تحلیل و توسعه مدلهای نمایی صف با پارامترهای فازی در حالت گذرا و پایدار

مقصود امیری
دانشجوی دکتری

فرهاد قاسمی
استاد

دانشکده صنایع، دانشگاه صنعتی شریف

چکیده

در این مقاله روش جدیدی برای تحلیل سیستمهای صف $M/M/\infty$ و $M/M/1/1$ و فرآیند تولد خالص با پارامترهای فازی مثلثی ارائه شده است. با توجه به فازی بودن پارامترهای صف، در مورد این مدلها نتایج جدیدی نشان داده شده است. چون جمع‌آوری اطلاعات نا دقیق (فازی) آسانتر و کم‌هزینه‌تر است به کارگیری نظریه " منطق فازی" یا " توصیف تقریبی" می‌تواند راهگشای تخمین انعطاف‌پذیرتر پارامترهای صف باشد. بنابراین در این مقاله مدلهای $M/M/1/1$ و $M/M/\infty$ و فرآیند تولد خالص با پارامترهای فازی در حالت گذرا و پایدار مورد بررسی قرار گرفته و برای تشریح بیشتر مباحث، مثالهای عددی ارائه شده است.

کلمات کلیدی

مدلهای $M/M/1/1$ $M/M/\infty$، صف با پارامترهای فازی مدلهای صف در حالت گذرا و پایدار.

Analysis and Development of Exponential Queueing Models with Fuzzy Parameters in Steady State and Transient Phase

M. Amiri
Ph. D. student

F. Ghasemi
Professor

Industrial Engineering Department, sharif university of Technology

Abstract

In this paper a new method for analysis of queueing systems $M/M/1/1$ & $M/M/\infty$ and pure birth process with triangular fuzzy parameters is presented .Since the queueing parameters are fuzzy ,new results for this model in fuzzy state is shown.since collecting fuzzy data is simpler and less expensive ,therfore applying the fuzzy logic theory or" approximate Description" can solve estimating a more flexible queueing parameters. Consequently in this article $M/M/1/1$ & $M/M/\infty$ models and net birth process with fuzzy parameters in steady state and transient phase is considered. For better explaination ,numerical examples are provided.

Keywords

Queueing models with fuzzy parameters, $M/M/1/1$ & $M/M/\infty$ queueing models in steady state and transient phase

مقدمه

امروزه نظریه صف یکی از مهمترین کاربردهای فرآیندهای تصادفی بشمار می‌رود. در اکثر سیستمها همانند سیستمهای حمل و نقل، ترافیک فرودگاه، تولید، نگهداری و تعمیرات و ... با مدلهای صف مواجه شویم.

سیستمهای صف بسیار پیچیده‌تر از آن هستند که بتوان یک توصیف و تعریف دقیق برای پارامترها و در نتیجه برای معیارهای ارزیابی آن به دست آورد. بنابراین ارائه یک توصیف تقریبی یا فازی قابل قبول و قابل تجزیه و تحلیل برای پارامترهای صف و در نتیجه برای معیارهای ارزیابی سیستمهای صف مطلوب است.

نظریه مجموعه‌های فازی ابزار کارآئی جهت مطرح کردن عدم قطعیت و ابهام موجود در محیط مسائل به شمار می رود.

از آنجائی که نظریه صف اهمیت زیادی در مسائل علوم و صنایع مختلف دارد، و از طرف دیگر قابلیت بالای نظریه مجموعه‌های فازی در بیان مباحث مشابه به اثبات رسیده است، این مقاله به توسعه مدلهای نمایی صف با پارامترهای فازی در حالت پایدار و گذرا و کاربرد آن در پایایی سیستمها پرداخته است.

فرض کنیم یک صف و C سرویس‌دهنده موجود است که زمان بین دو ورود دارای توزیع نمایی با پارامتر فازی $\tilde{\lambda}$ بوده و مدت زمان سرویس دارای توزیع نمایی با پارامتر فازی $\tilde{\mu}$ باشد. در نظر است این سیستم صف با پارامترهای فازی را در حالت گذرا و پایدار بررسی کرده و کاربرد آن را در پایایی سیستمها نشان دهیم.

