هندسه پایای همدیس روی منیفلدهای فینسلر

سینا هدایتیان[i]؛ بهروز بیدآباد[ii]؛ بهمن رضایی[iii]

چکیده

ما در این مقاله بعد از تعمیم مفهوم ظرفیت در هندسه فینسلر، پایا بودن آن را تحت نگاشت‌های همدیس ثابت می کنیم. به عبارت دیگر نشان می دهیم اگر (M,g) یک منیفلد فینسلری غیر فشرده باشد آنگاه ظرفیت هر زیر مجموعه فشرده از M تحت نگاشت های همدیس پایاست. همچنین نشان می دهیم ظرفیت هر زوج از زیرمجموعه های بسته از M تحت نگاشت های همدیس پایاست. سپس چند تابع پایای همدیس را که نوع ریمانی آنهاکاربرد زیادی در حل مسائل هندسه همدیسی دارند معرفی می‌کنیم .

کلمات کلیدی

منیفلد فینسلر، پایای همدیس، ظرفیت همدیس.

Invariant conformal geometry on Finsler manifolds

Sina Hedayatian; Behruz Bidabad; Bahman Rezaei

ABSTRACT

Here the capacity of compact sets in a non-compact Finsler manifold is introduced. We show that it is invariant under conformal mappings. In the other words we prove that ; If (M,g) is a non-compact Finsler manifold then the capacity of a compact set in M is invariant under conformal mappings, and also the capacity of a paire of closed subsets of a Finsler manifold is invariant under conformal mappings. Then we construct and study some famous conformal invariant functions which are efficient tools for solving some problems in the case of conformal Riemannian geometry in the large.

KEYWORDS

Finsler manifold, Conformal invariant, Conformal capacity

[i] دانشجوی دکتری ریاضی، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر: s_hedayatian@aut.ac.ir

[ii] استادیار، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر: bidabad@aut.ac.ir

[iii] دانشجوی دکتری ریاضی، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر: b_rezaei @aut.ac.ir

۱- مقدمه و تاریخچه

مفهوم ظرفیت یک مجموعه از دیدگاه ریاضیات اولین بار توسط واینر[1] در سال ۱۹۲٤ مطرح شد و توسط فورستمن[2] [۷]، پوسین[3] و چند ریاضیدان دیگر فرانسوی گسترش داده شد. ظرفیت همدیس اولین بار توسط لونر[4] [۱۲] ، در سال ۱۹۵۹ بیان شد و به سرعت برای فضای R^n توسیع داده شد[۱۷]،[۱٤]،[۹]،[۸]. در حالت خاص موستو[5] در سال ۱۹۶۸ از این مفهوم برای اثبات قضیه مشهورش در صلبیت فضاهای هیپربولیک استفاده کرد[۱٤]. فراند[6] در سال ۱۹۹۶ این موضوع را به منیفلدهای ریمانی گسترش داد و در هندسه ریمانی از آن استفاده کرد[٤]. او ثابت نمود در منیفلدهای غیر فشرده ریمانی، ظرفیت مجموعه‌های فشرده تحت تبدیلات همدیس پایاست. ما در این مقاله این مفاهیم را با روشی مشابه برای منیفلدهای فینسلری بیان نموده و ثابت می کنیم در منیفلدهای غیر فشرده فینسلری ظرفیت هر زیر مجموعه فشرده تحت نگاشت های همدیس پایاست. با استفاده از این خاصیت می توان توابعی تعریف نمود که تحت تبدیلات همدیس پایا باشند. مشابه این توابع، توابعی در هندسه ریمانی وجود دارند که کاربردهای اساسی در فیزیک دارند[٥]،[٦]. بعنوان مثال با استفاده از یکی از این توابع می توان یک مترتعریف نمود که توپولوژی بدست آمده از آن بر توپولوژی ذاتی منطبق گردد.

۲- مفاهیم اولیه

۲-۱- متریک فینسلر

فرض کنیم M یک منیفلد n بعدی هموار (C^{∞}) باشد. برای هر نقطه $x \in M$ فضای مماس متناظر را با T_xM نشان می دهیم. کلاف مماس روی M اجتماعی از فضاهای مماس می‌باشد که بصورت زیر بیان می‌شود:

$$TM := \bigcup_{x\in M} T_x M .$$

اعضای TM را با (x,y) نشان می‌دهیم بطوری که $y \in T_xM$. TM بدون صفر را با TM_0 نشان می دهیم.

