdot \vec{\nabla} \alpha$  حذف می‌شود. به این ترتیب با جایگذاری (۱۴) در (۱) رابطه انتقال کسر حجمی در حالت یک بعدی به صورت (۱۵) ارائه می‌شود:

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha_1 u)}{\partial x} = (\alpha_1) \frac{\partial u}{\partial x} \quad (15)$$

که سمت راست این معادله به صورت پایستار است. صورت گسسته‌سازی شده این معادله با استفاده از روش گودونوف برای جمله‌های جابه‌جایی به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\alpha_{1j}^{n+1} = \alpha_{1j}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [(u \alpha_1)_{j+\frac{1}{2}}^* - (u \alpha_1)_{j-\frac{1}{2}}^* - \alpha_{1j} \cdot (u_{j+\frac{1}{2}}^* - u_{j-\frac{1}{2}}^*)] \quad (16)$$

این نحوه گسسته‌سازی تا حد زیادی مثبت ماندن کسر حجمی را تضمین می‌نماید و بر دقت محاسبه کسر حجمی می‌افزاید [۲۵].

برای ارتقای دقت مدل‌سازی از مرتبه ۱ به مرتبه ۲ از روش ماسل-هنکاک<sup>۱۱</sup> [۲۱] استفاده به عمل آمد. برای توسعه شبیه‌سازی به دوبعدی از روش حجم محدود و شبکه با سازمان مربعی استفاده شد. الگوریتم حل عددی به شرح زیر خلاصه می‌شود:

- در هر مرز سلول محاسباتی، شار عددی پایستار  $f$  که در رابطه (۵) ارائه شده، با کمک روش حلگر ریمن HLLC در روابط (۹) تا (۱۳)، تقریب زده می‌شود.
- با استفاده از روش گودونوف که صورت گسسته‌سازی شده آن در رابطه (۸) نشان داده شده است، مقادیر پایستار محاسبه می‌شوند.
- کسر حجمی نیز با استفاده از رابطه گسسته‌سازی شده (۱۶) محاسبه می‌شود.
- پس از محاسبه کسر حجمی تمامی متغیرهای اولیه مانند چگالی، فازها، سرعت و انرژی بدست می‌آید.
- فشار مخلوط با استفاده از رابطه (۳) محاسبه می‌شود.
- سرعت صوت مخلوط دو فازی با استفاده از رابطه (۴) محاسبه می‌شود.
- رفتن به مرحله اول در گام زمان بعدی.

$$U = \begin{bmatrix} \alpha_1 \rho_1 \\ \alpha_2 \rho_2 \\ \rho u \\ \rho E \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \rho_1 u \\ \alpha_2 \rho_2 u \\ \rho u^2 + P \\ u(\rho E + P) \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} = 0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + u \frac{\partial \alpha}{\partial x} = 0 \quad (7)$$

بر اساس روش عددی گودونوف گسسته‌سازی به ترتیب زیر انجام می‌شود:

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [\mathbf{f}(U^*(U_j^n, U_{j+1}^n)) - \mathbf{f}(U^*(U_{j-1}^n, U_j^n))] \quad (8)$$

شار درون سلول حلگر ریمن HLLC توسط تورو [۳۲] ارائه شده است:

$$F_{j+\frac{1}{2}}^{HLLC} = \begin{cases} f(U_L) & 0 \leq S_L \\ f(U_L^*) = f(U_L) + S_L(U_L^* - U_L) & S_L \leq 0 \leq S^* \\ f(U_R^*) = f(U_R) + S_R(U_R^* - U_R) & S^* \leq 0 \leq S_R \\ f(U_R) & 0 \geq S_R \end{cases} \quad (9)$$

بردار پایستار در ناحیه میانی یعنی در ناحیه بین موج‌های راست رو و چپ رو به شرح ذیل نوشته می‌شود:

$$U_k^* = \begin{bmatrix} \alpha_1 \rho_1 \frac{S_k - u_k}{S_k - S^*} \\ \alpha_2 \rho_2 \frac{S_k - u_k}{S_k - S^*} \\ \rho \frac{S_k - u_k}{S_k - S^*} S^* \\ \rho \frac{S_k - u_k}{S_k - S^*} \left[ \frac{E_k + (S^* - u_k) \times \left[ S^* + \frac{P_k}{\rho_k (S_k - u_k)} \right]}{\rho_k (S_k - u_k)} \right] \end{bmatrix} \quad (10)$$

که در آن  $k$  بیانگر  $R, L$  مرزهای چپ و راست سلول است. موج‌های راست رو و چپ رو با تبعیت از روش مرجع [۳۳] تخمین زده می‌شود:

$$S_R = \max(u_L + c_L, u_R + c_R) \quad , \quad S_L = \min(u_L - c_L, u_R - c_R) \quad (11)$$

سرعت موج میانی با استفاده از روش HLL تخمین زده می‌شود:

$$S^* = \frac{(\rho u^2 + P)_L - (\rho u^2 + P)_R - S_L(\rho u)_L + S_R(\rho u)_R}{(\rho u)_L - (\rho u)_R - S_L \rho_L + S_R \rho_R} \quad (12)$$

با توجه به اینکه در این مدل از آسایش فشار استفاده نشده است کسر حجمی در طول گذر فصل مشترک ثابت می‌ماند:

$$\alpha_{kR}^* = \alpha_{kR} \quad , \quad \alpha_{kL}^* = \alpha_{kL} \quad (13)$$

جمله ناپایستار ظاهر شده در سمت چپ معادله انتقال فاز

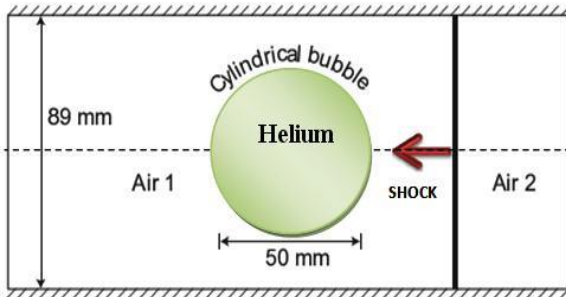
#### ۴- مسائل تست و اعتبار سنجی

در این بخش مسائل معتبر دو فازی اندرکنش شاک و حباب هلیوم و مسئله برخورد شاک آبی به حباب هوا در آب شبیه‌سازی و مطالعه شد.

