انحنای $(\alpha$ و $\beta)$- متریک ها

در هندسه فینسلر

بهروز بیدآباد ؛ نسرین صادق زاده

چکیده

یک نوع خاص ازمتریک های فینسلر (β وα)- متریک ها هستند که کاربرد های فراوانی در مهندسی و فیزیک دارند. با توجه به کاربرد روزافزون این نوع متریک ها در رشته های مختلف، بررسی ویژگی های آن، از جمله مطالعه انحنای پرچمی آنها می تواند در توسعه هندسه مفید بوده و راه گشای حل برخی از مسائل پیچیده مهندسی باشد.از این رو در سالهای اخیر مطالعه انحنای (β وα)- متریک ها بیشتر مورد توجه ریاضیدانان قرار گرفته است. اما از آنجا که محاسبات مربوط به (β وα)- متریک ها در حالت کلی بسیار پیچیده است، این مساله برای هر (β وα)- متریک به طور جداگانه صورت می گیرد.

پس از ذکر مقدمات لازم یک شرط کافی برای انحنای اسکالر بودن (β وα)- متریک های به فرم $F=\alpha\ \varphi(\beta/\alpha)$ به دست می آوریم: اگر α یک متریک ریمانی با انحنای برشی ثابت و β یک فرم کیلینگ با طول ثابت نسبت به α باشد، آنگاه متریک $F=\alpha\ \varphi(\beta/\alpha)$ دارای انحنای اسکالر است. یکی دیگر از نتایج این مقاله یافتن یک شرط لازم وکافی برای ثا بت بودن انحنای پرچمی متریک های به فرم $F=(\alpha+\beta)^2/\alpha$ است. به عبارت دیگر ثابت می کنیم که اگر α یک متریک ریمانی و β یک ۱- فرمی بسته باشد، آنگاه این متریک دارای انحنای پرچمی ثابت است اگر و تنها اگر رابطه (۱۸) برقرار باشد، این نتایج می تواند به عنوان روشی در تعمیم مساله ناوبری به کار رود.

کلمات کلیدی

متریک فینسلر؛ (α , β)- متریک ؛ متریک راندرز؛ *التصاق فینسلر*؛ ژئودزیک.

Curvature of (α, β)-Metrics in Finsler Geometry

Behroz Bidabad ; Nasrin Sadeghzadeh

ABSTRACT

A class of Finsler metrics are (α,β) –metrics which has many applications in sciences and technology. One of the problems in Finsler geometry is finding Finsler metrics with constant flag curvature.

In this paper after some preliminaries in (α,β) –metrics, we find a sufficient condition for a Finsler metric of type $F=\alpha\ \varphi(\beta/\alpha)$ to be a space of scalar curvature. We also find a necessary and sufficient condition for a Finsler metric of type $F=(\alpha+\beta)^2/\alpha$ to be of constant flag curvature. The method of this paper may be useful for developing the navigation problem.[i]

Keywords

Finsler metric, (α ,β)-metric, Randers metric, Finsler connection, Geodesic.

[i] بهروز بیدآباد؛ استادیار دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر؛ دانشگاه صنعتی امیر کبیر؛ bidabad@aut.ac.ir

[ii] نسرین صادق زاده؛ دانشجوی دکتری دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر؛ nasrin-sadeghi@aut.ac.ir

۱- مقدمه

(α,β)- متریک ها یک نوع خاص از متریک های فینسلری هستند که کاربردهای فراوانی در علوم دیگر دارند. یک نوع معروف از این نوع متریک ها، **متریک راندرز** است. در حقیقت مطالعات یک فیزیکدان به نام راندرز روی یک نوع جالب از ساختارهای فیزیکی به کشف یک متر جدید منجر گردید که بعدها به نام او مشهور شد. یک متر راندرز ، یک ساختار فینسلری F روی TMاست که به صورت $F(x,y)=\alpha(x,y)+\beta(x,y)$ تعریف می شود که $\beta(x,y)=b_i(x)y^i$ و $\alpha(x,y)=\left(a_{ij}(x)y^iy^j\right)^{1/2}$ به ترتیب مولفه های یک متر ریمانی و یک ۱-فرمی هستند. متر راندرز کاربرد فراوانی در صنعت برق دارد. برای اطلاعات بیشتر به[۲] مراجعه شود.