نگاشت تصویر طبیعی را بصورت زیر داریم:

$$\pi : TM \to M \qquad \pi(x,y) = x .$$

یک متریک فینسلر روی منیفلد M عبارت است از تابع $F : TM_0 \to [0,\infty)$ با خواص زیر:

الف) F روی TM_0 هموار است.

ب) F روی تارهای کلاف مماس TM همگن مثبت از درجه ۱ است.

$$F(x,\lambda y) = \lambda F(x,y) \qquad \forall \lambda > 0.$$

ج) هسیان[7] تابع F^2 که درایه‌های آن بصورت زیر تعریف می‌شود، مثبت معین است.

$$g_{ij}(x,y) := \frac{1}{2}[F^2(x,y)]_{y^i y^j} .$$

در اینصورت (M,F) را یک منیفلد فینسلری می نامیم.

۲-۲- هندسه همدیسی روی منیفلدهای فینسلری

دیفئومورفیسم[8] f بین دو منیفلد فینسلری n بعدی (M,g) و $(\bar{M},\bar{g})$ را همدیس گوییم هرگاه برای هر $p \in M$ نگاشت $(f_*)_p$ حافظ زاویه بین میدان های برداری برای هر $y \in M$ باشد و در اینصورت دو منیفلد را همدیس هم ارز[9] می‌نامیم. با توجه به تعریف فوق می‌توان نشان داد که تابع f همدیس است اگر و فقط اگر تابعی مانند $\sigma : M \to R$ موجود باشد که $f^*\bar{g} = e^{2\sigma} g$ [۱۰].

فرض کنیم $(\bar{M},\bar{g}), (M,g)$ دو منیفلد فینسلر به ترتیب با ساختارهای فینسلری F ، $\bar{F}$ و دستگاه مختصات $(\bar{x},\bar{y}), (x,y)$ باشند. در طول این مقاله در حالتی که $M = \bar{M}$ باشد دستگاه مختصات $(\bar{x},\bar{y})$، را همان دستگاه مختصات (x,y) اختیار می کنیم. در حالت موضعی این دو منیفلد همدیس هم ارز هستند هرگاه $\bar{g}_{ij}(x,y) = e^{2\sigma} g_{ij}(x,y)$ یابطور معادل داریم

$$\bar{F}(x,y) = e^{2\sigma} F(x,y).$$

۲-۳- معرفی چند کلاف و خواص آنها

۲-۳-۱ کلاف برگردان π^*TM

اگر π نگاشت تصویر طبیعی از TM به M باشد. کلاف برگردان مماس[10] π^*TM بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\pi^*TM := \{(x,y,v) \mid y \in T_xM_0, v \in T_xM\}.$$

دوگان کلاف برگردان مماس π^*TM را کلاف برگردان دوگان مماس[11] π^*TM نامیده و با π^*TM^* نمایش می‌دهیم.

π^*TM و π^*TM^* هر دو کلاف‌های برداری n بعدی روی TM_0 می‌باشند

۲-۳-۲ کلاف کروی SM

برای هر $x \in M$، S_xM را مجموعه تمام $[y] := \{\lambda y \mid \lambda>0\}$ می‌گیریم که $y \in T_xM_0$. در اینصورت کلاف کروی SM بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$SM := \bigcup_{x\in M} S_xM.$$

کلاف کروی SM یک منیفلد $2n-1$ بعدی است. اعضای را بصورت $(x,[y])$ نشان می‌دهیم که در آن $y \in T_xM_0$.

لم ۱. کلاف کروی روی یک منیفلد دیفرانسیل پذیر، همواره جهت پذیر است [۳].

اگر p نگاشت تصویر طبیعی از SM به M باشد. کلاف برگردان p^*TM بصورت زیر تعریف می شود:

$$p^*TM := \{(x,[y],v) \mid y\in T_xM_0, v\in T_xM\}.$$

دوگان کلاف برگردان مماس p^*TM را کلاف برگردان دوگان مماس p^*TM نامیده و با p^*TM^* نمایش می دهیم.

p^*TM و p^*TM^* هر دو کلاف های برداری n بعدی روی SM هستند.