کارهای انجام شده در زمینه سیستمهای صف فازی بشرح زیر است:

- مسأله M/M/1 فازی توسط آقایان Jo, Tusjmure, Gen, Yamazaki بررسی شده است. [۱] برای معیارهای صف نتایج فازی مثلثی ارائه داده‌اند که خطای زیادی دارد.
- مسأله M/M/C فازی توسط آقایان Jo, Tusjmure, Gen , Yamazaki بررسی شده است [۲] و [۳]. کاربرد M/M/C را در شبکه‌های صف نشان داده‌اند که دارای خطای بیشتری دارد.
- مسأله M/M/C فازی توسط آقایان قاسمی و امیری بررسی شده که منجر به کاهش خطاها گردیده است که از طریق شبیه‌سازی نشان داده‌اند که نتایج آنها با ارزش و دارای خطاهای کمتر می‌باشد [۹].

این مقاله ضمن بررسی مدل M/M/∞ و M/M/1/1 فازی و فرآیند تولد خالص فازی در حالت گذرا و کاربرد آن در پایایی سیستمها، مدل M/M/∞ فازی پایدار را نیز مورد بحث قرار می‌دهد.

۱ـ تعاریف و نمادگذاری

نمادهای مورد استفاده در این مقاله عبارتند از:

$\tilde{\pi}_n$: احتمال اینکه در درازمدت n نفر در سیستم باشد (احتمال اینکه در درازمدت سیستم n خرابی داشته باشد).

$\tilde{P}_n(t)$: احتمال اینکه در فاصله $(0,t)$ سیستم n نفر داشته باشد (احتمال اینکه تعداد قطعات خراب شده تا زمان t ،n برابر باشد).

$\tilde{N}(t)$: متوسط تعداد قطعات خراب شده تا زمان t (متوسط تعداد در سیستم تا زمان t).

$\tilde{R}(t)$: احتمال اینکه سیستم در فاصله $(0,t)$ در حال کار باشد (پایانی سیستم تا زمان t).

$$\lim_{t \to +\infty} \tilde{N}(t) = \tilde{N}$$

$$\tilde{N}(t) = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \tilde{P}_n(t)}{\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{P}_n(t)}$$

$$\lim_{t \to +\infty} \tilde{P}_n(t) = \tilde{\pi}$$

$\tilde{N}$: متوسط تعداد در سیستم در دراز مدت.

$\widetilde{W}$: متوسط زمان انتظار مشتری در سیستم در دراز مدت.

$\widetilde{\lambda}$: متوسط نرخ ورود مشتری به سیستم در درازمدت (متوسط نرخ خرابی)

$\widetilde{\mu}$: متوسط نرخ سرویس‌دهی در دراز مدت (متوسط نرخ تعمیر).

جائیکه ~ فازی بودن را نشان می‌دهد.

تعاریف زیر برای پیگیری بحث مورد استفاده قرار گرفته‌اند:

تعریف۱:

تعریف زیر از Pedrycz , Laarhoven می‌باشد[۴]. اگر $\widetilde{A} = (a_1, a_2, a_3)$ یک عدد فازی مثلثی باشد آنگاه داریم:

$$\exp(\widetilde{A}) \approx (\exp(a_1), \exp(a_2), \exp(a_3))$$

جائیکه:

$$\mu_{\widetilde{A}}(x) = \begin{cases} 0 & x \le a_1 \\ \dfrac{x - a_1}{a_2 - a_1} & a_1 \le x \le a_2 \\ \dfrac{a_3 - x}{a_3 - a_2} & a_2 \le x \le a_3 \\ 0 & x \ge a_3 \end{cases}$$

$$\mu_{\exp(\widetilde{A})}(x) = \begin{cases} 0 & x \le \exp(a_1) \\ \dfrac{x - \exp(a_1)}{\exp(a_2) - \exp(a_1)} & \exp(a_1) \le x \le \exp(a_2) \\ \dfrac{\exp(a_3) - x}{\exp(a_3) - \exp(a_2)} & \exp(a_2) \le x \le \exp(a_3) \\ 0 & x \ge \exp(a_3) \end{cases}$$

تعریف۲:

تعریف زیر از Gupta, Kaufmann می‌باشد [(6)]. فرض کنید $\widetilde{A} = (a_1, a_2, a_3)$ و $\widetilde{B} = (b_1, b_2, b_3)$ دو عدد فازی مثلثی مثبت باشند و داشته باشیم:

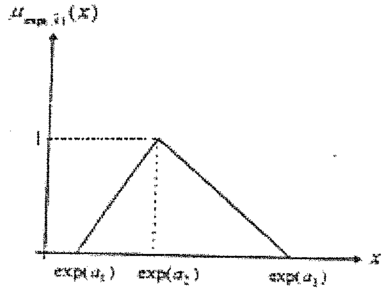
$$1)\ a_1 \ge b_1 \quad , \quad a_2 \ge b_2 \quad , \ a_3 \ge b_3$$

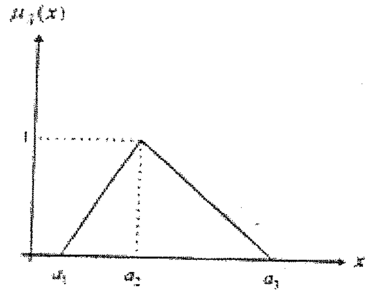
$$2)\ \frac{a_1}{b_1} \le \frac{a_3}{b_3}$$

آنگاه داریم:

$$\frac{\widetilde{A}}{\widetilde{B}} = \left(\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}\right)$$

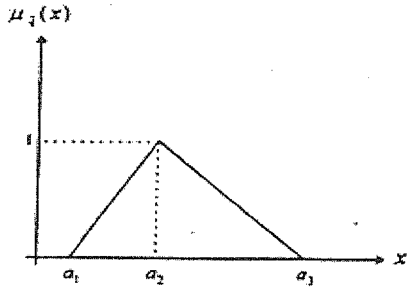
$$\widetilde{A}-\widetilde{\mathbf{B}}=(a_1-b_1,a_2-b_2,a_3-b_3)$$

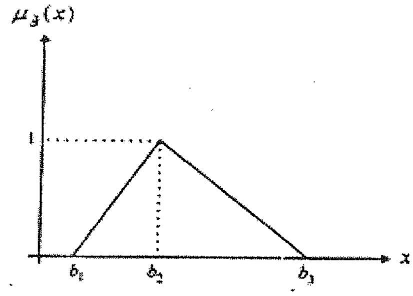




جائیکه:

$$\mu_{\tilde{A}}(x)=\begin{cases}0 & x\le a_1\\ \dfrac{x-a_1}{a_2-a_1} & a_1\le x\le a_2\\ \dfrac{a_3-x}{a_3-a_2} & a_2\le x\le a_3\\ 0 & x\ge a_3\end{cases}\qquad \mu_{\widetilde{B}}(x)=\begin{cases}0 & x\le b_1\\ \dfrac{x-b_1}{b_2-b_1} & b_1\le x\le b_2\\ \dfrac{b_3-x}{b_3-b_2} & b_2\le x\le b_3\\ 0 & x\ge b_3\end{cases}$$



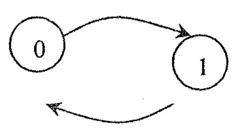


۲ـ بررسی مدل M/M/1/1 با پارامترهای فازی در حالت گذرا

فرض کنید مدت زمان بین دو ورود دارای توزیع نمایی با پارامتر فازی $\tilde{\lambda}$، مدت زمان سرویس دارای توزیع نمای با پارامتر فازی $\tilde{\mu}$ بوده، یک سرویس‌دهنده داشته و ظرفیت سیستم ۱ باشد هدف ما این است که تا این سیستم را در حالت گذرا بررسی کنیم.

$$\tilde{Q}=\begin{pmatrix}-\tilde{\lambda} & \tilde{\lambda}\\ \tilde{\mu} & -\tilde{\mu}\end{pmatrix}$$

$\tilde{\lambda}$



$\tilde{\mu}$

$$\left(\frac{d\widetilde{P}_0(t)}{dt},\frac{d\widetilde{P}_1(t)}{dt}\right)=(\widetilde{P}_0(t)\,,\,\widetilde{P}_1(t))\begin{pmatrix}-\tilde{\lambda} & \tilde{\lambda}\\ \tilde{\mu} & -\tilde{\mu}\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}\dfrac{d\widetilde{P}0(t)}{dt}=-\tilde{\lambda}.\widetilde{P}_0(t)+\tilde{\mu}.\widetilde{P}_1(t)\\ \dfrac{d\widetilde{P}_1(t)}{dt}=\tilde{\lambda}.\,\widetilde{P}_0(t)-\tilde{\mu}_0\widetilde{P}_1(t)=1\end{cases}$$

از طرفی داریم: $\widetilde{P}_0(t)+\widetilde{P}_1(t)=1$, $\widetilde{P}_0(0)=1$, $\widetilde{P}_1(0)=0$