نوع دیگر (α,β)- متریک ها یک ساختار فینسلری F روی TMاست که به صورت $F=\varphi(\alpha,\beta)$ تعریف می شود. شن [۲] مساله کوتاهترین زمان را با استفاده ازمتریک های فینسلر حل کرده است. حل معادله مربوط به این مساله روی منیفلدهای ریما نی (M,α) با میدان خارجی V به تعریف متریک راندرز منجر می شود [۷]. با توجه به کاربرد فراوان این نوع متریک ها در علوم مختلف، شناخت خواص و بخصوص بررسی انحنای آنها حائز اهمیت است.

متریک های راندرز نسبت به (α,β)- متریک های دیگر خواص و ویژگی های شناخته شده تری دارد، از جمله شرط لازم و کافی برای ثابت بودن انحنای پرچمی یک متریک راندرز بدست آمده است[۲]. اخیرا ، شن این محاسبات را در حالت کلی تا حدی پیش برده است ,از جمله رابطه بین G^i و $\overline{G}^i$ ضرایب ژئودزیک (α,β)- متریک F را محاسبه کرده است [۳] . ما در این مقاله مطالعات فوق را تعمیم داده نتایج زیر را به دست آورده ایم. ابتدا یک شرط لازم و کافی برای ثابت بودن انحنای پر چمی متریک های به فرم $F=(\alpha+\beta)^2/\alpha$ به دست می آو ریم سپس یک شرط کافی برای انحنای اسکالر بودن (α,β)- متریک ها در حالت کلی ارائه می کنیم.

نحوه انجام محاسبات و نتایج به دست آمده در این مقاله می تواند در متریک های مشابه، مانند متریک ماتسوموتو که نوع دیگری از (α,β)- متریک ها هستند، به کار رود. این متریک توسط تابع $F=\alpha^2/\alpha-\beta$ تعریف می شود و در تحقیقات جدید مشاهده شده است که این متریک می توانند به طور جالبی مساله کوتاه ترین زمان یا مساله ناوبری را تعمیم دهد [۳]،[۹].

۲- تعاریف اولیه در فضای فینسلر

فرض کنید M یک منیفلد دیفرانسیل پذیر n بعدی باشد. برای تعاریف مقدماتی در مورد منیفلدها کتاب [۱] را ببینید. فضای مماس در $x\in M$ را با T_xM نما یش می دهیم و $TM:=\bigcup_{x\in M}T_xM$ را کلاف مماس روی M تعریف می کنیم. هر عضو TM به صورت زوج مرتب (x^i,y^i) نمایش داده شده است که در آن $x\in M, y\in T_xM$. دوگان T_xM را با $T^*{}_xM$ و کلاف دوگان M را با $T^*M:=\bigcup_{x\in M}T_x^*M$ نمایش می دهیم. یک ساختار فینسلری روی M عبارت از یک تابع با خواص زیر است:

۱) F روی $TM_0:=TM\setminus 0$ دیفرانسیل پذیر است.

۲) به ازای هر $\lambda>0$ ، داریم : $F(x,\lambda y)=\lambda F(x,y)$.

۳) ماتریس هسین تابع F؛ یعنی $g_{ij}:=\dfrac{\partial^2(F^2)}{2\partial y^i\partial y^j}$ ، در TM_0 مثبت معین است.

در این صورت (M,F) را یک فضای فینسلری می گوییم. با استفاده از این تابع یک نرم تعریف می شود و زمانی که این نرم به صورت ضرب داخلی روی فضای مماس نمایش داده شود، متریک فینسلری مورد نظر متریک ریمانی نامیده می شود. بنابر این، یک متریک فینسلر تعمیم یک متریک ریمانی است.

التصاق در فضای فینسلر

فرض کنید $\pi:TM\to M$ یک نگاشت تصویر طبیعی باشد ، داریم $\pi_*:TTM\to TM$ حال قرار می دهیم:

$$\ker\pi_{*_v}=\{z\in TTM\mid \pi_{*_v}(z)=0\}.$$

یک فیبره برداری عمودی روی M به صورت زیر تعریف می شود:

$$VTM=\bigcup_{v\in TM}\ker\pi_{*_v},$$

یک التصاق غیر خطی یا توزیع افقی عبارت است از یک توزیع HTM، مکمل VTM روی TTM. بنابراین تجزیه زیر را داریم:

$$TTM=VTM\oplus HTM,$$

با استفاده از دستگاه مختصات موضعی (x^i,y^i) روی TM، میدان قابی موضعی $\{\dfrac{\partial}{\partial x^i},\dfrac{\partial}{\partial y^i}\}$ روی TTMرا داریم.حال

