

مطالعه عددی اثر گرمایش سطحی بر کاهش پسای

اصطکاکی

رضا خاکی^۱؛ مسعود برومند^۲

چکیده

یکی از روش های جدید برای کاهش نیروی پسای وسایل پرنده مورد طراحی و یا هواپیماهای موجود، گرم کردن سطح در محدوده توربولانس است. در مقاله حاضر، کاهش پسای اصطکاکی در اجسام تقارن محوری با استفاده از گرمایش سطح در محدوده توربولانس به صورت عددی مورد مطالعه قرار گرفته است. برای بررسی، مدلی تقارن محوری به شکل تقریبی بدنه هواپیما به طول 0.5 m و ضریب لاغری $L/D=10$ که $1/4$ ابتدایی و انتهایی آن از یک منحنی بیضی شکل و مابقی از سطح صاف تشکیل شده است، در نظر گرفته شده است. برای شبیه سازی عددی از معادلات ناویر استوکس تقارن محوری با تقریب لایه نازک و مدل توربولانس بلدوینگ-لوماکس برای شبیه سازی عددی استفاده شده است. به منظور تعیین سطح مناسب گرمایش، بخش میانی و صاف مدل به پنج قسمت مساوی تقسیم شده و اثر تغییر دما بر سطوح مختلف و همچنین، تغییر تعداد سطوح گرم شونده بررسی شده است. در حالتی که سطح نزدیکتر به دماغه تا 100°C گرم شده است، نیروی پسای حاصل در حدود ۲۵ درصد کاهش می یابد.

کلمات کلیدی

کاهش پسا، پسای اصطکاکی، تقارن محوری، معادلات ناویر استوکس لایه نازک.

Numerical Study of Skin Friction Drag Reduction by Surface Heating

Reza Khaki; Massoud Boroomand

ABSTRACT

A new technique for reducing the drag of either existing or new aircraft configuration was investigated. Heating the surface under a turbulent boundary layer reduces the turbulent skin friction. In present paper, friction drag reduction in axisymmetric bodies is investigated numerically, applying heating the surface in the turbulent boundary layer. For numerical analysis, an axisymmetric model, nearly like an airplane body, with a length of 0.5 m and taper ratio of 10 is considered which, quarter length of its tip and end has elliptical form and the others is flat. Also, axisymmetric form of the thin layer Navier Stokes equations using Baldwin-Lomax turbulent model is applied for the numerical simulation. Detecting the best of the heating area is performed by dividing the flat section of the model to five equal segments and therefore, effects of temperature variation in various segments and changing number of heated segments are investigated. Numerical results show that warming the first segment to 100°C , causes approximately 25 percent reduction in drag force.

KEYWORDS

Drag reduction, Friction Drag, Axisymmetric Body, Thin Layer Navier Stokes (TLNS).

^۱ دانشجوی دکتری هوافضا، دانشگاه امیرکبیر - عضو هیئت علمی دانشگاه هوایی شهید ستاری.

^۲ استادیار دانشکده هوافضا دانشگاه امیرکبیر boromand@idro.org.

$$T_R = \frac{T_{BL}}{T_\infty} \quad (3)$$

در نتیجه:

$$\frac{D_{BL}}{D_{fx}} = T_R^{1/6} T_R^{-5/6} = T_R^{-2/3} \quad (4)$$

مشخص است، هنگامی که دما به لایه مرزی توربولانس اضافه می شود، پسای اصطکاک پوسته تقریباً به عنوان تابعی از نسبت دمای پوسته به دمای محیط کاهش می یابد [۸].

Lin & Ash برای نشان دادن این پدیده از تداخل حل عددی معادلات غیر لزج و معادلات لایه مرزی استفاده کردند [۶]. آنها با گرم کردن کل سطح، کاهش نیروی پسای اصطکاکي به وسیله گرمایش لایه مرزی را مورد بررسی قرار دادند.

در سال ۱۹۹۹ طی سلسله آزمایش‌هایی در NASA این پدیده در محدوده های سرعتی مختلف مورد بررسی قرار گرفت [۸]. در آزمایش های مختلف این نتیجه حاصل شد که با کاهش عدد رینولدز در محدوده توربولانس، افزایش دمای روی سطح بر کاهش نیروی پسای اصطکاکي اثر بیشتری خواهد داشت.

در مقاله حاضر با تهیه یک تحلیل تقارن محوری برای حل معادلات ناویه استوکس با تقریب لایه نازک این پدیده بررسی شده است. این تحلیل برای بررسی صحت نتایج بر روی یکی از مدل های مورد تست در آزمایش های مرجع [۸] اجرا شده است. علاوه بر این آزمایشات تنها در نسبت دمای $T_{BL}/T_\infty = 1.2$ یا گرمایش سطح به میزان 100°C به انجام رسیده بود که در بررسی حاضر علاوه بر تغییر دما و سطح گرمایش، سطح مناسب گرمایش به ازای انتقال حرارت ثابت نیز مورد بررسی قرار گرفته است.

۲- شبیه سازی عددی

به منظور شبیه سازی عددی از حل معادلات ناویر استوکس تقارن محوری با تقریب لایه نازک استفاده شده است. شکل بقایي^۱ این معادلات همراه با روش حل بیم - وارمینگ^۲ در ضمیمه^۱ ارائه شده است.

در این بررسی برای مدل سازی توربولانس از مدل جبری بلدوینگ- لومکس^۲ استفاده شده است [۷]. در این روش تأثیر توربولانس به صورت ضریب لزجت ناشی از ادی^۳ های جریان توربولانس (μ_t) شبیه سازی می شود. بنابراین، در ترم های مربوط به معادلات ناویر استوکس، ضریب لزجت (μ) با ترم ($\mu + \mu_t$) تعویض می شود و در ترم های مربوط به انتقال دما ($\frac{k}{Cp} = \frac{\mu}{Pr}$) به جای $\frac{\mu}{Pr}$ از $\frac{\mu}{Pr} + \frac{\mu_t}{Pr}$ استفاده می شود.