حال داریم:

$$\widetilde{P}_0(t)=\frac{\widetilde{\mu}}{\widetilde{\lambda}+\widetilde{\mu}}+\frac{\widetilde{\lambda}}{\widetilde{\lambda}+\widetilde{\mu}}.e^{-(\widetilde{\lambda}+\widetilde{\mu}).1}$$

فرض کنید t=0 باشد طبق تعریف (۲) داریم:

$$\widetilde{P}_0(0)=(1,1,1)=1$$

فرض کنید $\widetilde{\lambda}=(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$ و $\widetilde{\mu}=(\mu_1,\mu_2,\mu_3)$ باشد رابطه (۱) را بصورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$\widetilde{\lambda}+\widetilde{\mu}=(\lambda_1+\mu_1,\lambda_2+\mu_2,\lambda_3+\mu_3)$$

$$-(\widetilde{\lambda}+\widetilde{\mu})=(-(\lambda_3+\mu_3),-(\lambda_2+\mu_2),-(\lambda_1+\mu_1))$$
$$-(\widetilde{\lambda}+\widetilde{\mu}).t=(-(\lambda_3+\mu_3).t,-(\lambda_2+\mu_2).t,-(\lambda_1+\mu_1).t)$$

$$\frac{\widetilde{\mu}}{\widetilde{\lambda}+\widetilde{\mu}}=\left(\frac{\mu_1}{\lambda_3+\mu_3},\frac{\mu_2}{\lambda_2+\mu_2},\frac{\mu_3}{\lambda_1+\mu_1}\right)$$

به ازاء $t>0$ داریم:

$$-(\widetilde{\lambda}+\widetilde{\mu})=(-(\lambda_3+\mu_3),-(\lambda_2+\mu_2),-(\lambda_1+\mu_1))$$

$$-(\widetilde{\lambda}+\widetilde{\mu}).t=(-(\lambda_3+\mu_3).t,-(\lambda_2+\mu_2).t,-(\lambda_1+\mu_1).t)$$

طبق تعریف (۱) داریم:

$$\exp(-(\widetilde{\lambda}+\widetilde{\mu}).t)\approx(\exp(-(\lambda_3+\mu_3).t),\exp(-(\lambda_2+\mu_2).t),\exp(-(\lambda_1+\mu_1).t))$$

و در نهایت داریم:

$$\widetilde{P}_0(t)=\frac{\widetilde{\mu}}{\widetilde{\lambda}+\widetilde{\mu}}+\frac{\widetilde{\lambda}}{\widetilde{\lambda}+\widetilde{\mu}}.\exp(-\widetilde{\lambda}-\widetilde{\mu}).t \Rightarrow$$

$$\widetilde{P}_0(t)=\left(\frac{\mu_1}{\lambda_3+\mu_3}+\frac{\lambda_1}{\lambda_3+\mu_3}.\exp(-\lambda_3-\mu_3).t,\frac{\mu_2}{\lambda_2+\mu_2}+\frac{\lambda_2}{\lambda_2+\mu_2}\exp(-\lambda_2-\mu_2).t,\frac{\mu_3}{\lambda_1+\mu_1}+\frac{\lambda_3}{\lambda_1+\mu_1}.\exp(-\lambda_1-\mu_1).t\right)$$

$$\widetilde{P}_1(t)=1-\widetilde{P}_0(t)$$
$$\widetilde{N}(t)=\widetilde{P}_1(t) \qquad \widetilde{R}(t)=\widetilde{P}_0(t)$$

مثال عددی:

فرض کنید $\widetilde{\lambda}=(3.9,4,4.1)$ و $\widetilde{\mu}=(5,5.1,5.2)$ باشند حال طبق رابطه (۲) داریم:

$$\widetilde{P}_0(t)=(0.538+(0.419).\exp(-9.3).t,0.56+(0.44).\exp(-9.1).t,$$
$$0.584+(0.46).\exp(-8.9).t)=\widetilde{R}(t)$$
$$\widetilde{P}_1(t)=(0.416-(0.46).\exp(-8.9).t,0.44-(0.44)\exp(-9.1).t,$$
$$0.46-(0.419).\exp(-9.3).t)$$

اگر t=0.2 باشد داریم:

$$\tilde{P}_0(0.2) = (0.6,0.63,0.66) = \tilde{R}(0.2)$$
$$\tilde{P}_1(0.2) = (0.34,0.37,0.4)$$