یک میدان قابی موضعی وفق داده شده با تجزیه فوق را به صورت $\{X_i, \frac{\partial}{\partial y^i}\}$ در نظر می گیریم :

$$X_i := \frac{\delta}{\delta x^i} := \frac{\partial}{\partial x^i} - N^k{}_i(x,y)\frac{\partial}{\partial y^k} \in \chi(HTM),$$

$$\frac{\partial}{\partial y^i} \in \chi(VTM).$$

که $N^k{}_i(x,y)$ توابعی روی TM هستند. همچنین $(dx^i, \delta y^i)$ را پایه دوگان پایه فوق در نظر می گیریم که در آن:

$$\delta y^i = dy^i + N^i_k(x,y)dx^k.$$

حال التصاق فینسلری روی منیفلد M را به صورت زیر تعریف می کنیم. فرض کنیم ∇ یک التصاق خطی روی TTM با ضرایب Γ^A_{BC} باشد. پایه وفق داده داده شده با تجزیه فوق یعنی $(X_i, X_{\bar i})$ را با فرض $X_{\bar i} =: \frac{\partial}{\partial y^i}$ برای TTM در نظرمی گیریم. ضرایب ∇ در این پایه ها به صورت زیر نوشته می شود:

$$\nabla_{X_i} X_j = \Gamma^m_{ji} X_m + \Gamma^{\bar m}_{ji} X_{\bar m}$$

$$\nabla_{X_i} X_{\bar j} = \Gamma^m_{\bar j i} X_m + \Gamma^{\bar m}_{\bar j i} X_{\bar m}$$

$$\nabla_{X_{\bar i}} X_j = \Gamma^m_{j \bar i} X_m + \Gamma^{\bar m}_{j \bar i} X_{\bar m}$$

$$\nabla_{X_{\bar i}} X_{\bar j} = \Gamma^m_{\bar j \bar i} X_m + \Gamma^{\bar m}_{\bar j \bar i} X_{\bar m} .$$

فرض کنید $\chi(TM)$ مجموعه همه میدان های برداری روی TM و j یک ایزومورفیسم روی $\chi(TM)$ باشد به طوری که :

$$J(X_k) = X_{\bar k} \quad \text{و} \quad J(X_{\bar h}) = -X_h .$$

تعریف از مرجع [۱۲]

یک التصاق خطی ∇ روی TTM یک *التصاق فینسلر* گفته می شود اگر:

۱) $J(\nabla_X Y) = \nabla_X (JY)$، برای هر $X, Y \in \chi(TM)$.

۲) $\nabla_X VTM \subset VTM$، برای هر $X \in \chi(TM)$.

نشان داده می شود که در تعریف التصاق فینسلر، به جای TTM ، می توان VTM را جایگزین و التصاق فینسلر را به صورت زیر نیز تعریف کرد.

فرض کنید M یک منیفلد دیفرانسیل پذیر و VTM کلاف برداری عمود، HTM یک التصاق غیرخطی روی TM و ∇ یک التصاق خطی روی VTM باشد،آنگاه جفت (HTM, ∇) التصاق فینسلر گفته می شود.

قضیه۲-۱ [۱۲]

یک التصاق خطی ∇ روی TTM را یک التصاق فینسلر است اگر $\Gamma^m_{j \bar i} = \Gamma^{\bar m}_{\bar j \bar i}$ و $\Gamma^m_{ji} = \Gamma^{\bar m}_{\bar j i}$ بوده همه ضرایب دیگر صفر باشند.

حال قرار می دهیم:

$$\Gamma^m_{j \bar i} = \Gamma^{\bar m}_{\bar j \bar i} = C_{ji}{}^m$$

$$\Gamma^m_{ji} = \Gamma^{\bar m}_{\bar j i} = F_{ji}{}^m .$$

پس داریم:

$$\nabla_{X_i} X_{\bar j} = F_{ji}{}^m X_{\bar m}$$

$$\nabla_{X_i} X_j = F_{ji}{}^m X_m$$

$$\nabla_{X_{\bar i}} X_{\bar j} = C_{ji}{}^m X_{\bar m}$$

$$\nabla_{X_{\bar i}} X_j = C_{ji}{}^m X_m .$$

که ∇_{X_i} و $\nabla_{X_{\bar i}}$ به ترتیب مشتقات کواریان افقی وعمودی گفته می شوند.