مزایای کاهش نیروی پسا در اجسام پرنده آشکار است. کاهش نیروی پسا در تمامی پارامترهای عملکرد، مثل ماکزیمم سرعت، شتابگیری سریعتر، کمتر کردن فاصله برخاست، میزان سوخت مصرفی موثر است.

نیروی پسای یک هواپیما از اجزای مختلفی تشکیل شده است. در پرواز مستقیم (Cruise) در بین این اجزاء، پسای اصطکاکي به تنهایی بیش از نیمی از نیروی پسا را به خود اختصاص می دهد [۸]. به منظور کاهش پسای اصطکاکي روش های متعددی به کار گرفته شده است. از آنجا که پسای اصطکاکي در محدوده جریان توربولانس به مراتب بالاتر از پسای اصطکاکي در محدوده جریان آرام است، بسیاری از روش ها سعی در آرام نگهداشتن جریان سیال و به تاخیر انداختن شروع محدوده توربولانس دارند. یکی از این روش ها سرمایه گذاری لایه مرزی در این محدوده است. این روش باعث به تاخیر افتادن شروع اغتشاشات و یا کم شدن اغتشاشات موجود درون لایه مرزی می شود و برای پایدار کردن لایه مرزی و یا به تعویق انداختن جدایش جریان مورد استفاده قرار می گیرد [۱۰].

اما در برخی مناطق مثل بدنه هواپیما به علت طول زیاد نمی توان از توربولانس شدن جریان جلوگیری کرد، در این محدوده باید از روش های کاهش نیروی پسا اصطکاکي در محدوده توربولانس بهره جست. یکی از جدیدترین روش های کاهش پسای اصطکاکي، افزایش حرارت سطح داخل لایه مرزی در محدوده توربولانس است. ایده گرم کردن لایه مرزی در ناحیه توربولانس در اواخر دهه ۸۰ توسط Lin & Ash مطرح شد [۸]. آنها نشان دادند که گرم کردن لایه مرزی در ناحیه توربولانس باعث کاهش نیروی پسا می شود.

گرم کردن دیواره باعث تغییر در لزجت و دانسیته سیال در مجاورت سطح می شود. این تغییر در خواص سیال سبب کاهش پسای اصطکاکي می شود. به سادگی می توان نشان داد که پسای اصطکاکي تابعی از دماست [۲]. با استفاده از آنالیز تغییرات عدد رینولدز می توان نوشت:

$$Cf \propto Re_x^{-1/6} \quad (1)$$

$$D_\mu \propto \mu^{1/6} \rho^{5/6}$$

با استفاده از تعریف نسبت دما می توان نوشت:

$$\frac{\rho_{BL}}{\rho_\infty} = \frac{1}{T_R} \quad (2)$$

$$\frac{\mu_{BL}}{\mu_\infty} \approx T_R$$

حاصل می شود و y_{Max} محلی است که F_{Max} در آن اتفاق می افتد. به همین ترتیب، u_{Diff} به کار رفته در رابطه (۱۲) مطابق زیر تعریف می شود:

$$u_{Diff} = \left(\sqrt{u^2 + v^2 + w^2} \right)_{Max} - \left(\sqrt{u^2 + v^2 + w^2} \right)_{Min} \quad (14)$$

ضرایب ثابت به کار رفته در روابط فوق با بررسی های به عمل آمده برای مسأله مورد بررسی در جدول (۱) ارائه شده است:

جدول (۱): ضرایب بکاررفته در معادلات توربولانس.

A^+	C_{cp}	C_{KLEB}	C_{CW}	k	K	Pr	Pr_t
16	1.6	0.3	0.25	0.9	0.0168	0.72	0.9

شرایط مرزی

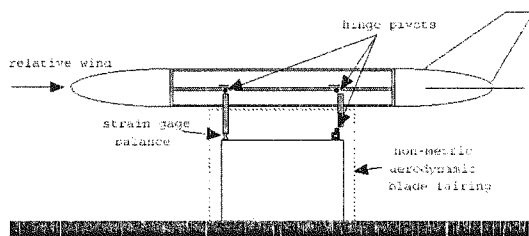
برای اعمال شرایط مرزی روی سطح جسم برای سرعت ها از شرط $U = V = 0$ استفاده شده است، برای دانسیته از برون یابی از نقاط کنار مرز استفاده می شود و فشار روی مرز از حل معادله زیر حاصل شده است.

$$\rho [\partial_t \eta_t + u \partial_x \eta_x + v \partial_y \eta_y] - \rho U (\eta_x u_x + \eta_y v_x) = (\eta_x \xi_x + \eta_y \xi_y) p_\xi + (\eta_x^2 + \eta_y^2) p_\eta = p_n \sqrt{\eta_x^2 + \eta_y^2} \quad (15)$$

برای شرایط مرزی بر روی مرزهای ورودی و خروجی از شرایط ریمان [۱۱] استفاده شده است.

۳- مسئله مورد بررسی

شکل (۱) یکی از مدل های مورد آزمایش در مرجع [۸] و کاهش نیروی پسا ناشی از گرمایش سطح را نشان می دهد، این مدل دارای ضریب لاغری $L/D = 10$ است که ۱/۴ ابتدایی و انتهایی آن از یک منحنی بیضی شکل و مابقی از سطح صاف تشکیل شده است



شکل (۱): مدل مورد آزمایش در [۸]

در آزمایش مربوط به شکل (۱) سطح صاف میانی به پنج

در مدل جبری مورد استفاده (μ_t) با استفاده از رابطه زیر تعریف می شود.

$$\mu_t = \begin{cases} (\mu_t)_{inner} & y \leq y_{crossover} \\ (\mu_t)_{outer} & y_{crossover} < y \end{cases} \quad (5)$$

در رابطه فوق برای محاسبه (μ_t) محدوده لایه مرزی به دو بخش داخلی و خارجی تقسیم بندی می شود. y معرف فاصله عمود تا دیواره و $y_{crossover}$ کوچکترین میزان y است که در آن میزان $(\mu_t)_{inner}$ و $(\mu_t)_{outer}$ برابر است.

