ارائهٔ روشی برای به دست آوردن تابع تصمیم برای بهینه سازی چند پاسخه در روش سطح پاسخ (RSM)

رسول نورالسناء
دانشیار
دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه علم و صنعت ایران

محمد جواد اصغرپور
دانشیار
دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه علم و صنعت ایران

هیرش سلطان‌پناه
دانشجوی دکتری
مهندسی صنایع، گرایش مدیریّت و بهره‌وری سیستم،
دانشگاه آزاد اسلامی واحدعلوم وتحقیقات

چکیده

در این مقاله، ابتدا روش سطح پاسخ به عنوان یکی از مهم ترین ابزارهای بهبود کیفیّت مختصراً توضیح داده می‌شود. سپس با مرور مطالعات صورت گرفته در بهینه‌سازی چند پاسخه در چارچوب روش سطح پاسخ، در مرحلهٔ بهینه‌سازی متمرکز می‌شویم و مطالعات صورت گرفته را در این حوزه در سه گروه تابع زیان، تابع تصمیم و روشهای کلاسیک دسته‌بندی کرده، هر کدام را مختصراً بررسی می‌کنیم. سپس نگاهی به مهم ترین نظرات دربارهٔ ویژگی های یک مدل تصمیم گیری مناسب خواهیم داشت. در ادامه مقاله ضمن بیان محدودیّت روش های متداولِ تابع تصمیم مورد استفاده در روش سطح پاسخ، روشی برای استخراج تابع تصمیم ارائه می‌گردد. از مهم ترین ویژگی های روش پیشنهادی می‌توان به در نظر گرفتنِ ارتباط مشخّصه‌های کیفی، فراهم کردن شرایط کمک و راهنمایی برای تصمیم گیرنده در انسجام بخشیدن به ساختار فکری، هماهنگ بودن روش با روش سطح پاسخ و همچنین سادگی و قابل فهم بودن آن برای تصمیم گیرنده اشاره کرد. در پایان کارایی روش پیشنهادی با یک مثال نشان داده می‌شود.

کلمات کلیدی

تابع تصمیم، روش سطح پاسخ، تصمیم گیرنده، چند پاسخه،تابع زیان

Introduction a Method to Obtain Decision-Making Function in Optimization of the Multiresponses in Response Surface Method (RSM)

M.G. Asgarpour

R. Noorosana

H. Soltanpanah

Department of Industrial Engineering,
Iran University of Science& Azad University

Abstract

In this paper response surface method (RSM) is explained initially as one of the most important tools of quality improvement , then a review of the literature is presented in relation with the optimization of multiresponses within RSM frame work. Attempts are classified in three groups: loss function, decision-making function, and classic method. Finally the most important opinion on the characteristics of some suitable decision making models will be studied. The paper also presents the limitations related to the common methods of decision-making function which are used in RSM. A method is given to extract decision-making function. The most important features of the suggested method are the relationship among quality attributes which provide assistance and guidelines for decision makers (DM) to organize their pattern of thinking. The method is in compliance with RSM and it is also easier to understand by the DM. The efficiency of the proposed method is illustrated by an example.

Keywords

Response Surface Method (RSM), decision makers (DM), multiresponses, decision-making function, loss function*

مقدمه

به کار گیری اطّلاعات آماری برای بهینه‌سازی به اوایل قرن ۱۹ باز می‌گردد [۱] روش های آماری متعدّدی برای بهبود فرآیندهای تولید مطرح شده است که از مهم ترین این روش ها طرح‌ریزی آزمایش ها[1] (DOE) است. طرح‌ریزی آزمایش ها ابزاری مناسب برای بررسی روابط علیّ بین متغیّرهای قابل کنترل و مشخّصه های کیفی کالای مورد نظر است. ارتباط بین مشخصه‌های کیفی و متغیرهای قابل کنترل با روش سطح پاسخ[2] (RSM) به دست می‌آید. از نظر Box و Hunter، RSM مجموعه‌ای از تکنیک‌های طرح‌ریزی آزمایش ها و بهینه‌سازی است که توسط آمار دانان و صاحب نظران علوم مختلف برای بهینه‌یابی مورد استفاده می شود[2].

در RSM با به کارگیری طرح های آزمایشی مناسب، اطّلاعات ساخت یافته‌ای به دست می‌آید که با برازش مدل مناسب برداده‌های به دست آمده، منحنی های سطح پاسخ به دست می‌آید که برای بهبود فرایند تولید از آن استفاده می‌شود. RSM دارای این مزّیت است که بخشی از محاسبات آن را می‌توان به صورت موازی انجام داد. همچنین می‌توان میزان حسّاسیّت پارامترهای تخمینی را به دست آورد[3]. در مجموع تحقیقات فعلی در زمینه RSM در سه مسیر دنبال می‌شود[4]: مسیر اوّل شناسایی و توسعهٔ طرح های آزمایشی برای به دست آوردن اطّلاعات مناسب با کم ترین هزینهٔ ممکن است. مسیر دوم، توسعهٔ مدل های برآورد سطح پاسخ و مسیر سوم در جهت توسعهٔ روش هایی است که به طور مکرر، دقّت مدل سطح پاسخ را بهبود بخشد.

از آنجا که کالاها معمولاً بیش از یک مشخصهٔ کیفی دارند، بهبود همزمان این مشخصه‌های کیفی از اهمیّت ویژه‌ای برخوردار است. مشکل معمول در بهینه‌سازی همزمان چند پاسخه که هنگام بهینه کردن یک مشخصه سایر مشخصه‌های کیفی تحت تأثیر قرار می‌گیرند. به بیان دیگر مجموعه‌ای از شرایط که برای یک خصوصیّت، بهینه است لزوماً برای سایر مشخصه‌ها بهینه نیست به همین دلیل طراحی روشی که بتواند با در نظر گرفتن جنبه‌های مختلف، محصول قابل قبولی را ارائه کند از اهمیّت ویژه‌ای برخوردار است [5]. بهینه‌سازی چند پاسخه در چارچوب RSM تلاشی در این راستاست.