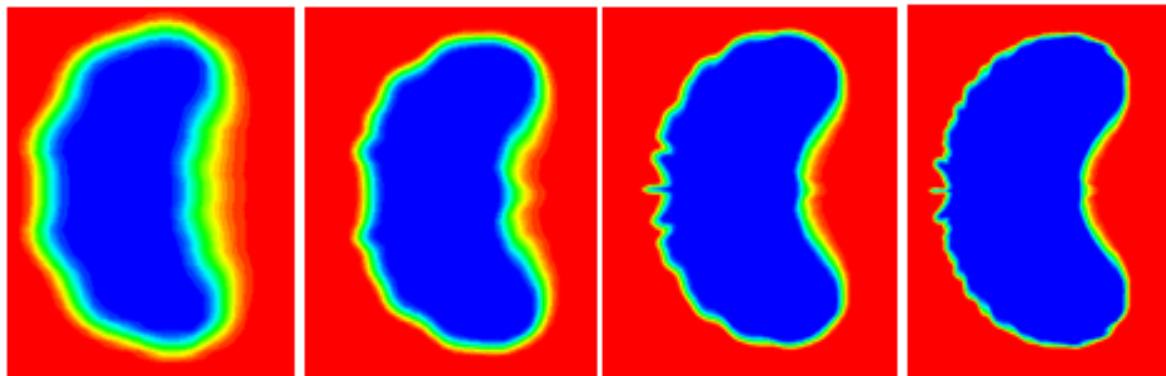
#### ۴-۱- اثرات متقابل دو بعدی شاک و حباب هلیوم در هوا

نتایج تجربی این مسئله توسط مرجع [۳۴] انجام شده است و یک معیار عالی برای بررسی میزان دقت نتایج عددی به حساب می‌آید [۶]. این مسئله توسط محققین در مراجع [۳۵، ۳۶ و ۳۸] نیز شبیه‌سازی شده است. در این مسئله یک شاک صفحه‌ای با  $M_S = 1/22$  در هوا حرکت نموده و با یک حباب استوانه‌ای هلیوم برخورد می‌نماید. در حالت تجربی حباب‌ها توسط باد کردن

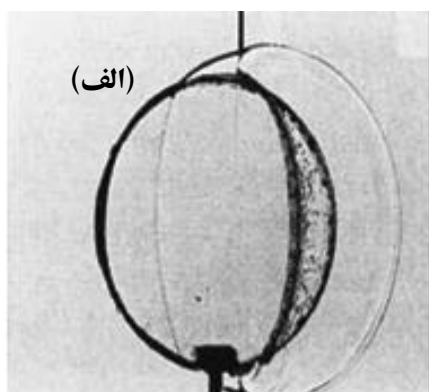
سیلندرهایی که دیواره آن از غشای بسیار نازک از جنس نیترو سلولز است ساخته شده‌اند.

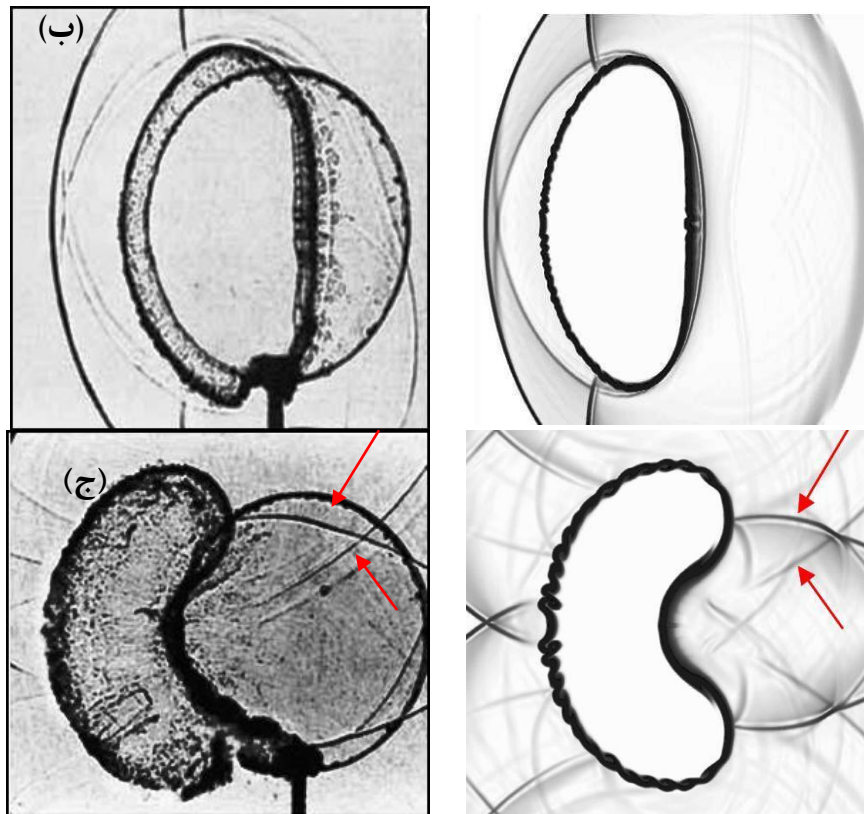


شکل (۱): موقعیت اولیه و ابعاد میدان محاسباتی مسئله اثرات متقابل شاک و حباب هلیوم در هوا



شکل (۲): بررسی استقلال معادلات نسبت به اندازه شبکه و همگرایی جواب‌ها برای مسئله برخورد شاک با حباب هلیوم در زمان ۲۳۰ میکرو ثانیه، به ترتیب از چپ به راست: ۱۵۰×۵۰، ۳۰۰×۱۰۰، ۶۰۰×۲۰۰، ۱۲۰۰×۴۰۰.





شکل (۳): اثرات متقابل شاک و حباب هلیم در هوا. سمت چپ: نتایج تجربی به صورت تصاویر سایه‌ای [۴۰]. سمت راست: نتایج عددی به صورت تصاویر از نوع شلرین.  $CFL = 0/8$ . به ترتیب از بالا به پایین: ۵۲، ۱۰۲ و ۲۴۵ میکرو ثانیه

[۳۴] آورده شده است. در شکل (۱) الگوی میدان حل این مسئله نشان داده شده است. ابعاد میدان محاسباتی  $287 \times 89$  میلی‌متر است. شرایط اولیه حل این مسئله در جدول (۱) ارائه شده است.