با استفاده از فرمول پرانتل - ون درایست^۱ برای لایه داخلی می توان نوشت:

$$(\mu_t)_{inner} = \rho l^2 |\omega| \quad (6)$$

که در آن:

$$l = ky \left[1 - \exp\left(-\frac{y^+}{A^+}\right) \right] \quad (7)$$

$|\omega|$ به کار رفته در روابط فوق معرف اندازه چرخش^۱ است و برای حالت دو بعدی به صورت زیر تعریف می شود.

$$|\omega| = \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (8)$$

برای پارامتر y^+ می توان نوشت:

$$y^+ = \frac{\rho_w u_t y}{\mu_w} = \frac{\sqrt{\rho_w \tau_w} y}{\mu_w} \quad (9)$$

برای لایه خارجی می توان نوشت:

$$(\mu_t)_{outer} = KC_{cp} \rho F_{wake} F_{KLEB}(y) \quad (10)$$

تابع $F_{KLEB}(y)$ به کار رفته در رابطه فوق مطابق زیر تعریف می شود:

$$F_{KLEB}(y) = \left[1 + 5.5 \left(\frac{C_{KLEB} y}{y_{max}} \right)^6 \right]^{-1} \quad (11)$$

برای F_{wake} به کار رفته در رابطه (۱۰) می توان نوشت:

$$F_{wake} = \text{Min} \left\{ \begin{array}{l} y_{Max} F_{Max} \\ C_{wk} y_{max} \frac{u_{Diff}^2}{F_{max}} \end{array} \right. \quad (12)$$

مقادیر پارامترهای F_{Max} و y_{Max} با استفاده از رابطه ذیل حاصل می شود:

$$F(y) = y |\omega| \left[1 - \exp\left(-\frac{y^+}{A^+}\right) \right] \quad (13)$$

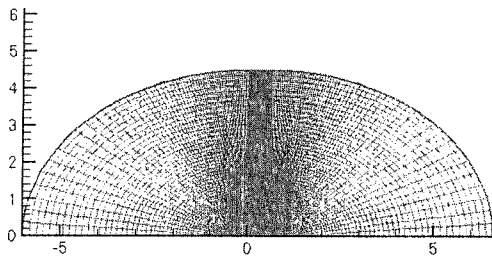
مقدار F_{Max} با توجه به ماکزیم مقدار حاصل از رابطه فوق

بخش مساوی برای گرمایش تقسیم شده است که هر سطح در صورت فعال بودن المان حرارتی به میزان $T_{BL}/T_{\infty} = 1.2$ یا تقریباً معادل 100°C گرم شده است. طول مدل برابر با 120 سانتیمتر است و محاسبات در عدد ماخ جریان آزاد معادل با 0.06 اجرا شده است.

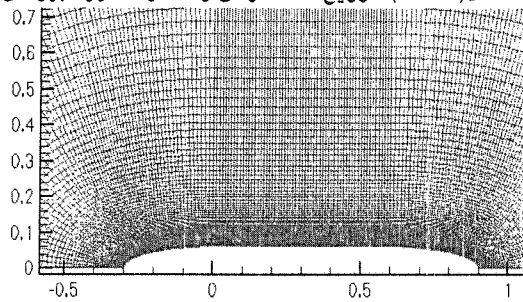
در محاسبات حاضر مطابق [۸] برای بی بعد سازی نیروی پسا از رابطه زیر استفاده شده است:

$$CD = \frac{D}{\frac{1}{2} \rho_{\infty} V_{\infty}^2 S} \quad (16)$$

در این رابطه، پارامتر D معرف نیروی پسا، پارامترهای V_{∞} و ρ_{∞} به ترتیب چگالی و سرعت مربوط به جریان آزاد و پارامتر S سطح نما از بالای جسم مورد بررسی است. در شکل (۲) تغییرات ضریب نیروی پسا را در آزمایش اجرا شده به ازای گرم کردن سطوح در بخش های مختلف همراه با شکل شماتیک مدل نشان داده شده است.

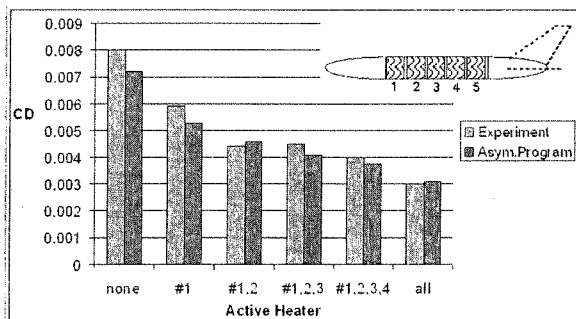


شکل (۳-الف): توزیع نقاط گرهی و محدوده مورد بررسی



شکل (۳-ب): توزیع نقاط گرهی در اطراف جسم

در شکل (۴) مقادیر حاصل از آزمایش مرجع [۸] و تحلیل حاضر برای مقایسه کنار هم آورده شده است.