۱ـ مدل های بهینه‌یابی چند هدفه

در این مدلها هدف، رسیدن به جواب از میان راه حل های موثر در فضای موجّه است. اگر بردار متغیرهای قابل کنترل، X عوامل محدود کننده $g_i(X)$ و اهداف مورد نظر $y_r(X)$ باشند در این صورت مدل بهینه‌یابی چند هدفه را می‌توان به صورت رابطه (۱) نوشت.

$$\min \quad \text{or} \quad \max \quad [y_i(X), y_2(X), \ldots, y_k(X)] \qquad \text{s.t} \quad x \in g_i(X) \quad i = 1, \ldots, m \tag{1}$$

های مسئله است. از آنجا که سطحی از x که بطور همزمان کلیه اهداف را بهینه کند در عمل، به ندرت اتفاق می‌افتد، به دست آوردن نقطهٔ رضایت بخشِ بینابینی (X^*) به گونه ای که برآیند اهداف را تأمین کند، از اهمیّت ویژه‌ای برخوردار است [6]. مطالعات گسترده‌ای در این حوزه صورت گرفته و روش های متعددی پیشنهاد شده است. این روش ها نظرات DM را به طور عینی یا به طور ضمنی در نظر می‌گیرند[26] .

برای بهبود و بهینه‌یابی فرآیند تولید یکی از روش های متداول، بهینه‌یابی چند پاسخه در چارچوب RSM است.Pignatiello مطالعات را برای بهینه‌یابی چند پاسخه در شش گروه تقسیم‌بندی کرده است[7]. در این مقاله ما این روش ها را در سه گروه کلی دسته‌بندی کرده‌ایم که عبارتند از:

۱ـ روشهای کلاسیک ۲ـ روش تابع زیان ۳ـ روش تابع تصمیم

۱-۱ ـ روش های کلاسیک

این روش ها شبیه روش اهداف حددار[۳] و در مواردی ترکیبی از روش اهداف حددار و روش لکسیکو گراف[۴] هستند. Myers وCarter(1973)[8] برای اولین بار از این روش استفاده کردند. آنها بهینه کردن جواب اصلی همراه با محدود کردن جواب های دیگر را برای اولین بار پیشنهاد کردند. Biles (1975) [9] این روش را به بیش از دو جواب گسترش داد. Khuri، Myers و Vining (1990) با ترکیب روشCarterوMyers با روش Taguchi این روش را گسترش دادند [10]. آنها اثرات پراکندگی و پاسخ را به عنوان دو جواب جداگانه در بهینه‌یابی مورد استفاده قرار دادند.

۱-۲ـ روش تابع زیان

این روش توسط افرادی مانندLo و Tang(1990)[11], Pignatello(1993)[12],Winston(1994)[13], Artiles–Leon ،Ross(1996)[14]،kapur و cho 1996)[16] و همچنین Richard و Robert (2001) [17] مورد استفاده شده است. این روش بر پایهٔ تابع زیان Taguchi استوار است و در آن با الهام از تابع زیان Taguchi توابع زیانی درجهٔ دوّم که در برگیرندهٔ مشخصه‌های کیفی و در مواردی واریانس مشخصه‌های کیفی است، ارائه شده است.

تابع زیان Taguchi، تابعی درجهٔ دو از انحراف مشخصهٔ کیفی مورد نظر از مقدار هدف به صورت رابطهٔ (۲) است.

$$\text{loss}(y(X) = k(y(X) - T) \tag{2}$$

در رابطه (۲)، kضریب زیان است. Artiles–Leon از بسط تابع زیان Taguchi تابع زیانی به صورت رابطهٔ (۳) را پیشنهاد کرد

$$(y, X, t) = 4\sum_{i=1}^{k} \left[\frac{y_i(X) - T_i}{USL_i - LSL_i} \right]^2 \tag{3}$$

همچنین Pignatello تابع زیانی به صورت رابطهٔ (۴) را پیشنهاد کرد.

$$EL(y,t) = \sum_{i=1}^{k} k_i[\delta_i^2 + (\mu_i - T_i)^2 + \sum\sum k_{ij}[\delta_{ij}^2 + (\mu_i - T_i)(\mu_j - T_j)] \tag{4}$$

هر گاه در عمل هدف به دست آوردن کالا در سطح مشخصی از مشخصه‌های کیفی باشد. معمولاً این روش، روش مناسبی

است اما اگر هدف حداکثر یا حداقل کردن مشخصه‌های کیفی کالا باشد، کارایی بالایی ندارد.

۱-۳- روش تابع تصمیم

این روش برای اولین بار توسط Haringtan مطرح شد و مورد استفاده قرار گرفت و Mcmllan و Gatza در سال ۱۹۷۲ از این روش استفاده کردند [1]. این روش بعداً توسط Derringer و Suich (1980)[18] گسترش یافت. ایدهٔ اساسی در این روش تبدیل یک مسئلهٔ چند هدفه به یک مسئلهٔ تک هدفه است.