تانسورهای انحنا و تاب یک التصاق فینسلر:

فرض کنیم (M,F) یک منیفلد فینسلرهمراه با یک التصاق فینسلری است. *تانسورانحنای* M به صورت زیر تعریف می شود:

$$R(X,Y)Z = \Omega(X,Y)Z = \{[\nabla_X - \nabla_Y] - \nabla_{[X,Y]}\}Z$$

که در آن

$$X, Y, Z \in \chi(TM)$$

قضیه۲-۲[۱۲]

فرض کنید (M,F) یک منیفلد فینسلر و ∇ یک التصاق فینسلری روی (M,F) باشد. آنگاه داریم:

$$1)\, R(X_i, X_j)X_k = R_{k\,ji}^{\;h} X_h$$

$$2)\, R(X_i, X_j)X_{\bar k} = R_{k\,ji}^{\;h} X_{\bar h}$$

$$3)R(X_i,X_{\bar{j}})X_k=-P_{kij}^{\ h}X_h$$

$$4)R(X_i,X_{\bar{j}})X_{\bar{k}}=-P_{kij}^{\ h}X_{\bar{h}}$$

$$5)R(X_{\bar{i}},X_{\bar{j}})X_k=S_{k\,ji}^{\ h}X_h$$

$$6)R(X_{\bar{i}},X_{\bar{j}})X_{\bar{k}}=S_{k\,ji}^{\ h}X_{\bar{h}}$$

که هر جفت از آنها را به ترتیب hh- انحنا و hv -انحنا و vv- انحنا می گویند. به این ترتیب نمادهای کریستوفل در هندسه فینسلر به صورت زیر تعریف می شود:

$$\Gamma_{i\,j}^{\ h}=\frac{1}{2}g^{hm}(\frac{\partial g_{mj}}{\partial x^i}+\frac{\partial g_{mi}}{\partial x^j}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m})$$

$$C_{i\,j}^{\ h}=\frac{1}{2}g^{hm}(\frac{\partial g_{mj}}{\partial y^i}+\frac{\partial g_{mi}}{\partial y^j}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial y^m})$$

$$F_{i\,j}^{\ h}=\frac{1}{2}g^{hm}(\delta_i g_{mj}+\delta_j g_{mi}-\delta_m g_{ij})\,.$$

که در آن فرض کرده ایم

$$\delta_i:=\frac{\partial}{\partial x^i}-N_i^m\frac{\partial}{\partial y^m}\,.$$

به علت متقارن بودن ضرایب متریک رابطه دوم را می توان به صورت زیر نوشت:

$$C_{i\,j}^{\ h}=\frac{1}{2}g^{hm}\frac{\partial g_{ij}}{\partial y^m}\,.$$

تانسور تاب مربوط به التصاق ∇ به صورت زیر تعریف می شود:

$$T(X,Y)=\nabla_XY-\nabla_YX-[X,Y]$$

که در آن

$$X,Y\in\chi(TM)\,.$$

تانسور تاب در شکل موضعی به صورت زیر نوشته می شود:

$$T(X_i,X_j)=T_{j\,i}^{\ h}X_h+R_{ji}^hX_{\bar{h}}$$

$$T(X_i,X_{\bar{j}})=-C_{i\,j}^{\ h}X_h-P_{ij}^hX_{\bar{h}}\ \circ$$

$$T(X_{\bar{i}},X_{\bar{j}})=S_{j\,i}^{\ h}X_{\bar{h}}$$

که:

$$S_{ij}^h=C_{i\,j}^{\ h}-C_{j\,i}^{\ h}$$

$$T_{j\,i}^{\ h}=F_{i\,j}^{\ h}-F_{j\,i}^{\ h}\,.$$

انحنای پرچمی

فرض کنید ∇ یک التصاق فینسلری روی منیفلد فینسلری (M,F) و $X\in\chi(TM)$ است. صفحه تولید شده با دو بردار V_z و X، $(X\neq V_z)$ را با نماد $\mu(X,V_z)$ نشان می دهیم که در آن V برش موقعیت روی کلاف برداری قائم است. ***انحنای پرچمی*** ∇ در نقطه z نسبت به صفحه $\mu(X,V_z)$ را با نماد $K_1(z,X)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می کنند:

$$K_1(z,X)=\frac{g(R(X,V_z)V_z,X)}{\|X\|\|V_z\|-g(X,V_z)^2}\,.$$

که در آن $z=(x,y)\in TM_0$ و $\|X\|=g(X,X)$.