پس از برخورد شاک به حباب، ساختار یک بعدی شاک به هم خورده و حباب نیز حالت مدور خود را از دست می‌دهد. تصاویر جالبی از توالی زمانی و گذر شاک از حباب در مرجع

جدول (۱): شرایط اولیه برای مسئله اندرکنش شاک و حباب هلیم در هوا

سیال	P(Pa)	V(m/s)	u/۳۴۳	$\rho(\text{kg/m}^3)$	$\gamma$
هوا ۱	۱۰۰۰۰۰	۰	۰	۱/۴	۱/۴
هوا ۲	۱۵۶۹۸۰	۰	-۰/۳۳۶	۱/۹۲۶۹۱	۱/۴
هلیم	۱۰۰۰۰۰	۰	۰	-۰/۲۵۴۶۳	۱/۶۴۸

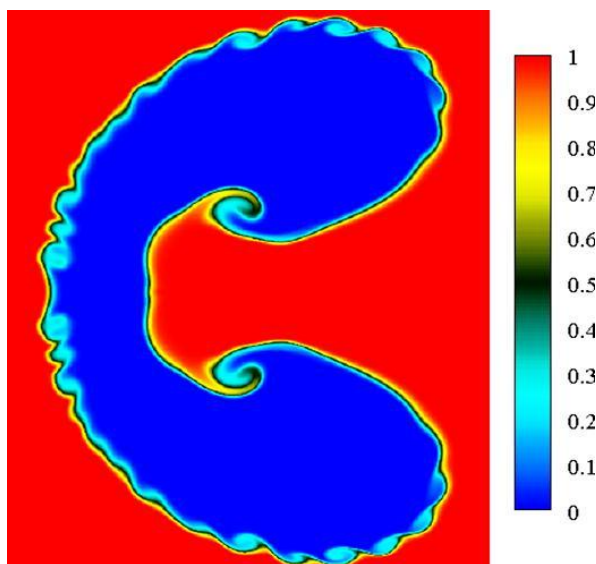
ایجاد نمی‌شود و شکل کلی جواب به ازای تعداد شبکه‌های مختلف یکسان است. در ادامه نتایج عددی به ازای  $1200 \times 400$  سلول و با  $CFL = 0/8$  ارائه می‌شوند.

در شکل (۳) در سمت راست، تصاویر نتایج عددی از نوع شلرین و در سمت چپ تصاویر تجربی [۳۴] نشان داده شده است. شاک از سمت راست به چپ حرکت می‌نماید. با توجه به آنکه سرعت صوت در هلیم درون حباب بیشتر از سرعت صوت در هوای بیرون است، شاک عبوری از درون حباب پیشاپیش

در شکل (۲) استقلال جواب‌های عددی نسبت به اندازه شبکه برای مسئله برخورد شاک با حباب هلیم در زمان ۲۳۰ میکرو ثانیه به ازای تعداد شبکه‌های  $150 \times 50$ ،  $300 \times 100$ ،  $600 \times 200$ ،  $1200 \times 400$  مطالعه شد. همان‌طور که در شکل (۲) دیده می‌شود به ازای تعداد شبکه کم، پخش عددی بالایی در فصل مشترک اتفاق می‌افتد. با افزایش تعداد شبکه بر وضوح فصل مشترک افزوده شده و دیفیوژن کم‌تر می‌شود. نکته با اهمیت آنست که نوسان عددی ناخواسته به ازای تعداد شبکه مختلف

فصل مشترک کانتور تغییرات کسر حجمی در شکل (۴) ارائه شده است. همان‌طور که دیده می‌شود بر خلاف روش حاضر که بر اساس پخش عددی در فصل مشترک استوار است ولی پخش عددی ایجاد شده در فصل مشترک بسیار اندک است. در شکل (۵) توزیع فشاری در میدان جریان دیده می‌شود. با توجه به آنکه سرعت صوت در حباب هلیوم از سرعت صوت در محیط بیرون بیشتر است، حباب هلیوم مانند یک لنز واگرا برای شاک برخوردی عمل می‌نماید و سبب پخش امواج ضربه‌ای و فشاری می‌شود. این نکته در [۳۸] اشاره شده است. در شکل (۶) تغییر موقعیت حباب در راستای افقی بر حسب زمان مطالعه شده و با نتایج تجربی اندازه‌گیری شده توسط [۳۴] و نتایج عددی [۶] و [۳۶] مقایسه شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود تطابق خوبی بین نتایج بدست آمده با مقادیر تجربی و کارهای قبلی مشاهده می‌شود. مقادیر کمی موقعیت‌های مکانی مختلف در جدول (۲) ارائه شده است.

شاک برخوردی حرکت می‌کند و همان‌طور که در شکل (۳-الف) مشاهده می‌شود در زمان  $52 \mu\text{sec}$  به نزدیکی مرز بیرونی حباب می‌رسد. به دلیل شکل مدور حباب، شاک انعکاسی به صورت منحنی است. به همان دلیل مشابه، شاک‌های انعکاسی و همچنین شاک‌های عبوری نیز به صورت منحنی هستند. شکل (۳-ب) اندرکنش شاک و حباب در فاصله زمانی کمی قبل از آنکه شاک حباب را ترک نماید نمایش می‌دهد. در شکل (۳-ج) به وضوح شاک‌های انعکاسی زیادی از دیواره‌های بالا و پایین دیده می‌شود. یک جت جریان از هوای اطراف نیز از هوای بالادست به درون حباب نفوذ می‌نماید. همان‌طور که در شکل (۳) می‌توان دید، ناپایداری کلونین - هلمهلتز در طول فصل مشترک به واسطه سرعت برشی در فصل مشترک و اختلاف چگالی ایجاد می‌شود. این ناپایداری توسط روش‌های عددی محدودی مانند [۱۲] و [۳۵] و [۳۸] که روش‌های پیچیده هستند تسخیر شده است. برای مشاهده واضح‌تر این ناپایداری در