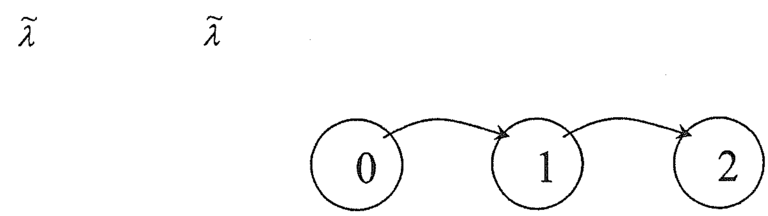
اگر $t \to \infty$ باشد داریم:

$$\tilde{\pi}_0 = (0.538,0.56,0.584)$$
$$\tilde{\pi}_1 = (0.416,0.44,0.462)$$

۳ـ بررسی مدل فرآیند تولد خالص با پارامترهای فازی در حالت گذرا

فرض کنید زمان ورود دارای توزیع نمایی با پارامتر فازی $\tilde{\lambda}$ بوده، سرویس‌دهی در سیستم وجود نداشته و ظرفیت سیستم ۲ باشد. این سیستم را در حالت گذرا مورد بررسی قرار می‌دهیم.

$$Q = \begin{pmatrix} -\tilde{\lambda} & \tilde{\lambda} & 0 \\ 0 & -\tilde{\lambda} & \tilde{\lambda} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



$$\tilde{W}Q = 0 \quad , \quad \tilde{N}Q = 0 \quad , \quad \tilde{N} = \frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\mu}} \quad , \quad \tilde{w} = \frac{1}{\tilde{\mu}}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d\tilde{P}_0(t)}{dt} = -\tilde{\lambda}.\tilde{P}_0(t) \\ \dfrac{d\tilde{P}_1(t)}{dt} = \tilde{\lambda}.\tilde{P}_0(t) - \tilde{\lambda}.\tilde{P}_1(t) \\ \dfrac{d\tilde{P}_2(t)}{dt} \tilde{\lambda}.\tilde{P}_1(t) \end{cases}$$

با فرض $\tilde{P}_0(0) = 1$ و $\tilde{P}_1(0) = 0$ و $\tilde{P}_2(0) = 0$ و $\tilde{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ داریم:

$$\tilde{P}_0(t) = e^{-\tilde{\lambda}.t} = \exp(-\tilde{\lambda}.t) \approx (\exp(-\lambda_3).t, \exp(-\lambda_2).t, \exp(-\lambda_1).t)$$
$$\tilde{P}_1(t) = (\tilde{\lambda}.t).e^{-\tilde{\lambda}.t} = \big((\lambda_1.t).\exp(-\lambda_3.t), (\lambda_2.t).\exp(-\lambda_2.t), (\lambda_3.t).\exp(-\lambda_1.t)\big)$$

از طرفی داریم:

$$\tilde{P}_0(t) + \tilde{P}_1(t) + \tilde{P}_2(t) = 1$$
$$\tilde{N}(t) = 0.\tilde{P}_0 + 1.\tilde{P}_1(t) + 2.\tilde{P}_2(t) = \tilde{P}_1(t) + 2\tilde{P}_2(t)$$

اگر سیستم سری باشد داریم:

$$\tilde{R}(t) = \tilde{P}_0(t) = \exp(-\tilde{\lambda}.t) \approx (\exp(-\lambda_3.t), \exp(-\lambda_2.t), \exp(-\lambda_1.t))$$

اگر سیستم موازی باشد داریم:

$$\widetilde{R}(t)=\widetilde{P}_0(t)+\widetilde{P}_1(t)=\exp(-\widetilde{\lambda}.t)+(\widetilde{\lambda}.t)\exp(-\widetilde{\lambda}.t)\approx$$
$$\approx(\exp(-\lambda_3.t)+(\lambda_1.t).\exp(-\lambda_3.t),\exp(-\lambda_2.t)+(\lambda_2.t)\exp(-\lambda_2.t),$$
$$\exp(-\lambda_1.t)+(\lambda_3.t).\exp(-\lambda_1.t))$$

مثال عددی:

$$\widetilde{\lambda}=(3.9,4,\ 4.1)$$

طبق رابطه (۳) داریم:

$$\widetilde{P}_0(t)=\exp(-\widetilde{\lambda}.t)=(\exp(-4.1).t\ ,\ \exp(-4).t\ ,\ \exp(-3.9).t)$$