تعریف:

با مفروضات فوق هرگاه $K_1(z,X)$ به X وابسته نباشد، M را از نوع ***انحنای پرچمی اسکالر*** می گوییم.

هرگاه M انحنای اسکالر باشد وعلاوه بر آن $K_1(z,X)$ به x و y وابسته نباشد، M را از نوع ***انحنای پرچمی ثابت*** می گوییم.

ژئودزیک ها

هر متریک فینسلر F روی منیفلد M، یک ساختار طول L_F روی خم های جهت دار در M تعریف می کند. فرض کنیم که $C:[a,b]\to M$ یک خم به طور قطعه ای هموار روی M باشد؛ طول c به صورت زیر تعریف می شود:

$$L_F(c):=\int_a^b F(c(t),c'(t))dt\,.$$

برای دو نقطه $p,q\in M$ تعریف می شود :

$$d_F(p,q):=\inf_c L_F(c)\,.$$

به طوری که اینفیمم روی همه خم های هموار C از p تا q گرفته شده است. توجه کنید که d_F خواص تابع متر را داراست. فرض کنید دو نقطه $p,q\in M$ داده شده است ، خم $\delta:[a,b]\to M$ از $p=\delta(a)$ تا $q=\delta(b)$ ***مینیمم*** گفته می شود اگر :

$$L_F(\delta)=d_F(p,q)\,.$$

تعریف : یک خم هموار $\delta(t)$ که $t\in I=[a,b]$، ***ژئودزیک*** گفته می شود اگر دارای سرعت ثابت بوده؛ یعنی $F(\delta(t),\delta'(t))=cte$ ، و به طور موضعی مینیمم باشد.

لم[۷]

یک خم هموار $\delta(t)$ در یک منیفلد فینسلر (M,F) ژئودزیک است اگر وتنها اگر در معادله دیفرانسیل زیر صدق کند:

$$\ddot{\delta}^{i}(t) + 2G^i(\delta(t), \dot{\delta}(t))=0$$

که در آن $G^i=G^i(x,y)$ توابعی موضعی روی TM است که به صورت زیر تعریف می شوند:

$$G^i = \frac{1}{4} g^{il}(x,y)\{\frac{\partial^2(F^2(x,y))}{\partial x^k \partial y^l}.y^k - \frac{\partial F^2(x,y)}{\partial x^l}\}$$

$$N^i_j = \frac{\partial G^i}{\partial y^j}$$

لم[۷] :

فرض کنید $\alpha(x,y)=\left(a_{ij}(x)y^iy^j\right)^{1/2}$ یک متریک ریمانی و $\beta(x,y)=b_i(x)y^i$ یک ۱- فرمی روی TM است. ضرایب ژئودزیک G^i و $\bar{G}^i$ ؛ ضرایب ژئودزیک مربوط به (α , β)-متریک F و متریک ریمان α، به صورت زیر به هم مربوط می شوند:

$$G^i = \bar{G}^i + \frac{\alpha\varphi'}{\varphi - s\varphi'}s^i_0 + \left\{\frac{\varphi\varphi' - s(\varphi\varphi'' - \varphi'\varphi')}{2\varphi(\varphi - s\varphi') + (b^2 - s^2)\varphi''}\right\} . \left\{\frac{-2\alpha\varphi'}{\varphi - s\varphi'}s_0 + r_{00}\right\} . \left\{\frac{y^i}{\alpha} + \frac{\varphi\varphi''}{\varphi\varphi' - s(\varphi\varphi'' + \varphi'\varphi')}\right\}. \quad (۱)$$

که در آن

$$s_{ij} = \frac{b_{i|j} - b_{j|i}}{2} \ , \ s^i_0 = a^{ir}s_{rj}y^j \ , \ s_0 = b^i s_{ij} y^j$$

$$r_{ij} = \frac{b_{i|j} + b_{j|i}}{2} \ , \ r_{00} = r_{ij}y^iy^j \ , \ s = \frac{\beta}{\alpha} .$$

برای اثبات لم به صفحه۱۲، از[۷] مراجعه کنید. برای مطالعه بیشتر در مورد ژئودزیک ها در فضای فینسلر می توان به [٤] مراجعه کرد