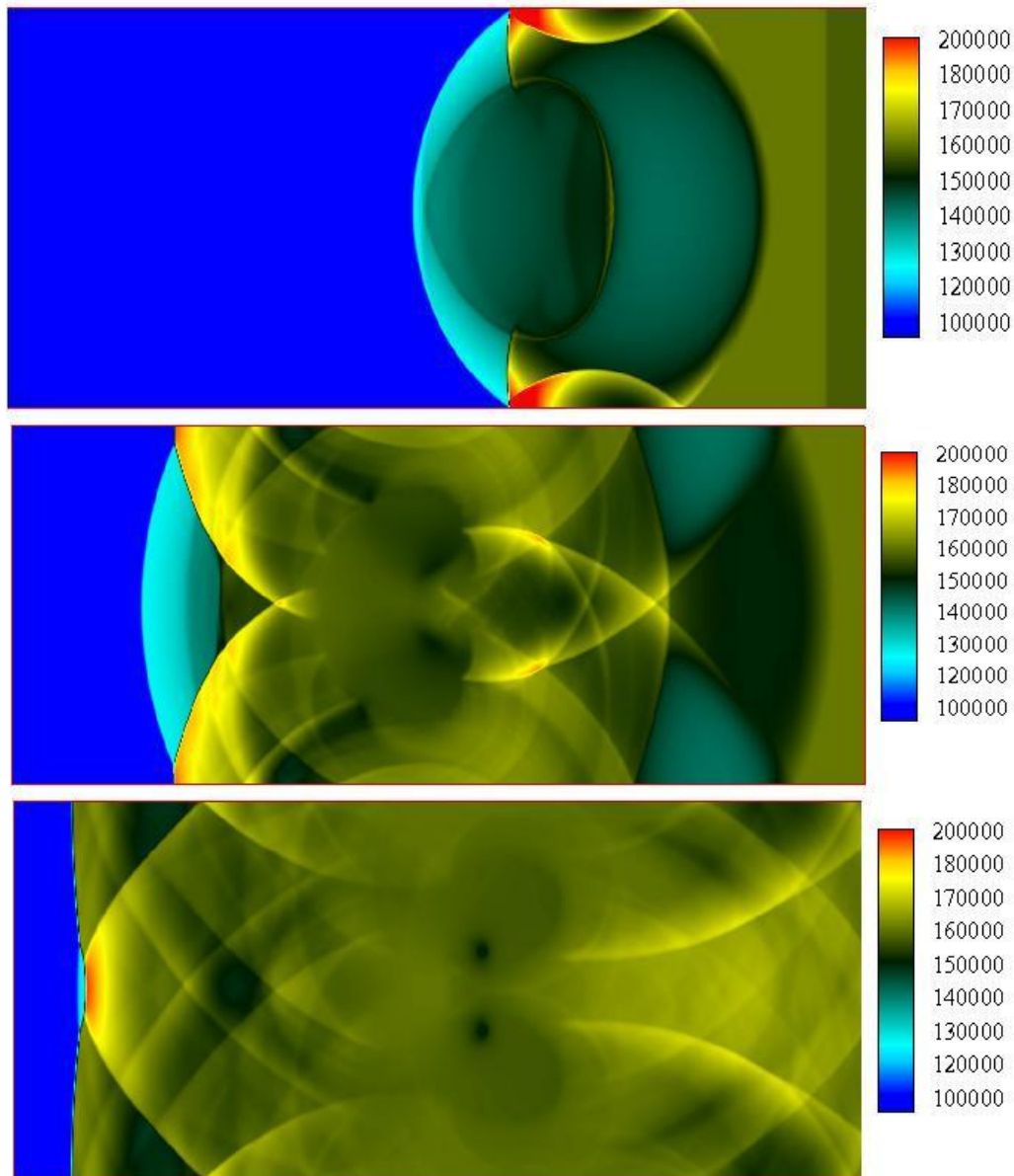


شکل (۴): تصویر بزرگ شده از توپولوژی فصل مشترک در زمان  $t = 432 \mu\text{s}$  ناپایداری کلونین هلمهلتز به وضوح در فصل مشترک در اثر برخورد شاک با حباب هلیوم مشاهده می‌شود.

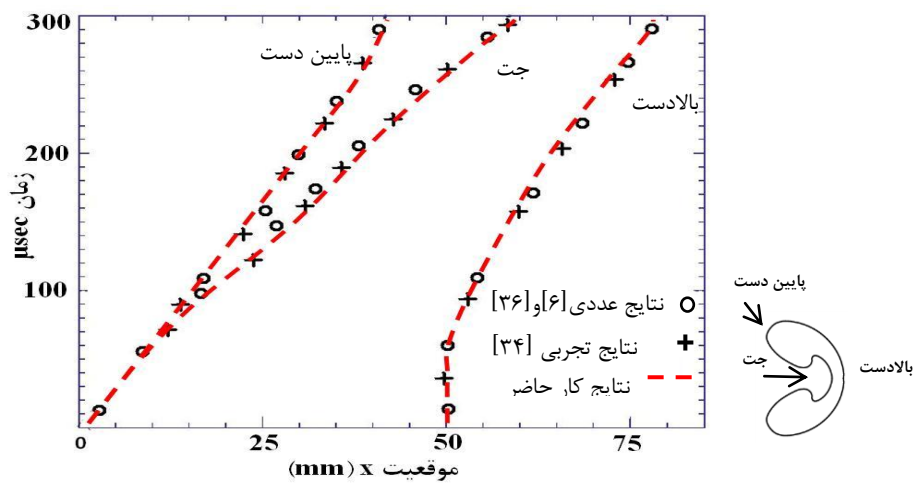
ماخ  $1/72$  متلاشی می‌شود. میدان حل عددی شامل یک مستطیل به ابعاد  $29 \times 24 \text{ mm}$  و مرکز حباب در محل (۱۲ و ۱۲) قرار دارد. شاک در فاصله ۱۶ میلی‌متری از سمت راست مرکز حباب واقع است. شرایط اولیه این مسئله به شرح جدول (۳) است.