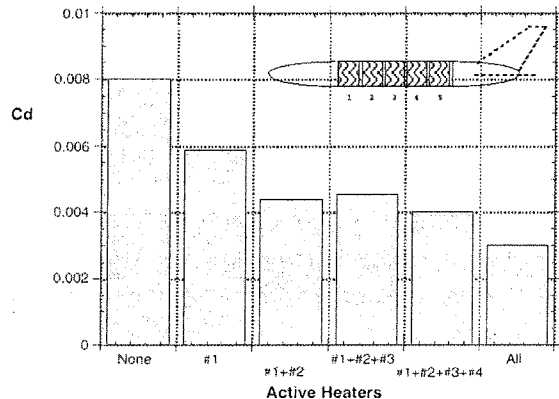


شکل (۴): مقایسه بین نتایج حاصل از تحلیل تقارن محوری با آزمایش ها

در شکل (۴) ستون اول ضرایب مربوط به حالت بدون انتقال حرارت، در ستون دوم به بعد ضرایب نیروی پسا بعد از فعال شدن المان های حرارتی از ابتدای مدل تا انتها ارائه شده است، هرکدام از المان ها در صورت فعال شدن به میزان 100°C یا معادل با $T_{BL}/T_{\infty} = 1.2$ گرم می شوند. همان طور که مشخص است آنچه از جل عددی حاصل شده از لحاظ رفتار کاهش نیروی پسا توسط انتقال حرارت، با میزان حاصل از آزمایش مربوط به [۸] تطابق دارد.

اختلاف کوچک موجود بین تحلیل اجرا شده با نتایج تست به خاطر تأثیر عواملی مثل پایه اندازه گیری مربوط به تست که در شکل (۱) نشان داده شده است، می باشد.

برای مقایسه اثر گرمایش هرکدام از سطوح بر کاهش نیروی پسا، هر یک از سطوح به صورت مجزا به میزان ۱۰۰



شکل (۲): کاهش نیروی پسا توسط انتقال حرارت حاصل از آزمایش های [۸]

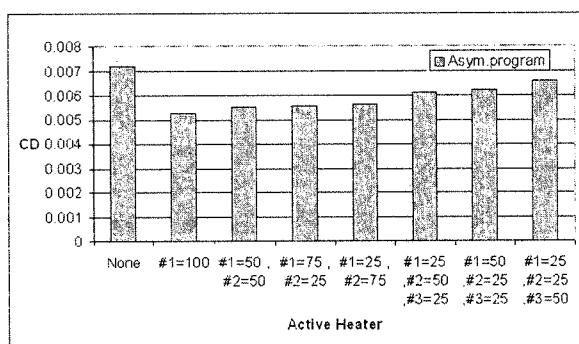
در بررسی حاضر برای حصول اطمینان به تحلیل اجرا شده آنالیز جریان حول مدل مربوط به شکل (۱) انجام پذیرفته است و ابعاد و شرایط محیطی دقیقاً مشابه با شرایط آزمایش مورد نظر انتخاب شده است، تا با مقایسه نتایج حاصل از کد تقارن محوری با آزمایش های اجرا شده بتوان به نتایج حاصل از کد اطمینان حاصل کرد.

در تحلیل عددی اجرا شده به منظور دستیابی به نتایج قابل قبول آنالیز تغییرات نقاط گرهی و تغییرات محدوده دور دست انجام پذیرفته است در این تحلیل نهایتاً از 170×180 نقطه گرهی استفاده شده است و مرزهای دور دست بیش از ۱۰ برابر طول مدل انتخاب شده است. شکل (۳) توزیع نقاط گرهی و محدوده مورد بررسی را نشان می دهد.

گرمایش سطوح ابتدایی هرچه گرمایش بصورت متمرکزتر انجام پذیرد میزان کاهش نیروی پسا بیشتر است.

جدول (۲): افزایش دمای سطوح در حالت های مختلف (بر حسب درجه سانتیگراد)

حالت بررسی	سطح ۱	سطح ۲	سطح ۳
۱	۰	۰	۰
۲	۱۰۰	۰	۰
۳	۵۰	۵۰	۰
۴	۷۵	۲۵	۰
۵	۲۵	۷۵	۰
۶	۲۵	۵۰	۲۵
۷	۵۰	۲۵	۲۵
۸	۲۵	۲۵	۵۰



شکل (۶): بررسی حالت های مختلف گرمایش سطح

۵- نتایج

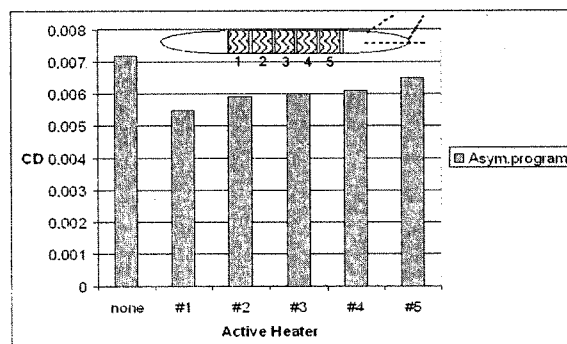
نتایج به دست آمده تا این مرحله نشان می دهند که علاوه بر تأثیر بیشتر گرمایش سطوح ابتدایی، هرچه گرمایش بصورت متمرکزتر انجام پذیرد میزان کاهش نیروی پسا بیشتر است.

در شکل (۷) توزیع تنش برشی روی سطح در حالت های بدون گرمایش، همراه با گرمایش سطح ۱ به میزان 100°C ، گرمایش سطوح ۱ و ۲ به میزان 50°C و گرمایش سطوح ۱ الی ۳ به میزان 100°C نشان داده شده است. میزان نیروی پسا اصطکاکی را می توان با سطح زیر نمودار منحنی های تنش برشی موجود در شکل (۷) متناسب دانست. در این شکل نیز مشخص است تأثیر گرمایش سطح ۱ به میزان 100°C از تأثیر گرمایش سطوح ۱ و ۲ به میزان 50°C بیشتر است.