متریک $F = \frac{(\alpha+\beta)^2}{\alpha}$

(α , β)- متریک خاص $F = \frac{(\alpha+\beta)^2}{\alpha}$ را درنظرمی گیریم که $\alpha(x,y)=\left(a_{ij}(x)y^iy^j\right)^{1/2}$ و $\beta(x,y)=b_i(x)y^i$ به ترتیب مولفه های یک متر ریمانی و یک ۱- فرمی هستند. رابطه (۱) پس از ساده کردن به صورت زیر در می آید:

$$G^i = \bar{G}^i + \frac{2\alpha^2}{\alpha - \beta}s^i_0 + \left\{\frac{\alpha - 2\beta}{2\alpha^2 b^2 + \alpha^2 - 3\beta^2}\right\} . \left\{\frac{-4\alpha^2}{\alpha - \beta}s_0 + r_{00}\right\} . \left\{y^i + \frac{\alpha^2}{\alpha - 2\beta}b_i\right\} \quad (۲)$$

که در آن

$$b = (b^ib_i)^{1/2} \quad \text{و} \quad b^i = g^{ij}b_j .$$

۱-فرمی β را **کیلینگ** گوییم اگر مشتقات افقی آن در شرط $r_{ij} = \frac{b_{i|j} + b_{j|i}}{2} = 0$ صدق کند. حال می توانیم اثبات قضیه زیر را کامل کنیم.

قضیه ۱

فرض کنید α یک متریک ریمانی با انحنای برشی ثابت و β یک فرم کیلینگ با طول ثابت نسبت به α باشد، آنگاه متریک فینسلر F=α φ(β/α) دارای انحنای اسکالر است

برهان: چون β یک فرم کیلینگ است؛ یعنی $r_{ij}=0$، در نتیجه :

$$r_{ij} = \frac{b_{i|j} + b_{j|i}}{2} = 0 \Rightarrow b_{i|j} = -b_{j|i} .$$

بنابراین نتایج زیر برقرار است :

$$r_{00} = r_{ij}y^iy^j = 0$$

$$s_{ij} = b_{i|j}$$

$$s_j = b_i s^i_j = b_i(a^{ik}s_{kj}) = b^k b_{k|j} \quad (۳)$$

اما طول β نسبت به α ثابت است؛ یعنی:

$$b^hb_h = cte \Rightarrow b^hb_{h|i} = 0$$

پس $s_i = 0$ و در نتیجه :

$$s_0 = s_i y^i = 0 \quad (۴)$$

و چون $r_{00}=0$ در نتیجه داریم:

$$\left\{\frac{-4\alpha^2}{\alpha-\beta}s_0+r_{00}\right\}=0$$

پس در رابطه (۲) جمله آخر برابر صفر است.

همچنین با توجه به این که $r_{ij}=0$ داریم:

$$\alpha^2 s_0^i = a_{lk}y^l y^k b^l{}_{|j} y^j = a_{lk} y^l y^k a^{ls} b_{s|j} y^j \qquad (۲)$$

$$= b_{k|j}y^j y^k y^l = r_{00}y^l = 0$$

در نتیجه جمله دوم در طرف دوم تساوی رابطه (۲) برابر صفر است در نتیجه داریم:

$$G^i=\bar{G}^i \qquad (۶)$$

از طرفی طبق فرض α دارای انحنای برشی ثابت است پس طبق قضیه بلترامی (به صفحه ۵۰ ، از[٤] مراجعه کنید.) به طور موضعی تصویری مسطح است، یعنی $\bar{G}^i=0$ پس طبق قضیه قبل $G^i=0$ و در نتیجه طبق لم (۱.۱.۵) در [٤]، (M,F) دارای انحنای اسکالراست .

قضیه ۲

فرض کنید که α یک متریک ریمانی و β یک ۱- فرمی بسته است، آنگاه متریک $F=\frac{(\alpha+\beta)^2}{\alpha}$ انحنای پرچمی ثابت است اگر و تنها اگررابطه(۱۸) برقرار باشد.