تابع η را بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$\eta : TM_0 \to SM \qquad \eta(x,y) := (x,[y]).$$

برای برقراری ارتباط بین توابع $C^\infty(TM_0)$ و $C^\infty(SM)$ از لم زیر استفاده می‌کنیم[۱۲]:

لم ۲. فرض کنیم $f \in C^\infty(TM_0)$. اگر

$$f(x,y) = f(x,\lambda y) \qquad \lambda>0, y\in T_xM_0.$$

آنگاه یک تابع $g \in C^\infty(SM)$ موجود است به قسمی که $\eta^* g = f$ و در آن η^* نگاشت برگردان η می باشد.

اگر $f \in C^\infty(M)$ باشد ترفیع عمودی f را با f^V نشان داده و بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f^V : TM_0 \to R$$
$$f^V(x,y) = f\circ\pi(x,y) = f(x).$$

چون f^V مستقل از y است بنابر لم ۲ یک تابع $g \in C^\infty(SM)$ متناسب با f^V موجود است که $\eta^* g = f^V$. در این مقاله برای راحتی کار، g را با همان f^V نشان می‌دهیم.

۲-٤- التصاق غیر خطی

۲-٤-۱ التصاق غیر خطی روی کلاف مماس TM

اگر $\pi_* : TTM \to TM$ دیفرانسیل نگاشت تصویر طبیعی از TM به M باشد و برای هر $v \in TM_0$ قرار دهیم $\ker \pi_*^v = \{z \in T_vTM \mid \pi_*^v(z)=0\}$ در اینصورت کلاف برداری عمودی VTM بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$VTM = \bigcap_{v\in TM} \ker \pi_*^v.$$

یک التصاق غیر خطی[۱۲] یا یک توزیع افقی[۱۳] روی TM عبارت است از توزیع متمم HTM برای VTM در TTM . HTM به وسیله توابع دیفرانسیل پذیر غیر خطی تولید می شود که آنها را ضرایب التصاق غیر خطی نامیده و با N_i^j نشان می‌دهیم. HTM یک زیرکلاف برداری است که آنراکلاف برداری افقی می نامیم.

اگر مختصات نقاط TM را با (x^i, y^i) نشان دهیم در اینصورت x^i را موقعیت[۱۴] و y^i را جهت[۱۵] آن نقطه می‌نامیم. پایه استاندارد $\{\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial y^i}\}$ را برای TTM در نظر می‌گیریم و به کمک آن پایه $\{\frac{\delta}{\delta x^i}, \frac{\partial}{\partial y^i}\}$ را برای TTM متناسب با تجزیه $TTM = HTM \oplus VTM$ می‌سازیم که در آن $\frac{\delta}{\delta x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i} - N_i^j \frac{\partial}{\partial y^j} \in \chi(HTM)$ و $\frac{\partial}{\partial y^j} \in \chi(VTM)$ N_i^j ها ضرایب التصاق غیر خطی هستند .

حال اگر (M,F) یک منیفلد فینسلر باشد در اینصورت تعریف می کنیم:

$$\Gamma^j_{ik} := \frac{1}{2} g^{js}\left(\frac{\partial g_{si}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^s} + \frac{\partial g_{ks}}{\partial x^i}\right),$$

$$C_{ijk} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k}.$$

که در آن $[g^{ij}]$ ماتریس معکوس $[g_{ij}]$ می‌باشد.

بطور طبیعی وابسته به ساختار فینسلری التصاق غیر خطی‌زیر را می توان تعریف کرد

$$N_i^j = \Gamma^j_{ik} y^k - C^j_{ik} \Gamma^k_{rs} y^r y^s.$$

التصاق غیر خطی $\{N_i^j\}$ را التصاق غیر خطی فینسلری روی (M,F) گویند.