تابع تصمیم به کار رفته در بهینه‌یابی چند پاسخه در RSM مقادیر پاسخ را به کمک توابع برازش شده به مقادیری بین صفر و یک تبدیل می‌کند. این مقادیر میزان رضایت هر کدام از پاسخ ها را نشان می‌دهند. Harington در حالت یک طرفه برای محاسبهٔ تابع، رابطه (۵) و در حالت دو طرفه، رابطهٔ (۶) را پیشنهاد کرد.

$$d_i(y_i(X)) = e^{y_i(X)} \qquad (۵)$$

$$d_i(y_i(x)) = e^{-\left|y_i(X)\right|} \qquad (۶)$$

ایراد اساسی تابع تصمیم پیشنهادی Harington آن ست که قابلیت گرفتن شکل های مختلف را ندارد [9] به همین دلیل Derringer و Suich تابع توسعه یافته (۷) و (۸) را به ترتیب برای حالت یک طرفه و دو طرفه پیشنهاد کردند [18].

$$d_i(\hat{y}_i(x)) = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad \hat{y}_i(X) \le y_{min\,i} \\ \left(\dfrac{\hat{y}_i - \hat{y}_{min\ i}}{\hat{y}_{max} - \hat{y}_{min\,i}}\right)^r & \text{if} \quad \hat{y}_{min} \le \hat{y}_i(X) \le \hat{y}_{max\,i} \\ 1 & \text{if} \quad \hat{y}_i(X) \le y_{max\,i} \end{cases} \qquad (۷)$$

$$d_i(\hat{y}_i(X)) = \begin{cases} \left(\dfrac{\hat{y}_i - \hat{y}_{min\ i}}{\hat{T}_i - \hat{y}_{min\,i}}\right)^r & \text{if} \quad \hat{y}_{min} \le \hat{y}_i(X) \le T_i \\ \left(\dfrac{\hat{y}_{max\ i} - \hat{y}_i}{\hat{y}_{max\ i} - T_i}\right)^s & \text{if} \quad T_i \le \hat{y}_i(X) \le \hat{y}_{max\,i} \\ 0 \end{cases} \qquad (۸)$$

در روابط فوق T_i مقدار مطلوب از مشخصه i ام و r و s پارامترهای تابع تصمیم هستند. Derringer و Suich رابطهٔ (۹) را برای تصمیم نهایی پیشنهاد کردند.

$$D(y)=\left[d_1(y_1).d_2(y_2).....d_k(y_k)\right]^{1/k} \qquad (۹)$$

آنچه Derringer و Suich تحت عنوان تابع تصمیم ارائه کردند، در واقع فرمول L-P متر یک است و بیشتر ویژگی یک تابع ارزش را دارد. به همین دلیل طراحی یک الگوریتم مناسب که هماهنگ با بهینه‌سازی چند پاسخه در چارچوب RSM باشد، از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است.

۳ـ معیارهای یک مدل مناسب تصمیم گیری

روش های متعددی برای تصمیم گیری چند معیاره طراحی و پیشنهاد شده است. که این روش ها را می‌توان در دوگروه عمدهٔ تصمیم‌گیری چند هدفه (MODM)[۵] و تصمیم‌گیری چند شاخصه (MADM)[۶] طبقه‌بندی کرد. همچنان که گفته شد روش های بهینه‌یابی چند پاسخه در چارچوب RSM را نیز می توان در سه گروه کلی طبقه‌بندی کرد. Draker معتقد است در مورد تکنیک‌های تصمیم‌گیری کتاب های بی شماری وجود دارد. ابزارهای پیچیدهٔ منطقی و ریاضی زیادی برای پروسه تصمیم‌گیری مطرح شده است ولی ماهیت تصمیم و عناصر تشکیل‌دهندهٔ آن کمتر توجّه است [20]. با توجه به تعدد و تنوع مدل های MCDM[۷] با این سوال روبرو هستیم که یک مدل خوب باید دارای چه ویژگیهایی باشد؟

در پاسخ باید گفت روش مناسب، روشی است که در تعامل با تصمیم گیرنده (DM)[۸] ضمن ایجاد انسجام فکری، به او درگرفتن تصمیمات خوب کمک کند. به نظر Stewart(1992)[21] هدف از هر تکنیک تصمیم‌گیری چند معیاره (MCDM) فراهم کردن شرایط کمک برای تصمیم‌گیرنده در کشف راه حل مسئله است. از نظر Fernch (1984) [22] روش مناسب آن است که در ضمن حل مسئله، به تصمیم گیرنده کمک کند که خود را هم جستجو کند. Keeney(1992)[23] معتقد است ما باید بیشتر وقت تصمیم‌گیری خود را در آنچه مهم است حذف کنیم تا خود را بفهیم و از آن برای تفکر و سنجش استفاده کنیم و بدین ترتیب شرایطی ایجاد شود تا گزینه‌ها را با دقت بیشتری ارزیابی کنیم. از نظر Climaco (2002) [24] آینده‌دارترین مدل، مدلی است که مبتنی بر طرز فکری ساده و جامع است. مفهوم ساده‌سازی در تشکیل مدل برای اتخاذ تصمیمات درست در نامهٔ معروف Franklin به دوستش با عباراتی ساده بیان شده است. او می‌گوید در امورپر اهمیت و مهم نمی‌توانم به شما توصیه‌ای کنم اما این را می‌گوییم که در هنگام اتفاق افتادن مشکلات بزرگ که نیاز به تصمیم‌گیری با در نظر گرفتن ابعاد مختلف دارد، چون همهٔ جزئیات آن را نمی‌توانید به خاطر بیاورید یک صفحهٔ کاغذ را به دو قسمت تقسیم کن و در یک ستون منافع و در یک ستون هزینه‌های آن را یادداشت کن. در آن صورت میتوان آنها را سنجید و با ارزیابی آنها برای تصمیم‌گیری درست از ان استفاده کرد. از نظر Roy(1985) هدف از کمک به تصمیم‌گیرنده، کتمان حقایق نیست بلکه با نگاهی دقیق‌تر می‌توان دریافت که ایده، کمک به تصمیم‌گیرنده برای اتخاذ تصمیمات صحیح است. برای طراحی چنین مدلی لازم است فروض و پیشنهادهایی در نظرگرفته شود که خارج از واقعیت نباشد.

Perrow(1999)[25] عقیده دارد که کمک به تصمیم‌گیرنده در مدل های کمّی و کیفی و بهره‌گیری از مدل های سنتی و روان شناختی DM را در اتخاذ تصمیمات درست یاری می کند. او تأکید دارد که موقعیت این مدل ها به میزان همکاری تصمیم‌گیرنده بستگی دارد.