همچنین با مقایسه منحنی مربوط به افزایش دما روی سطح ۱ به میزان 100°C ، با افزایش دما روی سطوح ۱ و ۲ به میزان 100°C ، کاهش نیروی پسا اصطکاکی با افزایش دما مشهود است.

همان طور که ذکر شد، سرمایش سطح در محدوده جریان آرام باعث کم کردن اغتشاشات درون لایه مرزی، به تأخیر

درجه سانتیگراد گرم شده اند. مطابق شکل (۵) مشهود است که در محدوده بررسی گرمایش سطح، هرچه به سمت نوک مدل مورد بررسی نزدیکتر شویم اثر گرمایش لایه مرزی بر کاهش نیروی پسا بیشتر می شود.



شکل (۵): مقایسه تأثیر گرمایش سطوح به میزان 100°C

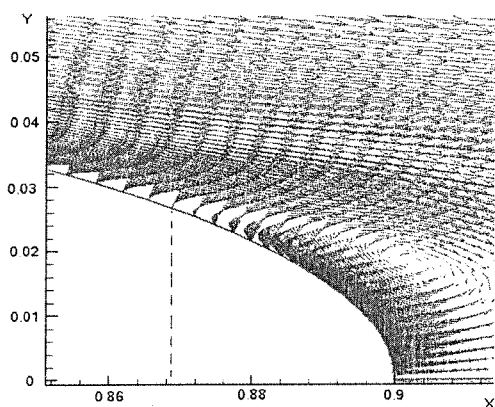
۴- تعیین ناحیه مناسب گرمایش

در بررسی حاضر به منظور رسیدن به سطح گرمایش بهینه، به خاطر کم بودن پارامترهای متغیر و مشخص شدن تأثیر بیشتر گرمایش سطوح ابتدایی (مطابق شکل (۵))، از تکرار در تحلیل جریان استفاده شده است. در تحلیل های مختلف تغییرات دما و تغییر در سطح فعال گرمایش مورد بررسی قرار گرفته است.

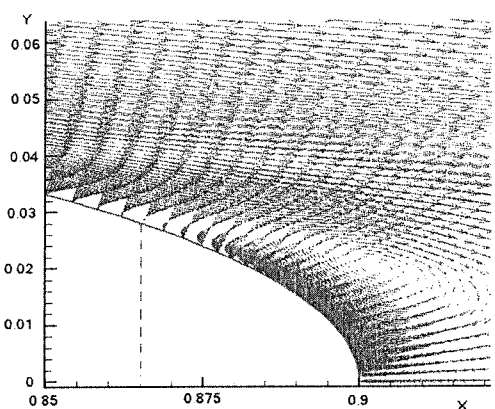
در این بخش با ثابت در نظر گرفتن میزان انتقال حرارت و متغیر گرفتن سطح گرمایش و دمای سطح، تغییرات دما و سطح گرمایش به صورت همزمان مورد بررسی قرار گرفت. با توجه به نتایج حاصل مبنی بر اهمیت بیشتر سطوح ابتدایی بر کاهش نیروی پسا، گرمایش سطوح ابتدایی مطابق جدول (۲) مورد بررسی قرار گرفت. در این جدول سه سطح ابتدایی برای گرمایش در نظر گرفته شده است. حالت بررسی اول حالتی است که هیچ سطحی مورد گرمایش قرار نگرفته و برای مقایسه ارائه شده است. در حالت بررسی دوم سطح ۱ معادل 100°C گرم شده است، در حالت بررسی سوم دو سطح ۱ و ۲ به میزان 50°C گرم شده است و در حالت های بررسی بعدی گرمایش سطوح ۱ و ۲ و یا سطوح ۱ و ۲ و ۳ به میزان دماهای ارائه شده انجام پذیرفته است. در این بررسی با توجه به ثابت بودن اندازه سطوح ۱ و ۲ و ۳ مجموع گرمایش در نظر گرفته شده برای سطوح در حدی است که اندازه انتقال حرارت ثابت باشد.

نتایج حاصل از این بررسی در شکل (۶) ارائه شده است. مطابق شکل مشهود است حالتی که سطح اول با دمای 100°C گرم شده نسبت به حالت های بعدی بیشترین کاهش نیروی پسا اصطکاکی را نشان می دهد. بنابراین علاوه بر تأثیر بیشتر

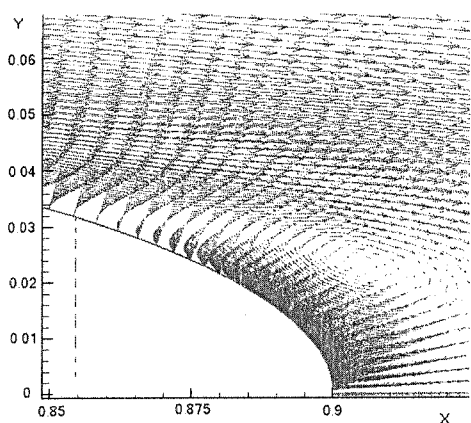
است هر چه عمل گرمایش بیشتر صورت پذیرد جدایش جریان زودتر اتفاق می افتد.