۲-٤-۲ التصاق غیر خطی روی کلاف کروی SM

با استفاده از ضرایب التصاق غیر خطی فینسلری روی TM_0 ، می‌توان یک التصاق غیر خطی روی کلاف $SM \to TM_0$ تعریف کرد. برای این کار ، بجای

التصاق غیر خطی فینسلری $\{N^j_i\}$، التصاق غیر خطی $\{\frac{N^j_i}{F}\}$ را روی کلاف SM در نظر می گیریم. این التصاق نسبت به تغییر $y \to \lambda y$ پایا است. لذا کافی استبجای N^j_i از $\frac{N^j_i}{F}$ استفاده کرد. به همین ترتیب می‌توان پایه $\{\frac{\delta}{\delta x^i}, F\frac{\partial}{\partial y^i}\}$ را برای کلاف برگردان مماس p^*TM روی SM بدست آورد. دوگان آنرا با $\{dx^i, \frac{\delta y^i}{F}\}$ نمایش داده و بعنوان پایه‌ای برای کلاف برگردان دوگان مماس p^*TM^* روی SM بکار می‌بریم.

۲-۵- فرم هیلبرت

کلاف برگردان مماس p^*TM روی SM دارای یک برش کانونی[16] بصورت زیر است:

$$l(x,[y]) = (x,[y], \frac{y}{F(x,y)}).$$

فرم هیلبرت[17]، یک ۱- فرمی روی SM است که بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\omega := l_i dx^i.$$

که در آن $l_i = g_{ij}l^j, l^i = \frac{y^i}{F}$. با استفاده از روابط $g_{ij} = FF_{y^iy^j} + F_{y^i}F_{y^j}$ و $\frac{\delta F}{\delta x^i} = 0$ براحتی می‌توان رابطه زیر را بدست آورد:

$$d\omega = -(g_{ij} - l_il_j)dx^i \wedge \frac{\delta y^i}{F} \qquad (1).$$

۲-۶- متریک ریمانی روی SM

یک متریک ریمانی روی TM_0 بنام متریک ساساکی[18] بصورت زیر موجود است:

$$\tilde g = g_{ij}(x,y)dx^idx^j + g_{ij}(x,y)\frac{\delta y^i}{F}\frac{\delta y^j}{F}.$$

که در آن $g_{ij}(x,y)$ ها هسیان F^2 می‌باشد [۱۳]،[۲]. از آنجا که $\tilde g$ نسبت به تغییر y به λy پایا می‌ماند، می‌توان آن را بعنوان یک متریک ریمانی روی SM در نظر گرفت. نسبت به این متریک زیر فضای افقی تولید شده توسط $\frac{\delta}{\delta x^i}$ بر زیر فضای عمودی تولید شده با $F\frac{\partial}{\partial y^i}$ عمود است.

۲-۷- میدان برداری گرادیان

میدان برداری گرادیان تابع $f \in C^\infty(SM)$ را با ∇f نشان می‌دهیم. در منیفلد ریمانی $(SM,\tilde g)$ گرادیان تابع f در رابطه زیر صدق می‌کند:

$$\tilde g(\nabla f, \tilde X) = df(\tilde X), \qquad \forall \tilde X \in \chi(SM).$$

دستگاه مختصات موضعی $(x^i,[y^i])$ را برای SM در نظر می‌گیریم، در این دستگاه میدان برداری $\tilde X \in \chi(SM)$ بصورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$\tilde X = X^i(x,y)\frac{\delta}{\delta x^i} + Y^i(x,y)F\frac{\partial}{\partial y^i} .$$

که در آن $X^i(x,y)$ و $Y^i(x,y)$ توابعی در $C^\infty(SM)$ هستند. با اندکی محاسبه، در حالت موضعی برای منیفلد ریمانی $(SM,\tilde g)$ ، خواهیم داشت:

$$\nabla f = g^{ij}\frac{\delta f}{\delta x^i}\frac{\delta}{\delta x^j} + F^2 g^{ij}\frac{\partial f}{\partial y^i}\frac{\partial}{\partial y^j}$$

همچنین نرم ∇f نسبت به متریک ریمانی $\tilde g$ بصورت زیر بدست می‌آید:

$$|\nabla f|^2 = \tilde g(\nabla f,\nabla f) = g^{ij}\frac{\delta f}{\delta x^i}\frac{\delta f}{\delta x^j} + F^2 g^{ij}\frac{\partial f}{\partial y^i}\frac{\partial f}{\partial y^j} \qquad (2).$$

۳- تعمیم مفاهیم هندسه ریمانی به هندسه فینسلری

در ادامه فرض می‌کنیم (M,g) یک منیفلد فینسلر همبند از کلاس C^1 به بعد $n \geq ۲$ و $(SM,\tilde g)$ کلاف کروی وابسته به آن باشد.