طبق رابطه (۴) داریم:

$$\widetilde{P}_1(t)=\left((3.9t).\exp(-4.1t),(4t).\exp(-4t),(4.1t).\exp(-3.9t)\right)$$

اگر $t=0.2$ باشد داریم:

$$\widetilde{P}_0(0.2)=(0.44\,,0.45\,,0.46)$$
$$\widetilde{P}_1(0.2)=(0.34\,,0.36\,,0.38)$$
$$\widetilde{P}_2(0.2)=(0.16\,,0.19\,,0.22)$$

اگر سیستم سری باشد:

$$\widetilde{R}(0.2)=\widetilde{P}_0(0.2)=(0.44,0.45,0.46)$$

اگر سیستم موازی باشد:

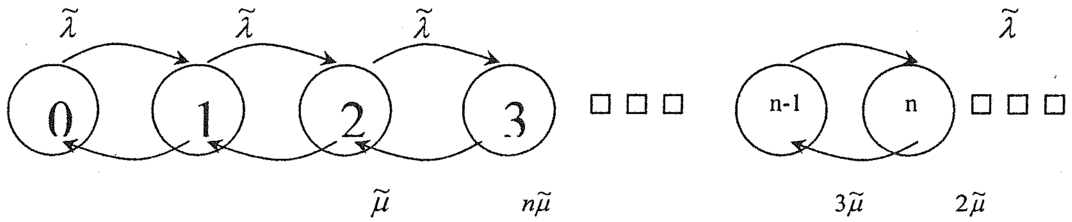
$$\widetilde{R}(0.2)=\widetilde{P}_0(0.2)+\widetilde{P}_1(0.2)=(0.78,0.81,0.84)$$

اگر $t\to\infty$ باشد داریم:

$$\widetilde{\pi}_0=\widetilde{\pi}_1=0\qquad\widetilde{\pi}_2=1$$

٤ـ بررسی مدل صف فازی $M/M/\infty$ با پارامترهای فازی در حالت گذرا

فرض کنید مدلی بی‌نهایت سرویس‌دهنده داشته باشیم که مدت زمان بین دو ورود دارای توزیع نمایی با پارامتر فازی $\widetilde{\lambda}$ و مدت زمان سرویس دارای توزیع نمایی با پارامتر فازی $\widetilde{\mu}$ باشد. می‌خواهیم این سیستم را در حالت گذرا بررسی کنیم.



حال داریم:

$$\frac{d\widetilde{P}_n(t)}{dt}=-(\widetilde{\lambda}+n.\widetilde{\mu})\widetilde{P}_n(t)+(n+1)\widetilde{\mu}.\widetilde{P}_{n+1}(t)+\widetilde{\lambda}.P_{n-1}(t)\qquad n\geq 1$$
$$\frac{d\widetilde{P}_0(t)}{dt}=-\widetilde{\lambda}.\widetilde{P}_0(t)+\widetilde{\mu}\widetilde{P}_1(t)$$

می‌توان با استفاده از تبدیل Z معادلات دیفرانسیل بالا را بصورت حل کرد: ([۸])

$$\widetilde{P}_n(t)=\frac{1}{n!}\left[(1-e^{-\mu.t}).\frac{\widetilde{\lambda}}{\widetilde{\mu}}\right]^n.\exp\left[-(1-e^{-\widetilde{\mu}.t}).\frac{\widetilde{\lambda}}{\widetilde{\mu}}\right]$$

رابطه (۷) را با داشتن $\widetilde{\lambda}=(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$ و $\widetilde{\mu}=(\mu_1,\mu_2,\mu_3)$ را می‌توان بصورت زیر محاسبه کرد:

$$\frac{\widetilde{\lambda}}{\widetilde{\mu}}=\left(\frac{\lambda_2}{\mu_3},\frac{\lambda_2}{\mu_2},\frac{\lambda_3}{\mu_1}\right)$$
$$-\widetilde{\mu}.t=(-\mu_3.t,-\mu_2.t,-\mu_1.t)$$

$$\exp(-\widetilde{\mu}.t)=(\exp(-\mu_3.t),\exp(-\mu_2.t),\exp(-\mu_1.t))$$
$$1-\exp(-\widetilde{\mu}.t)=(1-\exp(-\mu_1.t),1-\exp(-\mu_2.t),1-\exp(-\mu_3.t))$$
$$(1-\exp(-\widetilde{\mu}.t))\left(\frac{\widetilde{\lambda}}{\widetilde{\mu}}\right)=\left(\frac{\lambda_1}{\mu_3}(1-\exp(-\mu_1.t)),\frac{\lambda_2}{\mu_2}(1-\exp(-\mu_2.t)).\frac{\lambda_3}{\mu_1}(1-\exp(-\mu_3.t))\right)=(a_1,a_2,a_3)$$
$$-(1-exp(-\widetilde{\mu}.t))\left(\frac{\widetilde{\lambda}}{\widetilde{\mu}}\right)=(-a_3,-a_2,-a_1)$$