شکل (۹-الف): جدایش جریان در انتهای مدل، بدون انتقال حرارت، نقطه جدایش در حدود $X = 0.868$

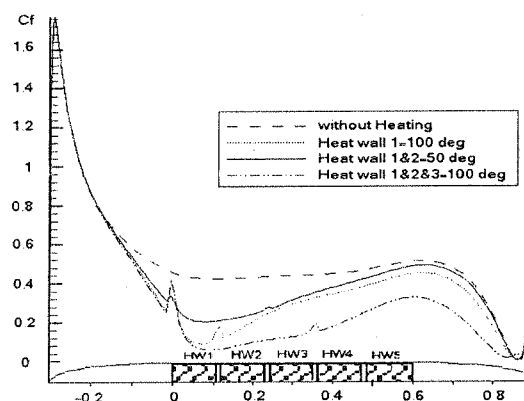


شکل (۹-ب): جدایش جریان در انتهای مدل در حالت گرمایش سطح اول به میزان 100°C ، نقطه جدایش در حدود $X = 0.865$



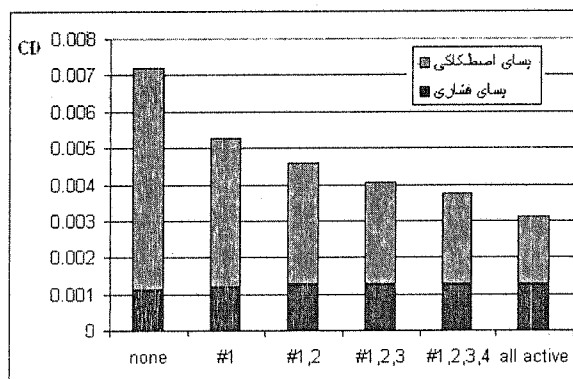
شکل (۹-ج): جدایش جریان در انتهای مدل در حالت گرمایش سطح اول تا سوم به میزان 100°C ، نقطه جدایش در حدود $X = 0.86$

افتادن شروع محدوده توربولانس و به تعویق انداختن جدایش جریان می شود و افزایش دما باعث جلو افتادن نقطه جدایش جریان می شود و این امر نیروی پسای فشاری را افزایش می دهد [۱۰]. اما اندازه نیروی پسای فشاری برای حالت های مورد بررسی بسیار کمتر از نیروی پسای اصطکاکی است.



شکل (۷): تغییرات تنش برشی روی سطح ناشی از گرمایش

در شکل (۸) میزان تغییرات پسای اصطکاکی و پسای فشاری در حالت های ارائه شده در شکل (۴) نشان داده شده است. همان طور که در شکل مشخص است، ستون زیرین معرف میزان ضریب پسای فشاری و ستون بالایی معرف میزان ضریب پسای اصطکاکی است. مشهود است، میزان افزایش نیروی پسای فشاری در مقایسه با کاهش نیروی پسای اصطکاکی، بسیار کوچک و قابل چشم پوشی است.



شکل (۸): تغییرات پسای اصطکاکی و پسای فشاری ناشی از گرمایش

شکل (۹) جدایش جریان را در انتهای مدل در سه نوع گرمایش مختلف نشان می دهد. در این شکل، جدایش جریان در سه حالت مربوط به حالت بدون انتقال حرارت، حالت گرمایش سطح اول به میزان 100°C و گرمایش سه سطح ابتدایی به میزان 100°C با هم مقایسه شده است. مطابق شکل مشهود

۶- نتیجه گیری

با توجه به فعالیت های انجام شده مشخص بود که گرمایش لایه مرزی در محدوده توربولانس باعث کاهش نیروی پسا اصطکاکی می شود [۶] و کاهش عدد رینولدز باعث افزایش تأثیر گرمایش لایه مرزی در محدوده توربولانس می شود [۸]. با توجه به محاسبات اجرا شده می توان نتیجه گرفت:

تأثیر گرمایش سطح کوچکتر با دمای بیشتر هنگامی که آن سطح در محدوده توسعه یافته جریان به دماغه نزدیکتر است، بیشتر است. و برای داشتن بیشترین کاهش نیروی پسا به ازای انتقال حرارت ثابت می توان در ابتدای محدوده جریان مغشوش روی جسم، سطح کوچکی را با بیشترین دمای ممکنه حرارت داد. در این بررسی نشان داده شده است، در حالتی که سطح نزدیکتر به دماغه تا دمای $100^{\circ}C$ گرم شده است، نیروی پسای حاصله در حدود ۲۵ درصد کاهش می یابد. این میزان کاهش درگ در رینولدز $1.6E+6$ و به ازای گرمایش تنها ۱۱ درصد کل سطح به میزان $100^{\circ}C$ حاصل شده است.

۷- ضمایم

۷-۱- فهرست علائم

$\hat{A}, \hat{B}, \hat{M}$	ماتریس ژاکوبین
u, v, w	مولفه های سرعت
e	انرژی کل
I	ماتریس واحد
M	عدد ماخ
P	فشار
q	هدایت حرارتی
T	دما
t	زمان
τ	تنش برشی
x, y	مختصات نقاط در دستگاه مختصات فیزیکی
ξ, η	مختصات نقاط در دستگاه مختصات محاسباتی
ρ	چگالی
μ	ضریب لزجت
μ_t	ضریب لزجت توربولانس
Pr	عدد پرانتل
Pr_t	عدد پرانتل توربولانس
γ	نسبت حرارتی ویژه
Re	عدد رینولدز
J	ژاکوبین نگاشت فضای فیزیکی به فضای محاسباتی

بصورت زیر نویس، معرف خصوصیت کنار سطح جسم می باشد BL
 بصورت زیر نویس، معرف خصوصیت در دور دست می باشد ∞

۷-۲- معادلات حاکم

معادلات ناویر استوکس برای حالت تقارن محوری و بقایی (Conservative) به صورت زیر است:

$$\frac{\partial \hat{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{E}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{F}}{\partial y} + \hat{H}_t = \frac{\partial \hat{E}_v}{\partial x} + \frac{\partial \hat{F}_v}{\partial y} + \hat{H}_v \quad (a1)$$