همچنان که دیده می‌شود در همهٔ نظرات فوق، یک نقطهٔ مشترک وجود دارد: مدلی مناسب است که به DM در شناخت خود و ایجاد انسجام فکری برای تصمیم‌گیری کمک کند. این نکته از این واقعیت ناشی می‌شود که تعدد معیارها باعث پیچیدگی مسئله برای DM خواهد شد. این پیچیدگی باعث می‌شود که DM در مسئله گم شود و به تناقض‌گویی بپردازد. ثابت شده است حتی در رتبه‌بندی سه گزینه ممکن است پارادوکس رخ دهد. به همین دلیل است که برای مثال در روش AHP بعد از استخراج اطلاعات نسبت سازگاری را محاسبه می‌کنیم تا مشخص شود آیا پاسخ های داده شده سازگار است یا خیر؟ و در صورت ناسازگاری پاسخ ها، اطلاعات مجدداً دریافت شود. در ساخت یک مدل، تحلیل‌گر باید شرایطی را ایجاد کند که همهٔ ارزش های مورد نظر DM بطور خلاصه و قابل فهم در مدل تجلی یابد. یک مورد خاص از یک انتخاب در چارچوب بهینه‌سازی استفاده از تابع تصمیم است.

در ادامهٔ مقاله روشی نوین برای استخراج تابع تصمیم پیشنهاد می‌شود. مدل پیشنهادی که بر چند فرض منطقی پایه‌گذاری شده است ابتدا ساختار فکری DM را سامان‌دهی و سپس تابع تصمیم را استخراج می کند.

٤ـ روش پیشنهادی استخراج تابع تصمیم

ایدهٔ کلیدی که روشهای ارایه شده تابع تصمیم بر آن استوارند، ایدهٔ استمرار و سازگاری یا عقلایی بودن است [26].روش پیشنهادی بر اصول زیر استوار است:

۱ـ اصل ترتیب: بر اساس این اصل برای هر دو گزینه A و B از نظر تصمیم‌گیرنده یکی از حالات زیر قابل تشخیص است:

الف ـ تصمیم‌گیرنده A را بر B ترجیح می دهد (A>B)

ب ـ تصمیم‌گیرنده B را بر A ترجیح می‌دهد (B>A)

ج ـ تصمیم گیرنده بین A و B بی تفاوت است. (A~B)

۲ـ اصل انتقال‌پذیری: بر اساس این اصل، برداشت تصمیم‌گیرنده از حالات انتقال‌پذیر است یعنی اگر A را بر B ترجیح دهد و B را بر C ترجیح دهد A را بر C ترجیح خواهد داد.

۳ـ اصل تناسب در رتبه‌بندی‌های DM: DM در مقایسهٔ گزینه‌ها از رتبه‌بندی یکسانی استفاده می‌کند و درک مشخصی از میزان برتری‌هایش دارد. می توانیم میزان برتری گزینه‌ها را نسبت به همدیگر مشخص کنیم. اصل فوق نقش اصل تدام در روشهای متعارف استخراج تابع مطلوبیت را دارد با این مزیت که ساختار این روش برای DM قابل فهم‌تر است.

روش پیشنهادی شامل دو گام است که اصل ترتیب و اصل انتقال‌پذیری، مبنای گام اول و اصل تناسب در رتبه‌بندی، مبنای گام دوم هستند.

۴-۱ـ گام اول

در این مرحله برای هر مشخصهٔ کیفی، چند سطح در نظر گرفته می‌شود و از ترکیب آنها مجموعهٔ نقاطی ساخت یافته برای استخراج تابع تصمیم به دست می‌آید. اگر مسئله، شامل k مشخصه کیفی باشد و هر مشخصهٔ کیفی در q سطح در نظر گرفته شود، q^k گزینه خواهیم داشت که در استخراج تابع تصمیم مورد استفاده قرار می‌گیرد. بدیهی است که هر چه q بیشتر باشد از یک طرف دقت تابع برآورد شده، افزایش می‌یابد و از طرف دیگر حجم محاسبات افزایش خواهد یافت. برای توضیح این مرحله، مسئله چند هدفه‌ای را به صورت رابطه (۱) در نظر بگیرید. اگر هدف nام از نوع max باشد در مقایسه گزینه $A_1 = (\bar{y}_1, \bar{y}_2, ..., y_i, ..., \bar{y}_k)$ و $A_2 = (\bar{y}_1, \bar{y}_2, ..., y'_i, ..., \bar{y}_k)$ اگر $y_i > y'_i$ باشد در این صورت $A_1 > A_2$ و اگر $y_i = y'_i$ باشد در این صورت $A_1 \sim A_2$ و اگر $y_i < y'_i$ باشد در این صورت $A_1 < A_2$ خواهد بود همچنین اگر هدف nام از نوع min باشد اگر $y_i > y'_i$ در این صورت $A_1 < A_2$ و اگر $y_i < y'_i$ باشد در این صورت $A_1 > A_2$ و اگر $y_i = y'_i$ باشد $A_1 \sim A_2$ خواهد بود.

توجه به نکتهٔ فوق و ترکیب آن با دو اصل ترتیب و انتقال‌پذیری ضمن انسجام بخشیدن به ساختار فکری DM به او کمک می‌کند که ارجحیتهای خود را سریعتر شناسایی و از ناسازگاری در پاسخ ها نیز جلوگیری کند.