حال داریم:

$$\widetilde{P}_n(t)=\frac{1}{n!}(a_1^n,a_2^n,a_3^n).(exp(-a_3),exp(-a_2),exp(-a_1))$$

$$\widetilde{P}_n(t)=\left(\frac{a_1^n.exp(-a_3)}{n!},\frac{a_2^n.exp(-a_2)}{n!},\frac{a_3^n.exp(-a_1)}{n!}\right)$$

$$\widetilde{P}_0(t)=\left(exp(-a_3),exp(-a_2).exp(-a_1)\right)$$

مثال عددی:

فرض کنید $\widetilde{\lambda}=(3.9,4,4.1)$ و $\widetilde{\mu}=(5,5.1,5.2)$ باشد، آنگاه طبق رابطه (۹) داریم:

$$\widetilde{P}_0(0)=(1,1,1)$$

$$\widetilde{P}_0(t)=\left(\left(exp(\frac{4.1}{5}(-1+exp(-5.2t))\right).exp\left(\frac{4}{5.1}(-1+exp(-5.1t))\right),exp\left(\frac{3.9}{5.2}(-1+exp(-5t))\right)\right)$$

اگر $t=0.2$ باشد داریم:

$$\widetilde{P}_0(0.2)=(0.588,0.605,0.622)$$

اگر $t=0.5$ باشد داریم:

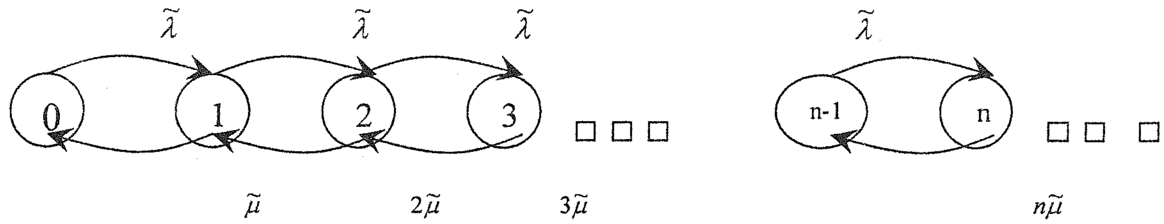
$$\widetilde{P}_0(0.5)=(0.468,0.485,0.502)$$

اگر $t\to\infty$ باشد داریم:

$$\widetilde{\pi}_0=(0.44,0.465,0.472)$$

۵ـ بررسی مدل $M/M/\infty$ با پارامترهای فازی در حالت پایدار

در این مدل فرض بر این است که سیستم از نظر خدمت‌دهندگان از محدودیتی نداشته و هر لحظه که یک مشتری جدید وارد می‌شود یک خدمت دهنده آماده ارائه خدمت می‌گردد. مثال بارز اینگونه سیستمها مدلهای سلف سرویس می‌باشد که در آن خدمت دهنده مشتری خود اوست و می‌توان تعداد خدمت دهندگان را بی‌نهایت تصور کرد. در این مدل زمان بین دو ورود نمایی با پارامتر فازی $\tilde{\lambda}$ و مدت زمان سرویس‌نمایی با پارامتر فازی $\tilde{\mu}$ می‌باشد.



$$\tilde{\pi}_n = \left(\frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\mu}}\right)^n \cdot \frac{1}{n!} \cdot \tilde{\pi}_0$$

$$\sum_{n=0}^{x} \tilde{\pi}_n = \sum_{n=0}^{x} \left(\frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\mu}}\right)^n \cdot \frac{1}{n!} \cdot \tilde{\pi}_0 = \tilde{\pi}_0 \cdot exp\left(\frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\mu}}\right)$$

$$\tilde{\pi}_0 = \frac{\sum_{n=0}^{x} \tilde{\pi}_n}{exp\left(\frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\mu}}\right)} \qquad (11)$$