#### ۴-۲- اندرکنش برخورد شاک با یک حباب هوا در آب

این مسئله به دلیل اختلاف زیاد چگالی دو فاز آب و هوا و اثرات متقابل شاک با حباب جز مسائل پیچیده به حساب آمده و در حال حاضر به عنوان یک مسئله آزمایش روش‌های عددی شناخته شده است. یک حباب استوانه‌ای هوا به قطر ۶ میلی‌متر درون یک استخر آب قرار دارد. این حباب توسط یک شاک با



شکل (۵): توزیع فشار اثرات متقابل شاک با ماخ  $1/22$  و حباب هلیوم در هوا. به ترتیب از بالا به پایین:  $0.2$ ،  $245$  و  $435$  میکرو ثانیہ



شکل (۶): نمودار تغییر زمانی موقعیت مکانی حباب هلیوم در سه لبہ بالادست، پایین دست و جت.



جدول (۲): مقادیر کمی تغییر زمانی موقعیت مکانی حباب هلیم در سه لبه بالادست، پایین دست و جت.

لبه پایین دست			لبه بالا دست			زمان میکرو ثانیه
خطا %	نتایج کار حاضر	نتایج تجربی [۳۴] و [۳۶]	خطا %	نتایج کار حاضر	نتایج تجربی [۳۴]	
۰	۲	۲	۰	۰/۲۴۰	۰/۲۴۰	۶۰
۰	۲	۲	۱/۲	۰/۳۹۸	۰/۳۹۳	۹۰
۰/۰۵	۲/۰۵۳	۲/۰۵۲	۱/۱	۰/۵۴۰	۰/۵۳۴	۱۲۰
۰/۰۵	۲/۱۱۲	۲/۱۱۱	۱/۹	۰/۶۸۵	۰/۶۷۲	۱۵۰
۰/۱	۲/۱۹۰	۲/۱۸۸	۲	۰/۸۳۰	۰/۸۱۴	۱۸۰
-۰/۰۵	۲/۳۲۰	۲/۳۲۱	۰/۸	۰/۹۴۰	۰/۹۳۲	۲۱۰
-۰/۲	۲/۳۹۵	۲/۴۰۰	۰/۶	۱/۰۷۵	۱/۰۶۵	۲۴۰

جدول (۳): شرایط اولیه برای مسئله اندرکنش شاک و حباب هوا در آب

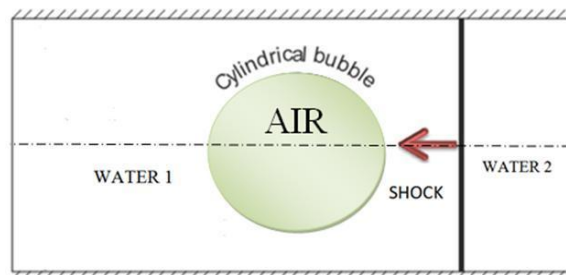
$\gamma$	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	u(m/s)	V(m/s)	P(Pa)	$P_{\infty}$ (Pa)	سیال
۴/۴	۱۰۰۰	۰	۰	$1 \times 10^5$	$6 \times 10^8$	آب ۱
۴/۴	۱۳۲۳/۶	-۶۸۱/۵۸	۰	$1/9 \times 10^9$	$6 \times 10^8$	آب ۲
۱/۴	۱	۰	۰	$1 \times 10^5$	۰	هوا

قسمت، مجزا شده و به دو حباب تقسیم می‌شود. جت آب با سرعت بسیار بالا به آب ساکن جلوی حباب برخورد می‌نماید. این پدیده در شکل (۸-ب و د) قابل ملاحظه است. در اثر اصابت جت با آب ساکن جلوی آن یک ناحیه متمرکز پرفشار ایجاد می‌شود و در نتیجه یک موج شاک ایجاد می‌شود که به صورت شعاعی و پیوسته انبساط می‌یابد (شکل (۹)). در اثر برخورد امواج مختلف به دیواره، امواج انعکاسی ایجاد می‌شود و باعث اندرکنش پیچیده‌تر با حباب و میدان جریان می‌شود. با گذشت زمان، حباب هوا به شکل پیوسته کوچک می‌شود تا اینکه در زمان‌های طولانی ناپدید می‌شود (شکل (۱۰)). نتایج حاصله فاقد هر گونه نوسان عددی بوده و هم خوانی خوبی با تحقیقات قبلی [۳۷، ۱۴، ۳۹] دارد.

#### ۵- نتیجه گیری

در این مقاله روش عددی گودونوف و حلگر ریمن HLLC با دقت مرتبه ۲ برای شبیه‌سازی دوبعدی جریان‌های تراکم پذیر دوفازی با حضور شاک با استفاده از معادلات دوسیالی پنج معادله‌ای کاپیلا مورد مطالعه و بررسی قرار گرفت. این روش عددی که زیر مجموعه روش‌های فصول مشترک انتشاری است، به دلیل استفاده از شبکه ثابت محاسباتی از نظر کاربردی ساده است. از یک رابطه سرعت صوت که متغیرهای آن بر اساس مقادیر مخلوط دوفازی قابل محاسبه است استفاده و کارایی روش

شرایط مرزی بالا و پایین به صورت دیواره و شرایط مرزی سمت چپ و راست به صورت غیر انعکاسی در نظر گرفته شده است. وضعیت هندسی مسئله در شکل (۷) ارائه شده است.