برای بیان اهمیت نکته فوق در ترکیب با دو اصل گفته شده و نقش آن در کاهش مقایسات برای رسیدن به ساختار فکری DM از مثال ساده زیر کمک می‌گیریم. فرض کنید از نظر DM برای خرید اتومبیل فقط دو مشخصهٔ قیمت (y_1) و سرعت (y_2) حایز اهمیت باشند و این دو مشخصه تابعی از متغیرهای قابل کنترل $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ باشند در این صورت مسئله MODM به صورت رابطهٔ (۱۰) خواهد بود.

$$\begin{aligned} &\min \quad y_1 = f_1(X) \\ &\max \quad y_2 = f_2(X) \\ &s.t \quad X \in \Omega \end{aligned} \qquad (۱۰)$$

که در آن y_1 و y_2 به ترتیب قیمت وسرعت و X متغیرهای قابل کنترل و Ω فضای جواب است.

اگر قیمت اتومبیل های موجود بین 4 تا 10 میلیون تومان و سرعت اتومبیل های موجود بین 120 تا 180 کیلومتر در

ساعت باشند و قیمت در چهار سطح 4 ، 6 ، 8 و 10 میلیون تومان و سرعت در چهار سطح 120 ، 140 ، 160 و 180 کیلومتر در ساعت در نظر گرفته شود، 16 حالت مختلف از ترکیب این وضعیت ها به دست می آید که با مقایسهٔ دو به دوی آنها در چارچوب اصل ترتیب می توان این 16 حالت را رتبه بندی نمود این نقاط در گام دوم به عنوان نقاطی ساخت یافته در استخراج تابع تصمیم به صورت تابعی پیوسته از مشخصه‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرند.

اگر این ۱۶ حالت با مقایسه دو به دو رتبه‌بندی شوند 120 مقایسه باید صورت گیرد. به طور کلی اگر k مشخصه کیفی داشته باشیم و هر کدام در q سطح در نظر گرفته شوند، $\binom{q^k}{2}$ حالت مقایسه خواهیم داشت که با افزایش q و یا k این مقایسه ها در عمل، بسیار مشکل و حتی غیر ممکن خواهد بود. اما در صورت در نظر گرفتن نکتهٔ فوق در عمل تعداد مقایسات بسیار کاهش خواهد یافت. برای مثال در اولین مرحله، جعبه‌های ارجحیّت زیر را خواهیم داشت.

۱- $[A_{11} > A_{12} > A_{13} > A_{14}]$ ۲- $[A_{21} > A_{22} > A_{23} > A_{24}]$

۳- $[A_{31} > A_{32} > A_{33} > A_{34}]$ ۴- $[A_{41} > A_{42} > A_{43} > A_{44}]$

که برای هر گزینه A_{ij}، i سطح ام از مشخصهٔ اول و j سطح ام از مشخصه دوم است. حال با سوال از DM برترین گزینه از جعبه دوم A_{21} ( ) را با پایین‌ترین گزینه از جعبه اول A_{14} ( ) مقایسه می‌کنیم با توجه به اصل ترتیب از نظر DM، A_{21} یا بر A_{14} ارجح است یا با آن بی‌تفاوت است یا A_{14} بر A_{21} ارجح است. اگر A_{14} بر A_{21} ارجح یا با آن بی‌تفاوت باشد بر اساس اصل انتقال‌پذیری از ترکیب جعبه‌های ارجحیت یک و دو جعبه ارجحیتی به صورت زیر بدست می‌آید.

الف ـ اگر A_{14} بر A_{21} ارجح باشد: $[A_{11} > A_{12} > A_{13} > A_{14} > A_{21} > A_{22} > A_{23} > A_{24}]$

ب ـ اگر A_{14} با A_{21} بی تفاوت باشد: $[A_{11} > A_{12} > A_{13} > A_{14} \sim A_{21} > A_{22} > A_{23} > A_{24}]$

سپس در ادامه مقایسات برای رتبه‌بندی، A_{31} را با A_{24} مقایسه می‌کنیم.

اما اگر در مرحلهٔ قبل از نظر DM، A_{21} بر A_{14} ارجح باشد این بار A_{21} را با A_{13} مقایسه خواهیم کرد. اگر A_{13} بر A_{21} ارجح یا با آن بی‌تفاوت باشد، جعبهٔ ارجحیتی به صورت زیر خواهیم داشت.

الف اگر A_{13} بر A_{21} ارجح باشد: $[A_{11} > A_{12} > A_{13} > A_{21} > A_{14}]$

ب اگر A_{13} با A_{21} بی تفاوت باشد: $[A_{11} > A_{12} > A_{13} \sim A_{21} > A_{14}]$

سپس A_{22} را با A_{14} مقایسه خواهیم کرد. بدیهی است که با توجه به اصل انتقال‌پذیری، این مقایسه قبل از رسیدن به A_{21} خاتمه خواهد یافت و این باعث می‌شود از مقایسات غیرضروری پرهیز شود و همچنین از ناسازگاری های احتمالی در تصمیمات DM جلوگیری شود.

اما اگر A_{21} بر A_{13} ارجح باشد این بار A_{21} با A_{12} مقایسه خواهد شد و این مکانیزم آنقدر ادامه می‌یابد تا جعبه ارجحیت نهایی DM از 16 گزینه به دست آید. این جعبهٔ ارجحیت، مجموعه نقاطی ساخت یافته در اختیار ما قرار می‌دهد که درگام دوم برای استخراج تابع مطلوبیت مورد استفاده قرار می‌گیرد.

برای این مرحله الگوریتم برنامه‌ای کامپیوتری طراحی شده است که با آن می‌توان جعبهٔ ارجحیت های DM را شناسایی کرد.

٤-۲ـ گام دوم

در گام دوم با توجه به اطلاعات بدست آمده در گام اول، میزان برتری هر گزینه بر گزینه پایین‌تر از DM سوال می‌شود. کسب اطلاعات از DM با استفاده از مقیاسی که دامنهٔ آن از «برتری بسیار ضعیف $A^{r-1}_{ij...}$ بر $A^{r}_{ij...}$ » تا «برتری بسیار قوی $A^{r-1}_{ij...}$ بر $A^{r}_{ij...}$ » را شامل می‌شود صورت می‌گیرد. مقیاس زیر برای مقایسه گزینه $A^{r-1}_{ij...}$ با $A^{r}_{ij...}$ پیشنهاد می‌شود.