برهان: طبق فرض β یک ۱- فرمی بسته است؛ یعنی $s_{ij}=0$ در نتیجه $b_{i|j}=b_{j|i}$ بنابراین رابطه (۱) به صورت زیر ساده می شود:

$$G^i=\bar{G}^i+\frac{y^i}{\alpha+\beta}r_{00} \qquad (۷)$$

با ترکیب رابطه فوق با b_i داریم:

$$b_iG^i=b_i\bar{G}^i+G_1 \qquad (۸)$$

که:

$$G_1=\frac{b}{1+b}r_{00} \qquad (۹)$$

زیرا:

$$\alpha^2b^2=a_{ij}y^iy^jb^lb_l=a_{ij}y^iy^ja^{lk}b_kb_l=\beta^2$$

اما:

$$\frac{\partial(b_iG^i)}{\partial x^k}=b_{i|k}G^i+b_i\frac{\partial G^i}{\partial x^k}$$

حال با توجه به (۸) داریم:

$$b_i\frac{\partial G^i}{\partial x^k}=-\left(\frac{b^i}{b^2}\right)b_{i|k}G_1+b_i\frac{\partial\bar G^i}{\partial x^k}+\frac{\partial G_1}{\partial x^k}$$

وبا مشتق گیری از رابطه فوق داریم:

$$b_i\frac{\partial^2G^i}{\partial x^j\partial y^k}=b_{i|j}\frac{b^i}{b^2}\frac{\partial G_1}{\partial y^k}+b_i\frac{\partial^2\bar G^i}{\partial y^j\partial y^k}+\frac{\partial^2 G_1}{\partial x^j\partial y^k}$$

با مشتق گیری از (۹) داریم:

$$\frac{\partial G_1}{\partial x^k}=\frac{b^ib_{i|k}r_{00}}{b(1+b)^2}+\frac{bb_{p|q|k}y^py^q}{1+b} \qquad (۱۰)$$

$$\frac{\partial G_1}{\partial y^k}=\frac{2bb_{p|k}y^p}{1+b} \qquad (۱۱)$$

با جایگذاری روابط فوق در رابطه (۶-۴)در [٦] ، نتیجه می شود:

$$b_iR^i_k=2b_i\bar R^i_k+\frac{4b}{1+b}(b_{p|q|k}-b_{p|k|q})y^py^q+A_k+B_k$$

$$A_k=\frac{2}{(1+b)^2}(b^ib_{i|k}r_{00}-b^ib_{i|p}y^pb_{q|k}y^q)$$

که:

$$B_k=\frac{2b^lb_i}{b(1+b)}\left(\frac{\partial^2\bar G^i}{\partial y^l\partial y^k}r_{00}-b_{p|k}y^p\frac{\partial\bar G^i}{\partial y^l}\right)+$$

$$\frac{2b}{1+b}\left(2b_{l|k}\bar G^l-b_{l|p}y^p\frac{\partial\bar G^l}{\partial y^k}\right)$$

(۱۲)

از طرفی در [٦] رابطه زیر را داریم:

$$b_{p|q|k}-b_{p|k|q}=b_m\bar R_p{}^m{}_{qk}=-b_m\bar R^m{}_{p\,kq}$$

حال با جایگذاری در (۱۲) داریم:

$$b_iR^i_k=2\left(\frac{1-b}{1+b}\right)b_i\bar R^i_k+A_k+B_k \qquad (۱۳)$$

و چون $\bar G^i$ ضریب التصاق متریک ریمان است داریم:

$$\frac{\partial\bar G^i}{\partial y^k}=a^{is}\{a_{ks|p}-a_{pk|s}+a_{ps|k}\}$$

که در آن :

$$a_{ij|k}:=\frac{\partial a_{ij}}{\partial x^k}$$

حال قرار می دهیم:

$$e_{kpq} := e^{i}_{pq}\, b_{i|k}$$
$$e_k := b_i e^i_{kl} b^l$$
$$e^i_{jk} := a^{is}\left\{a_{js|k} - a_{kj|s} + a_{ks|j}\right\}$$
$$b_{|k} := \frac{\partial b}{\partial x^k}$$

در نتیجه (۱۳) به صورت زیر ساده می شود:

$$b_i R^i_k = 2\,\frac{(1-b)}{1+b}\, b_i\, \bar{R}^{\,i}_{k} + \frac{2}{b(1+b)^2}$$
$$\left\{(1+b)\left[E_{kpq} + b^2 H_{kpq}\right] + b^2 B_{kpq}\right\} y^p y^q$$

(۱۴)

که در آن :

$$E_{kpq} := e_k b_{p|q} - e_q b_{p|k}$$
$$H_{kpq} := 2h_{kpq} - h_{pkq}$$
$$B_{kpq} := b_{|k} b_{p|q} - b_{|q} b_{p|k}$$