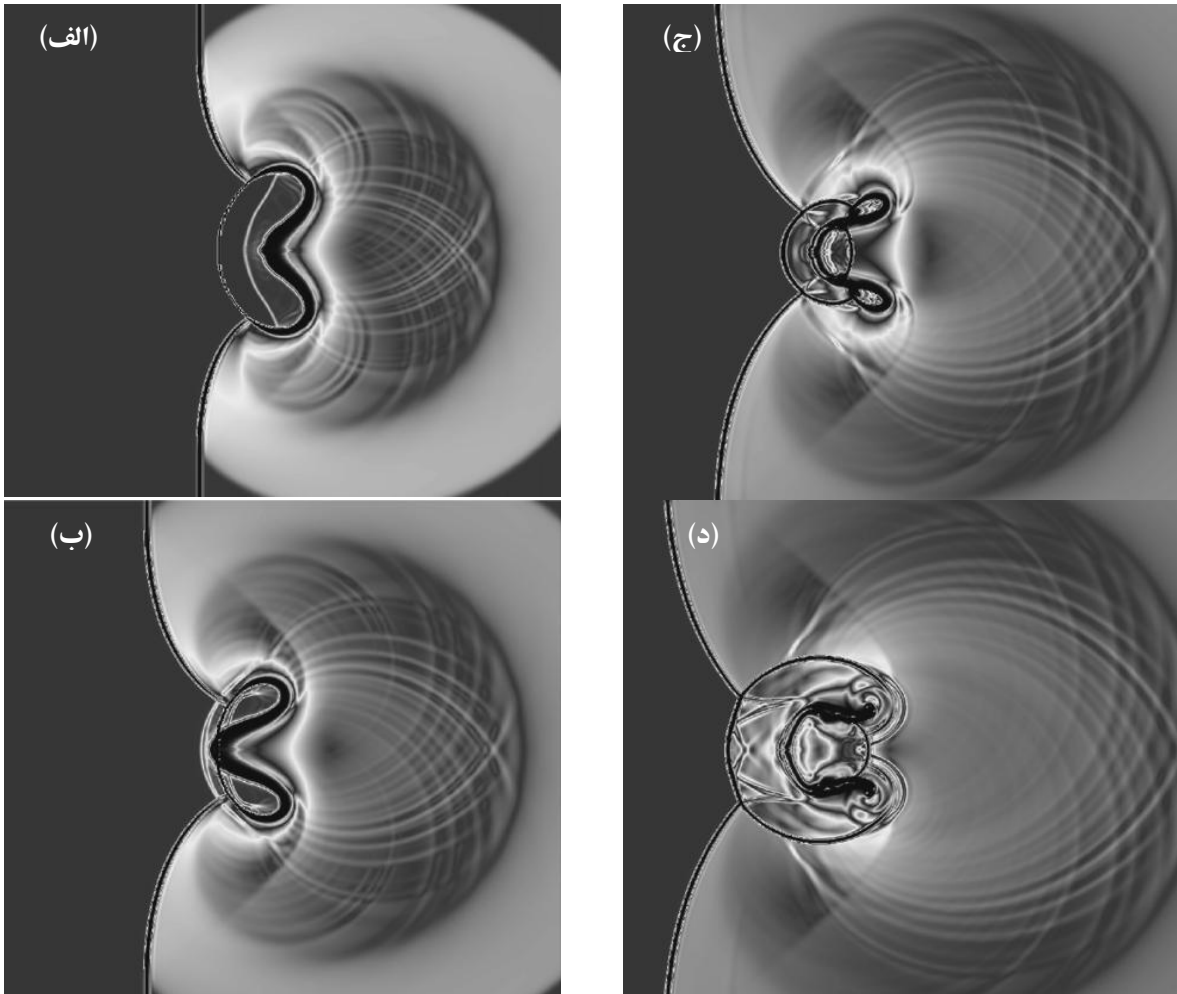


شکل (۷): موقعیت اولیه و ابعاد میدان محاسباتی مسئله اثرات متقابل شاک و حباب هوا در آب.

حل عددی با تعداد مش ۳۶۰۰۰۰ انجام شد. ارزیابی نتایج شبیه‌سازی عددی در شکل (۸) به صورت تصویر از نوع شلرین مشاهده می‌شود. در شکل (۹) و (۱۰) به ترتیب پلات‌های کانتور توزیع فشار و توزیع کسر حجمی گاز ارائه شده است. مشاهده می‌شود بعد از آنکه شاک آبی با حباب برخورد می‌نماید، یک موج رقیق ساز<sup>۱۲</sup> قوی به سمت عقب از سمت فصل مشترک منعکس می‌شود و یک شاک ضعیف از هوای درون حباب عبور می‌کند. این شاک ضعیف فقط در تصویر شلرین (۸-الف) قابل دیدن است. یک جت آب توسط موج رقیق ایجاد می‌شود و در راستای خط مرکزی حباب را به پیش می‌راند تا به شکل هلالی در آید. در نتیجه اصابت این جت آب، بالاخره حباب به دو

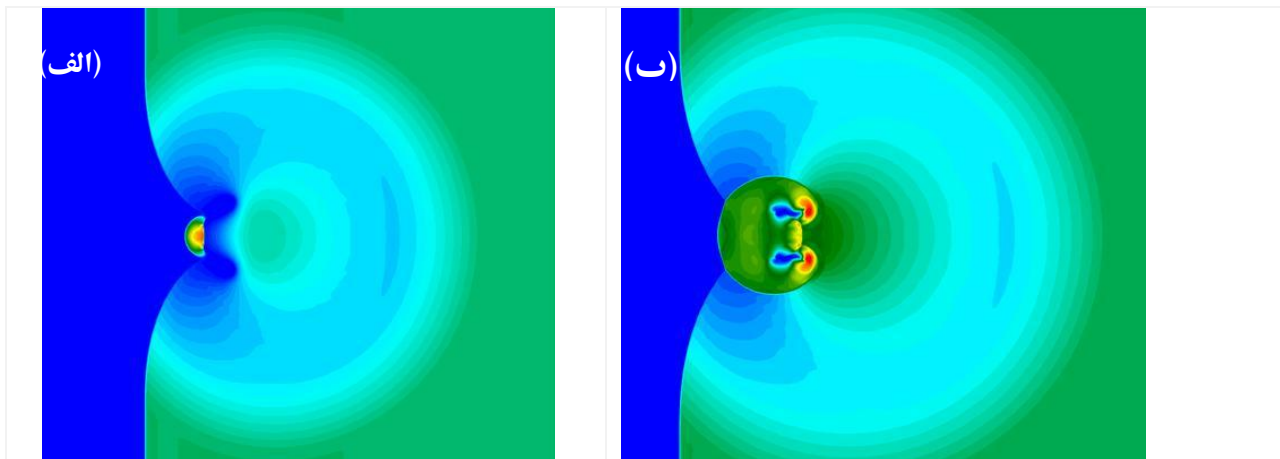
نتایج عددی قبلی با روش‌های عددی پیچیده هم‌خوانی دارد. از مزایای دیگر این روش عدم نیاز به CFL پایین برای مسائل است که زمان محاسباتی را تا حد زیادی کاهش می‌دهد.