۱ـ برتری بسیار ضعیف $A^{r-1}_{ij...}$ بر $A^{r}_{ij...}$

۲ـ برتری بسیارضعیف تا ضعیف $A^{r-1}_{ij...}$ بر $A^{r}_{ij...}$

۳ـ برتری ضعیف $A^{r-1}_{ij...}$ بر $A^{r}_{ij...}$

۴ ـ برتری ضعیف تا متوسط $A^{r-1}_{ij...}$ بر $A^{r}_{ij...}$

۵ـ برتری متوسط $A^{r-1}_{ij...}$ بر $A^{r}_{ij...}$

۶ ـ برتری متوسط تا قوی $A^{r-1}_{ij...}$ بر $A^{r}_{ij...}$

۷ ـ برتری قوی $A^{r-1}_{ij...}$ بر $A^{r}_{ij...}$

۸ـ برتری قوی تا بسیار قوی $A^{r-1}_{ij...}$ بر $A^{r}_{ij...}$

۹ـ برتری بسیار قوی $A^{r-1}_{ij...}$ بر $A^{r}_{ij...}$

اگر به گزینهٔ رتبهٔ اول مقدار یک و به گزینهٔ رتبهٔ آخر مقدار صفر داده شود با در نظر گرفتن اصل تناسب در رتبه‌بندی های DM برای محاسبهٔ ارزش گزینه‌ها در جعبه ارجحیتها رابطهٔ (۱۱) پیشنهاد می‌شود.

$$U(A^{r}_{ij...}) = U(A^{r-1}_{ij...}) - \frac{h_r}{\Sigma h_r} \qquad (۱۱)$$

که درآن $U(A^{r}_{ij...})$ ارزش گزینه $A^{r}_{ij...}$، r رتبهٔ گزینهٔ مورد نظر، Σh_r مجموع برتری های جعبهٔ ارجحیت ها و h_r میزان برتری گزینه r-1 برگزینه rام است.

۵ـ مثال

اگر چه مثال Montgomery و همچنین مثال khuri با روش ارائه شده حل و مدل، کارایی خود را نشان داده است اما در این مقاله برای توضیح روش ارائه شده و مقایسه آن با روشهای Keeney و Derringer , Raiffa وSuich و همچنین روش اهداف حددار از مثال آقای علی جهان در پایان نامهٔ کارشناسی ارشد به لحاظ در دسترس بودن DM استفاده می‌کنیم [28]. طرح آزمایشی مورد استفاده، طرح مرکب مرکزی است که در آن اثر چهار متغیر قابل کنترل، درصد فشار در فلاکس کوره (x_1)، ضخامت آلیاژ قلع و سرب روی لوله رادیاتور (x_2)، دما (x_3) و درصد قلع درآلیاژ روی لوله رادیاتور (x_4) بر دو مشخصهٔ کیفی خوردگی (y_1) و چسبندگی (y_2) بررسی شده است.

منحنیهای سطح پاسخ برای y_1 و y_2 به صورت رابطهٔ (۱۲) و (۱۳) بدست آمده است.

$$\begin{aligned}\hat{y}_1 &= 250.34 - 34.26x_1 + 43.91x_2 - 1.55x_3 + 6.75x_4 - 22.67x_2^2 \\ &- 21.84x_3^2 - 23.22x_4^2 + 4.56x_1x_4 + 16.94x_2x_4 + 25.31x_3x_4 \end{aligned} \qquad (۱۳)$$

$$\begin{aligned}\hat{y}_2 &= 176.75 - 2.01x_1 + 30.6x_2 - 2.59x_3 + 16.87x_4 - 13.31x_1^2 - 13.19x_2^2 \\ &- 12.94x_3^2 + 12.44x_4^2 + 8.56x_1x_4 - 3.94x_2x_4 - 8.69x_3x_4\end{aligned}$$

در نتیجه مسئلهٔ چند پاسخه مورد مطالعه بصورت رابطهٔ (۱۴) خواهد بود.

$$\begin{aligned} &\max \quad \hat{y}_1 = f_1(x_1,...,x_4) \\ &\max \quad \hat{y}_2 = f_2(x_1,...,x_4) \\ &\text{s.t} \quad -1 \le x_i \le 1 \qquad i = 1,2,3,4 \end{aligned} \qquad (۱۴)$$

با توجه به اینکه max و min هدف اول، بدون در نظر گرفتن هدف دوم به ترتیب معادل ۲۹۰ و ۵۹ و همچنین max و min هدف دوم بترتیب ۱۹۸ و ۵۲ بود. برای مشخصهٔ اول پنج سطح ۲۹۰،۲۲۰،۱۷۰،۱۱۰،۵۹ و برای مشخصهٔ دوم پنج سطح ۱۹۸، ۱۶۲، ۱۲۵، ۸۹ و ۵۲ در نظر گرفته شد که از ترکیب آنها ۲۵ حالت به دست می‌آید. در چارچوب گام اول جعبه ارجحیتهایDM به صورت زیر به دست آمد.

$$\begin{aligned} &A_{11} > A_{12} > A_{21} > A_{13} > A_{22} > A_{14} \sim A_{23} \sim A_{31} > A_{32} > A_{24} > A_{33} > A_{41} > \\ &A_{34} \sim A_{42} > A_{43} > A_{15} > A_{25} > A_{44} > A_{35} > A_{45} > A_{51} > A_{52} > A_{53} > A_{54} > A_{55} \end{aligned}$$

در چارچوب گام دوم میزان برتری گزینه A_{ij}^{r-1} بر A_{ij}^{r} از DM پرسیده شد سپس از رابطه (۱۱) ارزش گزینه‌های مختلف به دست آمد که جدول ۱، این اطلاعات را نشان می دهد.