در این سیستم تعداد خدمت دهندگان بی‌نهایت است لذا هیچ‌وقت صف به وجود نخواهد آمد و طبق روابط لیتل داریم:

$$\tilde{WQ} = 0 \quad , \quad \tilde{NQ} = 0 \quad , \quad \tilde{N} = \frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{\mu}} \quad , \quad \tilde{w} = \frac{1}{\tilde{\mu}}$$

مثال عددی:

فرض کنید:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\pi}_n = (0.997, 1, 1.003), \ \tilde{\mu} = (5, 5.1, 5.2), \ \tilde{\lambda} = (3.9, 4, 4.1)$$

می‌خواهیم معیارهای ارزیابی این سیستم صف را محاسبه کنیم:

با استفاده از رابطه (۱۱) و تعریف (۱) داریم:

$$\tilde{\pi}_0 = (0.439, 0.457, 0.474)$$

با استفاده از رابطه (۲-۶) داریم:

$$\tilde{\pi}_1 = (0.329, 0.358, 0.388)$$

$$\tilde{\pi}_n = \left(0.439\left(\frac{(0.75)^n}{n!}\right), 0.457\left(\frac{(0.784)^n}{n!}\right), 0.474\left(\frac{(0.82)^n}{n!}\right)\right)$$

و با استفاده از روابط لیتل داریم:

$$\widetilde{WQ} = 0 \quad , \quad \widetilde{NQ} = 0 \quad , \quad \tilde{N} = (0.75, 0.784, 0.82) \quad , \quad \tilde{w} = (0.192, 0.196, 0.2)$$

۶ـ نتیجه‌گیری

مدلهای صف $M/M/1/1$ و فرآیند تولد خالص و $M/M/\infty$ با پارامترهای فازی در حالت گذرا و پایدار بررسی شد و نتایج جدیدی در مورد این مدلها با حالت فازی ارائه گردید و کاربرد آنها در پایایی سیستم ارائه گردیده و مشاهده شد که روش ارائه شده از پایایی قویتر و خطای کمتر نسبت به روشهای گذشته برخوردار است. با توسعه این روشها زمینه‌های تحقیقاتی جدیدی فراهم می‌گردد که عبارتند از:

۱ـ توسعه مدل صف $M^{[x]}/M/c$ با پارامترهای فازی (ورود گروهی).

۲ـ توسعه مدل صف $M/M^{[x]}/c$ با پارامترهای فازی (سرویس‌گروهی).

۳ـ توسعه مدل صف $M/M/c$ با پارامترهای فازی در حالت گذرا.

مراجع

[1] Jung Bok JO, Yasuhiro Tsujimura, Mitsou Gen and Genji Yamazaki: A Network Model Based on Fazzy Queueing System. Proc. Of the 3rd IEEE Intl Conf. Of Fuzzy Systems,(1994), 1951-1956.

[2] Jung Bok JO, Yasuhiro Tsujimura, Mitsou Gen and Genji Yamazaki: Failure AnaLYSES of Computer System Based on Fuzzy Queueing Theory : Computers ind. Engng vol. 27, Nos 1-4, PP. 425-428,1994.

[3] Jung Bok JO, Yasuhiro Tsujimura, Mitsou Gen and Genji Yamazaki: and jaeuk lee: Performance of multyclass BCMP Model for Comouter System Based of Fuzzy Set Theory: computers ind. Engng vol .33, Nos 3-4, PP.557-560, 1997.

[4] P.JM van Laahoven and W.Pedrycz, A fuzzy extension of saaty s priority theory, fuzzy Sets and Systems 11(1938) 229-241.

[5] Wang lie: A course in fuzzy systems and Control (1992).

[6] A.Kaufann and M.Mgupta. fuzzy Mthematical Models hn Engineering and Management science(North-Holland, 1988)

[7] Gros.D.& C.M>Haris:Fundamentls of queueing,2nd edition,Wiley,New york,1987

[8] Bhat, U.N.(1968). Transient behvior of multi - server queues whth recurrent input and Exponential service times. J.APPL.Pyob.d , 158-168

[9] قاسمی فرهاد و امیری مقصود : توسعه مدل‌های نمایی صف با پارامترهای فازی. مجلهٔدانشگاه صنعتی امیرکبیر تهران(نشریه علمی ـ پژوهشی سال چهاردهم/ شماره۵۳/ زمستان ۱۳۸۱)