عنصر حجمی $\eta(g)$ را روی SM بصورت زیر تعریفمی‌کنیم:[۱]

$$\eta(g) := \frac{(-1)^N}{(n-1)!}\omega\wedge(d\omega)^{n-1},$$

به طوری که $N = \frac{n(n-1)}{2}$ و ω فرم هیلبرت می‌باشد. مجموعه تمام توابع پیوسته حقیقی مقدار روی M را با $\amalg(M)$ نشان می‌دهیم و $W^1_n(M)$ را مجموعه تمام توابع حقیقی مقدار روی M مانند u می‌گیریم که:

$$I(u,M) = \int_{SM} |\nabla u^V|^n \eta(g) < \infty .$$

قرار می‌دهیم:

$$H(M) = \amalg(M) \bigcap W_n^1(M).$$

$H_0(M)$ را زیرفضایی از توابع u در $H(M)$ تعریف می‌کنیم که u^V دارای محمل[19] فشرده در SM باشد.

تعریف ۱: تابع $u \in \amalg(M)$ را یکنوا[20] نامند هرگاه برای هر زیرمجموعه نسبتا فشرده[21] D از M داشته باشیم:

$$\sup_{x\in\partial D} u(x) = \sup_{x\in D} u(x) \quad , \quad \inf_{x\in\partial D} u(x) = \inf_{x\in D} u(x).$$

مجموعه تمام توابع یکنوا در $H(M)$ را با $H^*(M)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۲: ظرفیت زیرمجموعه فشرده C از منیفلد فینسلر غیر فشرده M بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$Cap_M(C) = \inf_u I(u, M),$$

که در آن اینفیمم روی تمام توابع $u \in H_0(M)$ است که $u = ۱$ روی C و $0 \le u(x) \le 1$ برای هر $x \in M$. چنین توابعی را توابع پذیرفتنی[22] برای مجموعه C می‌نامند.

تعریف ۳: اگر C_0 و C_1 دو زیرمجموعه بسته از منیفلد فینسلر M باشند، ظرفیت زوج (C_0, C_1) را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$Cap_M(C_0, C_1) = \inf_{u\in A(C_0,C_1)} I(u, M),$$

که در آن اینفیمم روی مجموعه $A(C_0, C_1)$ از تمام توابع $u \in H(M)$ است که$u = ۱$ روی C_1 و $u = 0$ روی C_0 و $0 \le u(x) \le 1$ برای هر $x \in M$. چنین توابعی را توابع پذیرفتنی برای زوج (C_0, C_1) می‌نامند. اگر$A(C_0, C_1) = \varnothing$ یا $C_1 \cap C_2 \neq \varnothing$، در اینصورت $Cap_M(C_0, C_1) = \infty$ تعریف می‌شود.

تعریف ۴: زیرمجموعه‌های بسته و همبند M را *پیوستاری*[23] می‌نامیم. زیرمجموعه های پیوستاری M را که قابل کاهش به یک نقطه نباشند *پیوستار*[24] می نامیم. زیرمجموعه بسته C از M را که $C \bigcup \{\infty\}$ در فشرده سازی *الکساندرف*[25] $\bar{M} = M \cup \{\infty\}$ همبند باشد *پیوستاری نسبی*[26] می‌نامیم. زیرمجموعه های پیوستاری نسبی M را که قابل کاهش به یک نقطه نباشند *پیوستار نسبی*[27] می‌نامیم.

در ادامه با توجه به ساختار همدیسی M توابعی را روی M^2، M^3، M^4 می‌سازیم که پایای همدیسی هستند.