با برازش تابع متناسب بر نقاط فوق تابع تصمیم به صورت رابطه (۱۵) بدست آمد.

$$U = f(y_1, y_2) = -0.368 + 0.000726y_1 + 0.00481y_2 - 0.00002y_2^2 + 0.000019y_1y_2 \qquad (۱۵)$$

در نتیجه مسئلهٔ دو هدفه (۱۴) به مسئلهٔ تک هدفه (۱۶) تبدیل می‌شود.

$$\max \quad U = -0.368 + 0.000726y_1 + 0.00481y_2 - 0.00002y_2^2 + 0.000019y_1y_2$$

$$\text{s.t} \quad \hat{y}_1 = 250.34 - 34.26x_1 + 43.91x_2 - 1.55x_3 + 6.75x_4 - 22.67x_2^2 - 21.84x_3^2 - 23.22x_4^2 + 4.56x_1x_4 + 16.94x_2x_4 + 25.31x_3x_4$$

$$\hat{y}_2 = 176.75 - 2.01x_1 + 30.6x_2 - 2.59x_3 + 16.87x_4 - 13.31x_1^2 - 13.19x_2^2 - 12.94x_3^2 + 12.44x_4^2 + 8.56x_1x_4 - 3.94x_2x_4 - 8.69x_3x_4 \qquad (۱۶)$$

$$-1 \le x_i \le 1 \qquad i = 1,2,3,4$$

که از حل آن با *Lingo* $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 0.212, x_4 = 0.58725, y_1 = 279.03$ و $y_2 = 196.35$ به دست آمد. این مسئله همچنین از روش Keeney و RaiffaK و روشDerringer و Suich و روش اهداف حددار حل شد که جواب به دست آمده مطابق جدول۲ است. با سوال از DM مشخص شد که جواب به دست آمده از روش ارائه بر سایر روشها برتری دارد. زیرا در مقایسه جواب روش ارائه شده با روش Keeney و Raiffa تصمیم‌گیرنده چون اهمیّت نسبی بیشتری برای مشخصهٔ اول قایل بود جواب بدست آمده از روش ارائه شده را برتر می‌دانست. همچنین در مقایسهٔ جواب روش ارائه شده با روش اهداف حددار، DM معتقد بود اگر چه در روش اهداف حددار مقدار بیشتری برای y_1 بدست آمده است اما این مقداربیشتر به قیمت از دست دادن مقدار زیادی از مشخصه دوم y_2 () بوده است. به همین دلیل باز هم جواب به دست آمده از روش ارائه شده را برتر می‌دانست.

رتبه	گزینه (ها)	میزان برتری گزینه A_{ij}^{r-1} بر A_{ij}^{r}	h	ارزش	رتبه	گزینه (ها)	میزان برتری گزینه A_{ij}^{r-1} بر A_{ij}^{r}	h	ارزش
1	A_{11}	برتری ضعیف A_{11} بر A_{12}	3	1	12	A_{43}	برتری متوسط A_{43} بر A_{15}	5	0.29
2	A_{12}	برتری متوسط تا قوی A_{12} بر A_{21}	6	0.975	13	A_{15}	برتری بسیار ضعیف تا ضعیف A_{15} بر A_{25}	2	0.217
3	A_{21}	برتری ضعیف A_{21} بر A_{13}	3	0.87	14	A_{25}	برتری ضعیف A_{25} بر A_{44}	3	0.203
4	A_{13}	برتری متوسط A_{13} بر A_{22}	5	0.826	15	A_{44}	برتری متوسط A_{44} بر A_{35}	5	0.159
5	A_{22}	برتری ضعیف A_{22} بر $A_{14}A_{23}A_{31}$	3	0.754	16	A_{35}	برتری بسیار ضعیف A_{35} بر A_{45}	1	0.087
6	$A_{14}A_{23}A_{31}$	برتری قوی $A_{14}A_{23}A_{31}$ بر A_{32}	7	0.71	17	A_{45}	برتری بسیار ضعیف A_{45} بر A_{51}	1	0.072
7	A_{32}	برتری قوی A_{32} بر A_{24}	7	0.609	18	A_{51}	برتری بسیار ضعیف A_{51} بر A_{52}	1	0.058
8	A_{24}	برتری متوسط تا قوی A_{24} بر A_{33}	6	0.522	19	A_{52}	برتری بسیار ضعیف A_{52} بر A_{53}	1	0.043
9	A_{33}	برتری متوسط A_{33} بر A_{41}	5	0.478	20	A_{53}	برتری بسیار ضعیف A_{53} بر A_{54}	1	0.029
10	A_{41}	برتری بسیار ضعیف تا ضعیف A_{41} بر A_{34}, A_{42}	2	0.406	21	A_{54}	برتری بسیار ضعیف A_{53} بر A_{54}	1	0.015
11	A_{34} A_{42}	برتری متوسط تا قوی $A_{34}A_{42}$ بر A_{43}	6	0.377	22	A_{55}	برتری بسیار ضعیف A_{54} بر A_{55}	1	0
								$\sum h=74$	