عددی برای مسائل مختلف جریان‌های دو فازی گاز-گاز و گاز - مایع با حضور شاک مطالعه شد. نتایج عددی دوبعدی بدست آمده دقیق و فاقد هرگونه نوسان بوده و پخش عددی پدیدار شده در فصل‌های مشترک بسیار اندک است و با نتایج تجربی و

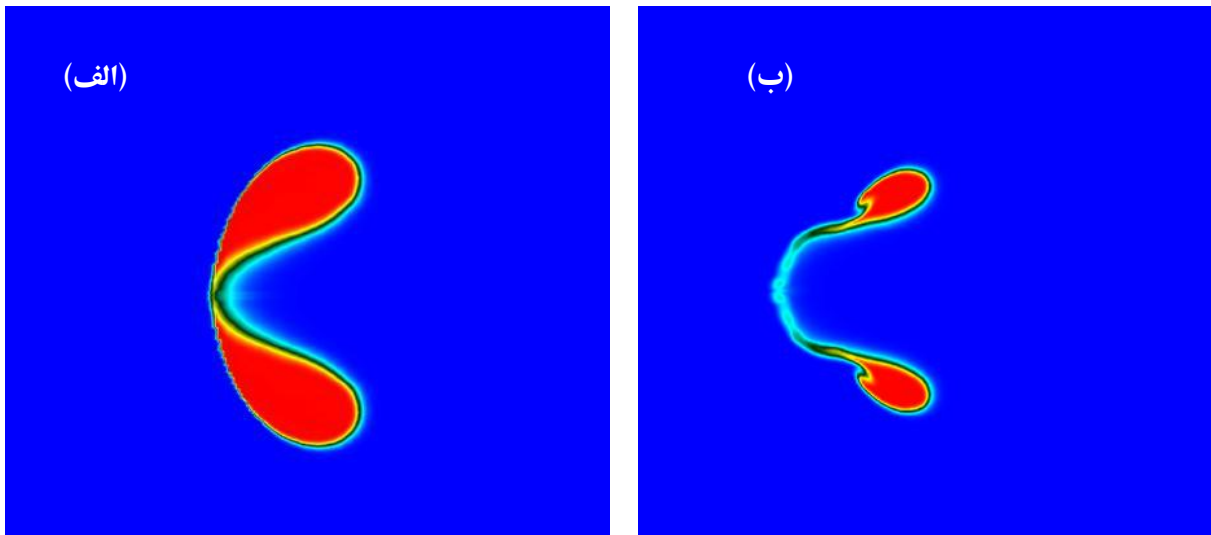


شکل (۸): اثرات متقابل شاک و حباب هوا در آب. نتایج عددی به صورت تصاویر از نوع شلرین  $CFL = 0.8$

الف)  $7 \mu s$ ، ب)  $7.5 \mu s$ ، ج)  $8 \mu s$ ، د)  $8.5 \mu s$



شکل (۹): اثرات متقابل شاک و حباب هوا در آب. نتایج زمانی عددی کانتور فشار الف)  $7.5 \mu s$ ، ب)  $8.5 \mu s$



شکل (۱۰): اثرات متقابل شاک و حباب هوا در آب. ارزیابی زمانی عددی کسر حجمی هوا. الف)  $7/5 \mu s$ ، ب)  $8/5 \mu s$

### فهرست علائم

	علائم یونانی	u	سرعت محوری (m/s)
$\alpha$	کسر حجمی	v	سرعت عمودی (m/s)
$\rho$	چگالی، $kg/m^3$	P	فشار (Pa)
$P_\infty$	ثابت معادله حالت	E	انرژی درونی کل
$\gamma$	ثابت معادله حالت	e	انرژی درونی
	زیر نویس	t	زمان (s)
k	نوع فاز (مایع یا گاز)	U	بردار پایستار
	بالا نویس	c	سرعت صوت (m/s)
*	حالت میانی بین دو موج	S	سرعت موج (m/s)
		F	شار عددی

### ۶-مراجع:

- flows". J. Comput. Phys. 100, pp:25–37. 1992.
- [۶] H. Terashima, G. Tryggvason. "A front-tracking/ghost-fluid method for fluid interfaces in compressible flows". J. Comput. Phys. 228, pp: 4012-4037, 2009.
- [۷] H. Terashima, G. Tryggvason. "A front-tracking method with projected interface conditions for compressible multi-fluid flows". Computers & Fluids 39, pp:1804–1814, 2010.
- [۸] J. Doneal, A. Huerta, J.P. Ponthot, and A. Rodriguez-Ferran. "Arbitrary Lagrangian-Eulerian Methods". In E. Stein, R. de Borst, and T. J. Hughes, editors, Encyclopedia of Computational Mechanics, chapter 14. John Wiley & Sons, 2004.
- [۱] D. Scheffler and J. Zukas. "Practical aspects of numerical simulations of dynamic events: Material interfaces". Int. J. Impact Eng. 24(8), pp: 821–842, 2000.
- [۲] J. Pilliod and E. Puckett. "Second-order accurate Volume-of-Fluid algorithms for tracking material interfaces". J. Comput. Phys. 199, pp: 465–502, 2004.
- [۳] J. A. Sethian. "Level Set Methods: Evolving Interfaces in Geometry, Fluid, Mechanics, Computer Vision and Material Science". Cambridge University Press, 1996.
- [۴] S. Osher and R. Fedkiw. "Level set methods: An overview and some recent results". J. Comput. Phys. 169(2), pp: 463–502, 2001.
- [۵] S. Unverdi and G. Tryggvason. "A front tracking method for viscous incompressible