تعریف ۵: برای هر $(x_1, x_2) \in M^2$ تعریف می‌کنیم:

$$\mu_M : M \times M \to R$$

$$(x_1, x_2) \mapsto \inf_{C\in\alpha(x_1,x_2)} Cap_M(C) \ .$$

که در آن $\alpha(x_1, x_2)$ مجموعه تمام زیرمجموعه های پیوستار فشرده از M است که شامل x_1، x_2 می‌باشند.

این تابع در ابتدا برای رویه‌های ریمانی تعریف شده بود و سپس به E^n توسیع داده شد [١٦].

همچنین تعریف می‌کنیم:

$$\lambda_M : M \times M \to R$$

$$(x_1, x_2) \mapsto \inf_{(C_0,C_1)} Cap_M(C_0, C_1) \ .$$

که در آن C_0 و C_1 زیرمجموعه‌های پیوستار نسبی از M به ترتیب شامل x_1، x_2 می‌باشند.

قرار می دهیم $\bar{R}_+ = R_+ \cup \{\infty\}$.

تعریف ۶: فرض کنیم $\Delta^3 = \{(x, x, x) \mid x \in M\}$ قطر M^3 باشد. تابع ν_M را بصورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\nu_M : M^3 \setminus \Delta^3 \to \bar{R}_+$$

$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto \inf_{(C_0,C_1)} Cap_M(C_0, C_1) \ .$$

که در آن C_0 زیر مجموعه پیوستاری نسبی از M شامل x_3 و C_1 زیرمجموعه پیوستاری فشرده از M شامل x_1 و x_2 است.

تعریف ۷: فرض کنیم Δ^4 مجموعه تمام $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in M^4$ باشد بطوریکه حداقل سه مولفه باهم برابر باشند. تابع ρ_M را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\rho_M : M^4 \setminus \Delta^4 \to \bar{R}_+$$

$$\rho_M(x_1, x_2, x_3, x_4) = \inf_{(C_0,C_1)} Cap_M(C_0, C_1),$$

که در آن C_0 و C_1 زیرمجموعه‌های پیوستاری فشرده از M بترتیب شامل x_1, x_2 و x_3, x_4 می‌باشند و اگر $\{x_1, x_2\} \bigcap \{x_3, x_4\} \neq \varnothing$ در اینصورت $\rho_M(x_1, x_2, x_3, x_4) = \infty$ تعریف می‌شود.

٤- پایائی همدیسی[28] ظرفیت در هندسه فینسلر

فرض کنیم f یک دیفئومورفیسم از منیفلد M به منیفلد M' باشد نگاشت h را بین کلاف کروی آنها بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$h : SM \to SM'$$

$$h(x,[y]) = (f(x),[f_*(y)]).$$

که در آن f_* نگاشت مماس است[۱۵].

اگر f یک نگاشت همدیس از منیفلد فینسلر (M,g) به منیفلد فینسلر (M',g') وابسته به تابع σ روی M باشد و ω' فرم هیلبرت M' باشد. به بیان دیگر

$$\omega' = g'_{ij}\frac{y'^j}{\sqrt{g'_{mn}y'^m y'^n}}dx'^i$$

در این صورت داریم:

$$h^*\omega' = \sqrt{\sigma}\omega,$$

با توجه به رابطه (۱) داریم:

$$h^*d\omega' = \sqrt{\sigma}d\omega.$$

بنابراین اگر $\eta(g)$ و $\eta'(g')$ بترتیب عناصر حجمی (M,g) و (M',g') باشند داریم:

$$h^*(\eta(g')) = (\sqrt{\sigma})^n\eta(g) \qquad (3).$$

لذا h یک دیفئومورفیسم جهت نگهدار از $S(M)$ به $S(M')$ است.

با توجه به نمادگذاری های بالا، لم زیر را داریم:

لم ۳: اگر $u\in H_0(M')$ باشد، در این صورت:

۱) $|\nabla u^V|^n = (g^{ij}\frac{\partial u^V}{\partial x'^i}\frac{\partial u^V}{\partial x'^j})^{\frac{n}{2}}$,

۲) $(uof)^V = u^V oh$,

۳) $h^*\frac{\delta u^V}{\delta x'^i} = \frac{\delta(uof)^V}{\delta x^i}$.