بردارهای به کار رفته در معادله فوق به صورت زیر تعریف می شوند [۱] و [۲]:

$$\hat{Q} = [\rho \quad \rho u \quad \rho v \quad e]^T \quad (a2)$$

$$\hat{E} = [\rho u \quad \rho u^2 + p \quad \rho uv \quad (e+p)u]^T \quad (a3)$$

$$\hat{F} = [\rho v \quad \rho uv \quad \rho v^2 + p \quad (e+p)v]^T \quad (a4)$$

$$\hat{H}_t = \frac{1}{y} [\rho v \quad \rho uv \quad \rho v^2 \quad (e+p)v]^T \quad (a5)$$

$$\hat{E}_v = [0 \quad \tau_{xpp} \quad \tau_{xy} \quad u\tau_{xpp} + v\tau_{xy} - q_x]^T \quad (a6)$$

$$\hat{F}_v = [0 \quad \tau_{xpp} \quad \tau_{xy} \quad u\tau_{xpp} + v\tau_{xy} - q_x]^T \quad (a7)$$

$$\hat{H}_v = \frac{1}{y} \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{xy} - \frac{2}{3} \frac{y}{Re} \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{v}{y} \right) \\ \tau_{ypp} - \tau_{\theta\theta} - \frac{2}{3} \frac{y}{Re} \frac{\partial v}{\partial x} \\ - \frac{2}{3} \frac{y}{Re} \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{v}{y} \right) \\ u\tau_{xy} + v\tau_{ypp} - q_y - \frac{2}{3} \frac{\mu}{Re} \frac{v^2}{y} \\ - \frac{y}{Re} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{2}{3} \mu \frac{v^2}{y} \right) \\ - \frac{y}{Re} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{2}{3} \mu \frac{uv}{y} \right) \end{bmatrix} \quad (a8)$$

در روابط فوق پارامتر e معرف انرژی داخلی کل است و به صورت زیر تعریف می شود [۱]، [۲]، [۳].

$$e = \rho \bar{u} + \frac{1}{2} \rho V^2$$

تنش های برشی و عبارت های هدایت از روابط زیر به دست می آیند:

$$\tau_{ypp} = \frac{\mu}{Re} \left(\frac{4}{3} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (a9)$$

$$\tau_{xpp} = \frac{\mu}{Re} \left(\frac{4}{3} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

$$\hat{M} = \frac{\partial \hat{F}_v}{\partial \hat{Q}}$$

ماتریس های ژاکوبین \hat{A} و \hat{B} به ترتیب به ازای κ معادل ξ و η به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\hat{A} \text{ or } \hat{B} = \begin{bmatrix} \kappa_r & \kappa_x & \kappa_y & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & (\gamma-1)\kappa_x \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & (\gamma-1)\kappa_y \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & \gamma\theta + \kappa_r \end{bmatrix} \quad (a15)$$

در رابطه فوق از پارامترهای زیر استفاده شده است:

$$\begin{aligned} A_{21} &= -u\theta + \kappa_x \phi^2 \\ A_{22} &= \kappa_r + \theta - (\gamma-2)\kappa_x u \\ A_{23} &= \kappa_y u - (\gamma-1)\kappa_y v \\ A_{31} &= -v\theta + \kappa_y \phi \\ A_{32} &= \kappa_x v - (\gamma-1)\kappa_x u \\ A_{33} &= \kappa_r + \theta - (\gamma-2)\kappa_y v \\ A_{41} &= \theta(\phi^2 - a_1) \\ A_{42} &= \kappa_x a_1 - (\gamma-1)u\theta \\ A_{43} &= \kappa_y a_1 - (\gamma-1)v\theta \end{aligned}$$

در تعریف ماتریس ژاکوبین فوق پارامترهای α_1 و θ و ϕ^2 به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\begin{aligned} a_1 &= \gamma \left(\frac{e}{\rho} \right) - \phi^2 \\ \theta &= \kappa_x u + \kappa_y v \\ \phi^2 &= 0.5(\gamma-1)(u^2 + v^2) \end{aligned}$$

مطابق تعریف انجام شده برای \hat{M} می توان نوشت:

$$\hat{M} = J^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_{21} & \alpha_1 \partial_\eta (\rho^{-1}) & \alpha_2 \partial_\eta (\rho^{-1}) & 0 \\ m_{31} & \alpha_2 \partial_\eta (\rho^{-1}) & \alpha_3 \partial_\eta (\rho^{-1}) & 0 \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{bmatrix} \quad (a16)$$

در رابطه فوق از پارامترهای زیر استفاده شده است:

$$\begin{aligned} m_{21} &= -\alpha_1 \partial_\eta (u/\rho) - \alpha_2 \partial_\eta (v/\rho) \\ m_{31} &= -\alpha_2 \partial_\eta (u/\rho) - \alpha_3 \partial_\eta (v/\rho) \\ m_{41} &= \alpha_4 \partial_\eta \left(-(e/\rho^2) + (u^2 + v^2)/\rho \right) \\ &\quad - \alpha_1 \partial_\eta (u^2/\rho) - 2\alpha_2 \partial_\eta (uv/\rho) \\ &\quad - \alpha_3 \partial_\eta (v^2/\rho) \\ m_{42} &= -\alpha_4 \partial_\eta (u/\rho) - m_{21} \\ m_{43} &= -\alpha_4 \partial_\eta (v/\rho) - m_{31} \\ m_{44} &= \alpha_4 \partial_\eta (\rho^{-1}) \\ \alpha_1 &= \mu \left[(4/3)\eta_x^2 + \eta_y^2 \right] \\ \alpha_3 &= \mu \left[\eta_x^2 + (4/3)\eta_y^2 \right] \\ \alpha_2 &= (\mu/3)\eta_x \eta_y \end{aligned}$$

$$\tau_{xy} = \frac{\mu}{\text{Re}} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

$$\tau_{\theta\theta} = \frac{\mu}{\text{Re}} \left(\frac{4}{3} \frac{v}{y} - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right)$$

$$q_x = -\frac{\mu}{\text{Re}} \frac{\partial T}{\text{Pr}(\gamma-1)M_x^2 \partial x} \quad (a10)$$

$$q_y = -\frac{\mu}{\text{Re}} \frac{\partial T}{\text{Pr}(\gamma-1)M_x^2 \partial y}$$

در معادلات فوق سیال نیوتنی و گاز کامل فرض شده است. در روش حل معادلات ناویر استوکس با تقریب لایه نازک از مشتقات ترم های لزج در جهت طولی جسم صرف نظر می گردد. برای حل جریان توسط این دسته از معادلات، داشتن تجمع نقاط گرهی کنار مرز جسم مورد نیاز است.