- & Fluids 36, pp: 1061–1080, 2007.
- S.T.Munkejord. “A Numerical Study of Two-Fluid Models with Pressure and Velocity Relaxation”. *Adv. Appl. Math. Mech.* 2, pp: 131-159, 2010. [۲۱]
- S.A.Tokareva,E.F.Toro . “HLLC-type Riemann solver for the Baer–Nunziato equations of compressible two-phase flow”. *Journal of Computational Physics* 229, pp: 3573–3604, 2010. [۲۲]
- M.Dumbser,E.F. Toro, “A Simple Extension of the Osher Riemann Solver to Non-conservative Hyperbolic Systems”. *J. Sci. Comput.* DOI 10.1007/s10915-010-9400-3 . 2010. [۲۳]
- R.Kapila. R. Menikoff. J. Bdzil. S. Son. and D. Stewart. “Two-phase modeling of DDT in granular materials: Reduced equations”. *Phys. Fluid.* 13, pp: 3002–3024. 2001. [۲۴]
- R. Saurel. F. Petitpas. and R. A. Berry. “Simple and efficient relaxation methods for interfaces separating compressible fluids, cavitating flows and shocks in multiphase mixtures”. *J. Comput. Phys.* 228(5), pp: 1678–1712. 2009. [۲۵]
- G. Allaire. S. Clerc. and S. Kokh. “A five-equation model for the simulation of interfaces between compressible fluids”. *J. Comput. Phys.* 181, pp: 577–616. 2002. [۲۶]
- Murrone and H. Guillard. “A five-equation reduced model for compressible two-phase flow problems”. *J. Comput. Phys.* 202(2), pp: 664–698. 2005. [۲۷]
- J.J. Kreeft. B. Koren. “A new formulation of Kapila’s five-equation model for compressible two-fluid flow, and its numerical treatment”. *J. Comput. Phys.* 229, pp: 6220–6242, 2010. [۲۸]
- S. Qamar. M. Ahmed. “A high order kinetic flux-vector splitting method for the reduced five-equation model of compressible two-fluid flows”. *J. Comput. Phys.* 228, pp: 9059-9078, 2009. [۲۹]
- S. Koch. F. Lagoutière. “An anti-diffusive numerical scheme for the simulation of interfaces between compressible fluids by means of a five-equation model”. 229, pp: 2773-2809, 2010. [۳۰]
- M. Baer and J. Nunziato. “A two-phase mixture theory for the deflagration-to-detonation transition (DDT) in reactive granular materials.” *Int. J. Multiphase Flows.* 12, pp: 861–889. 1986. [۳۱]
- H.R. Anbarlooei. K. Mazaheri. “Moment of fluid interface reconstruction method in multi-material arbitrary Lagrangian Eulerian (MMALE) algorithms”. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 198, pp: 3782–3794, 2009. [۹]
- R. Saurel and O. Le Metayer. “A multiphase model for interfaces, shocks, detonation waves and cavitation”. *J. Fluid Mech.* 431, pp: 239–271. 2001. [۱۰]
- E. Johnsen. T. Colonius.” Implementation of WENO schemes in compressible multicomponent flow problems”. *J. Comput. Phys.* 219, pp: 715–732, 2006. [۱۱]
- S. Kawai. H. Terashima. “A high-resolution scheme for compressible multicomponent flows With shock waves”. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 66(10), pp: 1207-1225, 2010. [۱۲]
- E. Johnsen. “Spurious oscillations and conservation errors in interface-capturing schemes”. *Annual Research Briefs* 2008. Center for Turbulence Research. NASA Ames and Stanford University; 115–126. 2008. [۱۳]
- C.-H. Chang. M.-S. Liou. “A robust and accurate approach to computing compressible multiphase flow: Stratified flow model and AUSM +-up scheme”. *J. Comput. Phys.* 225, pp: 840–873, 2007. [۱۴]
- R. Abgrall. “How to prevent pressure oscillations in multicomponent flow calculations: A quasi-conservative approach”. *J. Comput. Phys.* 125(1) , pp: 150–160. 1996. [۱۵]
- K.-M. Shyue. “An efficient shock-capturing algorithm for compressible multi-component problems”. *J. Comp. Phys.* 142, pp: 208–242. 1998. [۱۶]
- K.-M. Shyue. “A high-resolution mapped grid algorithm for compressible multiphase flow problems”. *J. Comput. Phys.* 229, pp: 8780–8801, 2010. [۱۷]
- R. Saurel. R. Abgrall. “A multiphase Godunov method for compressible multifluid and multiphase flows”. *J. Comput. Phys.* 150(2) , pp: 425–467. 1999. [۱۸]
- C.E. Castro ,E.F.Toro. “A Riemann solver and upwind methods for a two-phase flow model non-conservative form”. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 50, pp: 275–307, 2006. [۱۹]
- S.T.Munkejord.” Comparison of Roe-type methods for solving the two-fluid model with and without pressure relaxation”. *Computers* [۲۰]

- J.W. Banks et al. "A high-resolution Godunov method for compressible multi-material flow on overlapping grids". J. Comput. Phys. 223, pp: 262–297, 2007. [۳۸]
- R.R. Nourgaliev, T.N. Dinh, T.G. Theofanous. "Adaptive characteristics-based matching for compressible multifluid dynamics". J. Comput. Phys. 213, pp: 500–529, 2006. [۳۹]
- S.K. Sambasivan, H.S. UdayKumar. "Sharp interface simulations with Local Mesh Refinement for multi-material dynamics in strongly shocked flows". Computers & Fluids 39, pp: 1456–1479, 2010. [۴۰]
- E. F. Toro. "Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics". Springer, Berlin, 1999. [۳۲]
- S. F. Davis. "Simplified second-order Godunov-type methods". SIAM J. Sci. Statist. Comput. 9, pp: 445–473, 1998. [۳۳]
- J.F. Haas, B. Sturtevant. "Interaction of weak shock waves with cylindrical and spherical gas inhomogeneities". Journal of Fluid Mechanics 181, pp: 41-76, 1987. [۳۴]
- Marquina. P. Mulet. "A flux-split algorithm applied to conservative models for multicomponent compressible flows". J. Comput. Phys. 185 120-138, 2003. [۳۵]
- J.J. Quirk, S. Karni. "On the dynamics of a shock-bubble interaction". Journal of Fluid Mechanics 318, pp: 129–163, 1996. [۳۶]
- C. Wang, C.-W. Shu. "An interface treating technique for compressible multi-medium flow with Runge–Kutta discontinuous Galerkin method". J. Comput. Phys. 229, pp: 8823–8843, 2010. [۳۷]

## ۷- پی نوشت

- <sup>۱</sup> Sharp interface methods  
<sup>۲</sup> Diffuse interface methods  
<sup>۳</sup> level set  
<sup>۴</sup> volume of fluid  
<sup>۵</sup> Front-tracking / Ghost cell  
<sup>۶</sup> Arbitrary Lagrangian-Eulerian  
<sup>۷</sup> diffusion  
<sup>۸</sup> Upwind  
<sup>۹</sup> WENO  
<sup>۱۰</sup> quasi-conservative  
<sup>۱۱</sup> Muscl-Hancock  
<sup>۱۲</sup> Rarefaction