اثبات: این روابط با توجه به رابطه (۲) براحتی بدست می‌آیند. □

قضیه ۱: فرض کنیم (M,g) یک منیفلد فینسلری غیر فشرده باشد، آنگاه ظرفیت یک زیر مجموعه فشرده از M تحت نگاشت های همدیس پایاست.

اثبات: می‌دانیم [۱۱] اگر M و N دو منیفلد n بعدی مرزدار، هموار و جهت پذیر باشند و $h:M\to N$ یک دیفئومورفیسم هموار جهت نگهدار باشد، آنگاه:

$$\int_N \omega = \int_M h^*\omega \qquad \omega\in\Omega^n N.$$

اگر f یک نگاشت همدیس از منیفلد فینسلر (M,g) به منیفلد فینسلر (M',g') و $u\in H_0(M')$ باشد، داریم:

$$I(u,M') = \int_{S(M')} |\nabla u^V|^n\eta(g') = \int_{S(M)} h^*[|\nabla u^V|^n\eta(g')],$$

بنابر لم ۳، رابطه زیر را داریم:

$$h^*|\nabla u^V|^n = (\sqrt{\sigma})^{-n}|\nabla(uof)^V|^n \qquad (4),$$

و با استفاده از روابط (۳) و (٤) داریم

$$\int_{S(M)} h^*[|\nabla u^V|^n\eta(g')] = \int_{S(M)} |\nabla(uof)^V|^n\eta(g) = I(uof,M).$$

لذا داریم:

$$I(u,M') = I(uof,M). \qquad (5)$$

اگر C یک زیرمجموعه فشرده در M باشد. در اینصورت بنا بر تعریف داریم

$$Cap_M(C) = \inf_{v\in H_0(M), v|_C=1} I(v,M),$$
$$Cap_{M'}(f(C)) = \inf_{u\in H_0(M'), u|_{f(C)}=1} I(u,M').$$

قرار می‌دهیم:

$$A = \{I(v,M) \mid v\in H_0(M), v|_C = 1\},$$
$$B = \{I(u,M') \mid u\in H_0(M'), u|_{f(C)} = 1\}.$$

برای هر $I(u,M')\in B$ داریم

$$f^{-1}(\mathrm{Supp}(u)) = \mathrm{Supp}(uof)$$

بنابراین $(uof)\in H_0(M)$.

از طرف دیگر $(uof)|_C = 1$ و با توجه به رابطه (۵) داریم $I(uof,M) = I(u,M')$.

پس $B\subseteq A$ و به همین ترتیب $A\subseteq B$ و در نتیجه دارای اینفیمم های برابر هستند.

$$Cap_M(C) = Cap_{M'}(f(C)). \qquad \square$$

قضیه ۲: فرض کنیم (M,g) یک منیفلد فینسلری باشد، آنگاه ظرفیت یک زوج از زیرمجموعه بسته از M تحت نگاشت های همدیس پایاست.

اثبات: به روش مشابه اثبات قضیه ۱ می‌توان ثابت کرد که برای یک زوج از زیرمجموعه‌های بسته (C_0,C_1) از M داریم:

$$Cap_M(C_0,C_1) = Cap_{M'}(f(C_0),f(C_1)). \qquad \square$$

با استفاده از قضیه ۱ و ۲ می توان ثابت کرد که توابع مذکور در تعریف۵، تعریف ٦ و تعریف ۷ تحت نگاشت های همدیس پایا هستند. مشابه این توابع در هندسه ریمانی کاربرد های اساسی دارند. بعنوان مثال با استفاده از تابع μ_M می توان یک متر روی M تعریف کرد که توپولوژی بدست آمده از آن بر توپولوژی ذاتی M منطبق گردد.

نتیجه: توابع ρ_M ، ν_M ، μ_M و λ_M تحت نگاشت های همدیس پایا هستند. به بیان دیگر فقط به ساختار همدیسی منیفلد وابسته‌اند. یعنی اگر f یک نگاشت همدیس از منیفلدفینسلر M به منیفلد فینسلر M' باشد برای هر $x_1,x_2,x_3,x_4\in M$ داریم:

$$\rho_M(x_1,\dots,x_4)=\rho_{M'}(f(x_1),\dots,f(x_4)),$$
$$\nu_M(x_1,x_2,x_3)=\nu_{M'}(f(x_1),f(x_2),f(x_3)),$$
$$\mu_M(x_1,x_2)=\mu_{M'}(f(x_1),f(x_2)),$$
$$\lambda_M(x_1,x_2)=\lambda_{M'}(f(x_1),f(x_2)).$$

اثبات: روابط بالا با توجه به قضیه ۱ براحتی بدست می‌آیند.