(۱۵)

با توجه به رابطه (۶-۹) در [۶] می دانیم که (M,F) انحنای پرچمی ثابت λ دارد اگر وتنها اگر:

$$R^i_k = \lambda(F^2\delta^i_k - g_{kp} y^p y^i)$$

و با ترکیب آن با b_i داریم:

$$b_i R^i_k = \lambda\alpha^2(1+b)^3[(b_k - b\alpha_k)(1+b) + 2\alpha b b_k]$$

(۱۶)

همچنین در [۵] آمده است:

$$b_{i|p|q}\, y^p y^q = -b_m\, \bar{R}^{\,m}_{i}$$

(۱۷)

حال با توجه به روابط (۱٤) تا (۱۷) فضای فینسلر (M,F) انحنای پرچمی ثابت λ دارد اگر وتنها اگر

$$2\lambda b\alpha^2(1+b)^5[(b_k - b\alpha_k)(1+b) + 2\alpha b b_k] =$$
$$[2(1+b)(b(1+3b)b_{i|p|q} + E_{kpq}] + b^2(2H_{kpq} + B_{kpq})$$

(۱۸)

این رابطه اثبات قضیه ۲ را کامل می کند.

۳- نتیجه

به طور خلاصه، دراین مقاله انحنای پرچمی (α,β)- متریک ها مطالعه شده است وازنتایج به دست آمده در آن می توان به یافتن شرط کافی برای انحنای اسکالر (α,β)- متریک های به فرم $F=\alpha\,\varphi(\beta/\alpha)$ اشاره کرد که در قالب یک قضیه بیان شده است .

اما نتیجه دیگر، شرط لازم و کافی برای انحنای ثابت بودن متریک $F = \frac{(\alpha+\beta)^2}{\alpha}$ است که طی قضیه ای دو شرطی در این مقاله بیان شده است. این روش می تواند به عنوان الگویی برای انجام محاسبات روی متریک ماتسوموتو؛ یعنی $F = \frac{\alpha^2}{\alpha-\beta}$، **برای استفاده در ناوبری موشک ها به کار رود.**

٤- مراجع

[۱] بیدآباد، بهروز؛**کتاب هندسه منیفلد ۱** ، انتشارات امیر کبیر سال ۱۳۸۱.

[۲] بید آباد، بهروز، طیبی،اکبر؛ **کاربرد هندسه فینسلر در مهندسی و علوم همراه با تعمیمی از الصاق های فینسلری**، نشریه علمی پژوهشی امیرکبیر، سال پانزدهم، شماره ۵۸، ۱۳۸۳

[۳] بیدآباد، بهروز، رفیعی راد، مهدی: **کاربرد هندسه فینسلر در دینامیک هدایت** (در دست نگارش)

[٤] صادق زاده، نسرین ؛ **منیفلدهای فینسلر به طور منفی خمیده با انحنای اسکالر**، پروژه کارشناسی ارشد استاد راهنما دکتر بیدآباد، دانشگاه امیرکبیر ۱۳۸۱.

[۵] SHEN Z. ;*Differential Geometry of Spray and Finsler Spaces, KluwerAcademic Publishers, 2001.*

[٦] SHEN Z. ; *Lectures on Finsler Geometry,* World scientific, Singapore, 2001

[۷] SHEN Z.; *Landsberg Curvature, S-Curvature and Riemann Curvature*, preprint, 2003.

[۸] SHEN Z.; *Projectively flat Randers metrics with constant flag curvature,* Math.Ann.325, 19-35(2003).

[۹] SHEN Z. ; *Finsler metrics with K=0 and S=0,* Canada.j.Math.vol.55 (1),2003, pp 112-123

[۱۰] YASUDA and SHIMADA H., *On Randers spaces of scalar curvature,* Rep.on Math. Phys.11 (1977), 347-360.

[۱۱] MATSUMOTO, M., *Foundations of Finsler geometry and special Finsler spaces*, Kaiseisha Press, Otsu, Japan, 1986

[۱۲] MIRON, R., *Introduction to the theory of Finsler spaces,* Proc.Nat.Sem.On Finsler Spaces, Brasov, 1981.

[۱۳] BIDABAD B., RAFIRAD M. *The Finsler Geometry arised in Pure-Pursuit Navigation.*To ap pear.