جدول ۱- میزان برتری گزینه A_{ij}^{r-1} بر A_{ij}^{r} و ارزش گزینه های مختلف

۶ـ نتیجه‌گیری

همچنان که دیده می‌شود، پاسخ به دست آمده از روش Raiffa و Keeney به جواب بدست آمده از روش ارائـه شـده بسـیار نزدیک است. اگر بپذیریم روش Raiffa و Keeney روشی کار آمد در استخراج تابع مطلوبیت است، روش ارائه شده با سـاختاری قابل فهم‌تر برای DM و همچنین ایجاد انسجام فکری و ایجاد زمینـه شـناخت بـرای DM جـواب مناسـبی در اختیـار مـا قـرار می‌دهد. همچنین محاسبهٔ تابع تصمیم با روش ارائه شده ازروش Raiffa و Keeney ساده‌تر اسـت. از آنجـا کـه در بهینـه‌سـازی چندپاسـخه در چـار چـوب RSM معمـولا" کمتـر از پـنج مشخصـه بررسـی مـی شـود و هـدف، حـداکثر یـا حـداقل کـردن مشخّصه‌هاست، روش ارائه شده کارایی بالایی دارد. روش ارائه شده بطور کلی برای مسائل چند شاخصه قابل استفاده اسـت امـا از آنجا که با افزایش تعداد مشخصه‌های کیفی مورد بررسی، گام اول طولانی خواهد شد برای مطالعـات آینـده ارائـهٔ راهکارهـا و فروضی واقعی که بتواند گام اول را کوتاه‌تر کند و همچنین بررسی کارایی مدل برای مسائل با ساختار رده‌ای پیشنهاد می‌شود.

	x_1^*	x_2^*	x_3^*	x_4^*	y_1^*	y_2^*
Keeney & Raiffa	0	1	0.1764	0.5645	278.8	196.7
Derringer & Suich	0	1	0	0	271.3	194.16
روش اهداف حددار	0	1	0.3802	0.7173	279.5	193.8
روش ارائه شده	0	1	0.212	0.58725	279.03	196.35

جدول ۲- جواب بهینه بدست آمده از روشهای مختلف

زیرنویس‌ها

1-Design Of

2-Responsse Surface Method

3-Bunded Objective Methods

4-Lexicograph Methods

5-Multi Objective Designs Meking

6-Multi Attribut Designs Meking

7-Multi Criteria Designs Meking

8-Decisen Makers

مراجع

[1] W.M.Carlyle, D.C.Montgomery and G.C.Runger, (2000) "optimization problems and Methods in Quality control and Improvement " journal of Quality Technology,pp1-31.

[2] Box G.E.P, Hunter W.G, and Hunter J.S, (1978) "Statistics for Experimenters: and Introduction to Design data Analysis and Model Building " John wiley & sons, Newyork.

[3] Haftka R.Scott E.P and Cruz J.R,(1998) "Optimization and Experiments: A Survey" Applied Mechanics Review pp 435-448.

[4] G.Gary Wang, (2002) "Adaptive Response surface Method using Inherited Latin Hypercube Design points" Journal of Mechanical Design pp 1-31.

[5] Richard suhr and Robert G. Batson, (2001) "Constrainged Multivariate Loss Function Minimization" Quality Engineering pp 475-483.

[6] C.T. Chiao, M.Tamede, (2001) "Analyzing Experiments with Corrolated Multiple Responses" Journal of Quality Technology. PP 451-465.

[7] Pignatiello J.J, (1993) "Strategies for Robust Multiresponse" Quality Engineeringpp 5-15.

[8] Myers R.and Carter W.J., (1973) "Response surface Techniques for Dual Response Systems" Technometrics

pp 301-317.
[9] Biles W.(1975) "A Response surface Methods for Experimental optimization of Multi-Response Processes" Industrial and Engineering chemistry pp152-158.
[10] Myers. R, Khuri A. and Vining.G, (1992) "Response Surface Alternatives to the Taguchi Robust parameter Design Approach " the American statistician pp131-139.
[11] Lo Y.and Tang K.(1990) "Economic Design of Multi-Characteristic Models for a three-class sereening " praedure Journal product pp 2341-2351.
[12] Pignatiello J.J.(1993) " Strategies for Robust Multiresponse" Quality Engineering pp 5-15.
[13] Winston W.L., (1994) "operations Research Applications and Algorithms" 3rd ed., Duxburuy press, Belmont.CA.
[14] Artiles-Leon N.(1996) "A pragmatic Approach to Multiple-Response problems using Loss Functions" Quality Engineering pp 213-220
[15] Ross P.J., (1996) "Taguchi Techniques for Quality Engineering " 2 nd ed., Mc Graw-Hill, New york.
[16] Kapur C.K., and cho B.R., (1996) "Economic Design of the specification Region for Multiple Quality characteristics " II E Trans. PP 237-248.
[17] Robert G.B., and Richard S. (2001) "Constrainted Multivariate Loss Function Minimization" Quality Engineering , PP 475-483.
[18] Derringer G. and Suich R. (1980) "Simultaneous optimization of several response variables" Journal of Quality Technology pp214-219.
[19] Del Castillo E.,Montgomery D.C. & Mc crville D.R.(1996) "Desirability Functions for Multiple Response optimization" Journal of Quality Technology pp 337-345.
[20] Drucker p.p.(1974) "Management: Tasks Responsibilities practices" Harper and row, Newyork.
[21] Stewart, T.J.(1992) "A Critical Survey on the Status of Multiple Criteria Decision Making Theory and Practice " OMEGA pp 569-586.
[22] French, S. (1984) "Interactive Multi-objective programming: its Aims, Applications and Demands" Journal of the operational Research Society pp 827-834.
[23] Keeney, R.L.(1992) "Value Focused Thinking " Harvard University press.
[24] Joao C. N. Climaco (2002) "A Crittical Reblection an Optimal Decision" Faculdade De Economia, Universidade De Coimbra , portugal.
[25] Perrow Charles (1999) "Normal Accident-Living With High-Risk Technologies" Princeton University Press.
[26] P. R. G. Layard, A. A. Walters "Microeconomic Theory" Economic Department, Economic School of Landan.
[۲۷] اصغر پور، محمد جواد (۱۳۷۷) " تصمیم گیری چند معیاره" انتشارات دانشگاه تهران.
[۲۸] جهان علی (۱۳۸۰) "بهینه‌سازی چند هدفه در طراحی آزمایش ها" پایان نامه برای دریافت درجهٔ کارشناسی ارشد دانشگاه علم وصنعت.