۵- مراجع

[۱] Akbar-zadeh, H.; *"Genralized Einstein manifolds"*, Journal of Geometry and Physics 17, 1995, 342-380.

[۲] Bao, D.; Chern, S.; Shen, Z.; *"An Introduction to Riemannian-Finsler Geometry"*, Springer- Verlag, New York, Inc 2000.

[۳] Bao, D.; Lackey, B.; *"Special Eigenform on the Sphere Bundle of Finsler Manifold"*, Cntemporary Mathematics, Vol. 196, 1996.

[٤] Ferrand, J.; *" Conformal Capacities and Conformal Invariant Functions on Riemannian Manifolds"*, Geometriae Dedicata 61, 1996, 103-120.

[٥] Ferrand, J.; *" Conformal Capacities and Conformally Invariant Metrics"*, Pacific J. Math.

[٦] Ferrand, J.; Martin, G. J.; Vourinen, M.; *"Lipshitz Conditions in Conformally Invariant metrics"*, J. Analyse Math. 56, 1991, 187-210.

[۷] Forstman, O.; *" Potential d' Equilibre et Capacite des Ensembles avec Quelqes Aplications a la Theorie des Fonctions"*. Medd, Lunds Univ, Math, Sem, 3, 1935.

[۸] Gehring, F.W.; *" Extermal Length Definition for the Conformal Capacity of Rings in Space"*, Michigan Math, J. 9, 1962, 137-150.

[۹] Gehring, F.W.; *" Rings and Quasiconformal Mappings in Space"*, Trans, Amer Math, Soc, 103, 1962, 353-393.

[۱۰] Knebelman, M. S.; *" Conformal Geometry of Generelized Metric Space"*, Proc, Nat, Acad, Sci, Usa, 15, 1929.

[۱۱] Lee, John M.; *" Introduction to Smooth Manifolds"*, University of Washington, 2000.

[۱۲] Loewner, C.; *" On the Conformal Capacity in Space"*, J. Math, Mech 8, 1959, 411-414.

[۱۳] Miron, R.; *"The Geometry of high Order Hamilton Mechanic"*, Kluwer, Ftph, 2003.

[۱۴] Mostow, G. D.; *"Quasiconformal Mappings in n-space and the Rigidity of Hyperbolic Space Forms "*, Inst, Hautes Etudes Sci, Publ Math, 34, 1968, 53-104.

[۱۵] Nakahara, M.; *" Geometry Topology and Physics"*, Graduate Student Series in physics, 1990.

[۱۶] Vuorinen, M.; *" Conformal Geometry and Quasiconformal Mappings "*, Lecture Notes in Math 1319. Springer verlag, 1988.

[۱۷] Vuorinen, M.; *" On Teichmuller's Modules problem in R^n "*, Math, Scand 63, 1988, 315-333.

زیرنویس ها

---

۱ N. Wiener
۲ O. Forstman
۳ C. J. de la vulle poussin
۴ Loewner
۵ G. D. Mostow
۶ J. Ferrand
۷ Hessian
۸ Diffeomorphism
۹ Conformal Equivalent
۱۰ Pull-back Tangent Bundle
۱۱ Pull-back Cotangent Bundle
۱۲ Non-linear Connection
۱۳ Horizontal Distribution
۱۴ Position
۱۵ Direction
۱۶ Canonical Section
۱۷ Hilbert Form
۱۸ Sasaki Metric
۱۹ Support
۲۰ Monoton
۲۱ Relatively Compact
۲۲ Admissible Function
۲۳ Continuum
۲۴ Continua
۲۵ Alexandrov's Copmactification
۲۶ Relatine Continuum
۲۷ Relative Continua
۲۸ Conformal Invariant