برای سادگی حل معادلات فوق باید در سیستم محاسباتی به دست آیند. تحت شرایط ذکر شده معادلات ناویر استوکس با تقریب لایه نازک به صورت زیر در می آید.

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} + H_i = \frac{\partial F_v}{\partial y} + H_v \quad (a11)$$

پارامترهای به کار رفته در معادله فوق به صورت زیر تعریف می شود:

$$\begin{aligned} Q &= \frac{\hat{Q}}{J} \\ H_i &= \frac{\hat{H}_i}{J} \\ H_v &= \frac{\hat{H}_v}{J} \\ E &= \frac{1}{J} (\xi_x \hat{E} + \xi_y \hat{F}) \\ F &= \frac{1}{J} (\eta_x \hat{E} + \eta_y \hat{F}) \end{aligned}$$

۷-۳- روش حل معادلات:

در این مقطع، مطابق مراجع [۵] و [۴] و [۹] برای حل معادلات فوق الذکر از روش Beam Warming استفاده شده است [۲]. در این روش معادلات به صورت زیر دسته بندی می شوند:

$$\left[I + h \partial_\xi \hat{A}^n + h \partial_\eta \hat{B}^n - \text{Re}^{-1} h \partial_\eta \hat{M} \right] \Delta \hat{Q}^n = -h (\partial_\xi \hat{E}^n + \partial_\eta \hat{F}^n - \text{Re}^{-1} \partial_\eta \hat{F}_v^n + \hat{H}_i - \hat{H}_v) \quad (a12)$$

در رابطه فوق $\Delta \hat{Q}^n$ به صورت زیر تعریف می شود.

$$\Delta \hat{Q}^n = \hat{Q}^{n+1} - \hat{Q}^n \quad (a13)$$

برای مقادیر \hat{A} ، \hat{B} و \hat{M} می توان نوشت:

$$\begin{aligned} \hat{A} &= \frac{\partial \hat{E}}{\partial \hat{Q}} \\ \hat{B} &= \frac{\partial \hat{F}}{\partial \hat{Q}} \end{aligned} \quad (a14)$$

Joseph L.steger "Implicit finite-difference simulation of flow about arbitrary two-dimensional geometries" AIAA Journal Vol.16,no.7.July 1978

John C.Lin , Robert L.Ash " Wall temperature control of low-speed body drag" J.Aircraft .Vol 23.No.1, Januery 1986

Richard M.Beam and R.F.warming"An implicit factored for the compressible navier-stokes equation" AIAA Journal Vol.16,no.4.April 1978

Brian R.Kramer, Brooke C.Smith, Joseph P.Heid "Drag reduction experiments using boundary layer heating" AIAA paper -99-0134 - 1999

Thomas H.Pulliam "Solution methods in computational fluid dynamics" NASA Ames research center-1992

Ronald D.joslin "Overview of laminar flow control" NASA/TP-1998-208705

Barret Bladwin and Harward Lomax "Thin layer approximation and algebraic model for seprated turbulent flows" AIAA paper 1978- 157

Jameson, A., Schmidt,W. and Turkel ,E."Numerical solution of the Euler equation by finite volume methods using Runge- Kutta time stepping schemes" AIAA paper 81-1259 AIAA 14th fluid and plasma dynamic conference,Palo Alto 1981

$$[4] \quad \alpha_4 = \gamma \mu \text{Pr}^{-1} [\eta_x^2 + \eta_y^2]$$

[5] اکنون برای ساده سازی، استفاده از حل در دو جهت مجزا مورد استفاده قرار می گیرد بدین منظور به جای معادله (۱۲) معادله زیر حل می شود:

$$[6] \quad [I + h\delta_\xi \hat{A}^n] [I + h\delta_\eta \hat{B}^n - h\text{Re}^{-1} \delta_\eta \hat{M}]^* \Delta \hat{Q} = \hat{R}^n \quad (a17)$$

$$[7] \quad \hat{R}^n = -h[\delta_\xi \hat{E}^n + \delta_\eta \hat{F}^n - \text{Re}^{-1} \partial_\eta \hat{F}_v^n + \hat{H}_i - \hat{H}_v]$$

[8]

۸-مراجع

- [9] محمد مهدی رشیدی، وحید اصفهانیان، عزیز عظیمی شبیه سازی عددی جریان تقارن محوری و مافوق صوت با استفاده از معادلات ناویر استوکس. لایه نازک توسط ترکیب روش فشرده و جداسازی بردار شار. اولین کنفرانس علمی و کاربردی سازمان صنایع هوافضا-۷ الی ۱۰ شهریور ۷۹
- [10] Hoerner, S. F. "Fluid-dynamic drag" published by author, 1965
- [11] K.A.Hoffmann, S.T.Chiang;" Computational fluid dynamics for engineers" engineering education system,1993
- Thomas H.Pulliam and Joseph L.steger "Implicit finite-difference simulation of three-dimensional compressible flow" AIAA Journal Vol.18,no.2.February 1980

زیرنویس ها

- ¹ Conservative
- ² Beam-Warming
- ³ Baldwin-Lomax-
- ⁴ Eddy
- ⁵ - Prandtl -Van driest formulation
- ⁶ Vorticity

